

Méthode de Le Verrier–Souriau et équations différentielles linéaires

Karine RÉAUD^{a,b}, Jean-Marie SOURIAU^c, Claude VALLÉE^a, Danielle FORTUNÉ^a

^a L3MA, Université de Poitiers et ENSMA, SP2MI, Téléport 2, boulevard Marie-et-Pierre-Curie, BP 30179, 86962 Futuroscope Chasseneuil cedex, France

^b ENSAE, 10, avenue Édouard-Belin, BP 4032, 31055 Toulouse cedex, France

^c CPT, CNRS Luminy, Case 907, 70 route Léon-Lachamp, 13288 Marseille cedex 9, France
E-mail: reaud@l3ma.univ-poitiers.fr

(Reçu le 7 juillet 2000, accepté le 11 juillet 2000)

Résumé. Une étape cruciale des algorithmes permettant d'étudier les vibrations d'un système mécanique discret est la détermination des pulsations et des modes propres. La précision des résultats est primordiale puisque l'étude de la stabilité du système en dépend. Si les pulsations propres peuvent être déterminées avec une grande précision, il n'en va pas de même pour les modes propres dont la direction peut présenter une grande instabilité. Nous proposons une méthode qui évite la recherche des modes propres et donc les instabilités qui y sont liées. Elle est inspirée de l'algorithme de Le Verrier–Souriau habituellement réservé à la résolution des systèmes algébriques linéaires. © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

vibrations / modes propres / algorithme Le Verrier–Souriau

Le Verrier method and linear differential equations

Abstract. A crucial step of algorithms allowing the study of discrete mechanical system vibrations is the determination of eigenmodes and eigenvalues. The accuracy of the results is of great importance because the stability study of the system depends on them. Eigenvalues can be found with a very good precision, however the eigenmodes determination is awkward: their direction could present significant instabilities. We proposed a method which avoids the necessity of doing eigenmodes research and so the attendant instabilities. It is based on Le Verrier–Souriau algorithm usually reserved for the resolution of linear algebraic systems. © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

vibrations / eigenmodes / Le Verrier–Souriau algorithm

Abridged English version

1. Introduction

In 1847, Le Verrier established a pioneering algorithm allowing the calculus of the coefficient of the characteristic polynomial $P(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ of a matrix $n \times n$, A , from the traces of the powers of the matrix. One century later, one of the authors proposed to compute successively, instead of the traces of the powers A, A^2, \dots, A^n , the traces of more appropriate matrices. Doing so, the scalar coefficients of the characteristic polynomial and the matrix coefficients of the adjugate $Q(\lambda)$ of the matrix $\lambda I - A$ are alternately calculated. The algorithm is summarized in (3)–(5).

Note présentée par Évariste SANCHEZ-PALENCIA.

2. First-order linear differential equations

The solution of the differential system $\frac{dX}{dt} = AX$ with initial condition $X(0) = X_0$ is of the type $X(t) = e^{tA}X_0$. If e^{tA} is stated as the sum of an infinite serie it is difficult to compute. We proposed a method allowing its calculus more easily by the mean of a finite sum. If we replaced formally λ by $\frac{d}{dt}$ in the linear algebraic identity $[\lambda I - A]Q(\lambda) = P(\lambda)I$, we obtain the identity between differential operator $[I \frac{d}{dt} - A]Q(\frac{d}{dt}) = P(\frac{d}{dt})I$. If γ is a solution of $P(\frac{d}{dt})\gamma = 0$ and if we select conveniently the initial conditions for γ and its derivative, then $Q(\frac{d}{dt})\gamma$ is exactly e^{tA} , but it is obtained by a finite sum.

3. Free vibrations

The free vibrations of damped systems are described by the general equation (9). This second-order differential equation could be transform in a first one by increasing the number of unknown variables. We prefer keeping the spirit than the letter of Le Verrier–Souriau algorithm. By analogy with the first order case, we introduce the scalar polynomial $P(\lambda) = \det(\lambda^2 M + \lambda C + K)$ and the matrix polynomial $Q(\lambda) = \text{Adj}(\lambda^2 M + \lambda C + K)$. If γ_1 and γ_2 are solutions of $P(\frac{d}{dt})\gamma = 0$ with the suitable initial conditions (19) and (20) then $Q(\frac{d}{dt})\gamma_1 V_1 + Q(\frac{d}{dt})\gamma_2 V_2$ is the vectorial solution of (9) with the initial conditions (10) when the constant vectors V_1 and V_2 have been chosen as in (24).

4. Conclusion

Both our methods, issued from Le Verrier–Souriau algebraic algorithm, for the first- and second-order linear differential equations, never need determination of any eigenvectors. Moreover, all the sums we have to calculate are finite.

We think, for these two reasons, that our algorithm provides a great gain of numerical stability.

1. Introduction

En 1847, Urbain Le Verrier a mis au point une méthode, encore utilisée de nos jours, qui permet de calculer les coefficients du polynôme caractéristique d'une matrice A . Elle consiste à déduire le calcul des coefficients du polynôme caractéristique du calcul de ses sommes de Newton, ces dernières se ramenant au calcul des traces de puissances de A . Elle a servi de base à l'élaboration de nombreuses méthodes pour expliciter le polynôme caractéristique $\det(\lambda I - A)$.

Dans cette note, nous nous intéresserons à l'algorithme de Le Verrier, redécouvert et amélioré un siècle plus tard par l'un des auteurs [1]. Celui-ci propose de calculer, successivement, non plus les traces des différentes puissances de la matrice A , mais les traces de matrices plus adéquates. Par cette méthode, il obtient les coefficients scalaires du polynôme caractéristique, le déterminant de A ainsi que les coefficients matriciels du développement en puissance de λ de l'adjuguée de la matrice $\lambda I - A$. L'application de cet algorithme, comme celui de la méthode de Le Verrier, est habituellement limitée à la résolution des systèmes algébriques linéaires. Nous étendons, ici, cette méthode à la résolution des systèmes différentiels linéaires du premier ordre à coefficients constants ainsi qu'aux systèmes différentiels linéaires du second ordre à coefficients constants, dans le but de l'appliquer à l'étude des vibrations linéaires des systèmes mécaniques.

2. Résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants du premier ordre

Soient $X(t)$ un vecteur de \mathbb{R}^n dépendant d'un paramètre t jouant le rôle du temps et A , une matrice $n \times n$. Le système différentiel $\frac{dX}{dt} = AX$, assorti de la condition initiale $X(0) = X_0$ admet pour solution $X(t) = e^{tA}X_0$. Si on exprime la matrice e^{tA} comme la somme d'une série, elle est de ce fait difficile

à calculer. Nous proposons une méthode permettant d'effectuer plus aisément son calcul par l'intermédiaire d'une somme finie [3].

2.1. Algorithme de Le Verrier–Souriau

Désignons par I la matrice identité. Notons $P(\lambda)$ le polynôme caractéristique de la matrice A et $Q(\lambda)$ l'adjuguée de la matrice $(\lambda I - A)$. Nous pouvons développer $P(\lambda)$ et $Q(\lambda)$ en puissances de λ :

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = k_0 \lambda^n + k_1 \lambda^{n-1} + \dots + k_{n-1} \lambda + k_n \quad (1)$$

$$Q(\lambda) = \text{Adj}(\lambda I - A) = \lambda^{n-1} B_0 + \lambda^{n-2} B_1 + \dots + \lambda B_{n-2} + B_{n-1} \quad (2)$$

introduisant ainsi des coefficients scalaires k_i et des coefficients matriciels B_i . L'un des auteurs montre [1,2] que l'on peut obtenir les k_i et les B_i , pour $i = 0$ à $n - 1$, par l'algorithme itératif :

$$k_0 = 1 \quad \text{et} \quad B_0 = I \quad (3)$$

$$A_i = B_{i-1} A, \quad k_i = -\frac{1}{i} \text{tr}(A_i), \quad B_i = A_i + k_i I \quad (4)$$

on termine par :

$$A_n = B_{n-1} A \quad \text{et} \quad k_n = -\frac{1}{n} \text{tr}(A_n). \quad (5)$$

Le raisonnement consiste principalement à identifier les coefficients matriciels des même puissances de λ dans les deux membres de l'identité $[\lambda I - A]Q(\lambda) = P(\lambda)I$.

2.2. Application à la résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants

Tout le fondement de la méthode se trouve dans l'analogie entre la propriété algébrique :

$$[\lambda I - A]Q(\lambda) = P(\lambda)I$$

et la propriété différentielle :

$$\left[I \frac{d}{dt} - A \right] Q \left(\frac{d}{dt} \right) = P \left(\frac{d}{dt} \right) I.$$

S'il existe une fonction numérique γ vérifiant $P\left(\frac{d}{dt}\right)\gamma = 0$, c'est-à-dire (en notant $\gamma^{(i)}$ la dérivée i -ème de γ) :

$$k_0 \gamma^{(n)} + k_1 \gamma^{(n-1)} + \dots + k_{n-1} \gamma^{(1)} + k_n \gamma = 0 \quad (6)$$

et satisfaisant les conditions initiales :

$$\gamma(0) = \dots = \gamma^{(n-2)}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \gamma^{(n-1)}(0) = 1 \quad (7)$$

alors la fonction matricielle $\phi = Q\left(\frac{d}{dt}\right)\gamma$ c'est-à-dire :

$$\gamma^{(n-1)} B_0 + \gamma^{(n-2)} B_1 + \dots + \gamma B_{n-1} \quad (8)$$

est solution de l'équation différentielle $\frac{d\phi}{dt} = A\phi(t)$ avec la condition initiale $\phi(0) = I$.

L'exponentielle de la matrice tA se trouve donc calculée par la formule (8). Les matrices B_i sont déterminées par les opérations d'algèbre linéaire (3)–(5).

Le seul travail véritablement numérique réside dans la résolution de (6) qu'il suffit de résoudre sur un pas de temps h petit. γ est une fonction entière dont le développement en série s'obtient par une formule

de récurrence de même que ses fonctions dérivées. On peut obtenir la précision que l'on souhaite en choisissant le pas h suffisamment petit. Soit q un entier (éventuellement grand) et $p = 2^q$, si on connaît γ de 0 à h on connaît $\phi(h)$ par (8) mais aussi $\phi(ph)$ grâce à la propriété de l'exponentielle de matrices $\exp(phA) = (\exp hA)^p$, c'est-à-dire $\phi(ph) = (\phi(h))^p$.

Remarquons que notre méthode ne nécessite jamais la détermination des vecteurs propres de A , ce qui présente un grand avantage car, en général, la direction de ceux-ci est numériquement instable.

3. Généralisation au deuxième ordre

Dans le cadre de la mécanique vibratoire linéaire, on se trouve confronté à des systèmes linéaires à coefficients constants du second ordre, plutôt que du premier ordre. Les équations du mouvement sont de la forme vectorielle :

$$M \frac{d^2 X}{dt^2} + C \frac{dX}{dt} + KX = 0 \tag{9}$$

Elles régissent le vecteur position X qui est un vecteur de \mathbb{R}^n dépendant du temps. M est la matrice des masses et K la matrice des raideurs, ce sont des matrices $n \times n$ symétriques et définies positives. C est la matrice des amortissements, c'est une matrice $n \times n$ symétrique. L'équation (9) est assortie des conditions initiales :

$$X(0) = X_0 \quad \text{et} \quad \frac{dX}{dt}(0) = \dot{X}_0 \tag{10}$$

Bien sûr, il serait possible de substituer à ce système du second ordre un système du premier ordre en doublant la taille des matrices et des vecteurs. Si on pose $Y = \frac{dX}{dt}$ alors le couple (X, Y) satisfait au système différentiel du premier ordre :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \tag{11}$$

et la solution s'obtient en appliquant la méthode du paragraphe 2.2 qui revient à calculer l'exponentielle de la matrice tH , où :

$$H = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix} \tag{12}$$

Mais le calcul de H nécessiterait des inversions de matrices et entraînerait des pertes de propriétés inhérentes à la mécanique (matrices symétriques, positives, creuses, ...). Nous préférons généraliser l'esprit plutôt que la lettre de la méthode développée au paragraphe 2 et garder des matrices $n \times n$ plutôt que des matrices $2n \times 2n$.

Par analogie avec le paragraphe 2, introduisons le polynôme à coefficients scalaires de degré $2n$:

$$P(\lambda) = \det(\lambda^2 M + \lambda C + K) = k_0 \lambda^{2n} + k_1 \lambda^{2n-1} + \dots + k_{2n-1} \lambda + k_{2n} \tag{13}$$

et le polynôme à coefficients matriciels de degré $2n - 2$:

$$Q(\lambda) = \text{Adj}(\lambda^2 M + \lambda C + K) = B_0 \lambda^{2n-2} + B_1 \lambda^{2n-3} + \dots + B_{2n-3} \lambda + B_{2n-2} \tag{14}$$

La propriété :

$$(\lambda^2 M + \lambda C + K)Q(\lambda) = Q(\lambda)(\lambda^2 M + \lambda C + K) = P(\lambda)I \tag{15}$$

permet de déterminer les expressions des B_i et des k_i , comme au paragraphe 2.1, par identification des termes de même degré en λ . Nous ne détaillerons pas ici les calculs. La démarche est similaire à celle

développée pour le premier ordre. En remplaçant formellement λ par $\frac{d}{dt}$ dans l'identité (15) nous obtenons une identité entre opérateurs différentiels :

$$\left(M \frac{d^2}{dt^2} + C \frac{d}{dt} + K\right) Q \left(\frac{d}{dt}\right) = IP \left(\frac{d}{dt}\right)$$

Aussi, s'il existe une fonction numérique γ telle que $P\left(\frac{d}{dt}\right)\gamma = 0$, c'est-à-dire une solution de l'équation différentielle :

$$k_0 \gamma^{(2n)} + k_1 \gamma^{(2n-1)} + k_2 \gamma^{(2n-2)} + \dots + k_{2n-2} \gamma^{(2)} + k_{2n-1} \gamma^{(1)} + k_{2n} \gamma = 0 \quad (16)$$

alors, la fonction matricielle :

$$\phi = Q \left(\frac{d}{dt}\right) \gamma \quad (17)$$

c'est-à-dire :

$$B_0 \gamma^{(2n-2)} + B_1 \gamma^{(2n-3)} + \dots + B_{2n-3} \gamma^{(1)} + B_{2n-2} \gamma$$

est solution de :

$$M \frac{d^2 \phi}{dt^2} + C \frac{d \phi}{dt} + K \phi = 0 \quad (18)$$

Pour trouver deux solutions indépendantes de l'équation (9) et ensuite les adapter aux conditions initiales, il faut trouver deux solutions indépendantes de (18). Pour cela, il suffit de sélectionner deux solutions γ indépendantes de l'équation (16) en choisissant convenablement les conditions initiales. Guidés par le premier ordre, définissons les deux solutions γ_1 et γ_2 satisfaisant les conditions initiales :

$$\gamma_1(0) = \gamma_1^{(1)}(0) = \gamma_1^{(2)}(0) = \dots = \gamma_1^{(2n-3)}(0) = \gamma_1^{(2n-1)}(0) = 0, \quad \gamma_1^{(2n-2)}(0) = 1 \quad (19)$$

$$\text{et } \gamma_2(0) = \gamma_2^{(1)}(0) = \gamma_2^{(2)}(0) = \dots = \gamma_2^{(2n-3)}(0) = \gamma_1^{(2n-2)}(0) = 0, \quad \gamma_2^{(2n-1)}(0) = 1 \quad (20)$$

pour la seconde. Associons leurs les solutions matricielles indépendantes de (18) :

$$\phi_1 = Q \left(\frac{d}{dt}\right) \gamma_1 \quad \text{et} \quad \phi_2 = Q \left(\frac{d}{dt}\right) \gamma_2$$

Soient V_1 et V_2 deux vecteurs constants de \mathbb{R}^n , cherchons à adapter ces vecteurs afin que la solution de (9) :

$$X(t) = \phi_1(t)V_1 + \phi_2(t)V_2$$

et sa dérivée :

$$\frac{dX}{dt} = \phi_1^{(1)}(t)V_1 + \phi_2^{(1)}(t)V_2 \quad (21)$$

satisfassent les conditions initiales (10). Les choix de γ_1 et γ_2 impliquent :

$$\phi_1(0) = B_0 \quad \text{et} \quad \phi_1^{(1)}(0) = B_1 \quad (22)$$

$$\phi_2(0) = 0 \quad \text{et} \quad \phi_2^{(1)}(0) = B_0 \quad (23)$$

Les vecteurs V_1 et V_2 doivent donc être choisis de façon que $B_0 V_1 = X_0$ et $B_1 V_1 + B_0 V_2 = \dot{X}_0$. Comme $B_0 = \text{Adj } M$ et $k_0 = \det M$, il vient :

$$V_1 = \frac{1}{k_0} M X_0 \quad \text{et} \quad V_2 = \frac{M}{k_0} (\dot{X}_0 - B_1 V_1) \quad (24)$$

Si le déterminant de M n'est pas trop petit, la division par k_0 ne pose pas de problème. Nous n'avons présenté ici qu'une seule des méthodes que nous avons mis au point : celle qui privilégie la matrice M . De même, nous pourrions développer une méthode privilégiant la matrice K qui serait utilisée lorsque le déterminant de K n'est pas trop petit.

La solution de (9) est donc :

$$X(t) = \phi_1(t)V_1 + \phi_2(t)V_2 \tag{25}$$

en choisissant les vecteurs V_1 et V_2 définis par (24).

Le seul travail véritablement numérique réside dans la résolution de (16) avec les conditions initiales (19) et (20). Comme au premier ordre, il suffit de résoudre l'équation (16) sur un pas de temps h petit. Si on connaît γ_1 et γ_2 de 0 à h on connaît donc ϕ_1 et ϕ_2 et par suite, sans jamais avoir à exprimer H :

$$\exp(hH) = \frac{1}{k_0} \begin{bmatrix} \phi_1(h) & \phi_2(h) \\ \phi_1^{(1)}(h) & \phi_2^{(1)}(h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & 0 \\ -\frac{1}{k_0}MB_1M & M \end{bmatrix} \tag{26}$$

en réutilisant les résultats des formules (25), (24) et (21). On aura donc les valeurs de X et \dot{X} en ph , p entier (éventuellement grand) par :

$$\begin{bmatrix} X(ph) \\ \dot{X}(ph) \end{bmatrix} = (\exp hH)^p \begin{bmatrix} X_0 \\ \dot{X}_0 \end{bmatrix} \tag{27}$$

4. Conclusion

La résolution d'un système différentiel du premier ordre $\frac{dX}{dt} = AX$ par un schéma itératif fini engendrant des couples (k_i, B_i) nous a menés à l'expression de l'exponentielle e^{tA} sous la condition de résoudre numériquement une équation différentielle d'ordre n à coefficients constants.

Dans le cadre de l'étude de vibrations de systèmes mécaniques, le système différentiel concerné est du deuxième ordre, nous avons montré que l'algorithme s'étendait aisément par la construction progressive de couples (k_i, B_i) et la résolution d'une équation différentielle d'ordre $2n$ à coefficients constants. Cette méthode est prometteuse puisque nous contournerons la difficulté liée à la recherche des modes propres et donc les instabilités qui sont liées au calcul des vecteurs propres. De plus, nous pensons qu'elle est adaptée à l'utilisation du calcul formel et au développement sur des logiciels tels que Maple.

Références bibliographiques

- [1] Souriau J.-M., Une méthode de décomposition spectrale et l'inversion des matrices, C. R. Acad. Sci. Paris 227 (2) (1948) 1010–1011.
- [2] Souriau J.-M., Calcul Linéaire, Tome 1, PUF, Paris, 1964.
- [3] Thomas F., Nouvelle méthode de résolution des équations du mouvement de systèmes vibratoires linéaires discrets, Rapport de DEA, Université de Poitiers, 1998.