« LES EXTRAITS DE LA REVUE SCIENTIFIQUE »

GÉNÉRALISATION DE CERTAINES FORMULES ARITHMÉTIQUES D'INVERSION. APPLICATIONS

PAR

JEAN-MARIE SOURIAU

M.CM.XL.IV.

EXTRAIT DU N° 3232, MAI 1944,

FASCICULE 4 DE LA 82e ANNÉE DE LA REVUE SCIENTIFIQUE, *PAGES 204 A 211*

PUBLIÉS PAR « LES ÉDITIONS DE LA REVUE SCIENTIFIQUE »

GÉNÉRALISATION DE CERTAINES FORMULES ARITHMÉTIQUES D'INVERSION. APPLICATIONS

GÉNÉRALISATION DE CERTAINES FORMULES ARITHMÉTIQUES D'INVERSION. APPLICATIONS

PAR

JEAN-MARIE SOURIAU

Sommaire. — On se propose d'étudier les fonctions appelées $\mu_\alpha(n)$ et $\varphi_\alpha^s(n)$ qui généralisent la fonction $\mu(n)$ de Möbius et l'indicateur d'Euler $\varphi(n)$. Dans le premier paragraphe sont rappelées quelques propriétés de la fonction $\eta_\alpha(n)$.

§ 1. — Fonction $\eta_\alpha(n)$.

(1) ***Définition.*** — α étant une variable quelconque, réelle ou complexe, n étant un entier $\geqq 0$, nous posons :

$$\eta_\alpha(n) = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{n!}, \qquad \text{pour } n \geqq 1,$$
$$\eta_\alpha(0) = 1.$$

On désigne parfois par F_α^n cette fonction, dans le cas où α est entier.

On a en particulier :

(2) $\quad \eta_0(0) = 1 \quad \eta_0(n) = 0, \quad$ pour $n \geqq 1$.

(3) $\quad \eta_1(n) = 1, \quad$ quel que soit $n \geqq 0$.

(4) $\quad \eta_{-1}(0) = 1 \quad \eta_{-1}(1) = -1 \quad \eta_{-1}(n) = 0, \quad$ pour $n \geqq 2$.

Remarquons que, d'après la définition même, on a :

$$\eta_\alpha(n+1) = \eta_\alpha(n)\,\frac{n+\alpha}{n+1}, \quad \text{pour } n \geqq 0. \tag{5}$$

(6) Théorème :

$$\sum_{p=0}^{n} \eta_\alpha(p)\,\eta_\beta(n-p) = \eta_{\alpha+\beta}(n).$$

Le théorème est vrai pour $n = 0$ et 1. Démontrons-le par récurrence sur n. Si on a

$$\eta_{\alpha+\beta}(n) = \sum_{p=0}^{n} \eta_\alpha(p)\,\eta_\beta(n-p),$$

on aura, d'après (5) :

$$\eta_{\alpha+\beta}(n+1) = \frac{1}{n+1}\sum_{p=0}^{n} \eta_\alpha(p)\eta_\beta(n-p) \times [(\alpha+p)+(\beta+n-p)]$$
$$= \frac{1}{n+1}\Big[\sum_{p=0}^{n} [\eta_\alpha(p+1)\,\eta_\beta(n-p)](p+1)$$
$$+ \sum_{p=0}^{n} \big[\eta_\alpha(p)\,\eta_\beta[(n+1)-p]\big][(n+1)-p]\Big]$$
$$= \frac{1}{n+1}\Big[\sum_{p'=1}^{n+1} [\eta_\alpha(p')\,\eta_\beta(n+1-p')]\,p'$$
$$+ \sum_{p=0}^{n} \big[\eta_\alpha(p) \times \eta_\beta[(n+1)-p]\big][(n+1)-p]\Big]$$
$$= \frac{1}{n+1}\Big[\sum_{p=0}^{n+1} \eta_\alpha(p)\,\eta_\beta(n+1-p)\,p$$
$$+ \sum_{p=0}^{n+1} [\eta_\alpha(p) \times \eta_\beta(n+1-p)](n+1-p)\Big]$$
$$= \sum_{p=0}^{n+1} \eta_\alpha(p)\,\eta_\beta(n+1-p).$$

C. Q. F. D.

(7) Théorème. — Si α est un entier, positif, négatif, ou nul, $\eta_\alpha(n)$ est un entier.

La propriété est vraie pour $\alpha = 0, 1$ et -1, d'après (2), (3), (4).

En faisant $\beta = 1$, $\beta = -1$ dans la formule (6), on trouve les relations

$$\eta_{\alpha+1}(n) = \sum_{p=0}^{n} \eta_\alpha(p), \tag{8}$$

$$\eta_{\alpha-1}(n) = \eta_\alpha(n) - \eta_\alpha(n-1), \tag{9}$$

qui démontrent la propriété par récurrence sur α.

(10) Théorème :

$$\frac{1}{\eta_\alpha(p_1+p_2+\ldots+p_k)} \times \eta_\alpha(p_1) \times \eta_{\alpha+p_1}(p_2)\ldots$$
$$\times\, \eta_{\alpha+p_1+\ldots+p_{k-1}}(p_k) = \frac{(p_1+p_2+\ldots+p_k)!}{p_1!\,p_2!\ldots p_k!}.$$

Il suffit de développer le premier membre de cette égalité pour la vérifier.

Le second membre de l'égalité (10) est indépendant de α et symétrique en $p_1, p_2, \ldots p_k$. Ces deux propriétés permettent d'en déduire d'autres égalités.

Ainsi en faisant $k=2$, $p_1=p$, $p_2=q$, $\alpha=1$, on trouve la formule

$$\eta_{p+1}(q)=\eta_{q+1}(p)=\frac{(p+q)!}{p!\,q!}.$$

En faisant $k=2$, $\alpha=q$, $p_1=1$, $p_2=p-1$, on trouve

$$\frac{\eta_q(1)\,\eta_{1+q}(p-1)}{\eta_q(p)}=p;$$

et comme $\eta_{1+q}(p-1)=\eta_p(q)$ d'après la relation précédente, il vient

$$(11) \qquad q\,\eta_p(q)=p\,\eta_q(p),$$

et, par suite, on a

$$\eta_p(q)+\eta_q(p)=\frac{p+q}{p}\,\eta_p(q)=\eta_{q+1}(p).$$

Enfin on vérifie immédiatement la formule

$$\eta_{-(p+q)}(p)=\frac{(p+q)!}{p!\,q!}(-1)^p.$$

Nous résumerons toutes ces formules par les égalités :

$$(12) \qquad \begin{aligned}\eta_p(q)+\eta_q(p)&=\eta_{q+1}(p)=\eta_{p+1}(q)\\&=(-1)^p\eta_{-(p+q)}(p)=C^p_{p+q}=\frac{(p+q)!}{p!q!}.\end{aligned}$$

Signalons encore la formule du binôme de NEWTON, que l'on peut écrire sous la forme :

$$(13) \qquad (a-b)^n=\sum_{p=0}^{n} a^{n-p}b^p\eta_{-n}(p),$$

puisque d'après (12) on a

$$C^p_{p+q}=(-1)^p\eta_{-(p+q)}(p).$$

Opérateurs T.

(14) THÉORÈME. — Les opérateurs

$$T_\alpha\cdot f(n)=\sum_{p=0}^{n}\eta_\alpha(p)f(n-p)$$

forment un groupe de transformations isomorphe du groupe additif de leurs indices α.

Cela résume les deux égalités :

$$T_0\cdot f(n)=f(n) \qquad T_\alpha\cdot[T_\beta\cdot f(n)]=T_{\alpha+\beta}\cdot f(n).$$

La première est évidente d'après (2). La seconde se démontre ainsi :

$$T_\alpha\cdot[T_\beta\cdot f(n)]=\sum_{p=0}^{n}\eta_\alpha(p)\sum_{q=0}^{n-p}\eta_\beta(q)f(n-p-q),$$

ou, en posant $p+q=r$:

$$\begin{aligned}&=\sum_{r=0}^{n}f(n-r)\sum_{p=0}^{r}\eta_\alpha(p)\eta_\beta(r-p)\\&=\sum_{r=0}^{n}f(n-r)\eta_{\alpha+\beta}(r), \quad \text{d'après le Théorème (6)},\\&=T_{\alpha+\beta}\cdot f(n). \qquad \text{C. Q. F. D.}\end{aligned}$$

On a, en particulier,

$$(15) \qquad \begin{aligned}T_1\cdot f(n)&=\sum_{p=0}^{n}f(p)\\T_{-1}\cdot f(n)&=f(n)-f(n-1), \qquad \text{pour } n\geqq 1.\end{aligned}$$

L'opérateur T_1 est le plus simple des opérateurs sommatoires. C'est lui en particulier qui intervient dans la définition des séries. La formule d'inversion qui fait passer de $g(n)=T_1\cdot f(n)$ à $f(n)=T_{-1}\cdot g(n)$ est généralisée par le Théorème (14); et cela en formant un groupe, ce qui permet l'itération ou l'interpolation de l'opérateur T_1, ou de l'opérateur T_{-1}. Ainsi $T_{-k}\cdot f(n)$ est ce qu'on appelle la différence k^{me} de la fonction $f(n)$. On en obtient donc l'expression directe.

§ 2. — Fonction $\mu_\alpha(n)$. Propriétés élémentaires.

(16) ***Définition***. — Nous posons, l'entier $n>1$ étant décomposé en facteurs premiers :

$$n=p_1^{\lambda_1}\cdot p_2^{\lambda_2}\dots p_k^{\lambda_k}$$

$$\mu_\alpha(n)=\eta_\alpha(\lambda_1)\cdot\eta_\alpha(\lambda_2)\dots\eta_\alpha(\lambda_k)$$

et

$$\mu_\alpha(1)=1.$$

On peut remarquer que cette définition reste valable quand un ou plusieurs des nombres λ_i devient nul, puisque $\eta_\alpha(0)=1$, quel que soit α.

Puisque $\eta_1(n)=1$, on a :

$$(17) \qquad \mu_1(n)=1, \quad \text{quel que soit} \quad n\geqq 1.$$

Comme $\eta_0(n)=0$ pour $n\geqq 1$, on a également :

$$(18) \qquad \mu_0(n)=0, \quad \text{pour} \quad n\geqq 2, \quad \text{avec} \quad \mu_0(1)=1.$$

Enfin la fonction $\mu_{-1}(n)$, qui ne prend que les valeurs -1, 0, $+1$, est la fonction $\mu(n)$ de MÖBIUS que $\mu_\alpha(n)$ généralise.

(19) THÉORÈME. — Si p et q sont premiers entre eux, $\mu_\alpha(pq)=\mu_\alpha(p)\times\mu_\alpha(q)$.

(On dit que la fonction μ est *factorisable*).

Cela résulte immédiatement de la définition, puisque deux nombres premiers entre eux ont des facteurs premiers tous distincts. La propriété reste vraie si l'un des nombres p et q est égal à 1.

(20) THÉORÈME :

$$\sum_{p \text{ div. } n}\mu_\alpha(p)\,\mu_\beta\left(\frac{n}{p}\right)=\mu_{\alpha+\beta}(n).$$

Tout diviseur de n peut se mettre sous la forme $p=p_1^{h_1}.\ p_2^{h_2}\dots p_k^{h_k}$, l'indice h_i variant de 0 à λ_i, et inversement.

Donc

$$\sum_{p \text{ div. } n}\mu_\alpha(p)\,\mu_\beta\left(\frac{n}{p}\right)=\sum_{h_1,h_2\dots h_k}\eta_\alpha(h_1)\,\eta_\alpha(h_2)\dots \eta_\alpha(h_k)\,\eta_\beta(\lambda_1-h_1)\,\eta_\beta(\lambda_2-h_2)\dots\eta_\beta(\lambda_k-h_k)$$

$$= \sum_{h_1=0}^{\lambda_1}\left[\gamma_\alpha(h_1)\gamma_\beta(\lambda_1-h_1)\sum_{h_2=0}^{\lambda_2}\left[\ldots\sum_{h_k=0}^{\lambda_k}[\gamma_\alpha(h_k)\gamma_\beta(\lambda_k-h_k)]\ldots\right]\right]$$

$$=\gamma_{\alpha+\beta}(\lambda_1)\gamma_{\alpha+\beta}(\lambda_2)\ldots\gamma_{\alpha+\beta}(\lambda_k), \qquad \text{d'après le Théorème (6)},$$

$$=\mu_{\alpha+\beta}(n). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Le cas particulier $\beta=1$ donne, d'après (17) :

(21) $$\sum_{p \text{ div. } n}\mu_\alpha(p)=\mu_{\alpha+1}(n).$$

Ainsi, pour $\alpha=-1$, $\mu_{-1}(p)=\mu(p)$, fonction de Möbius, on trouve la relation

(22) $$\sum_{p \text{ div. } n}\mu(p)=0, \qquad \text{pour} \quad n>1,$$

qui est caractéristique de la fonction $\mu(n)$, si on lui joint la condition $\mu(1)=1$.

(23) Théorème. — *Si α est un entier positif, $\mu_\alpha(n)$ est le nombre de systèmes de valeurs entières que peuvent prendre α variables positives dont le produit est égal à n.*

La propriété est évidente pour $\alpha=1$. Admettons-la pour α. Si les variables entières positives $x_1, x_2, \ldots x_\alpha, x_{\alpha+1}$ ont pour produit n, $x_{\alpha+1}$ est un diviseur de n. On obtiendra tous les systèmes de valeurs en donnant successivement pour valeurs à $x_{\alpha+1}$ tous les diviseurs de n. Le nombre de ces systèmes est donc égal à

$$\sum_{p \text{ div. } n}\mu_\alpha\left(\frac{n}{p}\right)=\sum_{p \text{ div. } n}\mu_1(p)\,\mu_\alpha\left(\frac{n}{p}\right), \qquad \text{d'après (17)}$$

$$=\mu_{\alpha+1}(n), \qquad \text{d'après (20).}$$

C. Q. F. D.

Ainsi $\mu_2(n)$ est le nombre des diviseurs de n, dont il fournit l'expression $(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)\ldots(\lambda_k+1)$.

Opérateurs S.

(24) Théorème. — *Les opérateurs*

$$S_\alpha\cdot f(n)=\sum_{p \text{ div. } n}\mu_\alpha(p)f\left(\frac{n}{p}\right)$$

forment un groupe de transformations isomorphe du groupe additif de leurs indices α.

On a, en effet :

$$S_0\cdot f(n)=f(n), \qquad \text{d'après (18),}$$

et

$$S_\alpha\cdot[S_\beta\cdot f(n)]=\sum_{x \text{ div. } n}\mu_\alpha(x)\sum_{y \text{ div. } n:x}\mu_\beta(y)f\left(\frac{n}{xy}\right)$$

ou

$$=\sum_{u \text{ div. } n}f\left(\frac{n}{u}\right)\sum_{x \text{ div. } u}\mu_\alpha(x)\,\mu_\beta\left(\frac{u}{x}\right), \qquad \text{en posant} \quad xy=u,$$

$$=\sum_{u \text{ div. } n}f\left(\frac{n}{u}\right)\mu_{\alpha+\beta}(u) \qquad \text{(Théorème (20))}$$

$$=S_{\alpha+\beta}f(n). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Le cas particulier $\alpha=1$, $\beta=-1$ montre l'équivalence des relations :

(25) $$g(n)=\sum_{p \text{ div. } n}f(p) \qquad \text{et} \qquad f(n)=\sum_{p \text{ div. } n}g(p)\,\mu\left(\frac{n}{p}\right)$$

(Dedekind, Liouville). Le Théorème (24) généralise ces formules de façon analogue à celle des opérateurs T_α.

(26) Théorème. — *Si la fonction $f(n)$ est factorisable, les fonctions $S_\alpha\cdot f(n)$ le sont aussi.*

En effet

$$[S_\alpha\cdot f(p)]\times[S_\alpha\cdot f(q)]=\sum_{x \text{ div. } p}\mu_\alpha(x)f\left(\frac{p}{x}\right)\sum_{y \text{ div. } q}\mu_\alpha(y)f\left(\frac{q}{y}\right).$$

Si p et q sont premiers entre eux, tout diviseur de l'un est premier à tout diviseur de l'autre. Donc on a :

$$[S_\alpha\cdot f(p)]\cdot[S_\alpha\cdot f(q)]=\sum_{\substack{x \text{ div. } p\\ y \text{ div. } q}}\sum\mu_\alpha(xy)f\left(\frac{pq}{xy}\right),$$

puisque la fonction f est factorisable par hypothèse, la fonction μ d'après (19).

Or tout diviseur de pq peut se mettre, et d'une seule façon, sous forme du produit d'un diviseur de p par un diviseur de q, ainsi qu'il résulte immédiatement de la décomposition en facteurs premiers. Donc, en posant $xy=u$, on trouve :

$$[S_\alpha\cdot f(p)]\cdot[S_\alpha\cdot f(q)]=\sum_{u \text{ div. } pq}\mu_\alpha(u)f\left(\frac{pq}{u}\right)=S_\alpha\cdot f(pq).$$

C. Q. F. D.

La plupart des formules d'inversion construites avec la fonction $\mu(n)$ sont comprises dans le théorème suivant, qui les généralise :

(27) Théorème. — *Soit $f(x)$ une fonction quelconque, réelle ou complexe, définie pour $x>x_0$, identiquement nulle dans l'intervalle x_0, x_0+h, $(h>0)$.*

Soit $F(x)$ une fonction continue, strictement croissante, nulle pour $x=x_0$, et $\Phi(x)$ sa fonction inverse.

Soit $g(n)$ une fonction numérique vérifiant les quatre conditions suivantes :

$$g(m)\,g(n)=g(mn), \quad \lim_{n=\infty}g(n)=0, \quad 0\leqq g(m)\leqq 1, \quad g(1)=1.$$

Les opérateurs

$$K_\alpha\cdot f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_\alpha(n)f\left[\Phi\left[g(n)\,F(x)\right]\right],$$

qui sont une somme d'un nombre fini de termes, forment un groupe de transformations isomorphe du groupe additif de leurs indices α.

$F(x)\,g(n)$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Comme $\Phi(0)=x_0$, $\Phi[F(x)g(n)]$ tend vers x_0, donc, pour n assez grand, est inférieur à x_0+h. Alors

$$f\left[\Phi\left[g(n)\,F(x)\right]\right]=0.$$

Il y a bien un nombre fini de termes non nuls. De plus, la fonction $K_\alpha\cdot f(x)$ est nulle dans l'intervalle x_0, x_0+h, puisque $F(x)$ est croissante et $g(n)$ inférieure ou égale à 1.

On a bien $K_0 \cdot f(x) = f(x)$, car la somme se réduit à son terme $n = 1$. Calculons

$$K_\alpha \cdot [K_\beta \cdot f(x)] = \sum_{n=1}^{\infty} \Big[\mu_\alpha(n)\, K_\beta \cdot f\big[\Phi\,[g(n)\,F(x)]\big]\Big]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \Big[\mu_\alpha(n) \sum_{p=1}^{\infty} \Big[\mu_\beta(p) f\Big[\Phi\Big[g(p)\,F\big[\Phi\,[g(n)\,F(x)]\big]\Big]\Big]\Big]\Big].$$

F et Φ étant deux fonctions inverses, comme $g(p)g(n) = g(pn)$, cette expression se simplifie en

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big[\mu_\alpha(n) \sum_{p=1}^{\infty} \big[\mu_\beta(p) f\big[\Phi\,[g(pn)\,F(x)]\big]\big]\Big]$$

ou

$$\sum_{u=1}^{\infty} \big[f\big[\Phi\,[g(u)\,F(x)]\big] \sum_{p \text{ div. } u} \Big[\mu_\alpha\Big(\frac{u}{p}\Big)\mu_\beta(p)\Big]\big], \quad \text{en posant } pn = u,$$

$$= \sum_{u=1}^{\infty} \big[f\big[\Phi\,[g(u)\,F(x)]\big]\, \mu_{\alpha+\beta}(u)\big] \qquad \text{(Théorème (20))}$$

$$= K_{\alpha+\beta} \cdot f(x). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Ce Théorème comprend, comme cas particuliers, deux formules d'Hadamard donnant l'inversion de

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(x^{1/n}) \qquad \text{et de} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} f\Big(\frac{x}{n}\Big),$$

où f est identiquement nulle dans l'intervalle $1, 1+h$ pour la première, $-\infty, 1$ pour la seconde [1].

Si $f(x)$ n'est différente de 0 que pour $x = 1, 2, 3, \cdots$, on trouve un résultat équivalent au Théorème (24).

Prenons comme cas particulier $F(x) = x$, $g(n) = 1/n$, $x_0 = 0$ et $f(x) = 0$, pour $x < 1$, $f(x) = 1$, pour $x \geqq 1$. On a alors

$$K_\alpha \cdot f(x) = \sum_{n=1}^{[x]} \mu_\alpha(n),$$

en désignant par $[x]$ la partie entière de x. On a d'ailleurs $K_1 \cdot f(x) = [x]$. Deux cas particuliers du Théorème (27) donnent alors les formules

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)\Big[\frac{x}{n}\Big] = 1 \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{[x]} \sigma\Big(\frac{x}{n}\Big) = 1,$$

valables pour $x \geqq 1$, en désignant, avec F. Mertens, par $\sigma(n)$ la fonction sommatoire de $\mu(n)$. Ces formules particulières ont été démontrées par Bugajev et M. David.

Toujours dans ce cas, on a

$$K_{\alpha+1} \cdot f(x) = \sum_{n=1}^{[x]} \mu_{\alpha+1}(n) = K_\alpha \cdot K_1 f(x) = \sum_{n=1}^{[x]} \mu_\alpha(n)\Big[\frac{x}{n}\Big].$$

Or on peut poser $u - [u] = \theta(u)$, avec $0 \leqq \theta(u) < 1$, quel que soit u. Alors

$$K_{\alpha+1} f(x) = \sum_{n=1}^{[x]} \mu_\alpha(n)\Big(\frac{x}{n} - \theta\Big(\frac{x}{n}\Big)\Big)$$

$$= x \sum_{n=1}^{[x]} \frac{\mu_\alpha(n)}{n} - \sum_{n=1}^{[x]} \mu_\alpha(n)\,\theta\Big(\frac{x}{n}\Big) = \sum_{n=1}^{[x]} \mu_{\alpha+1}(n);$$

[1] (*Encyclopédie*, éd. française, I, 17, p. 229).

on en tire

$$\sum_{n=1}^{[x]} \frac{\mu_\alpha(n)}{n} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{[x]} \mu_{\alpha+1}(n) + \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{[x]} \mu_\alpha(n)\,\theta\Big(\frac{x}{n}\Big).$$

Si $|\alpha| \leqq 1$, on a $|\eta_\alpha(n)| \leqq 1$, quel que soit n, et par suite $|\mu_\alpha(n)| \leqq 1$; d'où

$$\Big|\sum_{n=1}^{[x]} \frac{\mu_\alpha(n)}{n}\Big| \leqq \frac{2}{x}[x],$$

ou

$$(28) \qquad \Big|\sum_{n=1}^{[x]} \frac{\mu_\alpha(n)}{n}\Big| \leqq 2, \quad \text{pour} \quad |\alpha| \leqq 1, \quad |\alpha+1| \leqq 1.$$

Le cas particulier $\alpha = -1$ donne, puisque $\mu_0(n) = 0$ pour $n > 1$:

$$\Big|\sum_{n=1}^{[x]} \frac{\mu(n)}{n}\Big| \leqq \frac{1}{x} + \frac{[x]}{x};$$

si on prend $x = p + 1 - \varepsilon$ ($0 < \varepsilon < 1$, p entier), on trouve

$$\Big|\sum_{n=1}^{p} \frac{\mu(n)}{n}\Big| \leqq \frac{p+1}{p+1-\varepsilon},$$

si petit que soit $\varepsilon > 0$; donc

$$(29) \qquad \Big|\sum_{n=1}^{p} \frac{\mu(n)}{n}\Big| \leqq 1.$$

§ 3. — Fonction $\varphi^s_\alpha(n)$. Propriétés élémentaires.

(30) ***Définition***. — Nous posons

$$\varphi^s(n) = S_\alpha(n^s) = \sum_{p \text{ div. } n} \mu_\alpha(p)\Big(\frac{n}{p}\Big)^s$$

(comme α, s est une variable complexe).

Le Théorème (24) donne la formule :

$$(31) \qquad \sum_{p \text{ div. } n} \mu_\beta(p)\,\varphi^s_\alpha\Big(\frac{n}{p}\Big) = \varphi^s_{\alpha+\beta}(n).$$

D'après (26), la fonction de l'entier n, $\varphi^s_\alpha(n)$, est factorisable, puisqu'il en est de même de la fonction n^s.

En faisant $\alpha = 1$, on voit que $\varphi^s_1(n)$ est la somme des puissances s des diviseurs de n. De même $\varphi^s_2(n)$ est la somme des puissances s des diviseurs des diviseurs de n, ou encore la somme des produits des puissances s des diviseurs de n par le nombre de diviseurs des diviseurs conjugués, ainsi qu'il résulte de (31). Nous allons donner une interprétation de $\varphi^s_{-1}(n)$ pour s entier positif.

(32) Théorème. — Le nombre de systèmes de valeurs entières, inférieures ou égales à n, premières entre elles et avec n dans leur ensemble, que peuvent prendre k variables positives est égal à $\varphi^k_{-1}(n)$.

Le Théorème est vrai pour $n = 1$, car $\varphi^k_{-1}(1) = 1$ correspond au système unique $1, 1, 1, \ldots 1$. Admettons le Théorème pour $1, 2, \ldots n-1$.

Les systèmes de k entiers $\leqq n$ sont au nombre de n^k.

Les systèmes d'entiers admettant avec n le p. g. c. d. p, qui est par conséquent un diviseur de n, donnent, par division par p, k entiers premiers avec n/p et entre eux dans leur ensemble, et inversement. Leur nombre est donc par hypothèse égal à $\varphi^k_{-1}\left(\frac{n}{p}\right)$. Le nombre cherché est donc égal à

$$n^k - \sum_{\substack{p \text{ div. } n \\ p>1}} \varphi^k_{-1}\left(\frac{n}{p}\right) = n^k - \sum_{\substack{p \text{ div. } n \\ p>1}} \mu_1(p)\,\varphi^k_{-1}\left(\frac{n}{p}\right).$$

Or le Théorème (31), où l'on fait $\beta = 1$, donne la relation

$$\sum_{\substack{p \text{ div. } n \\ p>1}} \mu_1(p)\,\varphi^k_{-1}\left(\frac{n}{p}\right) + \varphi^k_{-1}(n) = \varphi^k_0(n) = n^k.$$

Il en résulte que le nombre cherché est égal à $\varphi^k_{-1}(n)$.

C. Q. F. D.

Ainsi $\varphi^1_{-1}(n)$ est le nombre des nombres premiers avec n et inférieurs ou égaux à n que l'on appelle *indicateur d'*EULER de n. $\varphi^\varepsilon_\alpha(n)$ en est si l'on veut une généralisation à deux paramètres. En revenant à la définition, on obtient l'expression de l'indicateur d'EULER au moyen de la fonction μ :

$$\text{(33)} \qquad \varphi^1_{-1}(n) = \sum_{p \text{ div. } n} \mu(p) \times \frac{n}{p} \quad (^1).$$

Nous avons déjà démontré ses deux propriétés fondamentales : il est factorisable ; la somme des indicateurs des diviseurs de n est égale à n (formule (31), avec $\beta = 1$). La formule (31) en donne d'autres propriétés, telles que celle-ci :

La somme des produits du nombre de diviseurs des diviseurs de n par les indicateurs des diviseurs conjugués est égale à la somme des diviseurs de n, etc...

Quelques-unes de ces formules ont été données sans démonstration par LIOUVILLE ([2]).

§ 4. — Applications analytiques de $\mu_\alpha(n)$ et $\varphi^\varepsilon_\alpha(n)$.

a) Croissance de la fonction $\mu_\alpha(n)$.

(34) THÉORÈME :

$$\lim_{n=\infty} \frac{\mu_\alpha(n)}{n^\varepsilon} = 0, \quad \text{pour} \quad \varepsilon > 0.$$

Soit $n = p_1^{\lambda_1} \cdot p_2^{\lambda_2} \ldots p_k^{\lambda_k}$, les p_j étant premiers, rangés par ordre croissant ; on a

$$\mu_\alpha(n) = \prod_j \eta_\alpha(\lambda_j) ;$$

donc

$$\frac{\mu_\alpha(n)}{n^{\frac{\varepsilon}{2}}} = \prod_j \frac{\eta_\alpha(\lambda_j)}{p_j^{\frac{\varepsilon}{2}\lambda_j}}.$$

Soit A un entier > 1 et $> |\alpha|$; on a, en supprimant l'indice j :

$$\left|\frac{\eta_\alpha(\lambda)}{\lambda^{A-1}}\right| < \frac{\eta_A(\lambda)}{\lambda^{A-1}} = \frac{\eta_{\lambda+1}(A-1)}{\lambda^{A-1}}, \qquad \text{d'après (12)},$$

$$= \frac{1}{(A-1)!}\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)\left(1+\frac{2}{\lambda}\right)\ldots\left(1+\frac{A-1}{\lambda}\right).$$

On voit, sous cette forme, que c'est une fonction décroissante de λ, égale à A, pour $\lambda = 1$; donc que $|\eta_\alpha(\lambda)| < A\lambda^{A-1}$, et par suite que

$$\left|\frac{\eta_\alpha(\lambda)}{p^{\frac{\varepsilon}{2}\lambda}}\right| < \frac{A\lambda^{A-1}}{p^{\frac{\varepsilon}{2}\lambda}}.$$

La fonction

$$f(x) = \operatorname{Log} \frac{A x^{A-1}}{p^{\frac{\varepsilon x}{2}}}$$

a pour dérivée

$$f'(x) = \frac{A-1}{x} - \frac{\varepsilon}{2} \operatorname{Log} p.$$

Cette dérivée décroît constamment et s'annule pour

$$x = \frac{2(A-1)}{\varepsilon \operatorname{Log} p}.$$

On a donc

$$f(x) \leqq f\left[\frac{2(A-1)}{\varepsilon \operatorname{Log} p}\right] = \operatorname{Log} A + (A-1) \operatorname{Log} \frac{2(A-1)}{\varepsilon \operatorname{Log} p} - (A-1) ;$$

d'où résulte :

$$\left|\frac{\eta_\alpha(\lambda)}{p^{\frac{\varepsilon}{2}\lambda}}\right| < A\left[\frac{2(A-1)}{e\varepsilon \operatorname{Log} p}\right]^{A-1}.$$

Cette expression sera < 1 si

$$\sqrt[A-1]{A}\,\frac{2(A-1)}{e\varepsilon \operatorname{Log} p} < 1 \qquad \text{ou} \qquad p > e^{\frac{2(A-1)A^{\frac{1}{A-1}}}{e\varepsilon}}.$$

On a donc, en majorant les termes du produit et en négligeant ceux qui sont < 1 :

$$\left|\frac{\mu_\alpha(n)}{n^\varepsilon}\right| < \frac{1}{n^{\frac{\varepsilon}{2}}} \prod_j A\left[\frac{2(A-1)}{e\varepsilon \operatorname{Log} p_j}\right]^{A-1}$$

$$< \frac{1}{n^{\frac{\varepsilon}{2}}}\left[A\left(\frac{2(A-1)}{e\varepsilon \operatorname{Log} 2}\right)^{A-1}\right]^{e^{\frac{2(A-1)A^{\frac{1}{A-1}}}{e\varepsilon}}},$$

quantité qui sera aussi petite que l'on voudra pourvu que n soit assez grand. C. Q. F. D.

b) Fonctions définies par des séries entières.

(35) Nous posons

$$f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_\alpha(n)\, x^n.$$

Une telle série a un rayon de convergence au moins égal à 1, d'après le Théorème (34). Pour $|x| < 1$, on peut définir l'expression

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_\beta(k) f_\alpha(x^k) = \sum_{k,n}\sum \mu_\alpha(n)\, \mu_\beta(k)\, x^{nk}.$$

([1]) *Cf. Encycl.*, éd. fr., I, 17.

([2]) (*J. Math. pures et appl.* (2), 2, 3, 4, 5...).

C'est une série double absolument convergente; on peut l'ordonner suivant les valeurs de $nk = u$; on trouve

$$\sum_u x^u \sum_{n \text{ div. } u} \mu_\alpha(n)\,\mu_\beta\left(\frac{u}{n}\right) = \sum_u x^u \mu_{\alpha+\beta}(u), \quad \text{d'après le Th}^{\text{me}}\,(20);$$

d'où la formule

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_\beta(k) f_\alpha(x^k) = f_{\alpha+\beta}(x). \tag{36}$$

On a

$$f_0(x) = x \quad \text{et} \quad f_1(x) = x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \frac{x}{1-x};$$

ainsi la fonction

$$f_{-1}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)\, x^n$$

vérifie la relation fonctionnelle

$$f_{-1}(x) + f_{-1}(x^2) + \dots + f_{-1}(x^n) + \dots = x, \quad \text{pour } |x| < 1. \tag{37}$$

Cette relation est d'ailleurs caractéristique. On a aussi :

$$\frac{x}{1-x} - \frac{x^2}{1-x^2} - \frac{x^3}{1-x^3} + \dots + \frac{\mu(n)\,x^n}{1-x^n} + \dots = x, \quad \text{pour } |x| < 1. \tag{38}$$

On peut déduire d'autres formules de celles-là, par dérivation et par intégration, puisque dans le cercle $|x| \leqq x_0 < 1$ on a des séries uniformément convergentes de fonctions holomorphes.

On peut définir aussi les fonctions

$$g_\alpha^s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_\alpha^s(n) x^n.$$

On voit, comme pour les fonctions $f_\alpha(x)$, qu'elles vérifient :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_\beta(n)\, g_\alpha^s(x^n) = g_{\alpha+\beta}^s(n); \tag{39}$$

on a

$$g_0^s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^s x^n,$$

fonction que l'on peut exprimer simplement, lorsque s est un entier $\geqq -1$:

$$g_0^{-1}(x) = -\operatorname{Log}(1-x) \qquad g_0^0(x) = \frac{x}{1-x}$$

$$g_0^1(x) = \frac{x}{(1-x)^2} \qquad g_0^2(x) = \frac{x+x^2}{(1-x)^2};$$

ce qui permet, au moyen de la formule (39), de trouver un certain nombre de formules. Par exemple, la fonction

$$g_{-1}^1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n)\, x^n,$$

où $\varphi(n)$ désigne l'indicateur de n, vérifie la relation fonctionnelle

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_{-1}^1(x^n) = \frac{x}{(1-x)^2}. \tag{40}$$

Cette relation est d'ailleurs caractéristique.

c) Fonctions définies par des séries de Dirichlet.

Nous désignerons par $R(s)$ et $I(s)$ la partie réelle et le coefficient de i du nombre complexe s. Nous appellerons $\zeta(s)$ la fonction de Riemann

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

ou son prolongement.

(41) Théorème :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_\alpha(n)}{n^s} = [\zeta(s)]^\alpha, \quad \text{pour } R(s) > 1,\ \alpha \text{ quelconque.}$$

D'après (34),

$$\left| \frac{\mu_\alpha(n)}{n^{\frac{s-1}{2}}} \right| \leqq \left| \frac{\mu_\alpha(n)}{n^\varepsilon} \right|$$

tend vers 0 quand n tend vers l'infini, donc est borné par un nombre k si $R(s) \geqq 1 + 2\varepsilon$. Cette majoration est même uniforme dans tout domaine où $|\alpha| \leqq A$ entier et où $R(s) \geqq 1 + 2\varepsilon$, ainsi que le montre la dernière formule établie pour la démonstration de (34). Donc, dans tout le domaine, on a

$$\left| \frac{\mu_\alpha(n)}{n^s} \right| < \frac{k}{n^{1+\varepsilon}},$$

terme général d'une série convergente; la convergence est absolue et uniforme. Appelant provisoirement $f(\alpha, s)$ la somme de cette série, qui est donc une fonction holomorphe de ses deux arguments, on peut effectuer le produit

$$f(\alpha, s)\cdot f(\beta, s) = \sum_n \frac{\mu_\alpha(n)}{n^s} \sum_p \frac{\mu_\beta(p)}{p^s}$$

et l'ordonner suivant $u = np$, ce qui donne

$$f(\alpha, s)\cdot f(\beta, s) = \sum_u \frac{1}{u^s} \sum_{p \text{ div. } u} \mu_\alpha(p)\,\mu_\beta\left(\frac{u}{p}\right) = f(\alpha+\beta, s)\ (\text{Th}^{\text{me}}\,(20)).$$

Pour α et s réels, cette relation fonctionnelle montre, d'après un théorème de Cauchy faisant intervenir la continuité en α, que l'on a

$$f(\alpha, s) = [f(1, s)]^\alpha = [\zeta(s)]^\alpha.$$

Cette égalité reste vraie dans tout le domaine, par prolongement.

C. Q. F. D.

On trouve dans l'*Encyclopédie* (I, 17) les cas particuliers $\alpha = -1$, $\alpha = 2$.

Remarque. — L'abscisse de convergence de la série (41) n'est pas nécessairement égale à 1 pour toutes les valeurs de α. Elle est en tous cas supérieure ou égale à la borne supérieure des parties réelles des zéros de la fonction ζ, borne qui serait égale à 1/2 d'après la célèbre hypothèse de Riemann.

(42) Théorème :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_\alpha^s(n)}{n^t} = [\zeta(t)]^\alpha \zeta(t-s), \quad \text{pour } \mathrm{R}(t) > 1,\ \mathrm{R}(t-s) > 1;$$

car

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_\alpha^s(n)}{n^t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^t} \sum_{p \text{ div. } n} \mu_\alpha(p) \left(\frac{n}{p}\right)^s$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p \text{ div. } n} \frac{\mu_\alpha(p)}{p^t} \times \left(\frac{n}{p}\right)^{s-t} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\mu_\alpha(p)}{p^t} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^{t-s}},$$

si $\mathrm{R}(t-s) > 1$ et $\mathrm{R}(t) > 1$.

$$[\zeta(t)]^\alpha \zeta(t-s).$$

C. Q. F. D.

Ainsi, $\varphi(n)$ étant l'indicateur d'Euler de n, on trouve la formule :

$$(43) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}, \qquad \text{pour} \quad \mathrm{R}(s) > 2.$$

On aura un grand nombre de formules analogues en utilisant les diverses interprétations de $\varphi_\alpha^s(n)$. La plus simple correspond à $\alpha = 1$, $s = 1$.

(44) Théorème :

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n} \frac{\varphi_\alpha^s(p)}{p^s} = [\zeta(s+1)]^\alpha, \quad \text{pour} \quad \mathrm{R}(s) > 0.$$

En effet,

$$\frac{\varphi_\alpha^s(p)}{p^s} = \frac{1}{p^s} \sum_{k \text{ div. } p} \mu_\alpha(k) \left(\frac{p}{k}\right)^s = \sum_{k \text{ div. } p} \frac{\mu_\alpha(k)}{k^s}$$

et

$$\frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n} \frac{\varphi_\alpha^s(p)}{p^s} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_\alpha(k)}{k^s} \times \sum_{p \leq n, \text{ multiple de } k} 1$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_\alpha(k)}{k^s} \times \left[\frac{n}{k}\right]$$

avec $[u] =$ partie entière de u.

Comme pour la démonstration de (28), nous poserons $u - [u] = \theta(u)$, $(0 \leqq \theta(u) < 1)$. On a alors

$$\frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n} \frac{\varphi_\alpha^s(p)}{p^s} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_\alpha(k)}{k^s} \frac{n}{k} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \theta\left(\frac{n}{k}\right) \frac{\mu_\alpha(k)}{k^s}.$$

Soit ε un nombre positif inférieur à $\frac{1}{2}\mathrm{R}(s)$ et à 1. D'après le Théorème (34), $\left|\frac{\mu_\alpha(k)}{k^\varepsilon}\right|$ est inférieur à un nombre K, quel que soit k, K ne dépendant que de α et de ε ; donc

$$\left|\theta\left(\frac{n}{k}\right) \frac{\mu_\alpha(k)}{k^s}\right| < \frac{\mathrm{K}}{k^\varepsilon}$$

et

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \theta\left(\frac{n}{k}\right) \frac{\mu_\alpha(k)}{k^s}\right| < \mathrm{K} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\varepsilon} < \mathrm{K}\left[1 + \int_1^n \frac{dt}{t^\varepsilon}\right]$$

$$= \frac{\mathrm{K}}{1-\varepsilon}(n^{1-\varepsilon} - \varepsilon).$$

D'autre part, le terme

$$\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \theta\left(\frac{n}{k}\right) \frac{\mu_\alpha(k)}{k^s}\right|$$

est inférieur à

$$\frac{\mathrm{K}}{1-\varepsilon}\left[\frac{1}{n^\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{n}\right],$$

quantité qui tend vers 0 quand n croît indéfiniment ; donc

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n} \frac{\varphi_\alpha^s(p)}{p^s} = \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_\alpha(k)}{k^s} \frac{n}{k}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_\alpha(k)}{k^{s+1}} = [\zeta(s+1)]^\alpha,$$

d'après (41).

C. Q. F. D.

Le cas particulier $\alpha = 1$, où $\varphi_1^s(n)$ désigne la somme de puissances s des diviseurs de n, a été étudié par Cesaro, Gegenbauer, Kronecker.

(45) Lemme :

$$\lim_{n=\infty} \frac{1^s + 2^s + \ldots + n^s}{n^{s+1}} = \frac{1}{s+1}, \qquad \text{pour} \quad \mathrm{R}(s) > 0.$$

La fonction $|1 - t^s|$ commence par croître à partir de 0 quand t décroît à partir de 1 ; elle est une fonction décroissante de t dans un certain intervalle t_0, $1 (t_0 < 1)$. Par conséquent, quel que soit p positif, $|p^s - u^s| = p^{\mathrm{R}(s)}\left|1 - \left(\frac{u}{p}\right)\right|^s$ est une fonction décroissante de u dans l'intervalle $t_0 p, p$, donc dans l'intervalle $p-1$, p si p est assez grand. Donc, pour $p > p_0$, $|p^s - u^s| < |p^s - (p-1)^s|$, pour $p - 1 < u < p$; d'où, par intégration,

$$\left|\int_{p-1}^{p} (p^s - u^s)\, du\right| < \int_{p-1}^{p} |p^s - (p-1)^s|\, du$$

ou

$$\left|p^s - \int_{p-1}^{p} u^s du\right| < |p^s - (p-1)^s|.$$

Par addition de semblables inégalités, on trouve :

$$\left|\sum_{p_0}^{n} p^s - \int_{p_0-1}^{n} u^s du\right| < \sum_{p_0}^{n} |p^s - (p-1)^s|$$

$$\leqq \sum_{p=1}^{n} |p^s - (p-1)^s| ;$$

or

$$|p^s - (p-1)^s| = |e^{s \operatorname{Log} p} - e^{s \operatorname{Log}(p-1)}| = \left|s \int_{\operatorname{Log}(p-1)}^{\operatorname{Log} p} e^{st} dt\right|$$

$$\leqq |s| \int_{\operatorname{Log}(p-1)}^{\operatorname{Log} p} e^{t\mathrm{R}(s)} dt = \frac{|s|}{\mathrm{R}(s)}[p^{\mathrm{R}(s)} - (p-1)^{\mathrm{R}(s)}]$$

et par conséquent

$$(46) \qquad \sum_{p=1}^{n} |p^s - (p-1)^s| \leqq \frac{|s|}{\mathrm{R}(s)} n^{\mathrm{R}(s)}, \quad \text{pour} \quad \mathrm{R}(s) > 0.$$

L'inégalité

$$\left|\sum_{p_0}^{n} p^s - \frac{1}{s+1}[n^{s+1} - (p_0 - 1)^{s+1}]\right| < \frac{|s|}{\mathrm{R}(s)} n^{\mathrm{R}(s)},$$

que l'on peut écrire

$$\left| \frac{\sum_{p_0}^{n} p^s}{\frac{1}{s+1} n^{1+s}} - 1 + \left(\frac{p_0 - 1}{n}\right)^{s+1} \right| < \frac{|s(s+1)|}{n \times R(s)},$$

montre que l'on a

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{1}^{n} p^s}{\frac{1}{s+1} n^{s+1}} = 1.$$

C. Q. F. D.

(47) Théorème :

$$\lim \frac{\varphi_\alpha^s(1) + \varphi_\alpha^s(2) + \ldots + \varphi_\alpha^s(n)}{1^s + 2^s + \ldots + n^s} = [\zeta(s+1)]^\alpha, \text{ pour } R(s) > 0.$$

Posons

$$D = 1 + [1 + |1+s|]\left[1 + \frac{|s|}{R(s)}\right]$$

$$\varepsilon_n = \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} \frac{\varphi_\alpha^s(p)}{p^s} - [\zeta(s+1)]^\alpha$$

$$u_n = \frac{\sum_{p=1}^{n} \varphi_\alpha^s(p)}{\sum_{1}^{n} p^s} - [\zeta(s+1)]^\alpha.$$

Il faut montrer que, quel que soit $\eta > 0$, on peut déterminer n_0 tel que $n > n_0$ entraîne $|u_n| < \eta$.

D'après le Théorème (44), ε_n tend vers 0 avec $1/n$; on peut donc déterminer n_1 tel que $n \geqq n_1$ entraîne $|\varepsilon_n| < \eta/D$. On a

$$\sum_{1}^{n} \frac{\varphi_\alpha^s(p)}{p^s} = n\varepsilon_n + n[\zeta(s+1)]^\alpha,$$

d'où résulte

$$\varphi_\alpha^s(n) = n^s[\zeta(s+1)]^\alpha + n^s[n\varepsilon_n - (n-1)\varepsilon_{n-1}]$$

et

$$u_n = \frac{\sum_{p=1}^{n} p^s[p\varepsilon_p - (p-1)\varepsilon_{p-1}]}{\sum_{1}^{n} p^s} = \frac{A+B+C}{\sum_{p=1}^{n} p^s},$$

avec

$$A = \sum_{p=1}^{n} [p^{s+1}\varepsilon_p - (p-1)^{s+1}\varepsilon_{p-1}],$$

$$B = \sum_{p=1}^{n_1} [(p-1)^{s+1} - p^s(p-1)]\varepsilon_{p-1},$$

$$C = \sum_{p=n_1+1}^{n} [(p-1)^{s+1} - p^s(p-1)]\varepsilon_{p-1}$$

si $n > n_1$.

On a

$$|A| = |n^{s+1}\varepsilon_n| < n^{1+R(s)} \frac{\eta}{D},$$

$$|C| < \frac{\eta}{D} n \sum_{p=1}^{n} |p^s - (p-1)^s| \leqq \frac{\eta}{D} \frac{|s|}{R(s)} n^{1+R(s)},$$

d'après (46).

D'après (45), $\left|\sum_{1}^{n} p^s\right|$ est équivalent à $\frac{n^{1+R(s)}}{|1+s|}$, donc est supérieur à $\frac{n^{1+R(s)}}{1+|1+s|}$ pour $n > n_2$. On a alors

$$|u_n| < \frac{1+|1+s|}{n^{1+R(s)}}\left[n^{1+R(s)} \frac{\eta}{D}\left[1 + \frac{|s|}{R(s)}\right] + B\right].$$

B étant indépendant de n, l'expression $B \frac{1+|1+s|}{n^{1+R(s)}}$ tend vers 0 avec $1/n$, et sera inférieure à $\frac{\eta}{D}$ pour $n > n_3$. Donc, pour

$$n > n_0 = n_1 + n_2 + n_3$$

$$|u_n| < \frac{\eta}{D}\left[(1 + |1+s|)\left(1 + \frac{|s|}{R(s)}\right) + 1\right] = \eta.$$

C. Q. F. D.

D'après le Lemme (45), on peut, dans cette expression, remplacer le dénominateur par la quantité équivalente $\frac{n^{s+1}}{s+1}$.

Les Théorèmes (44) ou (47) permettent de trouver un certain nombre de formules, en introduisant les interprétations données de $\varphi_\alpha^s(n)$ et en utilisant les formules $\zeta(2) = \pi^2/6$, $\zeta(4) = \pi^4/90$, etc... Ainsi le quotient par n de la somme des diviseurs de n tend en moyenne vers $\pi^2/6$, ($\alpha = 1$, $s = 1$), etc... Par exemple, le quotient par n^5 de la somme des puissances cinquièmes des diviseurs des diviseurs de n tend en moyenne vers

$$\frac{\pi^{12}}{893.025} \qquad (\alpha = 2,\ s = 5).$$

Pour $\alpha = -1$, $s = 1$, on trouve la formule :

$$(48) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{\varphi(1) + \varphi(2) + \ldots + \varphi(n)}{n^2} = \frac{3}{\pi^2},$$

déjà donnée par Lejeune-Dirichlet.

Plus généralement, d'après (32), pour $\alpha = -1$, s entier positif, l'expression

$$\frac{\varphi_{-1}^s(1) + \ldots + \varphi_{-1}^s(n)}{1^s + 2^s + \ldots + n^s}$$

est le rapport au nombre total de systèmes de $s+1$ entiers $\leqq n$ du nombre de ceux d'entre eux qui sont formés de nombres premiers entre eux dans leur ensemble. On peut, si l'on veut, énoncer ce résultat de la façon suivante :

(49) *La probabilité pour que k nombres soient premiers entre eux dans leur ensemble est égale à* $\frac{1}{\zeta(k)}$.

(On peut remarquer que cette probabilité tend vers 1 quand k tend vers l'infini).

Ainsi la probabilité pour que deux nombres soient premiers entre eux est $\frac{6}{\pi^2}$; la probabilité pour que quatre nombres soient premiers entre eux dans leur ensemble est $\frac{90}{\pi^4}$, etc...

(manuscrit reçu le 25 mai 1944)