ALGÈBRE. — *Un critère de stabilité déduit du théorème de Sturm.* Note de MM. **Aloys Herrmann** et **Jean-Marie Souriau**, présentée par M. Jean Chazy.

On rencontre souvent en Physique des problèmes de stabilité qui se ramènent à la forme suivante : chercher si dans toutes les racines x d'un polynome $P(x)$ les coefficients de l'imaginaire i sont positifs. Nous donnons ici un critère qui permet de résoudre un tel problème par des calculs rationnels simples, et en général de trouver le nombre des racines où le coefficient de i est positif. Ce critère semble particulièrement bien adapté à l'étude pratique de la stabilité, car il permet d'évaluer le danger d'instabilité, et de trouver sans calcul nouveau les racines qui sont responsables de l'instabilité dans les cas critiques.

Soit

$$P(x) = (x - z_1)(x - z_2)\,\ldots\,(x - z_n)$$

un polynome de degré n en fonction de la variable réelle x, à coefficients complexes. Désignons par p, q et r les nombres des racines où les coefficients de i sont respectivement positifs, nuls et négatifs.

Séparons les parties réelle et imaginaire du polynome P :

$$P(x) = P_1(x) + iP_2(x),$$

et calculons la *chaîne de Sturm* définie par les égalités

$$\begin{aligned} P_1 + P_2Q_2 + P_3 &= 0,\\ P_2 + P_3Q_3 + P_4 &= 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots,\\ P_{k-1} + P_kQ_k &= 0, \end{aligned}$$

et par ces conditions que P_k est différent de zéro, et que le degré de P_{i+1} est inférieur au degré de P_i. Soit $V(x)$ le nombre des variations de signe de la suite

$$P_1(x),\quad P_2(x),\quad \ldots,\quad P_k(x).$$

On sait (¹) d'après Sturm, que $V(x)$ ne change que lorsque le quotient $P_2(x)/P_1(x)$ devient infini, et que $V(x)$ augmente de $+1$ ou de -1 selon que ce rapport passe de $+\infty$ à $-\infty$ ou de $-\infty$ à $+\infty$. L'augmentation de $V(x)$ est la même que celle de la partie entière de l'expression (²),

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{P_2(x)}{P_1(x)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{Arg}\big(P(x)\big),$$

(¹) Georges Valiron, *Cours d'analyse mathématique*, I, p. 109.

(²) *Loc. cit.*, p. 111.

où Arg(z) est l'argument du nombre complexe z suivi par continuité. On a ainsi :

$$\operatorname{Arg}\big(P(x)\big) = \sum_i \operatorname{Arg}(x - z_i),$$

et par suite $V(+\infty) - V(-\infty) = p - r$.

Puisque d'ailleurs la somme $p + q + r$ est égale à n, et que q peut être calculé par une application classique (²) du théorème de Sturm, on aura ainsi déterminé p. La stabilité exige les conditions $p = n$, $q = r = 0$, d'où $V(+\infty) - V(-\infty) = n$. Comme on a visiblement $0 \leq V(x) \leq k - 1 \leq n$, ceci entraîne les égalités $V(+\infty) = n$, $V(-\infty) = 0$, $k = n + 1$.

Ainsi, *la condition nécessaire et suffisante de stabilité est que la suite de Sturm soit complète, les premiers coefficients étant alternés.*

Si le polynome P dépend d'un paramètre λ, on voit facilement que les régions de stabilité seront limitées par des zéros de P_{n+1}; les régions dangereuses seront caractérisées par les faibles valeurs de $|P_{n+1}|$. De plus, si P_{n+1} est nul, le dernier polynome de la suite, non nul, qui est en général du premier degré, admet pour racines les racines réelles du polynome P.

THÉORIE DES GROUPES. — *Groupoïdes reliés et demi-groupes ordonnés.*

Note de M. **Dov Tamari**, présentée par M. Élie Cartan.

1. *Propriétés relatives et invariantes dans un groupoïde.* — Soit $\mathcal{G}$ un ensemble ordonné et un groupoïde, $a, b, c \in \mathcal{G}$ et par exemple $a < b$; la multiplication à droite (à dr.) [1] par c doit avoir un et un seulement des effets : 1° $ac = bc$; 2° $ac < bc$; 3° $ac > bc$; 4° ac, bc non comparable et c est alors appelé respectivement *niveleur, conservateur, inverseur* ou *séparateur* à dr. pour le couple relié $a < b$ [*propriétés relatives* [2]]. Méthode analogue pour une relation quelconque. On passe aux *propriétés invariantes* et l'on dit que $\mathcal{G}$ est un *groupoïde relié* (*ordonné*) *à dr.* [3] en exigeant pour tous les éléments d'un complexe $\mathcal{C}$, défini avec l'aide des propriétés relatives, l'invariance de certaines de ces propriétés Π_i indépendamment du couple a, b. Nous choisirons pour $\mathcal{C}$ le complexe de tous les éléments de $\mathcal{G}$ qui ne sont pas diviseurs de zéro à dr. [4], c'est-à-dire qui ne nivèlent aucun couple $a \neq b$, pour Π_i une seule, celle de conservation. Un sous-groupoïde d'un groupoïde relié est *permis*, s'il est un

---

(¹) De même pour *à gauche*.

(²) La propriété d'un élément de *donner lieu ou non à une propriété relative* Π_r est elle-même une propriété absolue de c. Remarque analogue pour le groupoïde contenant des éléments doués de telles propriétés.

(³) On dit aussi $\mathcal{G}$ *admet une relation* $\mathcal{R}$ ou bien $\mathcal{R}$ *est une* $\mathcal{G}$*-relation*.

(⁴) D. Tamari, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 54, 1948, p. 155.