CLASSIF.

UN CRITÈRE DE STABILITÉ POUR LES EQUATIONS CARACTÉRISTIQUES A COEFFICIENTS RÉELS OU COMPLEXES

par

A. HERMANN

et

J.M. SOURIAU

Ingénieurs de Recherches à l'O.N.E.R.A.

SOMMAIRE

On fournit un critère numérique de stabilité permettant de vérifier rapidement si toutes les racines d'une équation algébrique à coefficients réels ou complexes ont leurs parties réelles négatives. Même dans le cas de coefficients réels, ce critère remplacera avantageusement celui d'Hurwitz dès que le degré de l'équation sera supérieur à 4.

De plus ce critère donne le nombre des racines à parties réelles positives.

D'autre part, il permet d'évaluer le danger d'instabilité d'un système variable, de calculer les valeurs critiques et d'obtenir, sans calcul supplémentaire,les racines responsables de l'instabilité.

I. INTRODUCTION

Les problèmes relatifs à la stabilité des oscillations des systèmes linéaires conduisent fréquemment à décider si une équation algébrique de degré n :

$$P(x) = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \dots + c_n = 0$$

ne possède que des racines complexes à parties réelles négatives. De telles équations s'appellent équations de Hurwitz.

Pour les équations à coefficients réels A. Hurwitz [1] a établi le critère suivant : il faut et il suffit pour que la propriété annoncée soit vraie, que les déterminants

$$D\nu = \begin{vmatrix} c_1\ c_0\ 0\ \dots\ 0 \\ c_3\ c_2\ c_1\ c_0 \dots 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{2\nu-1} c_{2\nu-2} \dots c_\nu \end{vmatrix} \qquad (\nu = 1, 2, \dots n)$$

soient tous positifs (c_0 étant supposé positif). J. Schur [2] a envisagé le cas général où les coefficients c_ν sont complexes. Il a donné un procédé de réduction qui permet de constater après $n - 1$ transformations si $P(x)$ est une équation de Hurwitz ou non, sans utiliser de déterminants.

Nous allons développer une méthode pour traiter tous les cas (coefficients réels et complexes), fondée essentiellement sur un théorème de Sturm. Cette méthode est particulièrement adaptée au calcul numérique.

II. THÉORÈME DE STURM

Soient deux polynômes à coefficients réels, P_1 et P_2, le degré de P_2 étant inférieur à celui de P_1. Effectuons la division de P_1 par P_2; c'est-à-dire déterminons les polynômes Q_2 et P_3 tels que

$$P_1 + P_2 Q_2 + P_3 = 0$$

le degré de P_3 étant inférieur à celui de P_2 ;

On peut recommencer, c'est-à-dire diviser P_2 par P_3 :

$$P_2 + Q_3 P_3 + P_4 = 0$$

CLASSIF.

puis P_3 par P_4, etc...

les degrés vont en décroissant ; il est bien clair qu'on finira par trouver un polynôme de degré 0, c'est-à-dire une constante. Si cette constante n'est pas nulle elle divise exactement le polynôme précédent, donc la division suivante donnera un reste nul.

Soit donc P_k le dernier polynôme non nul. On a déterminé la *chaine de Sturm*, qui vérifie :

(2,1)
$$\begin{aligned} &P_1 + P_2 Q_2 + P_3 = 0 \\ &P_2 + P_3 Q_3 + P_4 = 0 \\ &P_3 + P_4 Q_4 + P_5 = 0 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &P_{k-2} + P_{k-1} Q_{k-1} + P_k = 0 \\ &P_{k-1} + P_k Q_k = 0 \end{aligned}$$

et (degré de P_i) $<$ (degré de P_{i-1})

(2,2) — Si deux polynômes consécutifs P_i et P_{i+1} ont un facteur commun, les deux égalités

$$P_{i-1} + P_i Q_i + P_{i+1} = 0$$

$$P_i + P_{i+1} Q_{i+1} + P_{i+2} = 0$$

montrent que ce facteur divise aussi P_{i-1} et P_{i+2}, donc de proche en proche, *qu'il divise toute la chaîne* ; en particulier tout diviseur commun à P_1 et P_2 divise P_k, et inversement tout diviseur de P_k divise P_{k-1}, donc P_1 et P_2 :

(2,3) $\boxed{P_k \text{ est le P.G.C.D. de } P_1 \text{ et } P_2}$

On remarque aussi que si deux polynômes consécutifs s'annulent pour $x = x_0$, ils sont tous les deux divisibles par $x - x_0$, donc que toute la chaîne s'annule pour $x = x_0$.

(2,4) | Deux polynômes consécutifs ne peuvent s'annuler simultanément que si toute la chaîne s'annule. |

Soit x_0 une valeur qui n'annule pas toute la chaîne. Calculons les valeurs

$$a_1 = P_1(x_0),\ a_2 = P_2(x_0),\dots\dots\dots\dots a_k = P_k(x_0)$$

deux nombres consécutifs a_i, a_{i+1} ne sont pas tous deux nuls ; nous dirons qu'ils présentent une *variation* s'ils sont de signe contraire, 1/2 variation si l'un deux est nul, 0 variation s'ils sont de même signe.

(Le nombre de variations des couples $(a_1 . a_2)$ $a_2, a_3)$... $(a_{k-1} a_k)$ ainsi compté sera désigné par $V(x_0)$.

Si on fait varier x_0, le nombre $V(x_0)$ ne change pas, sauf si l'un des polynômes de la chaîne s'annule (pour la valeur x_1 par exemple).

Deux cas peuvent alors se présenter :

1° Toute la chaîne s'annule ; alors tous les polynômes sont divisibles par $(x - x_1)$, ou plus généralement par $(x - x_1)^r$: si l'on divise tous les termes par $(x - x_1)^r$, on obtient une nouvelle chaîne de Sturm et on voit qu'elle présente autant de variations que la précédente pour une valeur x quelconque, puisque tous ses termes sont multipliés par le même facteur. On peut donc écarter ce cas particulier.

2° $P_i(x_1)$ s'annule mais P_{i-1} et P_{i+1} ne sont pas nuls. Alors l'égalité

$$P_{i-1} + P_i Q_i + P_{i+1} = 0$$

montre que P_{i-1} et P_{i+1} sont de signes contraires : on voit que les couples (P_{i-1}, P_i) et (P_i, P_{i+1}) avaient *une* variation à eux deux avant que P_i s'annule, qu'ils en ont encore *une* pour $P_i = 0$, et qu'ils en auront encore une si P_i change de signe, donc $V(x)$ ne change pas quand $P_i(x)$ s'annule. Ceci ne vaut évidemment que si P_i *n'est pas* à l'une des extrémités de la chaîne. On sait que P_k ne peut s'annuler que si toute la chaîne s'annule : donc ce cas est à exclure.

Finalement $V(x)$ ne peut changer que si $P_i(x)$ s'annule, P_2 n'étant pas nul, c'est-à-dire quand le rapport $\frac{P_2}{P_1}$ devient infini. S'il devient infini en passant du signe + au signe —, $V(x)$ augmente d'une unité et s'il devient infini en passant du signe — au signe +, $V(x)$ diminue d'une unité. Par suite :

(2,5) | Si $a < b$, $V(b) - V(a)$ est égal au nombre de fois que $\frac{P_2}{P_1}$ devient infini en passant du signe + au signe —, diminué du nombre de fois qu'il devient infini en passant du signe — au signe +, dans l'intervalle a, b. |

III. RACINES RÉELLES DES POLYNOMES

Supposons que P_2 soit la dérivée du polynôme P_1. $\frac{P_2}{P_1}$ ne peut devenir infini que si P_1 s'annule, c'est-à-dire pour les racines réelles de P_1.

Soit x_1, l'une d'elles ; qu'elle soit simple ou multiple, on peut poser

$$P_1(x) = (x - x_1)^k R(x), \text{ avec } R(x_1) \neq 0.$$

On a alors $P_2(x) = (x - x_1)^k R'(x) + k(x - x_1)^{k-1} R(x)$

donc
$$\frac{P_2(x)}{P_1(x)} = \frac{k}{x - x_1} + \frac{R'(x)}{R(x)}$$

et puisque $R(x_1) \neq 0$, on voit que lorsque x traverse la valeur x_1, $\frac{P_2}{P_1}$ devient infini et passe du signe — au signe +, donc que $V(x)$ *décroit d'une unité.*

Par suite :

(3,1)

> Si $a < b$, si l'on forme la chaîne de Sturm d'un polynôme P (x) et de sa dérivée, V (a) — V (b) est égal au nombre de racines réelles de P comprises entre a et b.

Il faut remarquer que les racines multiples sont comptées pour 1 seulement.

Cherchons la condition pour que toutes les racines soient *réelles et positives*.

n étant le degré de l'équation, il faut que $V(0)-V(+\infty) = n$. la chaîne P_1, P_2..... P_k étant formée de polynômes de degré décroissant à partir de n, il y en a au plus $n+1$, et par suite V (x) est au plus égal à n. Donc l'égalité $V(0) - V(+\infty) = n$ entraîne nécessairement $V(0) = n$, $V(+\infty) = 0$. Ces deux inégalités expriment qu'il y a effectivement $n + 1$ polynômes dans la chaîne (puisque c'est le nombre maximum, on dira que la chaîne est *complète*), que les premiers coefficients des polynômes sont tous de même signe et que les derniers coefficients sont alternés. Donc :

(3,2)

> La condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynôme P à coefficients réels ait toutes ses racines réelles, positives et distinctes est que la chaîne de Sturm formée avec P et sa dérivée soit complète, que les premiers coefficients des polynômes de la chaîne soient de même signe et que les derniers coefficients aient des signes alternés.

IV. PARTIES RÉELLES DES RACINES

Soit P (x) un polynôme à coefficients réels ou complexes. En le divisant par un facteur complexe convenable on peut toujours s'arranger pour que le premier coefficient soit *réel*.

En séparant alors les parties réelles et imaginaires du polynôme on posera :

$$P(x) = P_1(x) + i\,P_2(x)$$

P_1 et P_2 étant des polynômes à coefficients réels, le degré de P_2 étant inférieur à celui de P_1, et l'on aura :

$$\text{argument de } P(x) = \operatorname{arctg} \frac{P_2(x)}{P_1(x)}$$

Puisque le degré de P_2 est inférieur à celui de P_1, $\frac{P_2(x)}{P_1(x)}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $\pm\infty$. On voit par suite que lorsque x variera de $-\infty$ à $+\infty$, l'argument de P (x) augmentera de $\lambda\pi$, λ étant le

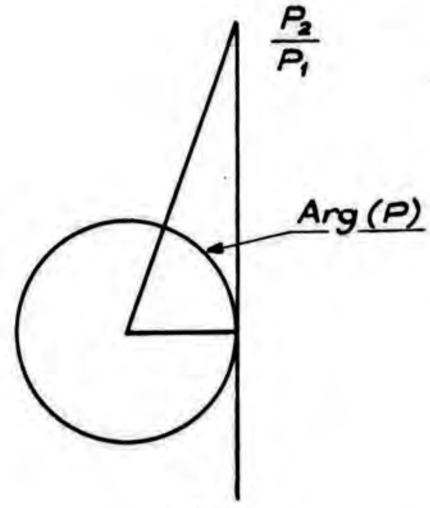

Fig. 1.

nombre de fois que $\frac{P_2}{P_1}$ deviendra infini en passant du signe + au signe —, diminué du nombre de fois qu'il deviendra infini en passant du signe — au signe +. Donc si l'on forme la chaîne de Sturm de P_1 et P_2, l'argument de P (x) augmentera de

$$[V(+\infty) - V(-\infty)] \times \pi$$

lorsque x variera de $-\infty$ à $+\infty$.

Pour interpréter cette variation d'argument, mettons P (x) sous la forme :

$$P(x) = a_0\,(x - z_1)\,(x - z_2).....(x - z_n)$$

z_1, z_2..... z_n étant ses racines, a_0 son premier coefficient (qui est réel).

L'argument d'un produit étant la somme des arguments, la variation d'argument de P quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$ sera la somme des variations d'arguments de chacun de ses facteurs $x - z_i$.

$$\text{soit } z_i = x_i + iy_i$$

$$\text{on a } x - z_i = (x - x_i) - iy_i\ ,$$

on voit que l'argument de cette quantité qui vaut $\operatorname{arctg} \frac{-y_i}{x-x_i}$, augmente de π dans l'intervalle$(-\infty, +\infty)$ si y_i est positif, diminue de π si y_i est négatif, et reste nul si y_i est nul.

Par suite $V(+\infty) - V(-\infty)$ est égal à la différence entre le nombre p des racines à coefficients de i positif et le nombre r des racines à coefficient de i négatif.

S'il n'y a pas de racines réelles, puisqu'on connaît le nombre total $n = p + r$ des racines, qui est le degré de l'équation, on peut tirer de :

$$\begin{cases} p + r = n \\ p - r = \mathrm{V}(+\infty) - \mathrm{V}(-\infty) \end{cases}$$

$$p = \frac{1}{2}\left[n + \left[\mathrm{V}(+\infty) - \mathrm{V}(-\infty) \right] \right]$$

s'il y avait q racines réelles, on aurait alors

$$n = p + q + r$$

et par suite $\frac{1}{2}\left[n + \mathrm{V}(\infty) - \mathrm{V}(-\infty) \right]$

$$= \frac{1}{2}\left[(p + q + r) + (p - r) \right]$$

$$= p + \frac{q}{2}$$

Donc :

(4,1) Soit un polynôme P (x) de degré n. Si on le multiplie par un facteur λ tel que son premier coefficient devienne réel, si l'on sépare la partie réelle et la partie imaginaire du résultat :

$$\lambda \, \mathrm{P}(x) = \mathrm{P}_1(x) + i \, \mathrm{P}_2(x)$$

et si l'on forme la chaîne de Sturm des polynômes P_1 et P_2, le nombre

$$\frac{1}{2}\left[n + \mathrm{V}(+\infty) - \mathrm{V}(-\infty) \right]$$

est égal au nombre des racines de P ayant un coefficient de i positif augmenté de la moitié du nombre des racines réelles.

Si on applique le même procédé au polynôme $\mathrm{P}(x) = \mathrm{Q}(i\,x)$ on trouvera le nombre de racines $z_i = x_i + iy_i$ de P telles que $y_i > 0$; il leur correspond les racines $iz_i = ix_i - y_i$ de Q. Par suite :

(4,2) Si l'on fait le même calcul qu'en (4,1) sur le polynôme $\mathrm{P}(x) = \mathrm{Q}(ix)$, on trouve le nombre des racines de Q ayant une partie réelle négative, augmenté de la moitié du nombre des racines imaginaires pures.

En particulier pour que toutes les racines aient une partie réelle négative, il est nécessaire que

$$\mathrm{V}(+\infty) - \mathrm{V}(-\infty) = n\,;$$

on voit comme en (3,2) que cela entraîne $\mathrm{V}(+\infty) = n$; $\mathrm{V}(-\infty) = 0$. D'autre part, on a nécessairement $p = 0$, $q = 0$, $r = n$ et l'on peut énoncer :

(4,3) La condition nécessaire et suffisante pour que toutes les racines de Q (x) aient leur partie réelle négative est que, si l'on applique le procédé (4,1) à $\mathrm{P}(x) = \mathrm{Q}(i\,x)$, on trouve une chaîne de Sturm complète, les premiers coefficients des polynômes de la chaîne étant alternés.

V. APPLICATION PRATIQUE DE LA MÉTHODE

Soit l'équation

$$\mathrm{Q}(x) = x^n + (\alpha_1 + i\,\beta_1)\,x^{n-1} + (\alpha_2 + i\,\beta_2)\,x^{n-2} + \ldots.$$

En remplaçant x par ix et en ramenant le coefficient de x^n à l'unité, il vient

$$\mathrm{P}(x) = \frac{\mathrm{Q}(ix)}{i^n} = x^n + (a_1 + ib_1)\,x^{n-1} + (a_2 + ib_2)x^{n-2} + \ldots\ldots..$$

avec les correspondances

$a_1 = \beta_1 \quad a_2 = -\alpha_2 \quad a_3 = -\beta_3 \quad a_4 = \alpha_4 \quad a_5 = \beta_5$

$b_1 = -\alpha_1 \quad b_2 = -\beta_2 \quad b_3 = \alpha_3 \quad b_4 = \beta_4 \quad b_5 = -\alpha_5$

Par exemple, soit à vérifier si les racines de

$$\mathrm{Q}(x) = x^3 + x^2\,(2 + 2i) + 5\,xi + (-1 + 7i)$$

ont leurs parties réelles négatives.

La transformée est

$$\mathrm{P}(x) = x^3 + x^2\,(2 - 2i) - 5\,ix - (7 + i) = 0$$

d'où $\quad \mathrm{P}_1(x) = x^3 + 2\,x^2 - 7$

$\qquad \mathrm{P}_2(x) = -2\,x^2 - 5\,x - 1$

Pour effectuer pratiquement la division on écrira seulement les coefficients de P_1 et de P_2, sans omettre ceux qui sont nuls, et dans le tableau de calcul ci-dessous on fera coïncider les deux premiers coefficients de P_1 et de P_2 :

P_1	1	2	0	−7	
P_2	−2	−5	−1		$\frac{1}{2}$
	0	−1/2	−1/2	−7	
		−2	−5	−1	$-\frac{1}{4}$
$-\mathrm{P}_3$		0	3/4	−27/4	

On multiplie les coefficients de P_2 par un multiplicateur $q\left(\frac{1}{2}\right)$ tel qu'en y ajoutant ceux de P_1, le premier résultat à gauche soit nul. On reporte ensuite les coefficients de P_2 sous le résultat pour continuer la division jusqu'au moment où le résultat comportera un coefficient de moins que P_2. On recommencera avec P_2 et $-\mathrm{P}_3$, pour calculer $-\mathrm{P}_4$. (Les restes suivants seraient P_5, P_6, $-\mathrm{P}_7$, $-\mathrm{P}_8$, P_9, P_{10} ,....)

P_2	−2	−5	−1	
$-\mathrm{P}_3$	3/4	−27/4		− 8/3
	0	−23	−1	
		3/4	−27/4	9 2/3
$-\mathrm{P}_4$		0	−208	

CLASSIF.

On arrête la division lorsqu'il ne reste qu'une constante, ici $-P_4 = -208$.

L'équation proposée aurait toutes ses racines à parties réelles négatives si les signes des premiers coefficients de la suite P_1, P_2, P_3, P_4..... étaient alternés et si la suite était complète.

On devrait donc avoir les signes

$$\begin{array}{ccccccccc} P_1 & P_2 & -P_3 & -P_4 & P_5 & P_6 & -P_7 & -P_8 & ..... \\ + & - & - & + & + & - & - & + & ..... \end{array}$$

Dans l'exemple traité, on a

$$\begin{array}{cccc} P_1 & P_2 & -P_3 & -P_4 \\ + & - & + & - \end{array}$$

L'alternance est rompue : il existe une ou plusieurs racines à partie réelle positive. Les polynômes de Sturm sont

	$P(+\infty)$	$P(-\infty)$
$P_1 = x^3 + 2x^2 - 7$	+	—
$P_2 = -2x^2 - 5x - 1$	—	—
$P_3 = -\dfrac{3}{4}x + 27/4$	—	+
$P = 208$	+	+

Les variations sont $V(+\infty) = 2$, $V(-\infty) = 1$

d'où $$p = \frac{n + V(\infty) - V(-\infty)}{2} = 2$$

Il y a donc deux racines à parties réelles négatives. Les racines sont d'ailleurs

$$-1 + i, -2 - i, 1 - 2i.$$

Dans les applications pratiques on peut arrêter les calculs dès que l'alternance des signes des premiers coefficients de la suite de Sturm n'est pas satisfaite.

VI. APPLICATION A L'ÉTUDE DE L'ÉVOLUTION DE LA STABILITÉ

Quand on applique ce procédé à l'étude de la stabilité d'un système, dépendant par exemple d'un paramètre λ, on effectue les calculs pour différentes valeurs de λ. Le passage de l'état stable à l'état instable aura lieu lorsque la partie réelle de l'une des racines s'annulera, la partie imaginaire étant alors $i\,y_0$.

Dans ces conditions la partie réelle et la partie imaginaire de $P(x) = Q(ix)$ seront toutes deux divisibles par $x - y_0$, le dernier terme Δ (constant) de la suite de Sturm s'annulera.

Par suite dans la région où toutes les racines sont à partie réelle négative, Δ deviendra petit uniquement lorsque l'une des racines aura une faible partie réelle, c'est-à-dire lorsqu'il y aura des mouvements peu amortis : la courbe $\Delta = f(\lambda)$ permettra d'évaluer le danger d'instabilité. L'interpolation de cette courbe permettra de calculer une valeur approchée de la valeur critique de λ.

Enfin, cette valeur λ_0 étant déterminée, le dernier terme est nul ; c'est le polynôme précédent qui devient le P.G.C.D. de la partie réelle et de la partie imaginaire de $P(x)$: ce polynôme admet donc pour racines les racines réelles de P et celles-là seulement. En général, c'est un polynôme du 1er degré, on a donc immédiatement la valeur de la racine responsable de l'instabilité.

Manuscrit reçu en Février 1949

BIBLIOGRAPHIE

1) A. HURWITZ : Sur les conditions pour qu'une équation ne possède que des racines à partie réelle négative. *Mathem. Annal.*, *t.* 46, 1895, *p.* 273-284.

Voir aussi : E. J. ROUTH : A treatise on the stability of a given State of Motion, *London* 1877.

2) J. SCHUR : Sur des équations algébriques qui possèdent seulement des racines à partie réelle négative. *Zeitschr. Fur Ang. Mathematik und Mechanik*, *t.* 1, 1921.

▼

OFFICE NATIONAL D'ETUDES ET DE RECHERCHES AÉRONAUTIQUES

ANALYSEUR DE GAZ
TYPE 80

Appareil donnant une mesure quantitative instantanée par absorption sélective dans l'infra-rouge, de la teneur d'un ou de plusieurs gaz donnés dans un mélange à analyser ; il peut enrigistrer les variations de teneur d'un gaz circulant dans une conduite.

Applications dans toutes industries et dans les mines.

Adresser les demandes de renseignements et commandes

O.N.E.R.A. Service Commercial : 55, Bd Malesherbes - PARIS-8e

Tél : LAB 19-93