

DIRECTION RESISTANCE DES STRUCTURES

DIVISION DE RECHERCHES CRa

-:-:-:-:-:-:-:-

NOTE TECHNIQUE N° 582-R6/19 OR

UNE METHODE MATRICIELLE POUR
LES CALCULS D'ERREURS

par J.M. SOURIAU

30 Avril 1948

TABIE DES MATIERES

-:-:-:-

1 - VECTEURS ALEATOIRES - VALEURS MOYENNES	p. 4
2 - FLUCTUATION	p. 8
3 - APPLICATIONS DE LA FLUCTUATION AU CALCUL DE CERTAINES VALEURS MOYENNES	p.12
4 - INEGALITE DE BIENAYME - ELLIPSOIDE-TYPE	p.15
5 - LOI NORMALE	p.17
6 - COMPOSITION DES VECTEURS ALEATOIRES	p.23
7 - VECTEURS FLOUS	p.25
8 - EXEMPLES	p.29

APPENDICE

A - ETUDE ALGEBRIQUE DES MATRICES SYMETRIQUES	p.35
B - DEMONSTRATION DE LA FORMULE (5,2) DETERMINANT UN VECTEUR NORMAL EN FONCTION DE SA VALEUR MOYENNE ET DE SA FLUCTUATION	p.37
C - DEMONSTRATION DE LA FORMULE (5,4) DE PEARSON ...	p.40

-:-:-:-

S O M M A I R E

-:-:-:-

- 1 - Etant donné un vecteur aléatoire quelconque, nous définissons une matrice définie positive qui lui est attachée, sa fluctuation.
 - 2 - Nous indiquons un certain nombre de propriétés de la
 - 3 - fluctuation, qui permettent d'étudier le comportement
 - 4 - du vecteur aléatoire, en particulier une généralisation de l'inégalité de Bienaymé.
 - 5 - Nous étudions le cas particulier de la loi normale en exprimant sa répartition de probabilité en fonction de la fluctuation - et nous en tirons comme conséquence la définition et l'emploi des fonctions $F_n(\lambda)$.
 - 6 - Une étude de la composition des vecteurs aléatoires liés ou indépendants fournit un nouvel emploi de la fluctuation.
 - 7 - En conclusion, nous proposons une définition du "vecteur flou" représenté par sa valeur moyenne et sa matrice-fluctuation.
 - 8 - et nous indiquons quelques exemples tirés de la physique qui montrent comment on peut représenter les systèmes physiques par des "vecteurs flous" et l'usage qu'on peut faire de cette notion.
- Nous supposons le lecteur familiarisé avec les principes du calcul matriciel.
- Les démonstrations les plus compliquées, que l'on peut passer en première lecture, sont en appendice.

I - VECTEURS ALEATOIRES - VALEURS MOYENNES

Etant donné un système matériel quelconque, que nous supposons défini par n paramètres X_1, X_2, \dots, X_n , on peut toujours le "représenter" par le vecteur

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

1,1.- Nous dirons que le vecteur X est un vecteur "aléatoire" si ce vecteur n'est pas connu exactement, mais s'il possède un certain nombre de "valeurs" possibles, X_1, X_2, \dots, X_n , chacune étant affectée d'un coefficient, que nous appelons probabilité de la valeur correspondante.

Les probabilités p_1, p_2, \dots, p_n sont par définition des nombres positifs dont la somme est égale à 1.

1,2.- Exemple :

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, p_1 = 0,7; X_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ 17 \end{bmatrix}, p_2 = 0,2; X_3 = \begin{bmatrix} 9 \\ 22 \end{bmatrix}, p_3 = 0,1$$

définissent un certain vecteur aléatoire X_e .

1,3.- Un vecteur aléatoire certain, que l'on peut identifier avec un vecteur ordinaire, a une seule valeur possible, affectée évidemment de la probabilité 1.

1,4.- On peut donner de ce qui précède une représentation imagée, en donnant même origine aux vecteurs X_1, X_2, \dots, X_n ,

et en concentrant la masse p_1 à l'extrémité du vecteur K_1 , la masse p_2 à l'extrémité du vecteur K_2 , etc...

Le vecteur aléatoire est représenté par une répartition de masses dans l'espace à n dimensions, la masse totale étant égale à 1.

- On voit immédiatement que l'on peut généraliser au cas où n est infini, et même supposons une répartition de masses dans tout l'espace, avec en chaque point une densité de probabilité $\rho(x)$ ⁽¹⁾.

On dit dans ce dernier cas que le vecteur aléatoire est absolument continu. Il est défini par la donnée de la fonction $\rho(x)$.

Dans tous les cas la masse contenue dans un volume quelconque est toujours positive ou nulle, et la masse totale définie par somme, série ou intégrale est toujours égale à 1.

Valeurs moyennes.

1,5.- Une notion qui se présente immédiatement à l'esprit est celle du centre de gravité : c'est l'extrémité d'un vecteur \bar{x} tel que
$$\sum p_i (x_i - \bar{x}) = 0$$

(1) Il existe de nombreux cas intermédiaires, qui sont tous donnés par ce qu'on appelle la "fonction de répartition". Le lecteur désireux de rigueur pourra dans ce qui va suivre remplacer les sommes finies par des intégrales de Stieltjes.

On a donc $\bar{X} \sum p_i = \sum p_i X_i$ et comme $\sum p_i = 1$,

$$\bar{X} = \sum p_i X_i$$

Nous dirons que \bar{X} est la valeur moyenne du vecteur aléatoire X .

Exemple : Le vecteur aléatoire X_e défini plus haut (1,2) a pour valeur moyenne

$$\bar{X}_e = 0,7 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 0,2 \begin{bmatrix} 7 \\ 17 \end{bmatrix} + 0,1 \begin{bmatrix} 9 \\ 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

1,6.- Nous appellerons erreur d'un vecteur aléatoire X le vecteur aléatoire $\Delta X = X - \bar{X}$

Tout vecteur aléatoire X est alors la somme de sa valeur moyenne \bar{X} , qui est un vecteur certain, et de son erreur ΔX , qui est un vecteur aléatoire de valeur moyenne nulle.

Exemple : L'erreur du vecteur aléatoire X_e est ΔX_e , défini par les valeurs possibles

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 7 \\ 17 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 9 \\ 22 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix},$$

toujours affectées des probabilités : 0,7; 0,2; 0,1.

1,7.- Plus généralement, étant donné une fonction quelconque $f(X)$, nous appellerons valeur moyenne de cette fonction la quantité $\overline{f(X)} = \sum p_i f(X_i)$

La fonction $f(X)$ considérée peut être un nombre, mais elle peut tout aussi bien être un vecteur, ou une matrice.

Ex⁽¹⁾: La valeur moyenne de la matrice $X_e X_e^x$ est

$$\begin{aligned} \overline{X_e X_e^x} &= 0,7 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} + 0,2 \begin{bmatrix} 7 \\ 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 17 \end{bmatrix} + 0,1 \begin{bmatrix} 9 \\ 22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 22 \end{bmatrix} \\ &= 0,7 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + 0,2 \begin{bmatrix} 49 & 119 \\ 119 & 289 \end{bmatrix} + 0,1 \begin{bmatrix} 81 & 198 \\ 198 & 484 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18,6 & 45 \\ 45 & 109 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La valeur moyenne d'une quantité certaine est évidemment égale à cette quantité. En particulier, quelle que soit

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} f(X) \text{ on a} \\ \overline{\overline{f(X)}} = \overline{f(X)} \\ 1,8 \end{array}$$

On vérifiera sans peine les formules suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1,9 \\ \overline{f(x) + g(x)} = \overline{f(x)} + \overline{g(x)} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1,10 \\ \overline{[f(x)]^x} = [\overline{f(x)}]^x \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1,11 \\ \overline{K \cdot f(x)} = K \cdot \overline{f(x)} \end{array}$$

Dans cette dernière formule, K est un élément certain (nombre, vecteur ou matrice).

(1) Nous notons par X^x la transposée du vecteur ou de la matrice X .

2 - FLUCTUATION

2,1.- Nous appelons fluctuation⁽¹⁾ d'un vecteur aléatoire X la valeur moyenne du produit de l'erreur par la transposée de celle-ci, c'est-à-dire la matrice

$$\Phi(X) = \overline{\Delta X (\Delta X)^x} = \sum p_i (x_i - \bar{X})(x_i - \bar{X})^x$$

Exemple : la fluctuation du vecteur X_e est :

$$\begin{aligned} \Phi(X_e) &= \overline{\Delta X_e \Delta X_e^x} = 0,7 \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -5 \end{bmatrix} + 0,2 \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 10 \end{bmatrix} \\ &\quad + 0,1 \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 15 \end{bmatrix} \quad (\text{voir 1,6}) \\ &= 0,7 \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 25 \end{bmatrix} + 0,2 \begin{bmatrix} 16 & 40 \\ 40 & 100 \end{bmatrix} + 0,1 \begin{bmatrix} 36 & 90 \\ 90 & 225 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9,6 & 24 \\ 24 & 60 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2,2.- La fluctuation de X peut se transformer ainsi :

$$\begin{aligned} \Phi(X) &= \overline{\Delta X \Delta X^x} = \overline{(X - \bar{X})(X - \bar{X})^x} \\ &= \overline{XX^x - X\bar{X}^x - \bar{X}X^x + \bar{X}\bar{X}^x} \\ &= \overline{XX^x} - \overline{X\bar{X}^x} - \overline{\bar{X}X^x} + \overline{\bar{X}\bar{X}^x} \\ &= \overline{XX^x} - \bar{X}\bar{X}^x - \bar{X}\bar{X}^x + \bar{X}\bar{X}^x \\ &= \boxed{\overline{XX^x} - \bar{X}\bar{X}^x} \end{aligned}$$

Exemple .

Nous avons calculé

$$\overline{X_e X_e^x} = \begin{bmatrix} 18,6 & 45 \\ 45 & 109 \end{bmatrix}. \text{ Nous avons } \bar{X}_e = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} \text{ d'où}$$

1) On dit aussi quelquefois covariance.

$$\begin{aligned} \Phi(\chi_e) &= \begin{bmatrix} 18,6 & 45 \\ 45 & 109 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18,6 & 45 \\ 45 & 109 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 21 \\ 21 & 49 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 9,6 & 24 \\ 24 & 60 \end{bmatrix} \quad \text{On retrouve bien le résultat} \\ & \hspace{15em} (2,1) \end{aligned}$$

Voici quelques propriétés fondamentales de la matrice fluctuation :

2,3.- La fluctuation est une forme homogène du 2ème degré du vecteur X, c'est-à-dire que si λ est un nombre certain, on a

$$\Phi(\lambda X) = \lambda^2 \Phi(X)$$

Plus généralement, si K est une matrice quelconque, la fluctuation du vecteur KX est

$$\begin{aligned} \Phi(KX) &= \overline{K \Delta X (K \Delta X)^x} \\ &= \overline{K \Delta X \Delta X^x K^x} \\ &= K \overline{\Delta X \Delta X^x} K^x \end{aligned}$$

soit

$$\Phi(KX) = K \cdot \Phi(X) \cdot K^x$$

2,4.- La fluctuation d'un vecteur est symétrique, c'est-à-dire

$$\Phi(X)^x = \Phi(X)$$

C'est évident, puisque $\Delta X \cdot \Delta X^x$ est symétrique.

2,5.- La fluctuation est une matrice définie non négative,

c'est-à-dire que l'on a

$$Z^x \Phi(X) Z \geq 0$$

quel que soit le vecteur Z.

Car on a

$$\begin{aligned} Z^x \cdot \Phi(Z) \cdot Z &= \sum p_i \cdot Z^x \Delta X_i \Delta X_i^x Z \\ &= \sum p_i \cdot |Z^x \Delta X_i|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

(2,6 à 2,10 : Voir Appendice A)

2,11.- La condition nécessaire et suffisante pour que la matrice $\Phi(X)$ soit singulière, c'est-à-dire pour qu'il existe un vecteur K tel que $\Phi(X) \cdot K = 0$, est que tous les vecteurs ΔX_i soient orthogonaux au vecteur K .

En effet, si $\Phi(X) \cdot K$ est nul, il en est de même de $K^x \Phi(X) K$, qui est égal à $\sum p_i |K^x \Delta X_i|^2$ (voir 2,4).

Cette quantité ne peut être nulle que si tous ses termes sont nuls. La réciproque est immédiate.

Exemple : La matrice $\Phi(X_e)$ (voir 2,1), qui vaut

$$\begin{bmatrix} 0,6 & 24 \\ 24 & 60 \end{bmatrix}, \text{ est dégénérée. En effet on a}$$

$$\begin{bmatrix} 0,6 & 24 \\ 24 & 60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Les valeurs possibles du vecteur aléatoire ΔX_e sont

$$\begin{bmatrix} -2 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix}. \text{ On constate bien que les}$$

produits scalaires de ces vecteurs par le vecteur $\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$

sont nuls.

Géométriquement, cela signifie que tous les points où il y a des masses sont situés sur une droite.

Dans l'espace à 3 dimensions, le fait qu'il existe un vecteur K tel que $\Phi(X) \cdot K = 0$ signifiera que toutes les masses du vecteur aléatoire X sont dans un même plan.

S'il existe deux tels vecteurs K et K' , non parallèles, toutes les masses seront situées sur une droite.

Enfin, s'il en existe 3, non dans un même plan ce qui exige que $\Phi(X)$ soit nul, toutes les masses sont concentrées en un seul point.

On peut énoncer généralement :

2.12.- Lorsque la matrice $\Phi(X)$ est singulière, dans le sous-espace linéaire engendré par les masses, la fluctuation possède une inverse, qui est symétrique et définie positive.

Soit en effet K un vecteur du sous-espace linéaire engendré par les masses, c'est-à-dire tel que

$$K = \sum \lambda_i \Delta X_i$$

Si $\Phi(X) K = 0$, nous savons que $K^* \Delta X_i$ est nul quel que soit i (2,11).

On a donc $K^* K = \sum \lambda_i K^* \Delta X_i = 0$. Dans ce sous-espace, la relation $\Phi(X) \cdot K = 0$ entraîne $K = 0$. On sait que $\Phi(X)$ possède alors une inverse symétrique définie positive. ⁽¹⁾

(1) Cf. JULIA, loc. cit.

Enfin nous laissons au lecteur le soin de démontrer que :

2,13.- La condition nécessaire et suffisante pour que le vecteur aléatoire X soit certain est que $\Phi(X)$ soit nulle.

3 - APPLICATIONS DE LA FLUCTUATION AU CALCUL DE CERTAINES VALEURS MOYENNES

3,1.- Tout ce que nous avons dit du vecteur aléatoire reste valable dans le cas $n = 1$, c'est-à-dire lorsqu'on considère une variable aléatoire, x .

La fluctuation est alors un nombre positif, la valeur moyenne du carré de l'erreur.

La racine carrée de la fluctuation, que l'on désigne généralement par la lettre σ , est l'écart quadratique moyen ou l'écart-type.

Etant donné un vecteur aléatoire X , il est intéressant de connaître l'écart quadratique moyen de l'une de ses coordonnées, ou plus généralement d'une forme linéaire de ses coordonnées, c'est-à-dire du produit scalaire de X par un vecteur constant K , K^*X .

La valeur moyenne de K^*X est égale à $K^*\bar{X}$ (cf. 1,11). L'erreur de K^*X est donc

$$\Delta(K^*X) = K^*x - K^*\bar{X} = K^*(x - \bar{X}) = K^*\Delta X$$

et la fluctuation de K^*X sera par suite :

$$\Phi(K^*X) = \overline{K^*\Delta X (K^*\Delta X)^*} = \overline{K^*\Delta X \Delta X^* K} \quad (1)$$

(1) On rappelle la formule matricielle générale : $(XY)^* = Y^*X^*$

$$= K^* (\overline{\Delta X \Delta X^*}) K = K^* \Phi(X) K$$

On a donc démontré la formule :

3,2. -

$$\Phi(K^* X) = K^* \Phi(X) K$$

qui résout le problème posé quand on connaît la fluctuation du vecteur X.

3,3.- En particulier, les termes de la diagonale de la fluctuation sont les valeurs moyennes des carrés des erreurs sur les coordonnées. On voit qu'ils sont nécessairement positifs ou nuls.

On peut obtenir une formule plus générale, en cherchant la valeur moyenne du produit des erreurs sur deux formes linéaires : $K^* X$ et $L^* X$.

Ces erreurs sont $K^* \Delta X$ et $L^* \Delta X$. La seconde peut également s'écrire $\Delta X^* L$, et la valeur moyenne du produit est $\overline{K^* \Delta X \Delta X^* L} = K^* \Phi(X) L$.

On peut donc énoncer :

3,4.- La valeur moyenne du produit des erreurs sur deux formes linéaires $K^* X$ et $L^* X$ est égale à

$$K^* \Phi(X) L$$

En particulier la valeur moyenne du produit des erreurs sur $K^* X$ et $L^* X$ est l'élément de la $p^{\text{ième}}$ ligne et de la $q^{\text{ième}}$ colonne (ou le contraire) de la matrice fluctuation.

C'est pourquoi les éléments de la fluctuation sont appelés moments réduits d'ordre 2 du vecteur aléatoire.

Exemple : Dans le cas X_e déjà traité, la valeur moyenne du carré de l'erreur sur x est $\sigma_x^2 = 9,6$
La valeur moyenne du produit des erreurs Δx et Δy est 24

Valeur moyenne d'une forme quadratique de l'erreur

La forme quadratique la plus simple de l'erreur est le carré de sa longueur, soit $\Delta X^x \Delta X$. Sa valeur moyenne est la somme des valeurs moyennes des carrés des coordonnées, soit la somme des termes de la diagonale de $\Phi(X)$, que l'on appelle sa trace. On peut donc énoncer :

3,5.- La valeur moyenne de $|\Delta X|^2$ est la trace de la fluctuation. On démontrerait de même que

3,6.- La valeur moyenne de la forme quadratique $\Delta X^x A \Delta X$, où A est une matrice quelconque, est la trace du produit $A\Phi(X)$, soit la somme des produits des éléments de A par les éléments correspondants de $\Phi(X)$.

Exemple : la valeur moyenne de $|\Delta X_e|^2$ est la trace de $\Phi(X_e)$, soit 69,6.

La valeur moyenne de $\Delta x^2 + \Delta x \Delta y + \Delta y^2$ que l'on peut écrire $\Delta X^x \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Delta X$, est la trace du produit

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9,6 & 24 \\ 24 & 60 \end{bmatrix}, \text{ soit } 9,6 + 24 + 60 = 93,6$$

4 - INEGALITE DE BIENAYME - ELLIPSOIDE-TYPE

Considérons une matrice A symétrique, définie non négative, et un vecteur aléatoire X .

Considérons la quantité $K = \sum_{\Delta X^x A \Delta X_x > k} p_i \Delta X_i^x A \Delta X_i$

D'après sa définition K est une quantité supérieure à

$k \sum_{\Delta X^x A \Delta X_x > k} p_i$, c'est-à-dire au produit par k de la

probabilité pour que l'on ait $\Delta X^x A \Delta X > k$

D'autre part, tous les termes $p_i \Delta X_i^x A \Delta X_i$ sont positifs ou nuls. On a donc $K < \sum_{i=1}^N p_i \Delta X_i^x A \Delta X_i$,

quantité égale à la trace du produit $A \Phi(X)$ d'après (3,6). Il en résulte la relation suivante :

- 4,1.- Si A est une matrice symétrique non négative, la probabilité pour que $\Delta X^x A \Delta X$ soit supérieur à k est inférieure à $\frac{\text{Trace} [A \Phi(X)]}{k}$

Cette relation s'appelle inégalité de Bienaymé dans le cas $n = 1$.

Etant donnée une matrice symétrique non négative A et un nombre ε , elle fournit un certain domaine en dehors duquel le point aléatoire a une probabilité inférieure à ε de se trouver.

- 4,2.- Par exemple en faisant $A = 1$, on voit que le vecteur ΔX a une probabilité inférieure à ε d'avoir une longueur plus grande que $\sqrt{\frac{\text{Trace} [\Phi(X)]}{\varepsilon}}$.

4,5.- On peut alors se poser le problème suivant : étant donné le nombre ϵ , peut-on choisir la matrice A de façon à ce que le domaine correspondant ait le volume minimum ?

La réponse est la suivante : le problème est possible si la matrice $\Phi(x)$ est régulière-et il faut alors prendre $A = [\Phi(x)]^{-1}$
(Rappelons que l'on peut toujours se ramener à ce cas, d'après 2,12).

Nous n'indiquons pas ici la démonstration.

Ceci nous amène à poser :

4,5.- Si la fluctuation $\Phi(x)$ est régulière, on appelle λ ellipsoïde-type d'amplitude λ l'ellipsoïde d'équation

$$(Y-\bar{X})^x [\Phi(x)]^{-1} (Y-\bar{X}) = \lambda^2$$

D'où, par application de 4,2 : (voir appendice B)

4,6.- La probabilité pour que le point aléatoire soit extérieur à l'ellipsoïde-type d'amplitude λ est inférieure à $\frac{n}{\lambda^2}$, n étant le nombre des dimensions.

Donnons enfin une dernière application de la formule 4,2 :

4,7.- La probabilité pour que la valeur absolue de l'erreur sur le produit scalaire $K^x X$ soit plus grande que λ est inférieure à $\frac{K^x \Phi(x) K}{\lambda^2}$

Ce résultat s'obtient en remplaçant A par KK^x

Exemple : faisons $K = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\lambda = 6$ dans l'exemple X_e .

La quantité $\frac{K^x \Phi(x_e) K}{\lambda^2}$ vaut $\frac{9,6}{36} = \frac{8}{30}$. Il y a donc

une probabilité inférieure ou égale à $\frac{8}{30}$ pour que l'erreur sur x soit supérieure ou égale à 6 en valeur absolue.

(On constate que cette probabilité vaut effectivement $\frac{1}{10}$)

Nous allons maintenant étudier un exemple où les probabilités correspondantes sont très inférieures aux limites données par la formule 4,2.

5 - LOI NORMALE

5,1.- On dit qu'un vecteur aléatoire X est normal s'il est absolument continu, (1,4), avec une densité de probabilité de la forme

Q étant un polynôme du second degré des composantes de X .

L'intérêt primordial de la loi normale est qu'elle est considérée comme la véritable loi du hasard. Les travaux de M. F. Lévy ont en effet montré que lorsqu'une infinité de causes infinitement petites et indépendantes se combinent, elles fournissent un vecteur aléatoire normal.

La proposition fondamentale pour la loi normale, et dont la démonstration se trouve en Appendice B est la suivante :

5,2.- La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un vecteur normal à n dimensions, de fluctuation A et de valeur moyenne K données, est que A soit symé-

trique et définie positive (donc régulière)

Le vecteur normal est alors entièrement déterminé.

La densité p est donnée par la formule :

$$p = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det A}} e^{-\frac{1}{2} (x-\kappa)^x A^{-1} (x-\kappa)}$$

5,3.- Ellipsoïde-type

L'ellipsoïde-type d'amplitude λ a pour équation

$$(x-\kappa)^x A^{-1} (x-\kappa) = \lambda^2$$

La formule 5,2 montre, que dans le cas de la loi normale, la densité de probabilité est constante sur les ellipsoïdes types et égale

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det A}} e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$$

Le lecteur trouvera en appendice C la démonstration de la formule suivante, connue sous le nom de théorème de Pearson:

5,4.- La probabilité pour que l'extrémité du vecteur aléatoire normal X à n dimensions soit extérieure à l'ellipsoïde-type d'amplitude λ est

$$P_n(\lambda) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{\frac{\lambda^2}{2}}^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{n}{2}-1} du$$

5,5.- Notons que la fonction $P_1(\lambda)$ peut s'écrire

$$1 - \Theta\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right)$$

en posant, conformément aux notations de Gauss,

$$\Theta(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^{+x} e^{-t^2} dt,$$

que la fonction $P_2(\lambda)$ est égale à $e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$, et que l'on a la relation de récurrence

$$P_n(\lambda) = P_{n-2}(\lambda) + \frac{\lambda^{n-2} e^{-\frac{\lambda^2}{2}}}{2^{\frac{n}{2}-1} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

Rappelons que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(1) = 1 \quad \Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$$

Ceci permet le calcul numérique des fonctions $P_n(\lambda)$.

En voici une table, présentée de la façon suivante :

Le nombre 2,21, écrit dans la colonne λ_4 , en face du nombre 0,3 de la colonne P signifie :

$$P_4(2,21) = 0,3.$$

P	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
1	0	0	0	0	0	0
0,9	0,125 66	0,46	0,76	1,03	1,26	1,48
0,8	0,253 35	0,67	1,00	1,28	1,53	1,75
0,7	0,385 32	0,84	1,20	1,48	1,73	1,95
0,6	0,524 40	1,01	1,37	1,66	1,89	2,13
0,5	0,674 49	1,18	1,54	1,83	2,06	2,31
0,4	0,841 62	1,36	1,71	2,01	2,23	2,49
0,3	1,036 43	1,55	1,91	2,21	2,43	2,68
0,2	1,281 55	1,79	2,15	2,45	2,68	2,92
0,1	1,644 85	2,14	2,50	2,80	3,04	3,26
10^{-2}	2,575 83	3,03	3,36	3,66	3,88	4,11
10^{-3}	3,290 53	3,72	4,03	4,29	4,44	4,75
10^{-4}	3,890 59	4,29	4,59	4,85	5,02	5,27
10^{-5}	4,417 17	4,80	5,10	5,34	5,53	5,75
10^{-6}	4,891 64	5,25	5,54	5,77	5,98	6,20
10^{-7}	5,326 72	5,68	5,95	6,18	6,39	6,65
10^{-8}	5,730 73	6,06	6,34	6,55	6,77	6,91
10^{-9}	6,109 41	6,43	6,70	6,92	7,12	7,63

Il n'y a pas de vecteur normal de fluctuation A si A est une matrice singulière. Mais, d'après (2,12), A est régulière dans un certain sous-espace - à moins qu'elle soit nulle, auquel cas le vecteur X est certain.

5,7.- Nous appellerons donc vecteur normal général à n dimensions, un vecteur normal dans l'espace, ou dans un de ses sous-espaces linéaires, ou encore certain.

Le nombre de dimensions du sous-espace contenant les masses sera le rang du vecteur.

On peut alors énoncer :

5,8.- La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un vecteur normal général à n dimensions de valeur moyenne K et de fluctuation A données, est que la matrice A soit symétrique non-négative.

Un tel vecteur est unique.

Le rang du vecteur est égal à celui de la matrice A .

5,9.- En particulier, étant donné un vecteur aléatoire quelconque, il existe un vecteur normal général et un seul, ayant même valeur moyenne et même fluctuation. Nous dirons que nous avons normalisé le vecteur.

Exemple : Le vecteur X_c a une fluctuation

$\Phi(X_c) = \begin{bmatrix} 9,6 & 24 \\ 24 & 50 \end{bmatrix}$ qui est singulière. Nous avons vu (2,11) que toutes les masses sont concentrées sur la droite

$$5x - 2y = 1$$

Le vecteur X_e normalisé sera donc une répartition de masses sur la droite $5x - 2y = 1$, la masse comprise entre les points d'abscisse x et $x + dx$ étant

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi \times 9,6}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-3)^2}{9,6}} dx$$

par application de la formule 5,2.

Soit K un vecteur certain, X un vecteur normal général à n dimensions. Le produit scalaire $K^* X$ a pour fluctuation $\overline{K^* X X^* K} = K^* \phi(x) K$

Si ce nombre est nul, le produit $K^* X$ est certain.

S'il n'est pas nul, $K^* X$ est une variable aléatoire.

Sa densité, en fonction de la variable $K^* X = t$ est

une intégrale
$$\frac{1}{dt} \int_{t \leq K^* X \leq t+dt} \rho(x) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

En prenant un système d'axes de coordonnées dont l'un est parallèle à K , on voit que cette quantité est de la forme $k e^{-q(t)}$ q étant un polynôme du 2ème degré. Par suite la variable $K^* X$ est normale, et l'on peut énoncer :

5,10.- Soit X un vecteur aléatoire normal général.

La probabilité pour que l'erreur sur le produit scalaire $K^* X$ soit supérieure à a est égale à

$$P_1 \left(\frac{a}{\sqrt{K^* \phi(x) K}} \right)$$

Exemple : cherchons quelle est l'erreur qui a une probabilité de $\frac{1}{10}$ d'être dépassée sur la coordonnée y du vecteur X_e normalisé.

Il faut prendre $K = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. On trouve $K^x \phi(x) K = 60$.

La table fournit alors $\frac{a}{\sqrt{60}} = 1,64$ d'où $a = 12,7$.

Le calcul (1,6) montre que pour le vecteur X_e non normalisé, cette valeur est arbitraire entre 10 et 15.

On voit sur cet exemple que le vecteur aléatoire normalisé rend très bien compte du vecteur aléatoire de départ.

6 - COMPOSITION DES VECTEURS ALÉATOIRES

6,1.- Considérons un système de deux vecteurs aléatoires X et X' . Dans le cas le plus général, ces vecteurs seront stochastiquement liés, c'est-à-dire que la probabilité pour que le premier vecteur ait une valeur possible X_i dépendra de la valeur X'_j attribuée au second. Il existera donc tout un système de valeurs possibles pour les deux vecteurs: X_1 et X'_1 avec la probabilité p_1 , X_2 et X'_2 avec la probabilité p_2 , etc... Mais la donnée de ces valeurs revient à définir un seul vecteur aléatoire dont le nombre de dimensions est la somme de ceux des vecteurs composants .

Deux vecteurs aléatoires à n et n' dimensions, stochastiquement liés, peuvent être représentés par un seul vecteur aléatoire à $n + n'$ dimensions.

Ceci permet d'étudier automatiquement de tels systèmes.

Par exemple la fluctuation du "vecteur représentant" s'écrira :

$$\begin{bmatrix} [A] \\ [C'] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [C] \\ [A'] \end{bmatrix}$$

en mettant d'abord les coordonnées de X, ensuite celles de X'. $[A]$ sera la fluctuation de X, $[A']$ la fluctuation de X'. Quant aux matrices $[C']$ et $[C]$, qui sont rectangulaires si $n \neq n'$, elles sont symétriques l'une de l'autre et égales aux valeurs moyennes de $X X'^x$ et de $X' X^x$. Nous les appellerons respectivement couplage de X' par rapport à X et de X par rapport à X'

6,3.- Deux vecteurs aléatoires seront dits indépendants si la probabilité pour que l'un d'eux ait une valeur possible X_i est indépendante de la valeur possible X'_j choisie pour le second. D'après le principe des probabilités composées, cela signifie, en appelant p_i la probabilité pour que X ait la valeur X_i , p'_j la probabilité pour que X' ait la valeur X'_j , que la probabilité pour que X ait la valeur X_i et X' la valeur X'_j est $p_i p'_j$.

Le lecteur pourra montrer que des vecteurs indépendants ont des couplages nuls. Mais la réciproque n'est pas vraie.

6,4.- Somme de deux vecteurs aléatoires indépendants.-

Soient deux tels vecteurs, X et X', à n dimensions. La somme de ces vecteurs sera par définition le vecteur

$Y = X + X'$ dont les valeurs possibles seront les Y_i somme d'une valeur possible X_j et d'une valeur possible X'_k , la probabilité de Y_i étant la somme des probabilités de toutes les combinaisons correspondantes :

$$p(Y_i) = \sum_{X_j + X'_k = Y_i} p_j p'_k$$

6,5.- La valeur moyenne de la somme de deux vecteurs indépendants est la somme de leurs valeurs moyennes.
La fluctuation de leur somme est la somme de leurs fluctuations.

La démonstration est en Appendice D.

7 - VECTEURS FLOUS

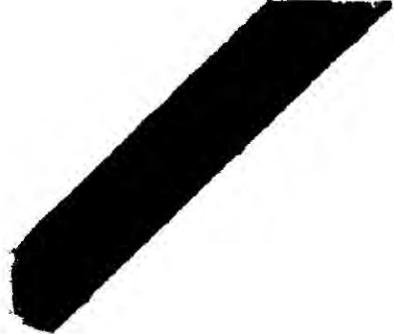
Le théorème (6,5) joint à la propriété (2,3), nous permet de calculer la valeur moyenne et la fluctuation d'une combinaison linéaire $AX + A'X'$ de deux vecteurs aléatoires indépendants (A et A' sont deux matrices quelconques).

7,1.- En effet $\Phi(AX + A'X') = \Phi(AX) + \Phi(A'X')$
 $= A\Phi(X)A^x + A'\Phi(X')A'^x$

Pour une forme linéaire scalaire, on trouve de même

7,2.- $\Phi(K^x X + K'^x X') = K^x \Phi(X)K + K'^x \Phi(X')K'$

Une fonction quelconque de deux vecteurs aléatoires indépendants n'est pas linéaire. Mais si on suppose qu'elle est différentiable au voisinage des valeurs



\bar{X} , \bar{X}' , et si l'on suppose également que les valeurs possibles des vecteurs X et X' ne sont pas trop éloignées les unes des autres, on peut linéariser le problème (1).

Prenons comme exemple le produit scalaire de deux vecteurs indépendants X et X'

$$\begin{aligned} \text{On a } X^{\wedge} X' &= (\bar{X} + \Delta X)^{\wedge} (\bar{X}' + \Delta X') \\ &= \bar{X}^{\wedge} \bar{X}' + \bar{X}^{\wedge} \Delta X' + \Delta X^{\wedge} \bar{X}' + \Delta X^{\wedge} \Delta X' \end{aligned}$$

La linéarisation revient à admettre que cette quantité est égale à

$$\bar{X}^{\wedge} \bar{X}' + \bar{X}^{\wedge} \Delta X' + \bar{X}'^{\wedge} \Delta X$$

Les formules 7,1 donnent alors

$$\begin{aligned} 7,3. - \quad (\overline{X, X'}) &\sim \bar{X}^{\wedge} \bar{X}' \\ \Phi(X^{\wedge} X') &\sim \bar{X}^{\wedge} \Phi(X') \bar{X} + \bar{X}'^{\wedge} \Phi(X) \bar{X}' \end{aligned}$$

Prenons comme autre exemple le produit vectoriel dans l'espace à 3 dimensions

$$\begin{aligned} X \wedge X' &= (\bar{X} + \Delta X) \wedge (\bar{X}' + \Delta X') \\ &\sim \bar{X} \wedge \bar{X}' + \bar{X} \wedge \Delta X' - \bar{X}' \wedge \Delta X \end{aligned}$$

Le résultat peut s'écrire sous forme matricielle, en

(1) Cf. J.M. SOUBRIAU, "Une méthode générale de linéarisation des problèmes physiques", Inf. des S. Physiques, décembre 1947. Il faut mettre les vecteurs aléatoires sous la forme $X_0 + \varepsilon X_1$, X_0 étant certain, X_1 aléatoire et de valeur moyenne nulle, et poser $\varepsilon^3 = 0$.

désignant par x_0, y_0, z_0 et x'_0, y'_0, z'_0 les coordonnées des vecteurs \overline{X} et \overline{X}'

$$\overline{X \wedge X'} \sim \begin{bmatrix} y_0 z'_0 - z_0 y'_0 \\ z_0 x'_0 - x_0 z'_0 \\ x_0 y'_0 - y_0 x'_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Phi(X \wedge X') \sim & \begin{bmatrix} 0 & y_0 & -z_0 \\ -y_0 & 0 & x_0 \\ z_0 & -x_0 & 0 \end{bmatrix} \Phi(X') \begin{bmatrix} 0 & -y_0 & z_0 \\ y_0 & 0 & -x_0 \\ -z_0 & x_0 & 0 \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} 0 & -y'_0 & z'_0 \\ y'_0 & 0 & -x'_0 \\ -z'_0 & x'_0 & 0 \end{bmatrix} \Phi(X) \begin{bmatrix} 0 & y'_0 & -z'_0 \\ -y'_0 & 0 & x'_0 \\ z'_0 & -x'_0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Par exemple, si $\Phi(X) = 0$, $\Phi(X') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

il vient $\Phi(X \wedge X') \sim \begin{bmatrix} y_0^2 + z_0^2 & -x_0 z_0 & -x_0 y_0 \\ -x_0 z_0 & y_0^2 + x_0^2 & -y_0 z_0 \\ -x_0 y_0 & -y_0 z_0 & z_0^2 + x_0^2 \end{bmatrix}$

Ceci est évidemment général.

Pour systématiser, nous dirons :

7,5.- Un vecteur flou est un vecteur aléatoire, dont on ne connaît que la valeur moyenne et la fluctuation, et dont on suppose que l'erreur est un infiniment petit du premier ordre (1).

(1) Voir note (1) p. 26

Pour l'application pratique de cette notion, nous admettrons les deux principes suivants :

7,6.- Le résultat de la mesure expérimentale d'une quantité physique est un nombre flou, (c'est-à-dire un vecteur flou à une dimension).

7,7.- Les résultats de deux mesures physiques indépendantes sont des nombres flous indépendants.

L'application pratique du principe (7,6) nécessite l'importante remarque suivante :

7,8.- Considérons un instrument de mesure quelconque, par exemple un goniomètre. Qu'entend-on lorsqu'on dit qu'il mesure un angle à 1 minute près, par exemple ?

Cela signifie que la probabilité pour que l'erreur soit en valeur absolue supérieure à 1 minute est négligeable. Et ce "négligeable" a besoin d'être précisé.

Pour définir correctement la précision, la meilleure méthode consiste à mesurer avec l'appareil une série d'angles connus exactement, puis à calculer la valeur quadratique moyenne de l'erreur. On aura alors un véritable nombre flou. Mais une telle opération n'est pas toujours possible.

Dans la pratique on pourra supposer que la probabilité "négligeable" est de l'ordre de $\frac{1}{100}$, ce qui conduit à prendre (voir la table 5,6) une erreur quadratique moyenne de $\frac{1 \text{ minute}}{2,6}$.

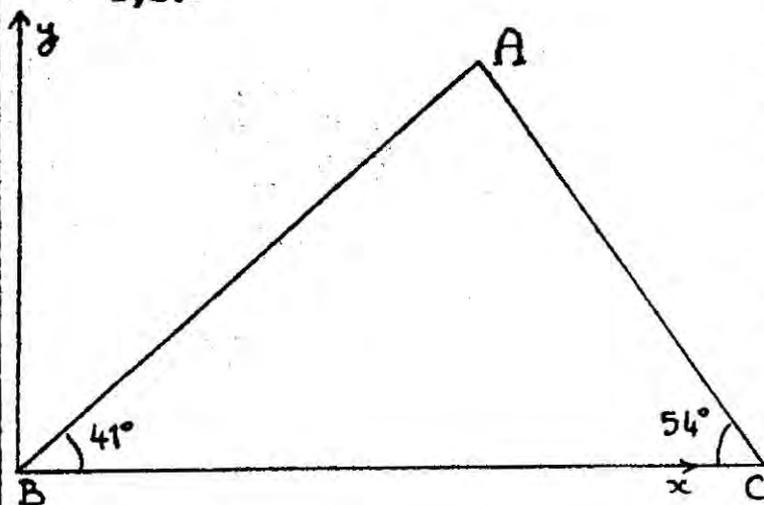
On voit que, pour faire un calcul d'erreur correct, il est nécessaire de faire une critique serrée de la valeur des résultats expérimentaux.

Une telle critique sera aussi nécessaire pour s'assurer de l'indépendance des mesures.

8 - EXEMPLES

Nous nous contenterons pour faire comprendre la méthode d'utilisation des vecteurs flous, de traiter les trois exemples suivants :

6,1.-



Dans le triangle ABC, les points B et C sont connus exactement. Leur distance est 10 mètres.

Les angles ABC et BCA sont mesurés avec une erreur quadratique moyenne de 1 degré. On trouve 41 degrés et 54 degrés.

Représenter le vecteur BA par un vecteur flou.

Les formules qui donnent les coordonnées x et y de A sont :

$$x = 10 \text{ m} \times \frac{\sin C \cos B}{\sin(B+C)}$$

$$y = 10 \text{ m} \times \frac{\sin C \sin B}{\sin(B+C)}$$

Soit $x = 6,13 \text{ m.}$

$y = 5,33 \text{ m.}$

La différentiation ne se fera pas sur ces formules, mais sur les formules plus simples :

$$y = x \operatorname{tg} B = (10-x) \operatorname{tg} C$$

d'où

$$\begin{aligned} dy &= dx \operatorname{tg} B + x (1 + \operatorname{tg}^2 B) dB \\ &= - dx \operatorname{tg} C + (10-x)(1 + \operatorname{tg}^2 C) dC \end{aligned}$$

que l'on écrira

$$\begin{bmatrix} -\operatorname{tg} B & 1 \\ \operatorname{tg} C & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 + \operatorname{tg}^2 B)x & 0 \\ 0 & (10-x)(1 + \operatorname{tg}^2 C) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dB \\ dC \end{bmatrix}$$

$$\text{d'où} \quad \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4,79 & 4,97 \\ 6,59 & 4,32 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} dB \\ dC \end{bmatrix}$$

D'après le principe (7,7) les erreurs sur B et C sont indépendantes.

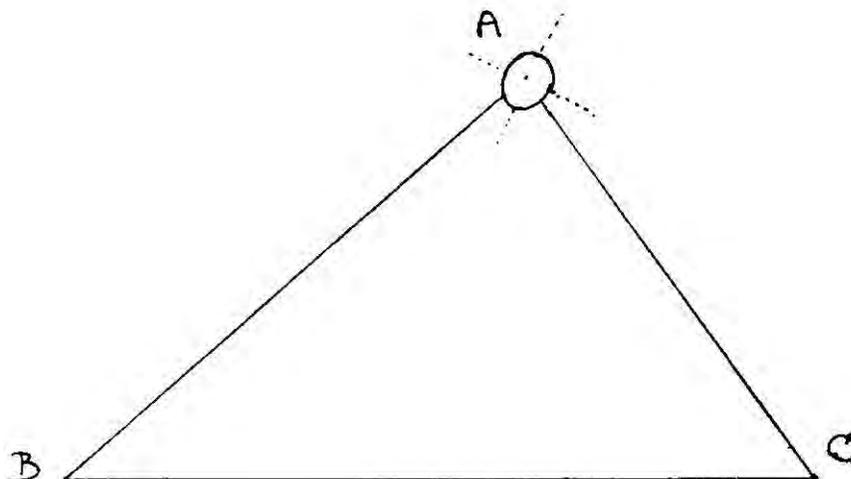
La fluctuation du vecteur $\begin{bmatrix} B \\ C \end{bmatrix}$ est donc, en prenant le radian pour unité

$$\left(\frac{\pi}{180}\right)^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

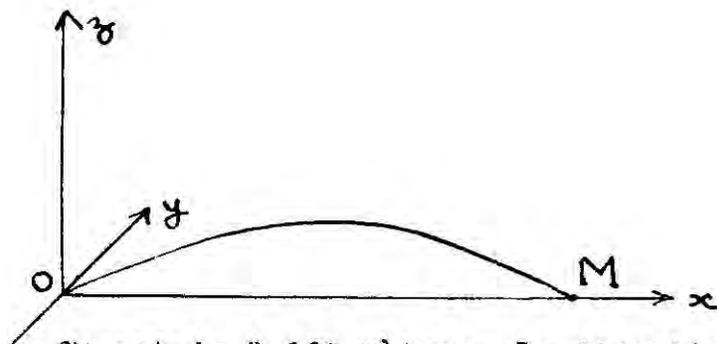
D'après (2,3) la fluctuation de $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ est

$$\left(\frac{\pi}{180}\right)^2 \begin{bmatrix} -4,79 & 4,97 \\ 6,59 & 4,32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4,79 & 6,59 \\ 4,97 & 4,32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 47,5 & -10,2 \\ -10,2 & 62,0 \end{bmatrix} \times \left(\frac{\pi}{180}\right)^2$$

Cette fluctuation permet par exemple de tracer l'ellipse-type d'amplitude 3,03, qui, d'après la table (5,6) contient le point A avec une probabilité de $\frac{.9}{100}$, si nous supposons que le vecteur \vec{BA} est normal.



Exemple 8,2.-



On vise un point M avec un canon situé au point O, de même altitude. La vitesse initiale, de 400 m/s, est connue à 1 m/s près. La distance

OM est de 8.500 mètres. La direction β et l'inclinaison

α du canon sont déterminées à $\frac{3}{1.000}$ de radian près.

Quelle est la probabilité pour que l'obus touche le sol à moins de 10 mètres du point M ? (On néglige la résistance de l'air et on prend $g = 9,8$).

Les coordonnées du point d'impact K sont fournies par

la relation :

$$x = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha \cos \beta \quad y = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha \sin \beta$$

Il faut donc prendre $\beta = 0$ et $\sin 2\alpha = \frac{gx}{v_0^2} = 0,52$
d'où $\alpha = 15^\circ 40'$

La différentiation fournit :

$$dx = \frac{2v_0}{g} \sin 2\alpha \cos \beta dv_0 + \frac{2v_0^2}{g} \cos 2\alpha \cos \beta d\alpha - \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha \sin \beta d\beta$$

$$dy = \frac{2v_0}{g} \sin 2\alpha \sin \beta dv_0 + \frac{2v_0^2}{g} \cos 2\alpha \sin \beta d\alpha + \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha \cos \beta d\beta$$

$$\text{d'où} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42,5 \text{ sec.} & 27,900 \text{ m.} & 0 \\ 0 & 0 & 8.500 \text{ m.} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dv_0 \\ d\alpha \\ d\beta \end{bmatrix}$$

la fluctuation de $\begin{bmatrix} v_0 \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ est

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{m^2}{\text{sec}^2} & 0 & 0 \\ 0 & 3 \cdot 10^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \cdot 10^{-6} & 0 \end{bmatrix}$$

puisque l'on suppose les erreurs sur v_0, α, β indépendantes

La fluctuation de $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ est donc

$$\Phi \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42,5 \text{ s} & 27900 \text{ m} & 0 \\ 0 & 0 & 8500 \text{ m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{m^2}{\text{sec}^2} & 0 & 0 \\ 0 & 3 \cdot 10^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \cdot 10^{-6} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 42,5 \text{ s} & 0 \\ 27900 \text{ m} & 0 \\ 0 & 8500 \text{ m} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8805 \text{ m}^2 & 0 \\ 0 & 650 \text{ m}^2 \end{bmatrix}$$

Le vecteur \vec{OM} étant la valeur moyenne du vecteur $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$,

la densité de probabilité au voisinage de M est

fourni par la formule (5,2)

$$\frac{1}{2\pi \sqrt{\begin{vmatrix} 8805 \text{ m}^2 & 0 \\ 0 & 650 \text{ m}^2 \end{vmatrix}}} = \frac{1}{2\pi \times 2390 \text{ m}^2}$$

(nous supposons évidemment que le vecteur est normal).

La probabilité pour que l'obus tombe sur une surface de $100 \pi \text{ m}^2$ est donc de

$$\frac{100 \pi \text{ m}^2}{2\pi \times 2390 \text{ m}^2} \# \frac{1}{48}$$

Exemple 8.3.-

Les coefficients de la matrice $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$,

que l'on sait symétrique, ont été mesurés indépendamment avec la même erreur quadratique moyenne ε .

Quelles sont les erreurs quadratiques moyennes sur les valeurs propres ?

Application numérique: $a = 37,1$ $b = -14,3$ $c = 52,2$

$$\varepsilon = \frac{1}{10}$$

Les valeurs propres sont les racines de l'équation

$$\lambda^2 - \lambda(a+c) + (ac - b^2) = 0$$

d'où, par différentiation :

$$2\lambda d\lambda - d\lambda(a+c) - \lambda(da+dc) + (dac + a dc - 2b db) = 0$$

$$\text{ou } (a+c-2\lambda) d\lambda = \begin{bmatrix} c-\lambda & -2b & a-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} da \\ db \\ dc \end{bmatrix}$$

On a par suite

$$\Phi(\lambda) = \frac{1}{(a+c-2\lambda)^2} \begin{bmatrix} c-\lambda & -2b & a-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^2 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c-\lambda \\ -2b \\ a-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= \varepsilon^2 \frac{2\lambda^2 - 2\lambda(a+c) + (a^2 + 4b^2 + c^2)}{4\lambda^2 - 4\lambda(a+c) + (a^2 + 2ac + c^2)}$$

En utilisant la relation

$$\lambda^2 - \lambda(a+c) = b^2 - ac$$

il vient
$$\phi(\lambda) = \frac{(a-c)^2 + 6b^2}{(a-c)^2 + 4b^2} \varepsilon^2$$

L'erreur quadratique moyenne est la même sur les deux valeurs propres, et vaut
$$\varepsilon \sqrt{\frac{(a-c)^2 + 6b^2}{(a-c)^2 + 4b^2}}$$

Application numérique :

L'équation aux valeurs propres s'écrit :

$$\lambda^2 - 89,3 \lambda + 1732,13 = 0$$

Ses racines sont $\lambda_1 = 28,48$, $\lambda_2 = 60,82$

L'erreur quadratique moyenne sur chacune d'elles est :

$$\frac{1}{10} \sqrt{\frac{1454,95}{1045,97}} = 0,118$$

A P P E N D I C E

-:-:-

A - ETUDE ALGEBRIQUE DES MATRICES SYMETRIQUES.-

On sait que toute matrice symétrique peut se ramener à la forme diagonale par une rotation des axes. Nous allons écrire cette propriété sous forme algébrique.

2,6. Posons $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ $e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$

On a évidemment $e_1^x = [1 \ 0 \ \dots \ 0]$ $e_n^x = [0 \ 0 \ \dots \ 1]$

Le produit $e_i \cdot e_j^x$ est la matrice dont tous les éléments sont nuls, à l'exception de celui qui est situé sur la ligne n° i et la colonne n° j, et qui vaut 1.

Par conséquent la matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \dots \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & \dots \\ a_3^1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

peut s'écrire

$$\begin{aligned} & a_1^1 e_1 e_1^x + a_1^2 e_1 e_2^x + a_1^3 e_1 e_3^x + \dots \\ & + a_2^1 e_2 e_1^x + a_2^2 e_2 e_2^x + \dots \\ & + \dots \end{aligned}$$

c'est-à-dire

2,7. $A = \sum_{i,j} a_{ij}^x e_i \cdot e_j^x$

Que vaut le produit $e_i \cdot e_j^x$?

Un calcul immédiat montre qu'il est nul si $i \neq j$ et qu'il vaut 1 si $i = j$. Nous noterons ceci par le symbole de Kronecker :

$$2,8.- \quad e_i^x e_j^x = \delta(i, j)$$

On en déduit, dans le cas de la matrice A ci-dessus :

$$\begin{aligned} e_k^x A e_e &= e_k^x \left(\sum_{i,j} a_{ij}^x e_i^x e_j^x \right) e_e \\ &= \sum_{i,j} a_{ij}^x (e_k^x e_i^x) (e_j^x e_e) \quad \text{soit} \\ 2,9.- \quad &\boxed{e_k^x A e_e = a_{ke}^x} \end{aligned}$$

formule en quelque sorte inverse de (2,7)

Nous pouvons maintenant écrire une matrice diagonale

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad \text{sous la forme } \sum_i \lambda_i e_i e_i^x$$

et le théorème que nous avons énoncé, prend la forme suivante : toute matrice symétrique A peut se mettre sous la forme

$$A = S \left(\sum \lambda_i e_i e_i^x \right) S^x$$

la matrice S étant unitaire, c'est-à-dire telle que

$$S S^x = S^x S = \sum e_i e_i^x \quad (\text{nous représenterons cette}$$

dernière matrice par la notation [1]).

Les nombres λ_i s'appellent les valeurs propres de la matrice. Ce sont des nombres réels. (1)

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice symétrique soit définie non négative est que toutes ses valeurs ^{propres} soient positives ou nulles. (1)

(1) Pour les démonstrations, voir par exemple G. JULIA "Introduction mathématique aux théories quantiques".

Si une matrice symétrique A est définie non négative, il existe une et une seule matrice symétrique définie non négative B telle que $B^2 = A$.

Cette matrice, que nous noterons \sqrt{A} , peut s'écrire

$$\sqrt{A} = S \left(\sum_i \sqrt{\lambda_i} e_i e_i^* \right) S^*$$

Par suite, la fluctuation d'un vecteur X possède une racine carrée $\sqrt{\Phi(X)}$

B - DEMONSTRATION DE LA FORMULE (5,2)

DETERMINANT UN VECTEUR NORMAL EN FONCTION DE SA VALEUR MOYENNE ET DE SA FLUCTUATION

Le polynôme $Q(X)$ peut se mettre sous la forme $-[X^* B X + C^* X + d]$ B étant une matrice symétrique, C un vecteur, d, un nombre.

Une étude préliminaire, que nous ne ferons pas ici, montre que la somme totale des masses ne peut être finie que si B est définie positive, donc régulière.

On peut alors mettre $Q(X)$ sous la forme $- \left[\left(X + \frac{1}{2} B^{-1} C \right)^* B \left(X + \frac{1}{2} B^{-1} C \right) + \left(d - \frac{1}{4} C^* B^{-1} C \right) \right]$ qui montre que le point $K = -\frac{1}{2} B^{-1} C$ est centre de symétrie de la répartition. K est donc la valeur moyenne du vecteur aléatoire. Prenons maintenant comme variable le vecteur $\Delta X = X + \frac{1}{2} B^{-1} C = X - K$

La densité ρ est de la forme $\rho = k e^{-[\Delta X^* B \Delta X]}$

k étant une constante que nous allons déterminer pour que la masse totale soit égale à 1 :

$$k \int \dots \int e^{-\Delta X^T B \Delta X} dx_1 dx_2 \dots dx_n = 1$$

en désignant par dx_1, dx_2, \dots, dx_n l'élément du volume engendré par le vecteur ΔX .

La matrice B^{-1} est définie positive. Elle possède donc une racine carrée (2,10) : $\sqrt{B^{-1}}$.

Faisons le changement de variables définis par

$$\Delta X = \sqrt{B^{-1}} Y$$

On aura

$$\begin{aligned} dx_1 dx_2 \dots dx_n &= \frac{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}{D(y_1, y_2, \dots, y_n)} dy_1 dy_2 \dots dy_n \\ &= \det(\sqrt{B^{-1}}) dy_1 dy_2 \dots dy_n \end{aligned}$$

Le déterminant de $\sqrt{B^{-1}}$ est évidemment égal à $(\det B)^{-\frac{1}{2}}$

On a donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} &= \int \dots \int e^{-Y^T \sqrt{B^{-1}} B \sqrt{B^{-1}} Y} (\det B)^{-\frac{1}{2}} dy_1 dy_2 \dots dy_n \\ &= \frac{1}{\sqrt{\det B}} \int \dots \int e^{-Y^T Y} dy_1 dy_2 \dots dy_n \\ &= \frac{1}{\sqrt{\det B}} \int \dots \int e^{-y_1^2} e^{-y_2^2} \dots e^{-y_n^2} dy_1 dy_2 \dots dy_n \\ &= \frac{1}{\sqrt{\det B}} \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y_i^2} dy_i = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det B}} \end{aligned}$$

Nous pouvons donc calculer la fluctuation $\Phi(X)$.

Le même changement de variables donne

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \frac{\sqrt{\det B}}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int \dots \int \Delta x (\Delta x)^x e^{-\Delta x^T B \Delta x} dx_1 dx_2 \dots dx_n \\ &= \frac{\sqrt{\det B}}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int \dots \int \sqrt{B^{-1}} Y Y^T \sqrt{B^{-1}} e^{-Y^T Y} \frac{dy_1 dy_2 \dots dy_n}{\sqrt{\det B}} \\ &= \sqrt{B^{-1}} \left[\frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int \dots \int Y Y^T e^{-Y^T Y} dy_1 dy_2 \dots dy_n \right] \sqrt{B^{-1}} \end{aligned}$$

L'intégrale est

$$A = \sum_{i,j} \left[e_i e_j^x \int \dots \int y_i y_j e^{-\sum y_k^2} dy_1 dy_2 \dots dy_n \right]$$

Soit

$$I_{ij} = \int \dots \int y_i y_j e^{-\sum y_k^2} dy_1 dy_2 \dots dy_n$$

Si $i \neq j$,

$$I_{ij} = \int_{-\infty}^{+\infty} y_i e^{-y_i^2} dy_i \int_{-\infty}^{+\infty} y_j e^{-y_j^2} dy_j \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i \\ k \neq j}}^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y_k^2} dy_k$$

Les deux premières intégrales sont nulles. I_{ij} est nulle.

Si $j = i$ on a

$$\begin{aligned} I_{ij} = I_{ii} &= \int_{-\infty}^{+\infty} y_i^2 e^{-y_i^2} dy_i \times \prod_{k=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y_k^2} dy_k \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} y_i^2 e^{-y_i^2} dy_i}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y_i^2} dy_i} \prod_{k=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y_k^2} dy_k \end{aligned}$$

Le produit, déjà calculé, vaut $\pi^{\frac{n}{2}}$. Une intégration

par parties donne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y_i^2 e^{-y_i^2} dy_i = \int_{-\infty}^{+\infty} y_i d\left[-\frac{1}{2} e^{-y_i^2}\right] = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y_i^2} dy_i$$

Par suite

$$I_{ij} = \delta(i,j) \times \frac{1}{2} \pi^{\frac{n}{2}}, \quad \text{et}$$

$$A = \sum_i e_i e_i^x \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{2} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{2} \times [1]$$

$$\text{et enfin } \Phi(x) = \sqrt{B^{-1}} \times \frac{1}{2} \times [1] \times \sqrt{B^{-1}} = \frac{1}{2} B^{-1}$$

Ceci montre que la fluctuation d'un vecteur normal est nécessairement symétrique, définie positive et régulière.

Etant donnée une matrice A vérifiant ces conditions, on

$$\text{en tire } B^{-1} = 2A \quad \text{d'où } B = \frac{1}{2} A^{-1}$$

On a $\det B = \frac{1}{2^n \det A}$. Les relations établies

$$\Delta X = X - K, \quad p = k e^{-[\Delta X^T B \Delta X]}, \quad k = \frac{\sqrt{\det B}}{\pi^{\frac{n}{2}}}$$

jointes à ces dernières, fournissent la formule (5,2).

C - DEMONSTRATION DE LA FORMULE (5,4) (de PEARSON)

La probabilité pour qu'un point soit extérieur à l'ellipsoïde-type est

$$p = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det A}} \int \dots \int_{(x-K)^T A^{-1} (x-K) > \lambda^2} e^{-\frac{1}{2} (x-K)^T A^{-1} (x-K)} dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

ou, par le changement de variables

$$p = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det A}} \int \dots \int_{Y^T Y > \lambda^2} e^{-\frac{1}{2} Y^T Y} \sqrt{\det A} dy_1 dy_2 \dots dy_n$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int \dots \int_{Y^T Y > \lambda^2} e^{-\frac{1}{2} (y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2)} dy_1 dy_2 \dots dy_n$$

Faisons un changement de variables

$$y_1 = t z_1(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1})$$

$$y_2 = t z_2(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1})$$

...

$$y_n = t z_n(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1})$$

les fonctions z_1, z_2, \dots, z_n étant choisies en sorte que l'on ait constamment $z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2 = 1$

Il vient

$$p = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{t>\lambda} \dots \int e^{-\frac{t^2}{2}} \begin{vmatrix} z_1 & t \frac{\partial z_1}{\partial \alpha_1} & t \frac{\partial z_1}{\partial \alpha_2} & \dots \\ z_2 & t \frac{\partial z_2}{\partial \alpha_1} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_n & t \frac{\partial z_n}{\partial \alpha_1} & \dots & \dots \end{vmatrix} dt d\alpha_1 \dots d\alpha_n$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{t=\lambda}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} t^{n-1} dt \int \dots \int \begin{vmatrix} z_1 & \frac{\partial z_1}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial z_1}{\partial \alpha_2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_n & \frac{\partial z_n}{\partial \alpha_1} & \dots & \dots \end{vmatrix} d\alpha_1 d\alpha_2 \dots d\alpha_n$$

L'intégrale finale K est indépendante de t.

On peut donc écrire

$$p = \frac{K}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{t=\lambda}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} t^{n-1} dt$$

Le changement de variable $\frac{t^2}{2} = u$ donne

$$p = \frac{K}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{u=\frac{\lambda^2}{2}}^{\infty} e^{-u} u^{\frac{n}{2}-1} du$$

Pour $\lambda=0$ on doit avoir $p=1$. Or

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-u} u^{\frac{n}{2}-1} du =$$

Il vient $K = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$

(notons en passant que K est la surface de la sphère à n dimensions de rayon 1), et l'on peut énoncer la formule (5,4) :

La probabilité pour que l'extrémité du vecteur aléatoire

normal X à n dimensions soit extérieure à l'ellipsoïde-type d'amplitude est.

$$P_n(\lambda) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{\frac{\lambda^2}{2}}^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{n}{2}-1} du$$

D - COMPOSITION DES VECTEURS ALEATOIRES INDEPENDANTS

Prenons les notations de (6,4). La valeur moyenne de la somme des vecteurs X et X' est

$$\begin{aligned} \overline{X+X'} &= \sum_i p(Y_i) Y_i \\ &= \sum Y_i \sum_{X_j+X'_k=Y_i} p_j p'_k \\ &= \sum_{j,k} (X_j + X'_k) p_j p'_k \\ &= \sum_j X_j p_j \sum_k p'_k + \sum_k X'_k p'_k \sum_j p_j = \sum_j X_j p_j + \sum_k X'_k p'_k \\ &= \overline{X} + \overline{X'} \end{aligned}$$

On a par conséquent $\Delta(X+X') = \Delta X + \Delta X'$

et par suite

$$\begin{aligned} \Phi(X+X') &= \sum_i p(Y_i) \Delta Y_i \Delta Y_i^* \\ &= \sum_i \sum_{\Delta X_j + \Delta X'_k = \Delta Y_i} p_j p'_k (\Delta X_j + \Delta X'_k) (\Delta X_j + \Delta X'_k)^* \\ &= \sum_{j,k} p_j p'_k [\Delta X_j \Delta X_j^* + \Delta X_j \Delta X'_k{}^* + \Delta X'_k \Delta X_j^* + \Delta X'_k \Delta X'_k{}^*] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_j r_j \Delta x_j \Delta x_j^x \sum_k r_k' \\
 &+ \sum_j r_j \Delta x_k \sum_k r_k' \Delta x_k^{i'x} \\
 &+ \sum_k r_k' \Delta x_k^i \sum_j r_j \Delta x_j^x \\
 &+ \sum_k r_k' \Delta x_k^i \Delta x_k^{i'x} \sum_j r_j
 \end{aligned}$$

$$\text{or } \sum_k r_k' = 1, \sum_k r_k' \Delta x_k^{i'x} = 0, \sum_j r_j \Delta x_j^x = 1, \sum_j r_j = 0$$

Dans

$$\begin{aligned}
 \phi(x+x') &= \sum_j r_j \Delta x_j \Delta x_j^x + \sum_k r_k' \Delta x_k^i \Delta x_k^{i'x} \\
 &= \phi(x) + \phi(x')
 \end{aligned}$$
