restreinte) et de 1923 (mécanique ondulatoire), révolutions dont on a pu croire qu'elles sonnaient le glas d'une discipline épuisée.

Le destin que lui assignaient Poincaré (1854-1912) et Einstein (1879-1955) s'est nuancé. Grâce à des interactions toujours plus nombreuses avec d'autres disciplines de la physique, la mécanique ne s'est pas laissé reléguer dans le musée de l'histoire ou dans l'utilisation à échelle moyenne. Depuis plus d'un demi-siècle, elle a rencontré plus de paradoxes que jamais, mais cela lui a permis de mieux comprendre ses limites et la nature de ses méthodes, et profondément marquée par la relativité générale, elle subsiste encore aujourd'hui, tel un vaste chantier où les ressources des mathématiques les plus modernes se conjuguent avec celles de nombreuses techniques expérimentales de tous ordres. Nul ne peut se hasarder à prédire l'avenir de ce chantier.

La seule conclusion de l'histoire qui apparaisse certaine aujourd'hui est que la mécanique a permis de soumettre à l'épreuve le processus mental de l'abstraction relativement aux données sensibles. Ce processus n'est pas condamné, il est simplement reconnu et déclaré infirme sans la conscience d'une double relativité : celle des dimensions de l'objet et celle du système où cet objet est placé et considéré. La leçon dépasse à n'en pas douter le simple problème de l'avenir d'une discipline particulière.

PIERRE COSTABEL

Bibliographie

R. DUGAS, *Histoire de la mécanique*, Griffon, Neuchâtel, 1950 / R. TATON dir., *Histoire générale des sciences*, 4 vol., P.U.F., Paris, 1957-1964.

Corrélats

ALEMBERT (J. LE ROND D'), ARISTOTE, DESCARTES (R.), EINSTEIN (A.), ESPACE-TEMPS, GALILÉE, HUYGENS (C.), LAGRANGE (J. L.), LEIBNIZ (G. W.), LÉONARD DE VINCI, MÉCANISME, MODÈLE, NEWTON (I.), PASCAL (B.), PERPÉTUEL (MOUVEMENT), POINCARÉ (H.), RELATIVITÉ.

MÉCANIQUE ANALYTIQUE

1 *Formalisme lagrangien*

2 *Formalisme canonique*

3 *Applications*

La mécanique analytique représente une approche de la mécanique rationnelle qui s'est développée, à partir des travaux de Maupertuis (1744), dans un certain isolement par rapport aux autres branches de la mécanique et de la physique. Le point de départ en est le « principe de moindre action » qui permet de déterminer le mouvement d'un point matériel dans un champ de forces. Si on considère le mouvement le long d'un arc de trajectoire AB et que l'on évalue l'intégrale curviligne :

$$\mathcal{A}_A^B = \int_A^B < m\vec{v}, d\vec{r} >$$

(action de Maupertuis), on peut montrer que cette quantité est minimale par rapport à tous les mouvements voisins passant par A et B aux mêmes instants et possédant la même énergie que le mouvement réel. Réciproquement, cette condition d'action minimale permet de déterminer univoquement le mouvement. Elle est donc équivalente à la loi de Newton :

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F},$$

qui détermine le mouvement localement et de proche en proche. Ce principe diffère très profondément de celui de Newton. Il oblige à considérer le mouvement globalement, comme un tout, et à le comparer à une infinité de mouvements virtuels parmi lesquels il est privilégié. Il a conduit à une reconstruction de la mécanique sous une forme très abstraite qui supprime l'image des points matériels tirés par des forces, et qui suggère finalement la considération d'un « espace des mouvements » où sont représentés l'ensemble des mouvements possibles, chaque mouvement étant un point de cet espace. Sous cette forme la mécanique analytique se trouve particulièrement apte à traiter les théories qui considèrent, non un seul mouvement réel, mais une collection de mouvements possibles, c'est-à-dire la mécanique statistique et la mécanique quantique.

1 *Formalisme lagrangien*

Principe des travaux virtuels

On s'intéresse ici à l'étude d'un *système dynamique* classique, c'est-à-dire d'un assemblage de k *points matériels* qui peuvent être soumis à des *liaisons* (exemples : certains points peuvent être astreints à se mouvoir sur une courbe ou une surface donnée ; deux points peuvent être liés de sorte que leur distance reste constante ; etc.).

On numérotera les points par un indice j, avec $j = 1, 2, ..., k$, et l'on désigne par $\vec{r}_j$ la position géométrique du point numéro j, par m_j sa masse, par $\vec{F}_j$ la résultante des forces que l'on exerce sur lui. Les mécanismes assurant les liaisons peuvent exercer par ailleurs une force supplémentaire $\vec{f}_j$, appelée « force de liaison » ou force « de contact » (exemple : si un point matériel est lié par un fil inextensible à un point fixe, la liaison lui impose de rester sur une sphère ; la force de liaison est mesurée par la tension du fil). Le mouvement du système est alors déterminé par la loi de Newton :

$$(1) \qquad m_j\ddot{\vec{r}}_j = \vec{F}_j + \vec{f}_j,$$

où $j = 1, 2, ..., k$; on note par un point la dérivation par rapport au temps ; $\dot{\vec{r}}_j$ est le vecteur *vitesse* du point numéro j, $\ddot{\vec{r}}_j$ son *accélération*.

Imaginons, pour chaque point $\vec{r}_j$, un « déplacement virtuel » infinitésimal $\delta\vec{r}_j$, compatible avec les liaisons telles qu'elles existent à l'instant t (exemple : si $\vec{r}_j$ est astreint à se déplacer sur une sphère, $\delta\vec{r}_j$ est un vecteur quelconque tangent à la sphère) ; il résulte évidemment des équations (1) que l'on a :

$$(2) \qquad \sum_j < m_j\ddot{\vec{r}}_j, \delta\vec{r}_j > = \sum_j < (\vec{F}_j + \vec{f}_j), \delta\vec{r}_j >$$

(les crochets $<,>$ désignent le produit scalaire ordinaire).

Réciproquement, le système (1) est vérifié si l'égalité (2) est valable *quels que soient les déplacements virtuels* $\delta\vec{r}_j$ *compatibles avec les liaisons* : tel est le résultat découvert par d'Alembert (*Traité de dynamique*, 1743), que l'on appelle *principe des travaux virtuels* (parce que le terme écrit à droite de (2) est le travail des forces dans le « déplacement virtuel » défini par les $\delta\vec{r}_j$).

Dans le cas où les liaisons sont *parfaites* (exemples : glissements sans frottement ; liaisons des points à l'intérieur d'un solide), les forces de liaison ne travaillent pas, ce qui s'exprime par la condition :

$$(3) \qquad \sum_j < \vec{f}_j, \delta\vec{r}_j > = 0.$$

On peut alors remplacer l'équation (2) par :

$$(4) \qquad \sum_j < m_j\ddot{\vec{r}}_j, \delta\vec{r}_j > = \sum_j < \vec{F}_j, \delta\vec{r}_j >,$$

ce qui permet d'étudier le mouvement du système sans se préoccuper des forces de liaison.

Équations de Lagrange

Dans de nombreux cas, on peut utiliser les équations définissant les liaisons pour exprimer la position de chaque point au moyen d'un nombre réduit de paramètres ; de façon précise on dit que le système est *holonôme* si l'on peut choisir des *paramètres indépendants* $q^1, q^2, ..., q^n$ tels que l'on sache exprimer la position $\vec{r}_j$ de chaque point en fonction de $q^1, ..., q^n$, et éventuellement du temps t (exemple : la position d'un point mobile sur une sphère s'exprime en fonction de deux paramètres, sa latitude et sa longitude). Il suffira alors de connaître l'évolution des paramètres q^k en fonction du temps pour connaître le mouvement complet du système. Cela revient à étudier le mouvement d'un point dans un espace à n dimensions appelé *espace de configuration*.

Il est facile d'utiliser les paramètres q^k pour calculer le travail virtuel des forces appliquées : un simple calcul de dérivation permet de trouver les nombres φ_k (parfois appelés *forces généralisées*) tels que :

$$(5) \qquad \sum_j < \vec{F}_j, \delta\vec{r}_j > = \sum_k \varphi_k \delta q^k.$$

On peut aussi calculer, au moyen des q^k, de leurs dérivés $\dot{q}^k$, et éventuellement de t, l'*énergie cinétique* T du système, définie par :

$$(6) \qquad T = \frac{1}{2}\sum_j m_j\dot{\vec{r}}_j^2.$$

Si l'on considère les $2n + 1$ variable q^k, $\dot{q}^k$ et t comme *indépendantes*, on peut alors calculer les dérivés partielles :

$$\frac{\partial T}{\partial q^k}, \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k}, \frac{\partial T}{\partial t};$$

Lagrange a établi l'identité :

$$(7)\quad \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k}\right]-\frac{\partial T}{\partial q^k}=\sum_j \left\langle m_j \ddot{\vec{r}}_j, \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q^k}\right\rangle .$$

En remarquant que le déplacement virtuel $\delta\vec{r}_j$ est donné par :

$$(8)\quad \delta\vec{r}_j=\sum_k \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q^k}\delta q^k,$$

l'identité de Lagrange (7) montre que le premier membre de (4) s'écrit :

$$(9)\quad \left\{\sum_k \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k}\right]-\frac{\partial T}{\partial q^k}\right\}\delta q^k.$$

En remplaçant le second membre du principe des travaux virtuels (4) par son expression (5), et en notant que les nombres δq^k sont quelconques, puisque les paramètres ont été supposés indépendants, on arrive aux équations :

$$(10)\quad \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k}\right]-\frac{\partial T}{\partial q^k}=\varphi_k,$$

où k est égal à 1, 2, ..., n.

Telles sont les *équations de Lagrange* (*Mécanique analytique*, 1788) qui permettent d'étudier le mouvement d'un système en utilisant des paramètres arbitraires.

Formulation variationnelle et principe de Hamilton

Supposons maintenant, non seulement que les liaisons sont holonômes et parfaites, mais que les forces appliquées dérivent d'un potentiel u ; par définition, u est une fonction de la position des points (et éventuellement de t) qui donne par dérivation le travail virtuel des forces, changé de signe :

$$(11)\quad \sum_j \langle \vec{F}_j, \delta\vec{r}_j\rangle = -\delta u.$$

En remarquant que :

$$\delta u=\sum_k \frac{\partial u}{\partial q^k}\delta q^k,$$

on voit que les forces généralisées φ_k [cf. (5)] sont données par :

$$(12)\quad \varphi_k=-\frac{\partial u}{\partial q^k}.$$

Si l'on porte cette expression dans les équations de Lagrange (10), on est amené à introduire la quantité :

$$(13)\quad L=T-u.$$

En effet, on constate que :

$$\frac{\partial T}{\partial q^k}+\varphi_k=\frac{\partial L}{\partial q^k}.$$

Comme par ailleurs le potentiel u ne dépend pas des vitesses, les dérivées :

$$\frac{\partial u}{\partial \dot{q}^k}$$

sont nulles, ce qui donne :

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k}=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}.$$

Les équations de Lagrange s'écrivent alors sous la forme :

$$(14)\quad \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\right]=\frac{\partial L}{\partial q^k}.$$

Il existe un rapport étroit entre cette forme des équations de Lagrange et un principe très général qui semble réaliser « un accord de différentes lois de la nature qui avaient jusqu'ici paru incompatibles » (Maupertuis).

Il s'agit d'un *principe variationnel* qui se rattache au principe philosophique « du meilleur » (Leibniz), au principe optique de Fermat, au principe mécanique de moindre action proposé par Maupertuis, et dont Lagrange avait déjà perçu toute l'importance. Hamilton en donna un énoncé précis en 1834.

Désignons par Q la matrice-colonne ayant pour éléments les paramètres $q^1, \ldots, q^n$. Q est une variable à n composantes qui parcourt l'espace de configuration du système.

Notons par ailleurs que la grandeur $L = T - u$ est une fonction de $q^1, \ldots, q^n$, $\dot{q}^1, \ldots, \dot{q}^n$ et t, ce qui peut s'écrire :

$$(15)\quad L=L(Q,\dot{Q},t).$$

(Cette fonction L s'appelle *fonction lagrangienne*, ou *lagrangien*.)

Choisissons deux instants arbitraires t_1 et t_2 et considérons l'intégrale :

$$(16)\quad \mathcal{A}=\int_{t_1}^{t_2} L(Q,\dot{Q},t)\,dt.$$

(Cette intégrale s'appelle *action hamiltonienne*.)

Désignons respectivement par $\partial L/\partial Q$, $\partial L/\partial \dot{Q}$ les matrices-lignes formées par les dérivées partielles de L par rapport aux q^k et aux $\dot{q}^k$; en dérivant (16) sous le signe $\int$, on obtient la formule :

$$(17)\quad \delta\mathcal{A}=\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}}\cdot\delta\dot{Q}+\frac{\partial L}{\partial Q}\cdot\delta Q\right]dt,$$

où les . désignent des multiplications matricielles. En remarquant que :

$$\delta\dot{Q}=\frac{d}{dt}[\delta Q],$$

une intégration par parties donne :

$$(18)\quad \delta\mathcal{A}=\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}}\cdot\delta Q\right]_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial Q}-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}}\right]\right].\delta Q\,dt.$$

On voit apparaître sous le signe $\int$ la ligne :

$$\frac{\partial L}{\partial Q}-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}}\right],$$

ligne dont tous les éléments sont nuls en raison des équations de Lagrange (14) ; d'où l'énoncé :

La « variation » $\delta\mathcal{A}$ de l'intégrale d'action (16) est nulle dans toute « variation » δQ du mouvement telle que $\delta Q = 0$ pour $t = t_1$ et $t = t_2$.

Réciproquement, on constate que ce *principe de Hamilton* est équivalent aux équations de Lagrange, donc qu'il suffit à caractériser le mouvement (dans l'intervalle de temps arbitraire t_1, t_2).

Si on connaît un groupe G d'invariance du lagrangien, opérant sur l'espace de configuration, à chaque transformation infinitésimale δ_j de G va correspondre une constante du mouvement. En effet, on peut reprendre l'expression (18) de $\delta_j\mathcal{A}_A^B$ pour la transformation δ_j : ici, puisqu'on est sur une ligne de mouvement, l'intégrale sera automatiquement nulle. Par contre, en posant $p_k=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$, la partie tout intégrée fournira :

$$(19)\quad \delta_j\mathcal{A}_A^B=\sum_k p_k\,\delta_j q^k(B)-\sum_k p_k\,\delta_j q^k(A)=0,$$

puisque δ_j invarie le lagrangien. La quantité :

$$(20)\quad u_j=\sum_k p_k\,\delta_j q^k,$$

associée à la transformation δ_j, est donc une *constante du mouvement*. Ainsi l'invariance par translation entraîne la conservation de l'impulsion. L'invariance par rotation entraîne la conservation du moment cinétique.

2 *Formalisme canonique*

Formalisme hamiltonien

Récapitulons les calculs qui interviennent lorsqu'on applique les équations de Lagrange à un système répondant aux conditions précédentes.

– On considère les variables q^k, $\dot{q}^k$ et t comme indépendantes, et on écrit la *fonction lagrangienne* :

$$(21)\quad L=L(q^k,\dot{q}^k,t).$$

– On calcule les dérivées partielles :

$$(22)\quad p_k=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k},$$

où p_k est le *moment canoniquement conjugué* de q^k.

– On résout les *équations différentielles* :

$$(23)\quad \frac{dp_k}{dt}=\frac{\partial L}{\partial q^k};\quad \frac{dq^k}{dt}=\dot{q}^k.$$

(On reconnaît les équations de Lagrange (14) et la définition initiale des variables $\dot{q}^k$.)

Si on développe le système (22), on constate qu'il se compose de n équations dans lesquelles les variables $\dot{q}^k$ interviennent linéairement, et que le déterminant des coefficients n'est pas nul (cela résulte du fait que l'énergie cinétique est une forme quadratique définie positive) ; on peut donc *résoudre* ces équations par rapport aux $\dot{q}^k$; ce que nous noterons :

$$(24)\quad \dot{Q}=\dot{Q}(P,Q,t).$$

Introduisons maintenant une nouvelle grandeur, le *hamiltonien* du système, qui est par définition la quantité :

$$(25)\quad H=P\,.\,\dot{Q}-L(Q,\dot{Q},t).$$

En remplaçant dans cette relation $\dot{Q}$ par son expression (24), on exprime évidemment H en fonction de P, Q et t :

$$(26)\quad H=H(P,Q,t).$$

La fonction ainsi définie s'appelle *fonction hamiltonienne*.

Donnons une variation arbitraire δ aux variables P et Q ; la dérivation de (25) donne évidemment :

$$\delta H=\delta P\,.\,\dot{Q}+P\,.\,\delta\dot{Q}-\frac{\partial L}{\partial Q}\delta Q-\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}}\delta\dot{Q};$$

soit, en se souvenant que :

$$P=\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}},$$

$$\delta H=\delta P\,.\,\dot{Q}-\frac{\partial L}{\partial Q}\delta Q=\sum_k\left(\delta p_k\dot{q}^k-\frac{\partial L}{\partial q^k}\delta q^k\right).$$

En comparant avec les résultats de la dérivation directe de (26), on trouve donc les *identités* :

$$(27)\quad \frac{\partial H}{\partial q^k}=-\frac{\partial L}{\partial q^k};\quad \frac{\partial H}{\partial p_k}=\dot{q}^k.$$

En utilisant ces identités, les équations du mouvement (23) se transforment immédiatement en :

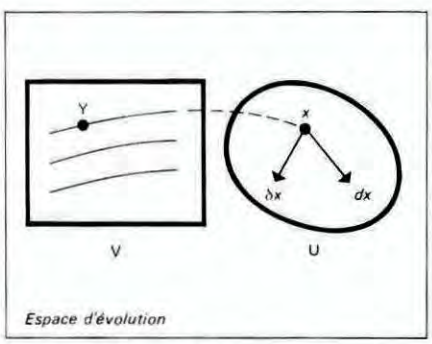
$$(28)\qquad \frac{dq^k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k};\quad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^k}.$$

Telles sont les équations de Hamilton (1834), appelées aussi *équations canoniques* ; elles montrent qu'il suffit de connaître la fonction hamiltonienne pour déterminer les équations du mouvement. On les interprète souvent en considérant que les « variables canoniques » p_k et q^k sont les coordonnées d'un point qui se meut dans un espace à $2n$ dimensions, appelé *espace de phase.*

Formalisme symplectique

Désignons par Y une *condition initiale* quelconque du système : pour déterminer Y, il faut se donner une date t, ainsi que la position et la vitesse de tous les points du système à cette date.

Nous avons remarqué que l'on connaît ces positions et ces vitesses si l'on connaît les



Espace d'évolution

valeurs des variables q^k et $\dot{q}^k$ à cet instant t ; par conséquent, une condition initiale Y est repérée par les $2n + 1$ variables q^k, $\dot{q}^k$ et t (ou, si l'on préfère, par les $2n + 1$ variables p_k, q^k, t). On peut donc représenter Y comme un point d'un espace V à $2n + 1$ dimensions, l'*espace d'évolution* (cf. figure).

Lorsque le système évolue spontanément, le point Y décrit une courbe tracée dans V, courbe qui définit le *mouvement* du système ; il résulte de la théorie des systèmes différentiels qu'une condition initiale *caractérise* le mouvement, c'est-à-dire que ces courbes sont disposées dans V de façon qu'il en passe une et une seule par chaque point Y de V.

On peut donc définir un mouvement par les $2n$ valeurs des coordonnées canoniques à une date t_0 arbitrairement choisie ; en d'autres termes, chaque mouvement x peut être considéré comme un point d'un espace U à $2n$ dimensions, l'*espace des mouvements.* Par exemple, le mouvement d'une planète ($n = 3$) se repère par 6 nombres (les éléments de l'orbite).

Un mouvement déterminé sera donc considéré :

a) comme une ligne (trajectoire) décrite par le point Q dans l'espace de configuration à n dimensions (le temps jouant le rôle de paramètre) ;

b) comme une ligne décrite par le point (Q, P) dans l'espace des phases à $2n$ dimensions (le temps jouant le rôle de paramètre) ;

c) comme une ligne atemporelle dans l'espace d'évolution à $2n + 1$ dimensions ;

d) comme un point atemporel dans l'espace des mouvements à $2n$ dimensions.

Considérons deux variations quelconques du mouvement, dx, δx ; on peut leur associer une grandeur appelée *crochet de Lagrange* (*Mécanique analytique*, 1788), que nous noterons $\sigma(dx, \delta x)$.

On peut la définir par la formule :

$$(29)\quad \sigma(dx, \delta x) = dt\,\delta H - \delta t\, dH + \sum_k \left[dp_k\,\delta q^k - \delta p_k\, dq^k\right].$$

Cette expression est donnée ici au moyen des variations des conditions initiales ; comme elle ne dépend en fait que des variations des *mouvements*, on dit qu'elle constitue un *invariant intégral* ; en particulier, si l'on écrit qu'elle est nulle quels que soient δp_k, δq^k, δt, on retrouve les équations canoniques (28).

Il est immédiat de vérifier que σ est bilinéaire et antisymétrique : σ est donc un *tenseur antisymétrique du second ordre* (en abrégé 2-*forme*) ; le tenseur ainsi défini en chaque point x de U confère à l'espace des mouvements une structure géométrique (appelée *structure symplectique*) ; les transformations ponctuelles de U qui conservent σ sont nommées *transformations canoniques* ; les champs de vecteurs qui engendrent des transformations canoniques s'appellent *transformations canoniques infinitésimales.*

On appelle *variable dynamique* toute fonction scalaire u définie sur U ; on peut lui associer une transformation canonique infinitésimale, que nous noterons $\delta_u x$, grâce à la formule :

$$(30)\qquad \sigma(\delta x, \delta_u x) = \delta u,$$

pour toute variation δ.

Réciproquement, si on connaît la transformation canonique infinitésimale δ, on peut lui associer une variable dynamique :

$$(31)\qquad u = -H\,\delta t + \sum_k p_k\,\delta q^k.$$

Le fait que u ne dépend que du mouvement (grandeur *conservative*) constitue le *théorème de Noether généralisé.*

En particulier, à la translation dans le temps correspond la variable dynamique *énergie*, égale au hamiltonien H, ce qu'on écrit :

$$(32)\qquad \frac{\partial}{\partial t} = -\delta_H.$$

À l'invariance par translation dans le temps, correspond ainsi la *conservation de l'énergie.*

Dans le cas de transformations canoniques infinitésimales qui n'invarient pas le lagrangien, on peut cependant utiliser le théorème de Noether en calculant u par la formule (31) ; ainsi, dans le cas d'un système libre dans l'espace, les variables dynamiques liées aux transformations de Galilée (addition d'une vitesse constante aux points du système) expriment le mouvement rectiligne uniforme du centre de gravité (principe de l'inertie).

À tout couple de variables dynamiques u, v on peut associer une nouvelle variable dynamique, notée $[u, v]$ qui a été découverte par Lagrange :

$$(33)\qquad [u, v] = \delta_v u = -\delta_u v.$$

C'est Poisson (1809) qui en a donné l'expression au moyen de variables canoniques choisies à un instant arbitraire :

$$(34)\quad [u, v] = \sum_k \left[\frac{\partial u}{\partial q^k}\frac{\partial v}{\partial p^k} - \frac{\partial u}{\partial p_k}\frac{\partial v}{\partial q^k}\right];$$

c'est pourquoi $[u, v]$ s'appelle *crochet de Poisson* de u et v.

On peut utiliser les crochets de Poisson pour reconnaître si une fonction u des variables dynamiques et du temps est conservative : dans ce cas, en effet, la formule (32) donne :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\delta_H u ;$$

soit, compte tenu de (33) :

$$(35)\qquad \frac{\partial u}{\partial t} = [H, u].$$

Un calcul direct, utilisant (29) et (34), montre que cette égalité est caractéristique des grandeurs conservatives.

3 *Applications*

Mécanique relativiste

Les résultats précédents peuvent s'étendre à d'autres problèmes ayant une structure analogue (principes variationnels portant sur des intégrales simples). Traitons le cas de la mécanique relativiste.

En relativité *restreinte*, on remplace l'intégrale d'action (16) par l'expression :

$$(36)\quad \mathcal{A} = -mc^2 \int \sqrt{dt^2 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2}},$$

c étant la vitesse de la lumière (cas d'une particule libre de masse m) ou, en prenant le temps t comme paramètre :

$$(37)\qquad \mathcal{A} = -mc^2 \int \sqrt{1 - \vec{r}^2/c^2}\, dt.$$

Les équations de Lagrange montrent que le mouvement est encore rectiligne uniforme (avec une vitesse v inférieure à c) ; le théorème de Noether s'applique encore ; dans le cas des translations de temps, il permet de *définir* l'énergie relativiste E ; elle est encore égale au hamiltonien ; en partant du nouveau lagrangien $-mc^2\sqrt{1 - \vec{r}^2/c^2}$, la formule (25) donne :

$$(38)\qquad E = H = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

d'où la formule d'Einstein qui donne l'énergie au repos $E_0 = mc^2$.

Le même traitement appliqué aux translations d'espace donne l'impulsion relativiste :

$$(39)\qquad \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

En relativité générale, on utilise des systèmes de quatre coordonnées quelconques x^1, x^2, x^3, x^4 ; l'action s'écrit :

$$(40)\quad \mathcal{A} = -m \int \sqrt{\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu}$$

$$[\mu, \nu = 1, 2, 3, 4],$$

les $g_{\mu\nu}$ pouvant s'interpréter comme les composantes d'un tenseur (tenseur métrique).

On peut écrire les équations de Lagrange ; elles se mettent sous la forme :

$$(41)\qquad \frac{d^2x^\lambda}{ds^2} + \sum_{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 0,$$

s étant un certain paramètre (temps propre), les nombre $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ (appelés *symboles de Christoffel*) étant donnés par :

$$(42)\quad \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sum_\rho g^{\lambda\rho}\left[\frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\right].$$

Quand les coordonnées sont reliées à un laboratoire en *chute libre* (satellite en orbite), les $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ sont tous nuls, la formule (41) montre que le mouvement apparaît comme *rectiligne uniforme* (état d'apesanteur) ; par contre, dans un laboratoire quelconque (terrestre par exemple) le mouvement semble accéléré : il apparaît un *champ de gravitation*, mesuré par les $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$. La formule (42) montre que les $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ s'expriment au moyen des dérivées des $g_{\mu\nu}$: c'est pourquoi les nombres $g_{\mu\nu}$ s'appellent *potentiels de gravitation*.

Mécanique statistique

L'objet de la mécanique statistique est l'étude des mouvements aléatoires d'un système mécanique conservatif (exemple : un gaz, considéré comme un système de molécules enfermées dans un récipient).

La probabilité, à un instant t, pour que les coordonnées canoniques p_k, q^k soient dans une certaine région E de l'espace de phase peut s'écrire :

$$(43) \qquad P = \int_E \rho \, dp_1 \dots dp_n \, dq^1 \dots dq^n,$$

ρ étant une certaine fonction positive.

En utilisant les équations canoniques (28), on peut démontrer que le « volume » de E,

$$\int_E dp_1 \dots dp_n \, dq^1 \dots dq^n,$$

est une *constante*, bien que la région E se déforme, au cours du temps, souvent de façon très compliquée (c'est le *théorème de Liouville*). Comme la probabilité P est constante dans le temps, il en résulte que ρ est une grandeur *conservative* ; elle vérifie donc l'équation (35) :

$$(44) \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} = [H, \rho],$$

appelée *équation de Liouville ou de Boltzmann* ; elle signifie en fait que ρ est directement définie sur l'espace des mouvements, ainsi d'ailleurs que l'élément de volume (intemporel) :

$$d\omega = dp_1 \dots dp_n \, dq^1 \dots dq^n.$$

On voit donc qu'un *état statistique est une loi de probabilité sur l'espace des mouvements*, la probabilité élémentaire étant égale à $\rho d\omega$.

On constate, dans le cas d'un équilibre statistique, que la densité de probabilité est de la forme :

$$(45) \qquad \rho = \exp(-\lambda H - \mu),$$

où λ et μ sont deux constantes. Cette équation porte le nom d'*équation de Gibbs*. L'interprétation détaillée de cet état montre que :

$$(46) \qquad \lambda = 1/kT,$$

T étant la température absolue, k la constante de Boltzmann ; μ (appelé potentiel thermodynamique de Planck) se calcule en écrivant que l'intégrale $\int \rho \, d\omega$, étendue à l'espace des mouvements, prend la valeur 1. Signalons que l'intégrale :

$$\int -k\rho \operatorname{Log} \rho \, d\omega$$

est, par définition, l'*entropie* du système.

Mécanique quantique

Dès les origines (Bohr, 1918), il est apparu que le formalisme canonique était la clef de la formulation de la mécanique quantique. On adopte généralement la formulation de Dirac (1926) qui associe *linéairement* à chaque variable dynamique u un *opérateur* que nous noterons $\hat{u}$.

Les opérateurs $\hat{u}$, appelés *observables*, sont des opérateurs linéaires self-adjoints sur un même espace de Hilbert $\mathcal{H}$, appelé *espace des états*.

Dirac postule la formule suivante, appelée *relation de commutation* :

$$(47) \qquad \hat{u} \cdot \hat{v} - \hat{v} \cdot \hat{u} = i\hbar[\widehat{u, v}],$$

$\hbar$ désignant le quotient par 2π de la constante de Planck ; comme ci-dessus, $[u, v]$ désigne le crochet de Poisson de u et v. Il faut postuler, de plus, qu'à la variable dynamique 1 correspond l'opérateur identique sur $\mathcal{H}$.

Si l'on choisit une date t, les valeurs correspondantes des coordonnées canoniques p_k, q^k sont des variables dynamiques auxquelles sont associés des opérateurs $\widehat{p_k}$, $\widehat{q^k}$; les relations de commutation de ces opérateurs se déduisent simplement de (34) ; on trouve ainsi les formules de Pauli et Heisenberg :

$$(48) \qquad \begin{gathered} \widehat{pk} \cdot \widehat{pl} - \widehat{pl} \cdot \widehat{pk} = 0. \\ \widehat{q^k} \cdot \widehat{q^l} - \widehat{q^l} \cdot \widehat{q^k} = 0. \\ \widehat{pk} \cdot \widehat{q^l} - \widehat{q^l} \cdot \widehat{pk} = \begin{cases} 0, & \text{si } k \neq l. \\ -i\hbar\, 1, & \text{si } k = l. \end{cases} \end{gathered}$$

Ces relations sont réalisées si l'on définit ces opérateurs par les formules de Schrödinger :

$$(49) \qquad \begin{aligned} \widehat{pk}(\psi) &= -i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial q^k}, \\ \widehat{q^k}(\psi) &= \widehat{q^k} \times \psi, \end{aligned}$$

ψ étant une fonction complexe des q^j, appelée *fonction d'onde*.

Bien entendu, si l'on change le choix de la date t, il faut modifier la fonction d'onde ; cette modification s'obtient en résolvant l'équation de Schrödinger :

$$(50) \qquad i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \widehat{H}(\psi),$$

H étant l'opérateur hamiltonien.

FRANCIS HALBWACHS
et JEAN-MARIE SOURIAU

Bibliographie

R. ABRAHAM, *Foundation of Mechanics*, W. A. Benjamin, New York, 1967 / É. CARTAN, *Leçons sur les invariants intégraux*, Hermann, Paris, 1959 / P. A. M. DIRAC, *The Principles of Quantum Mechanics*, Clarendon Press, Oxford, 1958 / H. GOLDSTEIN, *Classical Mechanics*, 2e éd., Addison-Wesley, Reading (Mass.), 1980 / A. I. KHINCHIN, *Mathematical Foundations of Statistical Mechanics*, trad. G. Gamow, Dover, New York, 1949 / J. L. LAGRANGE, *Mécanique analytique*, nouv. éd. complète, 2 vol., A. Blanchard, Paris, 1965 / L. LANDAU & E. LIFSCHITZ, *Mécanique*, Mir, Moscou, 1966 ; *Théorie du champ*, *ibid.* ; *Physique statistique*, *ibid.* ; *Mécanique quantique*, *ibid.* / A. LICHNEROWICZ, *Éléments de calcul tensoriel*, A. Colin, Paris, 1955 / G. W. MACKEY, *The Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, W. A. Benjamin, 1963 / J.-M. SOURIAU, *Structure des systèmes dynamiques*, Dunod, Paris, 1970.

Corrélats

CINÉMATIQUE, CINÉTIQUE, DIFFÉRENTIELLES (ÉQUATIONS), DYNAMIQUE, HAMILTON (W. R.), LAGRANGE (J. L.), LAPLACE (P. S. de), QUANTIQUE (MÉCANIQUE), RELATIVITÉ, STATISTIQUE (MÉCANIQUE), SYSTÈMES DYNAMIQUES, TENSORIEL (CALCUL), VARIATIONS (CALCUL DES).

MÉCANIQUE CÉLESTE

1 *Problème des deux corps*

2 *Mouvement des n corps*

3 *Les théories de la mécanique céleste*

4 *Mouvement d'un astre autour de son centre de gravité*

5 *Les tendances de la mécanique céleste contemporaine*

Le but de la mécanique céleste est de prévoir, avec le plus d'exactitude possible et pour des époques aussi éloignées que possible dans le passé ou dans l'avenir, la position dans l'espace des corps célestes : planètes, satellites, étoiles.

Cette science date de l'époque où Galilée et surtout Newton ont établi les principes de la mécanique classique : on suppose l'espace euclidien à trois dimensions ; le temps est un paramètre indépendant de l'espace s'écoulant de moins l'infini à plus l'infini ; il existe un repère fondamental par rapport auquel un point matériel, qui n'est soumis à aucune force, est soit au repos, soit animé d'un mouvement rectiligne et uniforme. Tous les repères animés d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme par rapport au repère fondamental possèdent la même propriété ; ce sont des repères galiléens ou repères d'inertie. Dans un repère d'inertie, un point soumis à une force représentée par $\vec{F}$ prend une accélération $\vec{\gamma}$ liée à $\vec{F}$ par la relation :

$$\vec{F} = m\vec{\gamma} ;$$

le facteur de proportionnalité m est la masse inerte du point, ou tout simplement sa masse.

Rappelons enfin la loi de la gravitation universelle : un point A de masse m attire un point B de masse m'. La force portée par la droite AB est dirigée de B vers A, et son intensité est :

$$\frac{kmm'}{\overline{AB}^2},$$

k étant une constante appelée constante de la gravitation universelle. En vertu du principe dit de l'action et de la réaction, le point B attire le point A avec une force de sens contraire et de même intensité.

Cette loi est le fondement même de la mécanique céleste, dont le principal problème est d'établir les équations différentielles du mouvement d'un certain nombre de corps, assimilés à des points matériels qui s'attirent deux à deux, et de résoudre ces équations. La