

Si $\mathcal{L}$ est modulaire, Σ correspond à la relation : $x \leq y$ équivalent : à $x|y$ est complémenté et le treillis quotient $S_0|\Sigma$ est un treillis distributif complémenté de puissance 2^N où N est le nombre de paramètres indépendants dont on dispose pour normer $\mathcal{L}$. Si $\mathcal{L}$ est non seulement modulaire mais distributif, $\mathfrak{E}(\mathcal{L})$ est aussi distributif. Enfin, si $\mathcal{L}$ est complémenté, $\mathfrak{E}(\mathcal{L})$ est isomorphe à $\mathcal{L}$.

ALGÈBRE. — *Une méthode pour la décomposition spectrale et l'inversion des matrices.* Note de M. JEAN-MARIE SÓURIAU, présentée par M. Jean Chazy.

Soit A une matrice carrée d'ordre n . Nous désignerons par $T(A)$ la trace de cette matrice (c'est-à-dire la somme des éléments de la diagonale principale), et par

$$P(x) = x^n + k_1 x^{n-1} + \dots + k_n$$

le polynôme caractéristique de cette matrice.

Définissons comme suit les matrices B_i :

$$B_0 = I \text{ (matrice unité d'ordre } n),$$

$$B_1 = A - T(A),$$

$$B_2 = AB_1 - \frac{1}{2} T(AB_1),$$

$$B_3 = AB_2 - \frac{1}{3} T(AB_2),$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$B_n = AB_{n-1} - \frac{1}{n} T(AB_{n-1}).$$

Nous avons démontré les résultats suivants :

1° Les quantités $-T(A)$, $-(1/2)T(AB_1)$, $\dots$, $-(1/n)T(AB_{n-1})$ sont les coefficients $k_1, k_2, \dots, k_n$ du polynôme caractéristique. En particulier, le déterminant de A vaut $[(-1)^{n-1}/n]T(AB_{n-1})$.

2° La matrice B_n est nulle, la matrice $(-1)^{n-1}B_{n-1}$ est la transposée de la matrice adjointe de A , et, si A possède une inverse, on a

$$A^{-1} = -\frac{1}{k_n} B_{n-1}.$$

3° En posant

$$Q(x) = x^{n-1}B_0 + x^{n-2}B_1 + \dots + B_{n-1},$$

on a

$$[x - A]Q(x) = P(x),$$

$$T(Q(x)) = P'(x),$$

et, si x_i est une racine simple de $P(x)$, la matrice $Q(x_i)$, qui n'est pas nulle, est le covariant de Frobenius attaché à la valeur propre x_i (c'est-à-dire le produit du mode à droite et du mode à gauche correspondants).

Par conséquent, les calculs indiqués permettent d'obtenir :

- 1° Les coefficients du polynome caractéristique $P(x)$;
- 2° La matrice adjointe et le déterminant de A ;
- 3° Si l'on calcule numériquement les racines de $P(x)$, les covariants de Frobenius correspondants, c'est-à-dire la *représentation spectrale* de A .

Les calculs sont presque exclusivement composés de multiplications matricielles. Signalons, à titre de comparaison, que pour $n=10$, le calcul du déterminant et de la matrice adjointe nécessite par cette méthode 8100 additions et 8010 multiplications, et que le calcul analogue par la méthode classique des mineurs nécessiterait 37 287 909 additions et 62 852 910 multiplications.

De plus, les calculs sont systématiques, donc *mécanisables*, et leur durée peut être prévue *a priori*, ce qui constitue un avantage important de cette méthode sur le procédé d'itération.

THÉORIE DES FONCTIONS. — Sur l'approximation des fonctions continues.

Note de M. MARC ZAMANSKY, présentée par M. Arnaud Denjoy.

Nous indiquons dans cette Note quelques nouveaux résultats obtenus par une méthode déjà employée. Les notations sont les mêmes que précédemment ⁽¹⁾.

I. *Majoration de $P'_n(x)$* . — Soient $F(x)$ une fonction continue de période 2π et $P_n(x)$ une suite de polynomes trigonométriques convergeant uniformément vers $F(x)$ de façon que $|P_n(x) - F(x)| = O[E_n(F)]$. Si la fonction conjuguée F' de F existe et est continue alors, $|P'_n(x)| = O[nE_n(F)] + O[n \max_{\sigma, \rho=1, \dots, n} |\sigma_{n+\rho} - F'|]$.

On voit alors que si $\max_x |P'_n|/nE_n(F)$ n'est pas borné pour $n \rightarrow \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (E_n(F)/\max_x |\sigma_n - F'|) = 0$ et si $|P'_n| = O(n^{1-\alpha})$, où $0 < \alpha < 1$, F' satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre α .

II. *Série de Fourier et série conjuguée*. — a. On peut par cette méthode prouver que si quels que soient x et x' , $|F(x) - F(x')| < A|x - x'|$, $|\sigma_n - F| = O(1/n)$ ⁽²⁾, mais que de plus si $F'(x)$ existe et est continue $\sigma'_n(x) - F'(x) = F'(x)/n + o(1/n)$.

b. $S_n(x)$ désignant la $n^{\text{ième}}$ somme de Fourier de $F(x)$ continue, si $S'_n(x)/n$ tend vers zéro avec $1/n$ (en particulier si la série de Fourier converge uniformément), la condition nécessaire et suffisante pour qu'au point x la série conjuguée converge est que $\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} [F(x+2t) - F(x-2t)] \cot gt \, dt$ ait une limite pour $\varepsilon \rightarrow 0$ et la

⁽¹⁾ *Comptes rendus*, 226, 1948, p. 1066; 227, 1948, p. 463.

⁽²⁾ ZYGMUND, *Bulletin of American Mathematical Society*, 1946.