LE JOURNAL DE PHYSIQUE

ET

LE RADIUM

LE GROUPE D'INVARIANCE ASSOCIÉ AUX ROTATEURS RELATIVISTES ET LA THÉORIE BILOCALE

Par F. HALBWACHS,

Institut Henri-Poincaré, Paris.

J. M. SOURIAU,

Faculté des Sciences, Marseille.

J. P. VIGIER,

Institut Henri-Poincaré, Paris.

Résumé. — Trois résultats sont obtenus dans cet article :

1° on montre, par une démonstration très générale, que l'ensemble des constantes fondamentales du mouvement qui peuvent être tirées de chaque groupe d'invariance d'un Lagrangien donné sur une ligne d'univers, fournit des crochets de Poisson classiques qui satisfont à des relations identiques aux relations de commutation de l'algèbre de Lie du groupe ;

2° toute particule comportant des variables internes peut être représentée par un rotateur « bilocal » formé de deux tétrapodes relativistes localisés en deux points différents ;

3° les transformations de jauge à un et trois paramètres du formalisme spinoriel habituel peuvent être traduites dans le formalisme des tétrapodes, avec une interprétation cinématique évidente.

Abstract. — Three noteworthy results are established in this paper : First, it is shown in the frame of a very general treatment, that the set of fundamental constants of the motion which can be derived from each invariance group of a given line-Lagrangian gives rise to classical Poisson Brackets which fulfil relations identical to the Lie algebraic relations of the group. Secondly, any particle endowed with internal variables can be represented by a " bilocal " rotator composed of two relativistic tetrads localized at two different points. Finally, the usual one-parameter and two-parameter gauge transformations in spinor form can be translated into tetrad form with an obvious kinematical interpretation.

Introduction. — On se propose d'étudier du point de vue de la théorie des groupes, la dynamique de la particule relativiste en mouvement dans l'univers physique. Par univers physique, nous entendons l'espace-temps de Minkowski possédant une orientation déterminée — plus précisément, un sens du temps relié à l'existence d'un cône de lumière avec une nappe future déterminée, et une orientation déterminée de l'espace telle qu'elle peut être mise en évidence par les phénomènes qui ne conservent pas la parité. En outre, cet univers peut être le siège d'un champ extérieur capable d'agir sur la particule en chaque point. D'autre part, la particule sera, au moins au début, considérée comme strictement localisée en un point d'univers x_μ qui décrit une ligne d'univers $\mathcal{L}$. Outre sa position, elle comportera des « variables in-

ternes » $b^{(\lambda)}$ variant avec le temps et sur la variance et la nature desquelles nous ne ferons d'abord aucune hypothèse restrictive. Toutes les propriétés dynamiques de la particule seront déduite d'un Lagrangien dépendant de $x_\mu, \dot{x}_\mu, b^{(\lambda)}, \dot{b}^{(\lambda)}$ (nous désignons par un point la dérivation par rapport au temps propre τ de la particule, c'est-à-dire le long de la ligne $\mathcal{L}$). Pour traiter ce problème, démontrons d'abord de façon purement mathématique une propriété très générale.

I. Le théorème de Noether et les variables dynamiques. — Considérons les variables suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau \quad \quad \quad (\text{à valeurs réelles}) \\ Q \equiv \Phi(\tau) \quad (\text{à valeurs dans } K^n) \\ L \equiv f(\tau, Q, \dot{Q}) \quad (\text{à valeurs réelles}) \end{array} \right. \quad (1)$$

et l'intégrale :

$$\mathcal{A}_0^1 \equiv \int_{\tau_0}^{\tau_1} L d\tau.$$

Nous pouvons évidemment poser $y \equiv Q$ et écrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0^1 &\equiv \int_{\tau_0}^{\tau_1} [f(\tau, Q, y) + P(\dot{Q} - y)] d\tau \\ \mathcal{A}_0^1 &= [PQ]_{\tau_0}^{\tau_1} + \int_{\tau_0}^{\tau_1} [f(\tau, Q, y) - P\dot{Q} - Py] d\tau. \end{aligned} \quad (2)$$

P étant une fonction quelconque de τ à valeurs dans le dual de R^n (nous supposons que Q et y sont des colonnes et que P est une ligne. Leurs éléments seront respectivement désignés par Q^λ , y^λ , P_λ). Si δ représente une variation de la fonction Φ , nous aurons :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{A}_0^1 &= [P \cdot \delta Q]_{\tau_0}^{\tau_1} \\ &+ \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial Q} - \dot{P} \right) \cdot \delta Q + \left(\frac{\partial L}{\partial y} - P \right) \cdot \delta y \right] d\tau. \end{aligned} \quad (3)$$

Nous pouvons profiter de l'indétermination de P pour poser

$$P = \frac{\partial L}{\partial y}$$

afin de nous débarrasser du coefficient de δy dans (3). Nous obtenons alors les équations de Lagrange :

$$\frac{\partial L}{\partial y} = P \quad \frac{\partial L}{\partial Q} = \dot{P} \quad y \equiv \dot{Q} \quad (4)$$

en tant que conditions nécessaires et suffisantes pour que :

$$[\delta \Phi_{(\tau_0)} = \delta \Phi_{(\tau_1)} = 0] \Rightarrow [\delta \mathcal{A}_0^1 = 0]. \quad (5)$$

La forme même de (4) montre que les conditions (5) ne dépendent pas du choix de τ_0 et τ_1 .

Considérons, maintenant, une variation quelconque δQ fonction de τ et de Q , mais qui ne s'annule pas nécessairement pour les valeurs τ_0 et τ_1 . On a alors :

$$\delta \mathcal{A}_0^1 = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \delta L d\tau.$$

Si la condition (4) est remplie, (2) montre qu'on obtiendra :

$$\delta \mathcal{A}_0^1 = [P \cdot \delta Q]_{\tau_0}^{\tau_1}.$$

Cette relation nous conduit au théorème de Noether [1] : A toute variation δQ fonction de Q et de τ , les équations de Lagrange permettent d'associer une fonction u de P, Q, τ : $u = P \cdot \delta Q$ telle que la différence de ses valeurs en τ_0 et τ_1 , est égale à la variation de l'intégrale $\mathcal{A}$ prise de τ_0 à τ_1 :

$$\delta \mathcal{A}_0^1 = u_{(\tau_0)} - u_{(\tau_1)}. \quad (6)$$

Ce théorème peut être appliqué en particulier au cas où l'on considère un groupe de Lie G à p paramètres agissant dans l'espace (Q, τ) et conservant τ . Les générateurs infinitésimaux δ_J de ce groupe fournissent alors p fonctions fondamentales :

$$u_J = P \cdot \delta_J Q \quad (7)$$

Appelons *phase* le couple de variables $\left(\begin{smallmatrix} P \\ Q \end{smallmatrix} \right)$ et *variable dynamique* toute variable qui est fonction de la phase et de τ . Nous pouvons associer à chaque variable dynamique scalaire u une différentielle d_u définie par :

$$d_u(\tau) = 0 \quad d_u(Q^\lambda) = \frac{\partial u}{\partial P_\lambda} \quad d_u(P_\lambda) = -\frac{\partial u}{\partial Q^\lambda}.$$

De plus, si u et v sont deux variables dynamiques, l'expression :

$$[u, v] = d_u(v) = \frac{\partial u}{\partial P_\lambda} \frac{\partial v}{\partial Q^\lambda} - \frac{\partial u}{\partial Q^\lambda} \frac{\partial v}{\partial P_\lambda}$$

sera le *crochet de Poisson* de u et v . Les différentielles associées à ces variables dynamiques satisfont à la relation :

$$d_u d_v - d_v d_u = d_{[u, v]}. \quad (8)$$

En appliquant cette relation à une troisième variable dynamique w on obtient l'*identité de Jacobi* :

$$[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0.$$

Appliquons ces considérations aux variables dynamiques définies par (7). Nous obtenons immédiatement :

$$\begin{cases} d_{u_j}(Q) = \delta_j Q \\ d_{u_j}(P) = -P \frac{\partial}{\partial Q} (\delta_j Q) \\ d_{u_j}(\tau) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

D'où nous tirons :

$$\begin{aligned} [u_j, u_k] &= d_{u_j}(P \cdot \delta_k Q) = d_{u_j} P \cdot \delta_k Q + P \cdot d_{u_j}(\delta_k Q) \\ &= -P \cdot \frac{\partial}{\partial Q} (\delta_j Q) \delta_k Q + P \cdot \frac{\partial}{\partial Q} (\delta_k Q) \cdot \delta_j Q \\ [u_j, u_k] &= P \cdot (\delta_j \delta_k - \delta_k \delta_j) Q. \end{aligned} \quad (10)$$

Mais les générateurs infinitésimaux δ , d'un groupe de Lie satisfont aux relations de commutation

$$\delta_j \delta_k - \delta_k \delta_j = T_{jk}^l \delta_l$$

où les coefficients de structure T_{jk}^l sont des constantes qui restent invariantes dans tout homomorphisme du groupe. De la relation (10), nous tirons donc l'identité :

$$[u_j, u_k] = T_{jk}^l u_l \quad (11)$$

qui relie au moyen des coefficients de structure les fonctions fondamentales engendrées par les générateurs du groupe G .

La relation (11) peut être considérée comme la forme infinitésimale d'une propriété finie très simple. En effet, considérons une transformation bi-différentiable $Q' = F(Q)$, nous pouvons lui associer une transformation corrélatrice des variables P correspondantes en posant :

$$P' \cdot dQ' = P \cdot dQ \tag{12}$$

ce qui donne :

$$P' = P \cdot dQ/dQ'.$$

De même, cette transformation qui laisse invariante la forme $P \cdot \delta Q$, laisse évidemment aussi invariante la forme différentielle $dP \cdot \delta Q - \delta P \cdot dQ$. C'est donc une *transformation canonique* dans l'espace de phase.

Si maintenant, nous considérons un groupe G de transformations agissant sur Q , nous obtenons, en appliquant (12) à chaque transformation de G , un isomorphisme entre G et un groupe Γ de transformations canoniques. Il est facile de voir que, dans cet isomorphisme, chaque transformation infinitésimale δ_i du groupe G , correspondra à une transformation canonique infinitésimale du groupe Γ qui coïncide avec la différentielle d_{u_j} définie par (9). L'invariance des relations de commutation par un isomorphisme nous donne alors la relation :

$$d_{u_j} d_{u_k} - d_{u_k} d_{u_j} = T_{jk}^i d_{u_i}. \tag{13}$$

Mais, d'après (8), on peut écrire le premier membre de (13) : $d_{[u_j, u_k]}$ ce qui donne l'identité (11).

Signalons que les résultats démontrés ici peuvent facilement être étendus à des cas plus généraux, par exemple à des transformations agissant aussi sur le paramètre τ (on exprimera τ et Q en fonction d'un paramètre arbitraire s) ou au cas de Lagrangiens dépendant de dérivées supérieures (pour le cas des dérivées secondes, cf. plus loin, section 4).

Nous allons appliquer maintenant les résultats généraux ci-dessus au problème de la particule. A chacune des variables définies plus haut :

$$Q \equiv (x_\mu, b^{(\lambda)})$$

correspondra son moment canoniquement conjugué :

$$P \equiv \left\{ G_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\mu}, \quad \beta^{(\lambda)} = \frac{\partial L}{\partial \dot{b}^{(\lambda)}} \right\}$$

et à chaque générateur infinitésimal δ_i d'un groupe de Lie G , correspondra une fonction :

$$u_i = P \cdot \delta_i Q = G_\mu \delta_i x_\mu + \beta^{(\lambda)} \delta_i b^{(\lambda)}.$$

Le groupe G peut être formé de deux sortes de transformations : les *glissements* qui agissent sur les x_μ , et les *transformations de jauge* qui agissent

seulement sur les variables internes $b^{(\lambda)}$, si bien que le groupe G se présente généralement comme un produit direct d'un groupe de glissements et d'un groupe de jauge.

En ce qui concerne les glissements, nous pouvons considérer que, si le Lagrangien dépend des coordonnées x_μ , cette dépendance exprime l'influence du champ extérieur $A(x)$, et par conséquent nous pouvons supposer que L ne dépend de x_μ que par l'intermédiaire de A_μ , qui est une fonction vectorielle de x_μ . Ainsi tout générateur infinitésimal δ_i du groupe des glissements produit un déplacement infinitésimal de la ligne $\mathcal{L}$ dans un champ extérieur immobile, si bien que la variation correspondante de l'intégrale $\mathcal{A}_0^1$ est :

$$\delta_i \mathcal{A}_0^1 = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{\partial L}{\partial A_\mu} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \delta_i x_\nu d\tau$$

et que l'équation (6) devient :

$$u_i(\tau_1) - u_i(\tau_0) = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{\partial L}{\partial A_\mu} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \delta_i x_\nu d\tau$$

soit, sous forme différentielle :

$$\dot{u}_i = \frac{\partial L}{\partial A_\mu} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \delta_i x_\nu.$$

Ou enfin, plus simplement :

$$\boxed{\dot{u}_i = \frac{\partial L}{\partial A_\mu} \delta_i A_\mu} \tag{14}$$

$\delta_i A_\mu$ représentant la variation subie par le champ extérieur A_μ sous un glissement infinitésimal δ_i dans l'espace-temps.

Nous voyons, en particulier que les transformations infinitésimales δ_i qui laissent invariante l'intégrale d'action $\mathcal{A}_0^1$ sont données par la relation :

$$\frac{\partial L}{\partial A_\mu} \delta_i A_\mu = 0.$$

Il peut exister pour un champ de structure donné certaines formes de Lagrangien qui définissent un sous-groupe δ_i de glissements pour lesquels les vecteurs $\partial L/\partial A_\mu$ et $\delta_i A_\mu$ sont orthogonaux. C'est le cas, par exemple, pour les rotations spatiales dans un champ à symétrie (spatiale) sphérique, ou pour les translations dans un plan orthogonal à un champ uniforme.

L'étude des glissements infinitésimaux dans un champ extérieur fournit les lois de la dynamique d'une particule relativiste en rotation soumise à ce champ. L'un de nous [2] a utilisé cette méthode pour traiter le problème de la précession du spin d'une particule chargée en mouvement dans un champ électromagnétique. Néanmoins le cas de la particule *libre*, en l'absence de champ extérieur, qui paraît limité à un « univers physique » très particulier, est en fait très important, car c'est toujours dans ce cas qu'on se place pour construire

des modèles du niveau subquantique de la matière, niveau où le concept de champ continu perd toute signification et doit laisser la place à la notion d'interaction, deux particules subquantiques en interaction devant être considérées comme formant un édifice unique pendant la durée de l'interaction. Dans toute la suite, nous allons nous placer dans le cas de la particule libre en supposant $A_\mu = 0$. Alors, le Lagrangien ne dépend plus explicitement de x_μ et reste *invariant sous un glissement quelconque*. De plus, en ce qui concerne les transformations de jauge, nous nous limiterons également à celles qui laissent le Lagrangien invariant, si bien qu'à partir de maintenant, nous allons seulement considérer le *groupe d'invariance du Lagrangien étudié*.

Dans ces conditions, l'équation (14) devient :

$$\dot{u}_i = 0$$

c'est-à-dire :

$$v_i \equiv P \cdot \delta_i Q \equiv G_\mu \delta_i x_\mu + \beta^{(\lambda)} \delta_i b^{(\lambda)} = \text{constante.}$$

Chaque générateur infinitésimal du groupe d'invariance donne ainsi naissance à une *constante du mouvement*, et ces constantes fondamentales exprimées en fonction des variables canoniques, obéissent aux relations algébriques (11) sur les crochets de Poisson.

II. Le groupe des glissements et la théorie bilocale. — Les Lagrangiens qu'on peut avoir à considérer admettent différents types de groupes d'invariance. Mais, dans le cas de la particule libre, le groupe d'invariance comporte nécessairement (éventuellement comme sous-groupe) le groupe général des glissements dans l'espace-temps, c'est-à-dire le *groupe inhomogène de Lorentz*. Dans cette section, nous appliquerons le théorème précédent au groupe de Lorentz, sans spécifier les variables internes.

Comme on le sait, les générateurs infinitésimaux du groupe inhomogène de Lorentz sont :

1° les opérateurs $\mathcal{P}_\mu$ des translations infinitésimales dans l'espace-temps. Ceux-ci agissent uniquement sur les x_μ et sont donnés par :

$$\mathcal{P}_\mu x_\lambda = \delta_{\mu\lambda}$$

2° les opérateurs $\mathcal{M}_{\mu\nu}$ des rotations infinitésimales dans l'espace-temps, qui agissent à la fois sur les x_μ et sur les variables internes. Sur les premiers, leur action est exprimée par :

$$\mathcal{M}_{\mu\nu} x_\lambda = x_\mu \delta_{\nu\lambda} - x_\nu \delta_{\mu\lambda}$$

Sur les variables internes, la forme explicite des opérateurs $\mathcal{M}_{\mu\nu}$ dépend de la variance de ces variables.

Pour former les constantes fondamentales du mouvement correspondant à ces opérateurs, nous tirerons d'abord du Lagrangien L les moments

canoniquement conjugués aux variables de configuration, soit :

$$G_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\mu} \quad \beta^{(\lambda)} = \frac{\partial L}{\partial \dot{b}^{(\lambda)}}$$

Dans ces conditions, l'opérateur $\mathcal{P}_\mu$ engendre le vecteur constant :

$$G_\lambda \mathcal{P}_\mu x_\lambda = G_\lambda g_{\mu\lambda} = G_\mu$$

c'est-à-dire simplement le *vecteur impulsion*. D'autre part, l'opérateur $\mathcal{M}_{\mu\nu}$ engendre le tenseur antisymétrique constant :

$$M_{\mu\nu} = G_\lambda \mathcal{M}_{\mu\nu} x_\lambda + \beta^{(\lambda)} \mathcal{M}_{\mu\nu} b^{(\lambda)} = x_\mu G_\nu - x_\nu G_\mu + S_{\mu\nu}$$

C'est le *moment angulaire total* qui se compose de deux termes dont la signification physique est évidente : $x_\mu G_\nu - x_\nu G_\mu$ est le moment angulaire *orbital* relatif à l'origine. Le tenseur

$$S_{\mu\nu} = \beta^{(\lambda)} \mathcal{M}_{\mu\nu} b^{(\lambda)}$$

dont la forme dépend de la variance des $b^{(\lambda)}$ est le moment angulaire *propre* qui caractérise la rotation interne de la particule, et dont le rôle canonique a déjà été mis en évidence par deux d'entre nous [3].

Pour nous résumer, l'invariance du Lagrangien par rapport au groupe des glissements nous fournit deux relations fondamentales de conservation :

$$\dot{G}_\mu = 0 \quad (15)$$

$$\dot{M}_{\mu\nu} = 0.$$

Remarquons que si on explicite $M_{\mu\nu}$ dans la seconde équation, celle-ci devient :

$$\dot{S}_{\mu\nu} = G_\mu \dot{x}_\nu - G_\nu \dot{x}_\mu \quad (16)$$

en tenant compte de (15). Ainsi nous aboutissons au système (15), (16) où l'on reconnaît le système de Weyssenhoff [4].

D'autre part, on sait que l'algèbre de Lie du groupe inhomogène de Lorentz est construite sur les relations de commutation :

$$[\mathcal{P}_\mu, \mathcal{P}_\lambda] = 0$$

$$[\mathcal{M}_{\mu\nu}, \mathcal{P}_\alpha] = g_{\alpha\mu} \mathcal{P}_\nu - g_{\alpha\nu} \mathcal{P}_\mu$$

$$[\mathcal{M}_{\mu\nu}, \mathcal{M}_{\alpha\beta}] = g_{\mu\alpha} \mathcal{M}_{\nu\beta} + g_{\nu\beta} \mathcal{M}_{\mu\alpha} - g_{\mu\beta} \mathcal{M}_{\nu\alpha} - g_{\nu\alpha} \mathcal{M}_{\mu\beta}$$

A ces relations, vont correspondre des relations classiques exprimant les crochets de Poisson de nos constantes fondamentales, conformément au théorème général établi ci-dessus, soit :

$$[G_\mu, G_\nu] = 0$$

$$[M_{\mu\nu}, G_\alpha] = g_{\alpha\mu} G_\nu - g_{\alpha\nu} G_\mu$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\alpha\beta}] = \varepsilon_{\mu\alpha} M_{\nu\beta} + g_{\nu\beta} M_{\mu\alpha} - \varepsilon_{\mu\beta} M_{\nu\alpha} - \varepsilon_{\nu\alpha} M_{\mu\beta}$$

(17)

Remarquons que le tenseur $M_{\mu\nu}$ n'est défini que

relativement à une origine arbitraire. Mais, comme l'écrit M. L. de Broglie [5] : « Dans chaque système de référence, l'origine des coordonnées est un point arbitraire, et le moment cinétique par rapport à ce point arbitraire n'a pas, en général, de signification physique particulière. Ce qui a une signification physique intéressante, c'est le moment cinétique par rapport à un centre doué de propriétés physiques. » Nous allons montrer, à partir des relations de conservation ci-dessus qu'un tel centre physique apparaît très naturellement en liaison avec l'étude générale du mouvement. Ce centre est lié à la particule et, par conséquent, est en mouvement, mais on verra que nous pouvons cependant le prendre comme origine pour évaluer le moment angulaire orbital.

Nous pouvons écrire la grandeur constante de l'impulsion sous la forme : $G_\nu G_\mu \equiv -M_0^2 c^2$, M_0 ayant les dimensions d'une masse. Si nous considérons alors le moment angulaire propre $S_{\mu\nu}$ et si

nous formons le vecteur : $R_\mu \equiv \frac{1}{M_0^2 c^2} S_{\mu\nu} G_\nu$, il aura les dimensions d'un rayon-vecteur dans l'espace-temps. Appliquons alors l'origine du vecteur $-R_\mu$ au centre x_μ de la particule. Son extrémité définira un point $Y_\mu \equiv x_\mu - R_\mu$. Ce point dont le rôle a été pressenti par Weyssenhoff [4] et qui a été mis en évidence par l'un de nous [6], nous pouvons l'appeler le « centre de gravité », il possède la particularité de se mouvoir d'un mouvement uniforme parallèlement au vecteur impulsion, comme c'est le cas pour le centre de gravité classique d'un système mécanique non relativiste en l'absence de champ extérieur. En effet, dérivons Y_μ par rapport au temps propre τ relatif au point x_μ :

$$\begin{aligned} \dot{Y}_\mu &= \dot{x}_\mu - \dot{R}_\mu = \dot{x}_\mu - \frac{1}{M_0^2 c^2} S_{\mu\nu} \dot{G}_\nu \\ &= \dot{x}_\mu - \frac{1}{M_0^2 c^2} (G_\mu \dot{x}_\nu - G_\nu \dot{x}_\mu) G_\nu \end{aligned}$$

ou encore, en posant $G_\mu \dot{x}_\mu = -\mathcal{M}_0 c^2$ (la quantité $\mathcal{M}_0$, généralement variable, a encore les dimensions d'une masse), nous obtenons :

$$\dot{Y}_\mu = \frac{\mathcal{M}_0}{M_0^2} G_\mu.$$

Comme $\dot{G}_\mu = 0$, le mouvement est rectiligne. Sa vitesse unitaire constante Y'_μ est obtenue en faisant intervenir le temps propre θ relatif au point Y_μ :

$$\begin{aligned} Y'_\mu Y'_\mu &= -c^2 = \dot{Y}_\mu \dot{Y}_\mu (d\tau/d\theta)^2 \\ &= (\mathcal{M}_0^2/M_0^4) (-M_0^2 c^2) (d\tau/d\theta)^2 \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$d\tau/d\theta = M_0/\mathcal{M}_0$$

et

$$Y'_\mu = \dot{Y}_\mu d\tau/d\theta = G_\mu/M_0 = \text{constante.}$$

Maintenant, nous pouvons exprimer le moment angulaire total relativement à ce centre de gravité, soit :

$$\mathcal{M}_{\mu\nu} \equiv R_\mu G_\nu - R_\nu G_\mu + S_{\mu\nu}.$$

Ce moment aura une signification physique intrinsèque indépendamment du choix de l'origine des axes, si bien qu'on aura avantage à l'introduire à la place de $M_{\mu\nu}$. D'autre part, il sera encore une constante du mouvement et ainsi vérifiera encore les relations de Lie données ci-dessus. En fait, il n'est rien d'autre que le moment angulaire relativement à une origine fixe, mais choisie sur la droite d'univers déterminée parcourue par le centre de gravité, si bien qu'à un instant t le vecteur Y_μ compté à partir de cette origine, est colinéaire à G_μ . Il s'ensuit qu'on peut ajouter au moment angulaire total $M_{\mu\nu} = x_\mu G_\nu - x_\nu G_\mu + S_{\mu\nu}$, le tenseur $Y_\nu G_\mu - Y_\mu G_\nu$ qui est nul. On obtient ainsi :

$$M_{\mu\nu} = (x_\mu - Y_\mu) G_\nu - (x_\nu - Y_\nu) G_\mu + S_{\mu\nu} = \mathcal{M}_{\mu\nu}.$$

Ainsi à toute particule régie par un Lagrangien invariant par glissement, et comportant des variables internes localisées en un point déterminé x_μ , nous sommes conduits à associer un autre point Y_μ en mouvement uniforme, autour duquel le point x_μ exécute un mouvement plus ou moins compliqué. Nous retrouvons les deux points « canoniquement conjugués » récemment mis en évidence par T. Takabayasi [7]. De plus, le mouvement de la particule nous fournit au point Y_μ un système déterminé de vecteurs que nous pouvons valablement choisir comme référentiel relativement fixe par rapport auquel on étudiera le mouvement du point x_μ et des « vecteurs internes ». En effet, considérons le vecteur G_μ et le tenseur $\mathcal{M}_{\mu\nu}$ comme localisés au point Y_μ . Nous aurons ainsi un premier axe colinéaire à G_μ et qui va glisser sur lui-même d'un mouvement uniforme. Puis nous obtiendrons un second axe orthogonal au précédent en considérant la « polarisation » [8] (aussi appelée « spin de Möller [6] »), à savoir :

$$\lambda_\mu = \frac{i}{2M_0 c} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} G_\nu \mathcal{M}_{\alpha\beta}$$

($\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ est le tenseur complètement antisymétrique de Lévi-Civita). Ce vecteur, évidemment constant, va se déplacer parallèlement à lui-même. Finalement, nous choisirons, dans l'hyperplan orthogonal à G_μ , et λ_μ , qui reste parallèle à lui-même, deux autres axes perpendiculaires, qu'il est possible — et tout indiqué — de prendre encore de directions fixes, et qui seront alors définis dans cet hyperplan à une rotation constante arbitraire près (qui jouera le rôle de jauge). Ainsi nous définissons un « tétrapode » orthonormé formé de quatre vecteurs unitaires $\mathcal{A}_\mu^{(\xi)}$ (ξ est un indice non tensoriel prenant les valeurs 1, 2, 3, 4) dont le quatrième $\mathcal{A}_\mu^{(4)}$

est du genre temps. Ces vecteurs satisfont aux deux conditions équivalentes d'orthonormalité :

$$\mathcal{A}_\mu^{(\xi)} \mathcal{A}_\nu^{(\xi)} = g_{\mu\nu} \quad \mathcal{A}_\mu^{(\xi)} \mathcal{A}_\mu^{(\eta)} = g^{\xi\eta}.$$

Nous appellerons ce tétrapode le *système fixe*.

A cette étape, il apparaît que notre formalisme très général, qui paraissait initialement décrire une particule ponctuelle, engendre nécessairement un modèle « bilocal ». Il se rattache ainsi à de très nombreuses théories proposées récemment, qui considèrent d'emblée, soit deux points distincts [9], [10], soit tout un édifice, par exemple une gouttelette fluide [6], [11]. En particulier d'après cette dernière conception, le fluide est caractérisé localement par un vecteur conservatif « densité de matière » j_μ , et par un tenseur symétrique conservatif « densité d'énergie-impulsion » $t_{\mu\nu}$. L'impulsion globale G_μ est obtenue en intégrant sur une section quelconque d'espace Σ la composante $t_{\mu 4}$ du tenseur $t_{\mu\nu}$ relative au référentiel correspondant à Σ :

$$G_\mu = \frac{1}{ic} \int_\Sigma t_{\mu 4} dv.$$

C'est un vecteur constant. Le rôle du point x_μ considéré ici est alors joué par le barycentre X_μ relatif à la densité de matière j_4 dans une section d'espace particulière Σ_0 orthogonale à G_μ ; c'est le « centre de matière » :

$$X_\mu \int_{\Sigma_0} j_4 dv = \int_{\Sigma_0} x_\mu j_4 dv.$$

Le rôle du point Y_μ est joué par le barycentre relatif à la densité d'énergie t_{44} dans la même section d'espace Σ_0 ; c'est le « centre de gravité » :

$$Y_\mu \int_{\Sigma_0} t_{44} dv = \int_{\Sigma_0} x_\mu t_{44} dv.$$

On montre alors facilement que le moment angulaire relatif au point Y_μ calculé par intégration sur une section d'espace quelconque, soit :

$$\mathcal{M}_{\mu\nu} = \frac{1}{ic} \int_\Sigma [(x_\mu - Y_\mu) t_{\nu 4} - (x_\nu - Y_\nu) t_{\mu 4}] dv$$

est un tenseur constant, et que le moment angulaire relatif au centre de matière,

$$S_{\mu\nu} = \frac{1}{ic} \int_\Sigma [(x_\mu - X_\mu) t_{\nu 4} - (x_\nu - X_\nu) t_{\mu 4}] dv$$

est aussi un tenseur satisfaisant à la relation :

$$\hat{S}_{\mu\nu} \equiv G_\mu \hat{X}_\nu - G_\nu \hat{X}_\mu.$$

Ainsi tout le formalisme de la gouttelette est entièrement identique à celui que nous présentons ici. On arriverait à la même conclusion pour la théorie développée il y a longtemps par Matthiessen et ses élèves [12], [13] qui étudient à différents degrés d'approximation l'évolution d'une particule considérée comme uné singularité du champ de gravitation régi par les équations d'Einstein.

Il nous paraît digne de remarque que le forma-

lisme très général proposé ici, qui à l'origine ne semblait pas attribuer à la particule une extension dans l'espace, nous a conduit à un modèle bilocal qui concorde exactement avec les résultats obtenus par la démarche opposée, à savoir en schématisant des structures étendues dans l'espace. Cette remarque peut être considérée comme un argument en faveur de l'opinion générale suivant laquelle le fait d'attribuer à une particule soi-disant ponctuelle d'autres propriétés qu'une pure et simple impulsion — par exemple, de la doter d'un « spin » — revient en réalité à lui reconnaître implicitement une certaine extension dans l'espace. Selon cette conception, on serait toujours, en fait, en présence d'une structure étendue dans l'espace, schématisée par différents modèles correspondant à des approximations différentes. Ainsi la première approximation représenterait l'ensemble de la particule par un point doté d'une impulsion, celle-ci étant nécessairement colinéaire à la vitesse. Le formalisme général développé ci-dessus montre alors immédiatement que le moment angulaire total se réduit à sa partie orbitale sans moment angulaire propre. Le rayon-vecteur R_μ s'annule, si bien que les points x_μ et Y_μ coïncident ; le modèle devient unilocal et le choix de l'origine sur la droite d'univers décrite par la particule annule le moment angulaire total $\mathcal{M}_{\mu\nu}$. Le point comportant en outre des variables internes tel que nous l'avons étudié ci-dessus, représenterait alors une seconde approximation qui se traduit par le modèle bilocal.

Il semble aussi que cette remarque puisse être le point de départ d'un examen critique de la conception de la particule à spin telle qu'elle est utilisée par la mécanique quantique : cette particule est considérée comme rigoureusement ponctuelle, ce qui se traduit par l'apparition de la fonction δ de Dirac dans le formalisme, et en même temps elle est dotée de spin et d'autres propriétés spécifiques — par exemple, de moment magnéto électrique — qui du point de vue classique sont en fait des « variables internes ». Mais, d'autre part, une telle particule quantique est à la fois strictement ponctuelle et sans localisation précise, étant donné les relations d'incertitude. Peut-être est-il permis, au contraire, de rechercher un modèle « déterministe » qui pourrait être à la fois strictement localisé et non ponctuel, ou, pour parler plus précisément « multiponctuel ».

III. Le tétrapode fondamental. — Après ces considérations générales, nous allons préciser notre modèle pour retrouver les représentations physiques ordinaires de la particule tournante relativiste. Ainsi nous devons introduire nos variables internes de telle façon qu'elles puissent décrire convenablement une rotation relativiste, c'est pourquoi nous allons généraliser de façon naturelle la représentation de la toupie non-relativiste.

On sait que celle-ci est représentée par un trièdre mobile de vecteurs orthonormés $b_k^{(r)}$, qui nous permet de définir un tenseur antisymétrique « rotation instantanée » $\omega_{ij} = \dot{b}_i^{(r)} b_j^{(r)}$ (le point représente la dérivée par rapport au temps et les indices r, i, j prennent les valeurs 1, 2, 3). Outre son caractère orthonormé, le trièdre doit être orienté par le choix d'un certain *sens de rotation*. Si on se donne deux des vecteurs et l'orientation, le troisième vecteur est complètement déterminé par la relation :

$$b_i^{(r)} = \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{rst} b_j^{(s)} b_k^{(t)}$$

(ε_{ijk} et ε^{rst} sont les symboles complètement antisymétriques du troisième ordre de Lévi-Civita). Cette relation entraîne l'orthonormalité qu'on peut exprimer par les relations équivalentes :

$$b_i^{(r)} b_j^{(r)} = g_{ij} \quad b_i^{(r)} b_i^{(s)} = g^{rs}$$

De plus, chaque vecteur est déterminé sans ambiguïté à partir des deux autres, dès lors qu'on a choisi des permutations positives pour i, j, k et pour r, s, t , soit, par exemple $i, j, k = r, s, t = 1, 2, 3$. Remarquons que ε_{ijk} est un pseudo-tenseur complètement antisymétrique, tandis que les ε^{rst} sont des quantités égales à + 1 ou - 1 et évidemment invariantes sous une rotation « propre », c'est-à-dire ne comportant pas d'inversion d'espace. Mais nous avons besoin d'une convention supplémentaire si nous désirons attribuer une variance aux ε^{rst} sous une inversion d'espace, et cette convention déterminera en même temps la variance des vecteurs formant le trièdre. Si les ε^{rst} sont invariants sous une inversion d'espace, alors, comme le produit $b_j^{(s)} b_k^{(t)}$ est évidemment invariant, tandis que le pseudotenseur ε_{ijk} change de signe, les composantes $b_i^{(r)}$ sur les axes inversés deviennent $- b_i^{(r)}$. En d'autres termes, les $b^{(r)}$ sont de « vrais » vecteurs (vecteurs polaires). Au contraire, si nous supposons que les ε^{rst} sont des pseudoscalaires qui changent de signe sous une inversion d'espace, alors les $b_i^{(r)}$ garderont le même signe sur les axes inversés et le trièdre ainsi défini sera formé de pseudovecteurs (vecteurs axiaux).

La généralisation relativiste nous conduit de même à considérer un trièdre de quadrivecteurs contenus dans l'espace propre de la particule et à le compléter par un quatrième quadrivecteur du genre temps colinéaire à sa vitesse unitaire x_μ (dorénavant le point représente la dérivation par rapport au temps *propre* τ de la particule). Pour exprimer l'orthonormalité et l'orientation d'un tel « tétrapode », nous devons écrire deux conditions :

$$b_\mu^{(r)} b_\mu^{(s)} = g^{rs} \tag{18}$$

$$\dot{x}_\mu = \frac{ic}{6} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon^{rst} b_\nu^{(r)} b_\alpha^{(s)} b_\beta^{(t)} \tag{19}$$

De ces relations résultent, d'une part, les deux

relations équivalentes d'orthonormalité relativiste :

$$b_\mu^{(\xi)} b_\nu^{(\xi)} = g_{\mu\nu} \quad b_\mu^{(\xi)} b_\mu^{(\eta)} = g^{\xi\eta} \tag{20}$$

(cette fois, les indices grecs ξ, η désignant les vecteurs, prennent, comme les indices tensoriels μ, ν , les valeurs 1, 2, 3, 4, $b_\mu^{(4)}$ représentant $\dot{x}_\mu / ic$, alors que les indices latins r, s, t , prenant les valeurs 1, 2, 3, désignent spécialement les trois vecteurs du genre espace) ; d'autre part, une orientation déterminée du trièdre du genre espace et du vecteur du genre temps, ces orientations étant fixées sans ambiguïté par le choix d'une permutation positive des $\mu\nu\alpha\beta$ (par exemple $\mu, \nu, \alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$) et des r, s, t ; (par exemple, $r, s, t = 1, 2, 3$). Comme dans le cas précédent, les ε^{rst} sont invariants sous le groupe connexe de Lorentz (transformations orthochrones propres). Mais nous devons fixer conventionnellement leur variance sous un renversement du temps (transformation antichrone T) et sous une inversion de l'espace (transformation impropre ou parité P). Il y a ainsi quatre conventions possibles qui définiront quatre types différents de variance pour le tétrapode et qui correspondant naturellement à quatre cas physiques différents :

1° ε^{rst} est un « vrai » scalaire, il est invariant aussi bien sous T que sous P : on a un tétrapode « propre » ;

2° ε^{rst} change de signe sous T et est invariant sous P . On a un tétrapode « antichrone » ;

3° ε^{rst} change de signe sous P et est invariant sous T . On a un tétrapode « impropre » ;

4° ε^{rst} change de signe aussi bien sous P que sous T . On a un tétrapode « invariant de charge » (parce qu'il est invariant sous PT qui est la conjugaison de charge). Naturellement, dans chacun de ces cas, la forme du Lagrangien doit être choisie de façon qu'il soit invariant sous une transformation de groupe complet de Lorentz, compte tenu des transformations subies par les tétrapodes du type considéré.

Ceci étant dit, et la possibilité des différentes variances étant réservée par l'éventualité de conventions correspondantes sur les Σ^{rst} , disons tout de suite que nous laisserons de côté, dans cet article, l'étude des transformations par inversion, problème très important que nous nous proposons d'aborder dans un travail ultérieur. Dans tout ce qui suit, nous allons donc restreindre les glissements aux transformations orthochrones propres de Lorentz. La rotation instantanée relativiste du tétrapode s'exprime évidemment par le tenseur $\omega_{\mu\nu} = \dot{b}_\mu^{(\xi)} b_\nu^{(\xi)}$ avec sommation sur ξ . Ce tenseur généralise de façon naturelle le tenseur non-relativiste de rotation instantanée : relativement au système propre, nous devons ajouter aux composantes d'espace : $\omega_{4j} = \dot{b}_j^{(r)} b_j^{(r)}$ les composantes de temps $\omega_{k4} = \dot{b}_k^{(4)} b_k^{(4)} = \dot{b}_k^{(4)}$ qui représentent l'accélération conformément aux conceptions relativistes. Ainsi

l'évolution dans le temps de notre tétrapode fondamental représente en même temps la rotation et l'accélération du point matériel considéré, ces deux grandeurs étant unies en un tout indissociable dans tout référentiel autre que le système propre.

Comme nous l'avons dit plus haut, ce modèle ponctuel doit être nécessairement complété par un centre de gravité auquel est lié un autre tétrapode qui se déplace parallèlement à lui-même avec une vitesse constante. En effet, une fois qu'on a choisi un Lagrangien déterminant l'évolution des $b_\mu^{(\xi)}$, nous pouvons en tirer l'impulsion $G_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\mu}$ et le moment angulaire propre

$$S_{\mu\nu} = b_\mu^{(\xi)} \frac{\partial L}{\partial \dot{b}_\nu^{(\xi)}} - b_\nu^{(\xi)} \frac{\partial L}{\partial \dot{b}_\mu^{(\xi)}}$$

d'où le rayon-vecteur

$$R_\mu = -\frac{1}{G_\lambda G_\lambda} S_{\mu\nu} G_\nu$$

qui nous fournit le centre de gravité $Y_\mu = \dot{x}_\mu - R_\mu$. De plus, le moment angulaire total (relativement au centre de gravité) est

$$\mathcal{M}_{\mu\nu} = R_\mu G_\nu - R_\nu G_\mu + S_{\mu\nu}.$$

On peut alors définir les deux premiers vecteurs du système « fixe » :

$$a_\mu^{(4)} = G_\mu / \sqrt{-G_\lambda G_\lambda} \quad c_\mu^{(3)} = \lambda_\mu / \sqrt{\lambda_\nu \lambda_\nu}$$

avec

$$\lambda_\mu = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} a_\nu^{(4)} \mathcal{M}_{\alpha\beta}.$$

Enfin les deux derniers sont déterminés, à une jauge constante arbitraire près, par les équations :

$$\dot{a}_\mu^{(1)} = \dot{a}_\mu^{(2)} = 0. \quad a_\mu^{(4)} = \frac{1}{6} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon^{rst} a_\nu^{(r)} a_\alpha^{(s)} a_\beta^{(t)}$$

$$c_\mu^{(3)} a_\mu^{(t)} = g^{st}.$$

Ainsi nous aboutissons à un édifice formé de deux tétrapodes orthonormés localisés en deux points différents, liés l'un à l'autre. Cet édifice bilocal, décrit en premier lieu par Takabayasi et ses collaborateurs [7], [20], et qu'on conviendra d'appeler un *rotateur relativiste* représente par un schéma unique, d'une part, les modèles présentés explicitement comme bilocaux [9], [10], d'autre part, les modèles pseudo-ponctuels tels que, par exemple, la particule à spin ordinaire, et aussi les modèles de particules étendues convenablement schématisés [11]. Mais nous pensons que cette représentation par deux tétrapodes est la plus suggestive et aussi la plus maniable. Cette remarque permet de donner un très vaste champ de validité à la théorie récemment proposée par deux d'entre nous [14] qui décrit la dynamique d'un tel rotateur par le mouvement « global » ou « externe » du centre de

gravité, et par le mouvement « interne » consistant dans l'évolution du vecteur R_μ et de l'orientation relative du tétrapode « mobile » par rapport au tétrapode « fixe », cette orientation étant exprimée au moyen de la généralisation relativiste des angles d'Euler [15], ce qui permet de former des opérateurs de rotation susceptibles d'être quantifiés [16].

Nous pouvons immédiatement appliquer ces considérations sur le tétrapode fondamental au cas très simple du « Lagrangien linéaire » introduit par Takabayasi et deux d'entre nous et qu'on a fréquemment utilisé par la suite [17], [18], [19], [2]. Un premier terme représentant l'énergie cinétique de rotation propre est formé de la façon suivante : plaçons-nous dans le cas dit de Frenkel [21] où le moment angulaire propre de la particule est un tenseur d'espace propre :

$$S_{\mu\nu} \dot{x}_\nu = 0.$$

Alors, si nous formons le spin

$$s_\mu = \frac{i}{2c} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \dot{x}_\nu S_{\alpha\beta},$$

la relation précédente entraîne la possibilité d'exprimer $S_{\mu\nu}$ entièrement en fonction de $\dot{x}_\mu$ et s_μ [6]

$$S_{\mu\nu} = \frac{i}{c} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \dot{x}_\alpha s_\beta.$$

Prenant alors le vecteur $b_\mu^{(4)}$ sur $\dot{x}_\mu$ et le vecteur $b_\mu^{(3)}$ sur s_μ :

$$\dot{x}_\mu = ic l_\mu^{(4)} \quad s_\mu = s_0 l_\mu^{(3)}$$

(s_0 est le module du spin), nous obtenons :

$$S_{\mu\nu} = s_0 \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} l_\alpha^{(3)} l_\beta^{(4)}$$

c'est-à-dire, d'après (18) et (19) :

$$S_{\mu\nu} = s_0 (l_\mu^{(1)} l_\nu^{(2)} - l_\nu^{(1)} l_\mu^{(2)}).$$

L'énergie cinétique peut alors être formée au moyen de l'expression classique :

$$T = \frac{1}{2} S_{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} = \frac{1}{2} s_0 (l_\mu^{(1)} l_\nu^{(2)} - l_\nu^{(1)} l_\mu^{(2)}) b_\mu^{(5)} l_\nu^{(5)}$$

$$= s_0 (b_\mu^{(1)} b_\mu^{(2)} - b_\mu^{(1)} l_\mu^{(2)}) = s_0 l_\mu^{(1)} b_\mu^{(2)}.$$

Les autres termes s'annulent d'après les conditions d'orthonormalité (20). En complétant ce terme par les conditions de Lagrange discutées dans cette section, le Lagrangien devient :

$$L = s_0 b_\mu^{(1)} l_\mu^{(2)} + \lambda^{rs} (l_\mu^{(r)} b_\mu^{(s)} - g^{rs})$$

$$+ \lambda_\mu \left(\dot{x}_\mu - \frac{ic}{6} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon^{rst} l_\nu^{(r)} l_\alpha^{(s)} l_\beta^{(t)} \right)$$

λ_μ et λ^{rs} étant des multiplicateurs de Lagrange (λ^{rs} est évidemment symétrique en r et s).

Un tel Lagrangien est invariant sous un glissement général (transformation inhomogène de Lorentz). De plus, il est également invariant sous une rotation de $b_\mu^{(1)}$ et $b_\mu^{(2)}$ autour du plan $b_\mu^{(3)}$, $b_\mu^{(4)}$, si bien que le groupe d'invariance est le produit direct du groupe inhomogène de Lorentz et du groupe des rotations planes orthogonales à $b_\mu^{(3)}$, $b_\mu^{(4)}$.

Les générateurs infinitésimaux seront :

— l'opérateur $\mathfrak{F}_\mu$ des translations infinitésimales agissant sur x_μ ;

— l'opérateur $\mathcal{M}_{\mu\nu}$ des rotations infinitésimales dans l'espace-temps, agissant sur x_μ et sur les $b_\mu^{(r)}$;

— l'opérateur $\mathcal{A}$ des rotations planes infinitésimales orthogonales à $b_\mu^{(3)}$, $b_\mu^{(4)}$ agissant sur $b_\mu^{(1)}$ et $b_\mu^{(2)}$.

Pour exprimer les constantes du mouvement correspondantes, constituons d'abord le formalisme canonique. Les seules variables dont les dérivées figurent dans le Lagrangien sont x_μ et $b_\mu^{(1)}$. Il faut donc introduire deux moments conjugués :

$$G_\mu \equiv \partial L / \partial \dot{x}_\mu = \lambda_\mu \quad \mathfrak{f}_\mu^{(1)} \equiv \partial L / \partial \dot{b}_\mu^{(1)} = s_0 b_\mu^{(2)}.$$

Remarquons que, comme le moment conjugué de $b_\mu^{(1)}$ n'est autre que $b_\mu^{(2)}$ il est possible de former un Hamiltonien, quoique le Lagrangien soit linéaire en $b_\mu^{(1)}$. On obtient :

$$H = -\lambda^{rs} (b_\mu^{(r)} b_\mu^{(s)} - g^{rs}) + \frac{ic}{6} G_\mu \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon^{rst} b_\nu^{(r)} l_\alpha^{(s)} b_\beta^{(t)}.$$

Ceci étant une expression abrégée dans laquelle $b_\mu^{(2)}$ doit être remplacé chaque fois qu'il apparaît par $b_\mu^{(1)} / s_0$. Un cas analogue a été étudié par l'un de nous [19].

Le vecteur constant correspondant à l'opérateur $\mathfrak{F}_\mu$ est l'impulsion G_μ , comme on l'a vu plus haut. L'opérateur $\mathcal{M}_{\mu\nu}$ agit sur un vecteur quelconque q_λ suivant :

$$\mathcal{M}_{\mu\nu} q_\lambda = g_\mu g_\nu \lambda - q_\nu g_\mu \lambda.$$

Le tenseur constant correspondant est donc :

$$M_{\mu\nu} = G_\lambda \mathcal{M}_{\mu\nu} x_\lambda + \mathfrak{f}_\lambda^{(1)} \mathcal{M}_{\mu\nu} b_\lambda^{(1)} \\ = G_\nu x_\mu - G_\mu x_\nu + s_0 (l_\nu^{(2)} l_\mu^{(1)} - l_\mu^{(2)} l_\nu^{(1)}).$$

Le dernier terme est donc simplement le moment angulaire propre qui avait été utilisé initialement pour former le Lagrangien. Ainsi $M_{\mu\nu}$ est, comme il se doit, le moment angulaire total utilisé dans la représentation physique, soit la somme des mouvements angulaires orbital et propre.

Enfin, l'opérateur $\mathcal{A}$ agit sur $b_\mu^{(r)}$ d'après $\mathcal{A} b_\mu^{(r)} = \Sigma_{(1,2)}^{rs} b_\mu^{(s)}$, $\Sigma_{(1,2)}$ étant la matrice des rotations infinitésimales dans le plan $b^{(1)}$, $b^{(2)}$

$$\Sigma_{(1,2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le scalaire constant qui lui correspond est :

$$\mathfrak{f}_\mu^{(1)} \mathcal{A} b_\mu^{(1)} = \mathfrak{f}_\mu^{(1)} l_\mu^{(2)} = s_0 b_\mu^{(2)} l_\mu^{(2)} = s_0.$$

C'est simplement le module du spin.

Les relations de conservation sont donc :

$$\dot{G}_\mu = 0 \quad \dot{M}_{\mu\nu} = 0 \quad \dot{s}_0 = 0.$$

Nous pouvons aussi écrire les relations de Lie en crochets de Poisson :

$$[G_\mu, G_\nu] = 0$$

$$[M_{\mu\nu}, G_\alpha] = g_{\alpha\mu} G_\nu - g_{\alpha\nu} G_\mu$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\alpha\beta}] = g_{\mu\alpha} M_{\nu\beta} + g_{\mu\beta} M_{\mu\alpha} - g_{\mu\nu} M_{\nu\alpha} - g_{\nu\alpha} M_{\mu\beta}.$$

Comme l'opérateur $\mathcal{A}$ commute avec $\mathfrak{F}_\mu$ et $\mathcal{M}_{\mu\nu}$, les crochets de Poisson de s_0 avec G_μ et $M_{\mu\nu}$ sont nuls. Toutes ces relations de commutation se vérifient immédiatement à partir des expressions canoniques :

$$G_\mu = G_\mu, M_{\mu\nu} = x_\mu G_\nu - x_\nu G_\mu + \mathfrak{f}_\mu^{(1)} b_\nu^{(1)} - \mathfrak{f}_\nu^{(1)} b_\mu^{(1)}, \\ s_0 = \mathfrak{f}_\mu^{(1)} b_\mu^{(2)}.$$

IV. Le rotateur quadratique. — Nous allons maintenant appliquer notre théorie à un autre Lagrangien, proposé initialement par Nakano [22] et dont la forme quadratique permet des développements plus intéressants [23], [14].

L'expression de la rotation instantanée

$$\omega_{\mu\nu} = \dot{b}_\mu^{(\xi)} b_\nu^{(\xi)}$$

sert encore de point de départ, et on généralise l'expression classique de l'énergie cinétique de rotation physique élémentaire $T = \frac{1}{2} I \omega^2$ (la constante I est le moment d'inertie). La généralisation relativiste fournit :

$$T = \frac{1}{4} I_{[\alpha\beta][\mu\nu]} \omega_{\alpha\beta} \omega_{\mu\nu},$$

le tenseur d'inertie constant $I_{[\alpha\beta][\mu\nu]}$ étant symétrique relativement aux couples $\alpha\beta$ et $\mu\nu$ et antisymétrique à la fois en α, β et en μ, ν . Une restriction intéressante consiste à supposer que la particule, possède une structure de symétrie *hyper-sphérique* dans l'espace-temps, ce qui donne au tenseur d'inertie la forme

$$I_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} I (g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu})$$

avec une seule constante I . On obtient donc :

$$T = \frac{1}{4} I \omega_{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} = \frac{1}{4} I \dot{b}_\mu^{(\xi)} b_\nu^{(\xi)} \dot{b}_\mu^{(\eta)} b_\nu^{(\eta)}$$

ou, en tenant compte des relations d'orthonormalité :

$$T = \frac{1}{4} I \dot{b}_\mu^{(\xi)} \dot{b}_\mu^{(\xi)}$$

(ces conditions seront naturellement introduites par la suite par des conditions de Lagrange convenables).

Une particularité de ce Lagrangien est la présence d'un terme en $\dot{b}_\mu^{(4)}$, c'est-à-dire contenant $\dot{x}_\mu$. Nous avons ainsi à faire appel à un formalisme canonique élargi au cas où il apparaît des dérivées secondes, formalisme proposé par Ostrogradski [24] [25]. La démonstration est analogue à celle donnée à la section I. Soit :

$$L \equiv f(\tau, Q, \dot{Q}, \ddot{Q})$$

une fonction des variables Q et de leurs premières et secondes dérivées. On pose

$$y \equiv \dot{Q} \quad z \equiv \ddot{Q}$$

et on étudie l'intégrale d'action :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0^1 &\equiv \int_{\tau_0}^{\tau_1} [f(\tau, Q, y, z) + P(\dot{Q} - y) + \Pi(\ddot{Q} - z)] d\tau \\ &= [PQ]_{\tau_0}^{\tau_1} + [\Pi\dot{Q}]_{\tau_0}^{\tau_1} \\ &+ \int_{\tau_0}^{\tau_1} [f(\tau, Q, y, z) - \dot{P}Q - Py - \dot{\Pi}\dot{Q} - \Pi z] d\tau \end{aligned}$$

P et Π étant des lignes $P_{(\lambda)}$ $\Pi_{(\lambda)}$ à valeurs dans le dual de R^n . Si δQ est une variation quelconque de la fonction Q , et $\delta\dot{Q}$ une variation quelconque de la fonction $\dot{Q}$, la variation correspondante de $\mathcal{A}_0^1$ est :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{A}_0^1 &= [P \cdot \delta Q]_{\tau_0}^{\tau_1} + [\Pi \cdot \delta \dot{Q}]_{\tau_0}^{\tau_1} \\ &+ \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial Q} - \dot{P} \right) \cdot \delta Q \right. \\ &\left. + \left(\frac{\partial L}{\partial y} - P - \dot{\Pi} \right) \cdot \delta y + \left(\frac{\partial L}{\partial z} - \Pi \right) \cdot \delta z \right] d\tau \end{aligned}$$

en tenant compte de l'hypothèse

$$y \equiv \dot{Q}, \quad \text{d'où : } \delta y \equiv \delta \dot{Q}.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que :

$$[\delta Q_{(\tau_0)} = \delta Q_{(\tau_1)} = 0, \delta \dot{Q}_{(\tau_0)}, \delta \dot{Q}_{(\tau_1)} = 0] \Rightarrow [\delta \mathcal{A}_0^1 = 0]$$

est fournie par les équations de Lagrange généralisées :

$$\partial L / \partial Q = \dot{P} \quad (\partial L / \partial y) - P = \dot{\Pi} \quad \partial L / \partial z = \Pi.$$

Si ces équations sont vérifiées, toute variation $\delta_i Q$, $\delta_i \dot{Q}$, fonction de τ et de Q , qui laisse le Lagrangien invariant (transformation infinitésimale du groupe d'invariance) donnera :

$$\delta_i \mathcal{A}_0^1 = 0 = [P \cdot \delta_i Q]_{\tau_0}^{\tau_1} + [\Pi \cdot \delta_i \dot{Q}]_{\tau_0}^{\tau_1}$$

c'est-à-dire, puisque τ_0 et τ_1 sont arbitraires :

$$u_i \equiv P \cdot \delta_i Q + \Pi \cdot \delta_i \dot{Q} = \text{constante.}$$

Ainsi, nous pouvons étendre à ce cas le théorème de Noether en considérant un espace de configuration construit sur les variables $q^\alpha \equiv (Q^{(\lambda)}, \dot{Q}^{(\lambda)})$,

avec les moments conjugués généralisés

$$p_\alpha \equiv (P_{(\lambda)}, \Pi_{(\lambda)}) : \Pi_{(\lambda)} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}^{(\lambda)}} \quad P_{(\lambda)} \equiv \frac{\partial L}{\partial Q^{(\lambda)}} - \Pi_{(\lambda)} :$$

Pour tout groupe de Lie G laissant le Lagrangien invariant, agissant dans cet espace de configuration, sans changer τ , chaque transformation infinitésimale δ_i de G engendre une constante du mouvement

$$u_i = p \cdot \delta_i q.$$

Maintenant, nous pouvons comme ci-dessus, considérer la phase $\left(\frac{p}{q}\right)$ et les variables dynamiques u , fonctions de la phase et de τ . Nous pouvons attacher à chacune d'elles une différentielle d_u :

$$d_u(t) = 0 \quad d_u(q^\alpha) = \frac{\partial u}{\partial p_\alpha} \quad d_u(p_\alpha) = -\frac{\partial u}{\partial q^\alpha}$$

et de même définir le crochet de Poisson de deux variables dynamiques

$$[u, v] = d_u(v) = \frac{\partial u}{\partial p_\alpha} \frac{\partial v}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial u}{\partial q^\alpha} \frac{\partial v}{\partial p_\alpha}$$

autrement dit :

$$\begin{aligned} [u, v] &= \frac{\partial u}{\partial P_{(\lambda)}} \frac{\partial v}{\partial Q^{(\lambda)}} + \frac{\partial u}{\partial \Pi_{(\lambda)}} \frac{\partial v}{\partial \dot{Q}^{(\lambda)}} \\ &- \frac{\partial u}{\partial Q^{(\lambda)}} \frac{\partial v}{\partial P_{(\lambda)}} - \frac{\partial u}{\partial \dot{Q}^{(\lambda)}} \frac{\partial v}{\partial \Pi_{(\lambda)}}. \end{aligned}$$

De ces formules généralisées, nous pouvons tirer sans difficulté le théorème suivant : Si les générateurs infinitésimaux δ_i du groupe d'invariance satisfont aux relations de Lie :

$$\delta_j \delta_k - \delta_k \delta_j = T_{jk}^l \delta_l,$$

les crochets de Poisson des constantes fondamentales du mouvement qui leur correspondent obéissent à la relation de même forme :

$$[u_j, u_k] = T_{jk}^l u_l.$$

Dans notre Lagrangien quadratique, la seule dérivée seconde qui figure est $\dot{x}_\mu$. Il faut donc considérer d'un côté les vecteurs du genre espace $b_\mu^{(\tau)}$ avec les moments conjugués usuels $\beta_\mu^{(\tau)} \equiv \frac{\partial L}{\partial b_\mu^{(\tau)}}$, et de l'autre le vecteur du genre temps $b_\mu^{(4)}$ qu'on écrira $b_\mu^{(4)} \equiv \frac{\dot{x}_\mu}{ic}$, en prenant les conditions d'orthogonalité sous la forme (18), (19). Il faut alors considérer la variable x_μ (qui ne figure pas explicitement) et son moment conjugué qui prend la forme particulière

$$G_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\mu} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_\mu}$$

et de plus la variable $\dot{x}_\mu$ considérée comme indépendante, et qui a pour moment conjugué $N_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\mu}$. En tenant compte de cette variable supplémentaire, la constante du mouvement associée à chaque transformation infinitésimale δ_i de groupe d'invariance s'écrit :

$$u_i = G_\mu \delta_i x_\mu + N_\mu \delta_i \dot{x}_\mu + \beta_\mu^{(r)} \delta_i b_\mu^{(r)}.$$

En particulier les générateurs infinitésimaux du groupe inhomogène de Lorentz engendreront les constantes :

$$G_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\mu} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_\mu}$$

$$M_{\mu\nu} = x_\mu G_\nu - x_\nu G_\mu + \dot{x}_\mu \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\nu} - \dot{x}_\nu \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\mu} + b_\mu^{(r)} \frac{\partial L}{\partial b_\nu^{(r)}} - b_\nu^{(r)} \frac{\partial L}{\partial b_\mu^{(r)}}$$

et le moment angulaire propre prendra la forme

$$S_{\mu\nu} = \dot{x}_\mu \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\nu} - \dot{x}_\nu \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\mu} + b_\mu^{(r)} \frac{\partial L}{\partial b_\nu^{(r)}} - b_\nu^{(r)} \frac{\partial L}{\partial b_\mu^{(r)}}$$

déjà obtenue par deux d'entre nous [3].

Le moment angulaire total par rapport au centre de gravité sera :

$$\mathcal{M}_{\mu\nu} = R_\mu G_\nu - R_\nu G_\mu + S_{\mu\nu}$$

et les crochets de Poisson de G_μ et $\mathcal{M}_{\mu\nu}$ exprimés au moyen des variables canoniques, $x_\mu, G_\mu, \dot{x}_\mu, N_\mu, b_\mu^{(r)}, \beta_\mu^{(r)}$ obéiront aux relations de Lie [17].

Nous appliquerons la théorie prise sous cette forme au Lagrangien [26].

$$L = -\frac{1}{4} I \left(b_\mu^{(r)} b_\mu^{(r)} - \frac{1}{c^2} \dot{x}_\mu \dot{x}_\mu \right) + \chi^{rs} (b_\mu^{(r)} b_\mu^{(s)} - g^{rs}) + \lambda_\mu \left(\dot{x}_\mu - \frac{ic}{6} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon^{rst} b_\nu^{(r)} b_\alpha^{(s)} b_\beta^{(t)} \right).$$

Les moments canoniques sont :

$$N_\mu = \frac{1}{2c^2} I \dot{x}_\mu \quad G_\mu = \lambda_\mu - \frac{1}{2c^2} I \ddot{x}_\mu \quad \beta_\mu^{(r)} = -\frac{1}{2} I b_\mu^{(r)}.$$

On forme facilement $S_{\mu\nu}$:

$$S_{\mu\nu} = I \left(b_\mu^{(r)} b_\nu^{(r)} - \frac{1}{c^2} \dot{x}_\mu \dot{x}_\nu \right) = I b_\mu^{(\xi)} b_\nu^{(\xi)} = I \omega_{\mu\nu}.$$

Ce n'est pas autre chose que l'expression homologue au moment cinétique classique $S = I\omega$, qui correspond à l'expression $T = \left(\frac{1}{2}\right) I\omega^2$ pour l'énergie cinétique que nous avons prise pour point de départ.

Le Lagrangien proposé montre deux particularités intéressantes : d'une part, le moment angulaire propre n'est pas contenu dans l'espace propre,

contrairement à ce qui était posé par hypothèse pour le Lagrangien linéaire de la section précédente. Le produit contracté $S_{\mu\nu} \dot{x}_\nu$ — que nous avons appelé le « balourd » [6] — devient :

$$I b_\mu^{(\xi)} b_\nu^{(\xi)} \cdot ic b_\nu^{(4)} = I b_\mu^{(4)} \cdot ic$$

d'où :

$$S_{\mu\nu} \dot{x}_\nu = I \ddot{x}_\mu.$$

Le balourd est colinéaire à l'accélération d'univers.

Cette relation qui remplace, dans le cas considéré, la condition de Frenkel $S_{\mu\nu} \dot{x}_\nu = 0$ du cas précédent, forme avec les relations de conservation du système de treize équations sur treize variables indépendantes, qui déterminent entièrement le mouvement (aux conditions initiales près). L'un d'entre nous [27] a intégré ce système dans le cas de conditions initiales assez particulières.

D'autre part, L se trouve être invariant par une permutation circulaire des trois vecteurs du genre espace $b_\mu^{(r)}$. Autrement dit, le groupe de jauge est, cette fois, le *groupe des rotations tridimensionnelles*. On a donc à introduire les générateurs infinitésimaux du groupe des rotations agissant sur les indices supérieurs, soit :

$$\mathcal{M}^{ij} b_\mu^{(k)} = g^{kj} b_\mu^{(i)} - g^{ki} b_\mu^{(j)}$$

ce qui nous fournit les constantes du mouvement :

$$\omega^{ij} = \beta_\mu^{(k)} \mathcal{M}^{ij} b_\mu^{(k)} = \beta_\mu^{(i)} b_\mu^{(j)} - \beta_\mu^{(j)} b_\mu^{(i)}.$$

Nous obtenons ainsi trois scalaires constants dans le temps qu'on peut écrire :

$$\sigma^k = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \omega^{ij} = \varepsilon^{ijk} \beta_\mu^{(i)} b_\mu^{(j)} = -\frac{1}{2} I \varepsilon^{ijk} b_\mu^{(i)} b_\mu^{(j)} \quad (22)$$

avec $\dot{\sigma}^k = 0$. On sait que l'opérateur de spin qu'on peut écrire $S^k = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \mathcal{M}^{ij}$ obéit aux relations de commutation du groupe des rotations tridimensionnelles :

$$[S^i, S^j] = \varepsilon^{ijk} S^k. \quad (23)$$

On en déduira donc les relations correspondantes sur les crochets de Poisson des fonctions σ^k , soit :

$$[\sigma^i, \sigma^j] = \varepsilon^{ijk} \sigma^k$$

qui peuvent être aisément vérifiées à partir de (22). Ces relations (23) doivent être jointes aux relations de Lie (17) pour définir complètement l'algèbre de Lie du groupe d'invariance pris dans son ensemble (bien entendu les crochets des σ^k avec les G_μ et les $M_{\mu\nu}$ sont nuls).

Pour mettre en évidence la signification physique de ces trois nouvelles constantes, tirons le vecteur relativiste de spin de l'expression du moment angulaire propre :

$$s_\mu = \frac{i}{2c} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \dot{x}_\nu S_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} I \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} b_\nu^{(4)} b_\alpha^{(\xi)} b_\beta^{(\xi)}$$

ou encore, le terme en $b_\alpha^{(4)} b_\beta^{(4)}$ s'annulant par antisymétrie :

$$s_\mu = \frac{1}{2} I \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} b_\nu^{(4)} b_\alpha^{(r)} t_\beta^{(r)}$$

Si nous exprimons $b_\nu^{(4)}$ en fonction des trois autres vecteurs au moyen de (19) et contractons s_μ par l'un de ceux-ci, soit $b_\mu^{(i)}$, il vient :

$$s_\mu t_\mu^{(i)} = \frac{1}{2} \frac{1}{6} I \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon_{\nu\lambda\rho} \varepsilon^{rst} b_\mu^{(i)} b_\alpha^{(k)} t_\beta^{(k)} t_\lambda^{(r)} b^{(s)} t_\rho^{(t)}$$

ce qui fournit après quelques calculs :

$$s_\mu b_\mu^{(i)} = -\frac{3}{6} I \varepsilon^{ijk} b_\alpha^{(j)} b_\alpha^{(k)} = \sigma^i$$

Ainsi la projection du spin sur chacun des vecteurs du genre espace du tétrapode est la constante correspondante $s_\mu^{(i)} = \sigma^i$. Si nous nous souvenons que le spin est orthogonal à la vitesse unitaire nous voyons que *le spin est un vecteur d'espace propre rigidement lié au trièdre d'espace du tétrapode mobile*. Naturellement sa grandeur :

$$s_0 = \sqrt{s_\mu s_\mu}$$

est aussi constante.

Nous pouvons d'ailleurs particulariser la jauge en choisissant l'un des vecteurs, par exemple $b_\mu^{(3)}$ sur s_μ , ce qui est permis parce que la rotation nécessaire pour cela est indépendante du temps (il restera encore un degré de liberté dans le plan des nouveaux $b_\mu^{(1)}$ et $b_\mu^{(2)}$). Cela revient à choisir les deux constantes σ^1 et σ^2 nulles :

$$b_\mu^{(3)} t_\mu^{(1)} = 0 \quad b_\mu^{(3)} t_\mu^{(2)} = 0.$$

Comme $b_\mu^{(3)} b_\mu^{(3)} = 0$ cela signifie que $b_\mu^{(3)}$ est colinéaire au quatrième vecteur $b_\mu^{(4)}$. En d'autres termes, en raisonnant dans le système propre, le vecteur d'espace $\frac{d}{d\tau} b^{(3)}$ est nul, autrement dit : *le spin est axe instantané de rotation dans le système propre*. Les vecteurs d'espace $b^{(1)}$ et $b^{(2)}$ qui restent orthogonaux à l'axe fixe $b^{(3)}$, tournent autour de lui avec une vitesse angulaire Ω , et on a

$$\frac{d}{d\tau} b^{(1)} = \Omega b^{(2)}$$

et

$$\frac{d}{d\tau} b^{(2)} = -\Omega b^{(1)}$$

Ainsi

$$\Omega = \left(\frac{d}{d\tau} b^{(1)} \right) \cdot b^{(2)}$$

n'est autre que le scalaire constant

$$\omega^3 = b_\mu^{(1)} b_\mu^{(2)} = \sigma^3 / I.$$

Ainsi le mouvement de rotation dans le système propre est uniforme, le spin prend l'expression

$$s_\mu = (b_\mu^{(1)} t_\mu^{(2)}) t_\mu^{(3)}$$

et sa grandeur est

$$s_0 = \sigma^3 = I \omega^3,$$

ce qui fournit comme conséquence du choix de la jauge, une relation importante (et tout à fait classique) entre les constantes du mouvement [28].

Enfin, en utilisant l'expression du spin

$$s_\mu = s_0 b_\mu^{(3)},$$

nous pouvons exprimer le moment angulaire propre en fonction du spin et du balourd t_μ , par la formule bien connue [6] :

$$S_{\mu\nu} = \frac{i}{c} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \dot{x}_\alpha \varepsilon_\beta - \frac{1}{c} (t_\mu \dot{x}_\nu - t_\nu \dot{x}_\mu)$$

soit :

$$S_{\mu\nu} = -s_0 \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} t_\alpha^{(4)} t_\beta^{(3)} + I (b_\mu^{(4)} b_\nu^{(4)} - b_\nu^{(4)} b_\mu^{(4)})$$

soit, en tenant compte des relations (19) :

$$S_{\mu\nu} = s_0 (t_\mu^{(1)} t_\nu^{(2)} - b_\nu^{(1)} t_\mu^{(2)}) + I (b_\mu^{(4)} t_\nu^{(4)} - b_\nu^{(4)} t_\mu^{(4)}).$$

On voit que c'est une généralisation de l'expression considérée dans la section précédente. Du reste, si on contracte par $\omega_{\mu\nu} = b_\mu^{(5)} b_\nu^{(5)}$, on obtient :

$$T = \frac{1}{4} S_{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (s_0 b_\mu^{(1)} b_\mu^{(2)} + I b_\mu^{(4)} b_\mu^{(4)}).$$

Le premier terme est bien le Lagrangien linéaire de la section précédente, le second est une conséquence de l'existence d'un balourd. Nous voyons donc, en conclusion, quelle relation étroite il y a entre les deux formes proposées par le Lagrangien.

V. Forme spinorielle des conditions de jauge. —

Le modèle du tétrapode a été récemment relié par T. Takabayasi [18], [29] à la représentation spinorielle habituelle des fonctions d'onde quantique. Soit ψ un spineur de Dirac, normé en posant :

$$(\bar{\psi}\psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma_5\psi)^2 = 1 \text{ avec } \bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_4$$

($\psi^\dagger$ est le conjugué hermitien de ψ). On forme le vecteur du genre temps et le pseudovecteur du genre espace habituels, tous deux normés et orthogonaux l'un à l'autre :

$$t_\mu^{(4)} = \bar{\psi} \gamma_\mu \psi$$

$$b_\mu^{(3)} = i \bar{\psi} \gamma_5 \gamma_\mu \psi.$$

Puis on introduit les spineurs conjugués de charge ψ^c en utilisant la matrice de conjugaison de charge C ($C^+ C = 1$, $C^+ = -C$) qui transforme chaque matrice γ_μ en sa transposée γ_μ^T :

$$\gamma_\mu^T = -C^{-1} \gamma_\mu C$$

d'où :

$$\gamma_5^T = + C^{-1} \gamma_5 C.$$

Les spineurs conjugués de charge sont alors :

$$\psi^c = C \bar{\psi}^T,$$

d'où :

$$(\bar{\psi})^c = - \psi^T C^{-1}.$$

On peut ensuite former deux nouveaux vecteurs :

$$\begin{cases} l_\mu^{(1)} = \frac{1}{2} (\bar{\psi}^c \gamma_\mu \psi - \bar{\psi} \gamma_\mu \psi^c) \\ l_\mu^{(2)} = \frac{1}{2i} (\bar{\psi}^c \gamma_\mu \psi + \bar{\psi} \gamma_\mu \psi^c). \end{cases} \quad (24)$$

On peut montrer facilement que ces nouveaux vecteurs sont tous deux du genre espace, qu'ils sont réels, normés, orthogonaux l'un à l'autre et aux deux précédents, si bien que nous avons ici un tétrapode semblable à celui que nous avons défini dans la section III. Si une équation d'onde (ou plus généralement un Lagrangien) est donnée en fonction du spineur ψ , elle peut aussi être exprimée en fonction du tétrapode correspondant, ce qui peut mettre en évidence une interprétation physique suggestive.

Nous nous bornerons ici à montrer le lien des transformations de jauge mises en évidence dans le cas des deux Lagrangiens étudiés ci-dessus, avec celles qu'on considère généralement dans les équations d'onde spinorielles. Une transposition semblable de la forme spinorielle dans celle du tétrapode a déjà été proposée par l'un de nous [30] en associant des bases spinorielles et vectorielles particulières. En premier lieu, considérons la jauge spinorielle la plus fréquemment utilisée, conservant par exemple l'équation de Dirac et l'ensemble des seize grandeurs tensorielles attachées au formalisme de Dirac, soit :

$$\psi' = e^{ir} \psi,$$

r étant un nombre réel. $b_\mu^{(4)}$ et $b_\mu^{(3)}$ restent évidemment invariants. Mais on voit immédiatement que les spineurs conjugués de charge deviennent :

$$\psi'^c = e^{-ir} \psi^c \quad \bar{\psi}'^c = e^{ir} \bar{\psi}^c$$

d'où on tire :

$$\bar{\psi}'^c \gamma_\mu \psi'^c = e^{-2ir} \bar{\psi}^c \gamma_\mu \psi^c$$

$$\bar{\psi}'^c \gamma_\mu \psi' = e^{2ir} \bar{\psi}^c \gamma_\mu \psi.$$

Nos deux premiers vecteurs deviennent alors :

$$b_\mu'^{(1)} = b_\mu^{(1)} \cos 2r - b_\mu^{(2)} \sin 2r$$

$$b_\mu'^{(2)} = b_\mu^{(1)} \sin 2r + b_\mu^{(2)} \cos 2r.$$

Donc une telle transformation de jauge fait tour-

ner les vecteurs $b_\mu^{(1)}$, $b_\mu^{(2)}$ autour du vecteur fixe $b_\mu^{(3)}$ dans l'espace propre. Nous retrouvons ainsi le groupe de jauge du Lagrangien linéaire de notre section III.

Considérons maintenant une transformation de jauge plus compliquée mettant en jeu la conjugaison de charge, qui a été proposée récemment par Pauli [31] comme une transformation canonique linéaire d'un grand intérêt :

$$\psi' = \alpha \psi + \beta \gamma_5 \psi^c \quad (25)$$

d'où

$$\bar{\psi}' = \alpha^* \bar{\psi} - \beta^* \bar{\psi}^c \gamma_5$$

où α et β sont deux nombres complexes quelconques vérifiant la relation :

$$\alpha \alpha^* + \beta \beta^* = 1.$$

ce qui ne laisse que trois degrés de liberté. Si on porte les équations (25) dans l'expression de $b_\mu^{(4)}$, celle-ci devient :

$$b_\mu'^{(4)} = (\alpha^* \bar{\psi} - \beta^* \bar{\psi}^c \gamma_5) \gamma_\mu (\alpha \psi + \beta \gamma_5 \psi^c).$$

Le calcul s'exécute sans peine en exprimant les spineurs conjugués de charge au moyen de la matrice de conjugaison C . Celle-ci peut sauter par dessus chaque matrice γ en la transformant en sa transposée. Il faut remarquer que toute expression bilinéaire $\bar{\psi} A \psi$ est égale à sa transposée $(\bar{\psi} A \psi)^T$ qui symbolise un ordre différent des opérations :

$$\bar{\psi} A \psi = (\bar{\psi} A \psi)^T = \psi^T A^T \bar{\psi}^T.$$

Grâce à cette remarque, on peut montrer que :

$$\bar{\psi}^c \gamma_\mu \psi^c = \psi^T \gamma_\mu^T \bar{\psi}^T = \bar{\psi} \gamma_\mu \psi$$

$$\bar{\psi}^c \gamma_5 \gamma_\mu \psi^c = \psi^T \gamma_5^T \gamma_\mu^T (\bar{\psi}^c)^T = - \bar{\psi}^c \gamma_5 \gamma_\mu \psi = 0$$

et de même

$$\bar{\psi} \gamma_5 \gamma_\mu \psi^c = (\psi^c)^T \gamma_5^T \gamma_\mu^T (\bar{\psi})^T = - \bar{\psi} \gamma_5 \gamma_\mu \psi^c = 0.$$

Finalement, il ne reste que :

$$b_\mu'^{(4)} = (\alpha^* \alpha + \beta^* \beta) \bar{\psi} \gamma_\mu \psi = b_\mu^{(4)}.$$

Nous voyons que le vecteur $b_\mu^{(4)}$ est invariant sous la transformation de jauge considérée. Au contraire, si on fait le même calcul sur $b_\mu^{(3)}$, il vient

$$b_\mu'^{(3)} = (\alpha^* \alpha - \beta^* \beta) l_\mu^{(3)} + i(\alpha^* \alpha - \beta^* \alpha) l_\mu^{(1)} + (\alpha^* \beta + \beta^* \alpha) b_\mu^{(2)}.$$

Ce vecteur est évidemment orthogonal à $b_\mu^{(4)}$ et on voit facilement que : $b_\mu^{(3)} b_\mu^{(3)} = 1$.

Pour appliquer la transformation (25) aux vecteurs (24), il faut utiliser une nouvelle identité qu'on démontre comme les précédentes :

$$\bar{\psi}^c \gamma_\mu \gamma_5 \psi^c = \psi^T \gamma_\mu^T \gamma_5^T \bar{\psi}^T = - \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi.$$

Nous avons alors les transformations suivantes :

$$\bar{\psi}'^c \gamma_{\mu} \psi' = \alpha^2 \bar{\psi}^c \gamma_{\mu} \psi - \beta^2 \bar{\psi} \gamma_{\mu} \psi^c + 2\alpha\beta \bar{\psi} \gamma_5 \gamma_{\mu} \psi$$

$$\bar{\psi}' \gamma_{\mu} \psi'^c = \alpha^{*2} \bar{\psi} \gamma_{\mu} \psi^c - \beta^{*2} \bar{\psi} \gamma_{\mu} \psi + 2\alpha^*\beta^* \bar{\psi} \gamma_5 \gamma_{\mu} \psi.$$

ce qui donne pour les vecteurs :

$$b_{\mu}'^{(1)} = \frac{1}{2} (\alpha^2 + \beta^{*2} + \alpha^{*2} + \beta^2) l_{\mu}^{(1)} \\ + \frac{i}{2} (\alpha^2 + \beta^{*2} - \alpha^{*2} - \beta^2) l_{\mu}^{(2)} - i(\alpha\beta - \alpha^*\beta^*) l_{\mu}^{(3)}$$

$$b_{\mu}'^{(2)} = \frac{1}{2} (\alpha^2 - \beta^{*2} + \alpha^{*2} - \beta^2) l_{\mu}^{(2)} \\ - \frac{i}{2} (\alpha^2 - \beta^{*2} - \alpha^{*2} + \beta^2) l_{\mu}^{(1)} - (\alpha\beta + \alpha^*\beta^*) l_{\mu}^{(3)}.$$

Sur ces expressions, on vérifie aisément les autres relations d'orthonormalité sur $b_{\mu}'^{(1)}$, $b_{\mu}'^{(2)}$, $b_{\mu}'^{(3)}$.

Pour nous résumer, nous avons montré que la transformation de jaune spinorielle de Pauli exprimée en fonction du tétrapode de Takabayasi est équivalente à une *rotation tridimensionnelle des vecteurs du genre espace* $b_{\mu}^{(1)}$, $b_{\mu}^{(2)}$, $b_{\mu}^{(3)}$ qui laisse $b_{\mu}^{(4)}$ invariant. Il nous paraît intéressant de faire remarquer que c'est là justement le groupe de jauge que nous avons mis en évidence dans le Lagrangien que nous avons étudié dans notre section IV, et qui a été utilisé par la suite pour la théorie des particules de Bohm-Hillion-Vigier.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] NOETHER (E.), *Gotting. Nachr.*, 1918, 235.
 [2] HALBWACHS (F.), *Prog. Theor. Physics*, 1960, **24**, 291.
 [3] HALBWACHS (F.) et VIGIER (J. P.), *C. R. Acad. Sc.*, 1959, **248**, 490.
 [4] WEYSENHOFF et RAABE, *Acta Phys. Polon.*, 1947, **9**, 8.
 [5] DE BROGLIE (L.), *Théorie des particules de spin 1/2*, Gauthier-Villars, 1952.
 [6] HALBWACHS (F.), *Théorie des fluides à spin*, Gauthier-Villars, 1960.
 [7] TAKABAYASI (T.), *Prog. Theor. Physics*, 1960, **23**, 915.
 [8] BOUCHIAT (C.) et MICHEL (L.), *Phys. Rev.*, 1955, **106**, 170.
 [9] YUKAWA, *Phys. Rev.*, 1953, **91**, 415 et 416.
 [10] RAYSKI, *Acta Phys. Polon.*, 1950, **10**, 103 ; *Proc. Phys. Soc.*, London, 1951, A **64**, 957.
 [11] BOHM et VIGIER, *Phys. Rev.*, 1958, **109**, 1882.
 [12] MATHISSON, *Acta Phys. Polon.*, 1937, **6**, 163 et 218.
 [13] LUBANSKI, *Acta Phys. Polon.*, 1937, **6**, 356.
 [14] HALBWACHS, HILLION et VIGIER, *Nuovo Cimento*, 1960, **15**, 209.
 [15] HALBWACHS, HILLION et VIGIER, *Ann. Inst. H. Poincaré*, 1959, **16**, 115.
 [16] BOHM, HILLION et VIGIER, *Prog. Theor. Physics*, 196, **24**, 761.
 [17] UNAL et VIGIER, *C. R. Acad. Sc.*, 1957, **245**, 1787 e 1891.
 [18] TAKABAYASI (T.), *C. R. Acad. Sc.*, 1958, **246**, 64.
 [19] HALBWACHS (F.), *Acta Phys. Polon.*, 1960, **19**, 93.
 [20] BOHM, HILLION, TAKABAYASI et VIGIER, *Prog. Theor. Physics*, 1960, **23**, 496.
 [21] FRENKEL, *Z. Physik*, 1926, **37**, 243.
 [22] NAKANO, *Prog. Theor. Physics*, 1956, **15**, 333.
 [23] HALBWACHS et VIGIER, *Nuovo Cimento*, 1959, **11**, 882.
 [24] OSTROGRADSKI, *Mém. Acad. St. Péters.*, 1850, **6**, 385.
 [25] WEYSENHOFF, *Acta Phys. Polon.*, 1952, **11**, 55.
 [26] HALBWACHS et VIGIER, *C. R. Acad. Sc.*, 1959, **248**, 1124.
 [27] HALBWACHS, *C. R. Acad. Sc.*, 1959, **249**, 2500. HALBWACHS, HILLION et VIGIER, *C. R. Acad. Sc.*, 1960, **250**, 471.
 [28] HALBWACHS, *C. R. Acad. Sc.*, 1959, **249**, 2293. DE BROGLIE et VIGIER, *C. R. Acad. Sc.*, 1959, **249**, 2225.
 [29] TAKABAYASI, *Nuovo Cimento*, 1959, **13**, 332.
 [30] SOURIAU (J. M.), *C. R. Acad. Sc.*, 1957, **244**, 2779 ; 1958, **246**, 3588.
 [31] PAULI, *Nuovo Cimento*, 1957, **6**, 204.