ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Valeurs moyennes et transformation de Laplace.* Note (¹) de M. **Jean-Marie Souriau**, présentée par M. Henri Villat.

On désigne par valeur moyenne de la fonction $g(x)$ dans l'intervalle O, x la quantité

$$\frac{1}{x}\int_0^x g(t)\,dt = \int_0^1 g(xt)\,dt.$$

Nous désignerons par valeur moyenne d'ordre α de la fonction $g(x)$ l'expression

$$g_\alpha(x) = \int_0^1 \alpha(1-t)^{\alpha-1} g(xt)\,dt.$$

Moyennant quelques conditions générales sur $g(x)$, on peut établir les propositions suivantes :

(1) $$g_{\alpha+\beta}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}\int_0^1 t^\alpha(1-t)^{\beta-1} g_\alpha(xt)\,dt$$

pour

$$R(\alpha) > 0, \qquad R(\beta) > 0.$$

(2) Si $g(x)$ tend vers une limite g_0, $g_\alpha(x)$ tend vers g_0 si $R(\alpha) > 0$,

(3) Si $g_\alpha(x)$ tend vers g_0, $g_{\alpha+\beta}(x)$ tend vers g_0 si $R(\alpha) > 0$, $R(\beta) > 0$.

Appliquons ces notions à la transformation de Laplace. Soit H_k la classe des fonctions réelles ou complexes de la variable réelle x, nulles pour x négatif, sommables dans tout intervalle fini, et majorées par une exponentielle Ke^{kx}.

A toute fonction $f(x)$ de cette classe, correspond sa transformée de Laplace

$$F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} z e^{-zx} f(x)\,dx,$$

intégrale qui converge vers une fonction holomorphe dans le demi-plan

$$R(z) > k.$$

Cette transformation est inversée par la formule de Bromwich-Mellin

$$f(u) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty} \frac{F(z)}{z} e^{uz}\,dz.$$

Malheureusement les conditions de convergence de cette intégrale sont assez capricieuses.

Nous allons la considérer comme limite de la fonction

$$\varphi(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\lambda-ix}^{\lambda+ix} \frac{F(z)}{z} e^{uz}\,dz.$$

(¹) Séance du 23 juin 1947.

λ étant $> k$, si la fonction $f(x)$ a une limite à droite et une limite à gauche pour $x = u$, $f(u+0)$ et $f(u-0)$; nous avons établi les propositions suivantes :

(4) $\varphi(x)$ tend en moyenne d'ordre 1 vers $(1/2)[f(u+0)+f(u-0)]$.

(5) Si l'intégrale de Bromwich-Mellin converge, sa somme est

$$\frac{1}{2}[f(u+0)+f(u-0)].$$

(6) Si $f(x)$ est réelle, la partie réelle de

$$\frac{x}{\pi}\int_0^1 (1-t)\frac{e^{uz}\mathrm{F}(z)}{z}\,dt, \qquad \text{avec} \quad z=\lambda+ixt,$$

tend vers

$$\frac{1}{2}[f(u+0)+f(u-0)].$$

(7) La quantité $\psi(x) = (1/2)[e^{uz}\mathrm{F}(z)+e^{u\bar{z}}\mathrm{F}(\bar{z})]$, avec $z=\lambda+ix$, $\bar{z}=\lambda-ix$ tend en moyenne d'ordre 2 vers $f(u+0)-f(u-0)$.

On obtient ainsi des formules qui convergent moyennant des hypothèses très peu restrictives imposées à $f(x)$ seulement, qui permettent d'avoir non seulement les valeurs de la fonction, mais encore ses discontinuités de première espèce.

Les propositions (2) et (3) montrent que si les fonctions considérées convergent directement ou en moyenne d'ordre quelconque, leur somme est encore la quantité cherchée.

Dans le cas particulier où $f(x)$ est une fonction en escalier, $\mathrm{F}(z)$ est la somme d'une série de Dirichlet générale; on peut obtenir directement les coefficients par une intégrale, et non la somme des n premiers coefficients comme dans la formule de Cahen. Ainsi la partie réelle de $e^{(\lambda+ix)\operatorname{Log} n}[\zeta(\lambda+ix)]^{\alpha}$, pour $\lambda > 1$, n entier, tend en moyenne d'ordre 2 vers la fonction arithmétique $\mu_{\alpha}(n)$ (²).

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur l'extension de la théorie des fonctions de Baire à une classe d'espaces topologiques non métriques.* Note (¹) de M. **Roger Paintandre**, présentée par M. Paul Montel.

1. Nous renvoyons pour les définitions et les résultats antérieurs à notre Note précédente (²). Nous ferons usage du théorème de Zorn, en suivant l'énoncé ci-après (³) : *Si une propriété* P *de sous-ensembles d'un ensemble* X *a le*

(²) Cf. J. M. Souriau, *Revue Scient.*, mai 1944, pp. 204-211.

(¹) Séance du 30 juin 1947.

(²) *Comptes rendus*, **224**, 1947, p. 1806.

(³) S. Lefschetz, *Algebraic Topology* (*Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.*, **27**).