PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Un modèle de particule à spin dans le champ gravitationnel et électromagnétique.* Note (*) de MM. **Christian Duval**, **Henri-Hugues Fliche** et **Jean-Marie Souriau**, présentée par M. André Lichnerowicz.

Nous construisons un modèle pour la particule à spin, compatible à la fois avec les résultats expérimentaux et avec les principes de la mécanique symplectique et de la relativité générale. Ce modèle contient une fonction arbitraire $m(\alpha)$ qui pourrait être déterminée expérimentalement.

1. Conditions imposées a un modèle de particule. — *a*. Les principes de la mécanique, sous leur forme actuelle, requièrent que l'ensemble des mouvements d'un système dynamique libre possède une structure de *variété symplectique*, sur laquelle le groupe de Poincaré opère par automorphismes, et que cette variété soit « quantifiable », c'est-à-dire que l'on puisse construire au-dessus d'elle un espace fibré muni d'une 1-forme ϖ vérifiant certaines conditions [*voir* (6)].

b. La relativité générale impose des conditions complémentaires des précédentes; à savoir que la matière soit associée à une distribution tensorielle sur la variété riemannienne espace-temps; dans le cas d'un milieu continu, cette distribution est définie par le tenseur impulsion-énergie T et le vecteur courant électrique J, qui vérifient les identités de conservation

$$\text{div}\,\mathrm{J} = 0, \qquad \text{div}\,\mathrm{T} + \mathrm{F}.\mathrm{J} = 0. \tag{1}$$

On peut transcrire ces conditions au cas où la matière est concentrée sur la ligne d'univers d'une particule [(8), (9)]; cette procédure mathématique permet de *définir* quatre grandeurs physiques, l'impulsion P, le tenseur de spin S, la charge q, le moment électromagnétique M, qui vérifient les équations *universelles*

$$\left\{\begin{aligned} \hat{d}\mathrm{S}^{\mu\nu} &= \mathrm{P}^\mu\, dx^\nu - \mathrm{P}^\nu\, dx^\mu + [\mathrm{M}^{\mu\rho}\,\mathrm{F}_\rho^\nu - \mathrm{M}^{\nu\rho}\,\mathrm{F}_\rho^\mu]\, d\tau, \\ \hat{d}\mathrm{P}_\rho &= \left[q\,\mathrm{F}_{\lambda\rho} - \frac{1}{2}\mathrm{S}^{\mu\nu}\,\mathrm{R}_{\mu\nu,\lambda\rho}\right] dx^\lambda - \frac{1}{2}\mathrm{M}^{\mu\nu}\,\hat{\partial}_\rho\,\mathrm{F}_{\mu\nu}\, d\tau, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

où les ^ désignent une dérivation covariante; R est le tenseur de Riemann-Christoffel, F le champ électromagnétique, τ le temps propre.

c. Tout modèle doit évidemment rendre compte des résultats expérimentaux où les effets quantiques ne sont pas prépondérants : mesure de la masse, du spin, du moment magnétique et électrique.

2. Divers modèles répondant a ces conditions. — Les modèles de particules *libres* conformes aux principes (1 *a*) peuvent se construire par la théorie des groupes (7); parmi les candidats ainsi obtenus, il est facile de trouver celui qui correspond à la particule de spin 1/2; sa quantification conduit d'ailleurs à l'équation de Dirac (7). On peut, un peu arbi-

trairement, ajouter des termes phénoménologiques à la forme symplectique caractéristique de ce modèle, pour tenir compte du champ électromagnétique ([7]) et du champ de gravitation ([8]).

La variété symplectique correspondante peut se construire comme quotient d'une structure de contact : c'est la méthode choisie par Künzle ([10]); sa construction est en fait une quantification au sens de ([6]), appliquée au cas d'une particule de spin 1.

3. Modèle proposé. — Soit W la variété de dimension 10 parcourue par la variable

$$\eta = (x, \psi), \tag{3}$$

où x est un point de la variété espace-temps, ψ un spineur de Dirac (au point x) astreint aux liaisons

$$\overline{\psi}\psi = 1, \qquad \overline{\psi}\gamma_5\psi = 0. \tag{4}$$

ψ se caractérise, à une phase près, par les deux tenseurs

$$\Omega_{\mu\nu} = \mathcal{R}e\left(-i\overline{\psi}\gamma_\mu\gamma_\nu\psi\right), \qquad I_\lambda = \overline{\psi}\gamma_\lambda\psi \tag{5}$$

qui vérifient eux-mêmes les liaisons

$$\frac{1}{2}\Omega_{\mu\nu}\Omega^{\mu\nu} = 1, \qquad \Omega_{\mu\nu} I^\nu = 0, \qquad I_\lambda I^\lambda = 1. \tag{6}$$

On pourra leur associer le tenseur de spin S et l'impulsion P en posant

$$S_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\Omega_{\mu\nu}, \qquad P_\lambda = m(\alpha) I_\lambda, \tag{7}$$

α désignant le terme de Pauli :

$$\alpha = \frac{1}{2}\Omega_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \tag{8}$$

On décrira ainsi une particule de *spin* 1/2 et de *masse* $m(\alpha)$; le fait que la masse soit variable permet de tenir compte de la contribution massique de l'énergie magnétique de la particule.

Nous choisissons la forme fondamentale

$$\varpi(\delta\eta) = -i\overline{\psi}\hat{\delta}\psi - [P_\lambda - q A_\lambda]\,\delta x^\lambda, \tag{9}$$

où $\hat{\delta}\psi$ désigne la dérivée covariante du spineur ψ ([4]), A le potentiel-vecteur électromagnétique. Le calcul montre alors que le quotient de W par le feuilletage caractéristique ϖ constitue une *variété quantique*, au sens de ([6]).

Indiquons simplement les *équations du mouvement* correspondantes; on les obtient en cherchant le feuilletage caractéristique de la 2-forme σ, dérivée extérure de ϖ.

Le calcul conduit *exactement* aux équations (2) de la relativité générale, à condition de poser

$$M_{\mu\nu} = -m'(\alpha)\,\Omega_{\mu\nu} \qquad (\text{avec } d\tau = I_\rho\, dx^\rho), \tag{10}$$

ce qui exprime l'absence de moment électrique et l'existence d'un *moment magnétique* $\mu = - m'(\alpha)$.

Ces équations universelles sont complétées par une équation spécifique

$$(11) \quad \left[m(\alpha)^2 - \frac{q\,\alpha}{2} + \frac{1}{4} R_{\lambda\mu,\nu\sigma} S^{\lambda\mu} S^{\nu\sigma}\right]\left[\frac{dx^\rho}{d\tau} - I^\rho\right]$$
$$= S^{\rho\lambda}\left[\frac{1}{2} S^{\mu\nu} R_{\mu\nu,\sigma\lambda} I^\sigma - [2\,m(\alpha)\,m'(\alpha) + q]\,F_{\sigma\lambda} I^\sigma + m'(\alpha)\,S^{\mu\nu}\,\hat{\delta}_\lambda F_{\mu\nu}\right].$$

4. Commentaires. — La méthode de *fusion* [7] permet de passer immédiatement à toutes les valeurs de spin multiples de $\hbar/2$.

— Ni la mécanique symplectique, ni la relativité générale ne donnent d'indications sur la fonction $m(\alpha)$, qui reste phénoménologique à ce stade. Quant à l'expérience, elle ne concerne que des cas où les effets gravitationnels sont négligeables, et où l'énergie magnétique est très petite devant l'énergie massique. Elle est conforme aux équations linéarisées au voisinage de $\alpha = 0$ [qui contiennent notamment les équations de Bargmann-Michel-Telegdi [1]].

— Les modèles antérieurs de Künzle et de Souriau correspondent aux choix respectifs

$$(12) \qquad m(\alpha) = m_0 - \mu_0\,\alpha, \qquad m(\alpha)^2 = m_0^2 - 2\,m_0\,\mu_0\,\alpha.$$

— Dans les expériences de mesure du moment magnétique, le champ électromagnétique F est constant; on constate alors que α est une *constante du mouvement*; il serait intéressant d'utiliser des champs très intenses pour déterminer expérimentalement la fonction $m(\alpha)$.

(*) Séance du 6 mars 1972.

[1] Bargmann, Michel et Telegdi, *Phys. Rev. Lett.*, 2, 1959, p. 435.
[2] W. G. Dixon, *Nuovo Cimento*, 34, 1964, p. 317.
[3] W. G. Dixon, *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A, 314, 1970, p. 499.
[4] J. M. Souriau, *Géométrie et Relativité*, Hermann, Paris, 1964, p. 448.
[5] J. M. Souriau, *Comm. Math. Phys.*, 1, 1966, p. 374 et 398.
[6] J. M. Souriau, *Structure des systèmes dynamiques*, Dunod, Paris, 1970, p. 317.
[7] *Loc. cit.*, p. 180, 376, 205 et 326.
[8] J. M. Souriau, *Comptes rendus*, 271, série A, 1970, p. 751.
[9] J. M. Souriau, *Comptes rendus*, 271, série A, 1970, p. 1086.
[10] H. P. Kunzle, *Canonical Dynamics of Spinning Particles in Gravitational and Electromagnetic Fields*, Preprint (University of Alberta, octobre 1971).

Département de Physique mathématique,
Université de Provence
et Centre de Physique théorique,
C. N. R. S.,
31, *chemin Joseph-Aiguier,*
13-*Marseille,* 9e,
Bouches-du-Rhône.