# LA RECHERCHE AÉRONAUTIQUE

BULLETIN BIMESTRIEL

DE L'OFFICE NATIONAL D'ÉTUDES ET DE RECHERCHES AÉRONAUTIQUES

RÉDACTION et ADMINISTRATION : 3, Rue Léon Bonnat, PARIS-16e - Téléphone : ALEsia 50-80 Lignes groupées

Le N° 350 Fr. **ABONNEMENTS :** 1 an : France 1.800 fr. — 1 an : Etranger 2.400 fr. - C.C. Postal PARIS 9061-45

1950 MARS-AVRIL NUMÉRO 14

## SOMMAIRE

1. J. M. SOURIAU. — Le calcul spinoriel et ses applications ..... page 3

2. R. BASILE. — Un essai de vibration sur les pales du ventilateur de la soufflerie de Modane (7 fig.) ..... page 9

3. M. DOUAT. — Bosse transsonique (6 fig.) ..... page 13

4. M. VASSEUR — Calcul du coefficient de convection à la surface d'un profil cylindrique (3 fig.) ..... page 17

5. W. RUPPEL. — Etude de l'instabilité stationnaire d'un avion en vol à l'aide des coefficients d'influence (3 fig.) ..... page 25

6. G. ROLLIN & J. LAVARENNE. - Essais sur Gloster Meteor IV (12 fig.). page 31

7. P. REBUFFET & Ph. POISSON-QUINTON. — Recherches sur l'hypersustentation d'une aile en flèche réel e par contrôle de la couche limite utilisant le prélèvement d'air sur le turbo-réacteur (26 fig.) ..... page 39

8. P. GALMICHE. — Nouveau procédé de chromage thermique et formation d'alliages mixtes de diffusion (15 fig.) ..... page 55

*La publication ou la traduction des articles publiés dans ce bulletin est autorisée avec mention formelle d'origine.*

RÉDACTEUR EN CHEF :

**B. RUSANSCHI**

Chef du Service de Documentation

# CHRONIQUES

M. le Secrétaire d'Etat aux Forces Armées (Air) vient de donner son plein accord à la proposition de M. Maurice ROY, directeur de l'O. N. E. R. A., tendant à donner à la Soufflerie $S_1$ de Modane le nom de « Soufflerie Paul DUMANOIS ».

Cette mesure rendra un juste hommage à la part qu'a pris personnellement M. l'Ingénieur Général Paul DUMANOIS, d'abord comme Président du Groupement Français pour le Développement des Recherches Aéronautiques, puis comme Président du Conseil d'Administration de l'O. N. E. R. A., à la réalisation de cette soufflerie sonique, la plus puissante du monde actuellement.

## EXTRAIT DU JOURNAL OFFICIEL N° 63 DU 13 ET 14 MARS 1950

### Nomination des membres du Comité Scientifique de l'Office National d'Etudes et de Recherches Aéronautiques.

Par arrêté du 4 mars 1950, sont nommés membres du Comité Scientifique de l'Office National d'Etudes et de Recherches aéronautiques :

MM.

Louis de BROGLIE, membre de l'Académie française, secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, professeur à l'Institut Henri Poincaré.

Raoul DAUTRY, membre de l'Institut, ancien ministre de l'Armement, administrateur délégué du Haut Commissariat à l'Energie atomique.

Albert CAQUOT, membre de l'Institut, directeur général honoraire du Ministère de l'Air.

Joseph PERES, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences de Paris.

Pierre CHEVENARD, membre de l'Institut, directeur technique aux Aciéries d'Imphy.

Pierre DECROS, Ingénieur Général militaire de l'Air (active), ancien directeur du Service des Recherches scientifiques au Ministère de l'Air.

## PUBLICATIONS SCIENTIFIQUES ET TECHNIQUES DU MINISTÈRE DE L'AIR

Série verte, N° B. S. T. 112.

**— DÉTERMINATION D'UN ÉTAT PLAN DES CONTRAINTES A L'AIDE D'UN EXTENSIOMÈTRE A RÉSISTANCE ÉLECTRIQUE A TROIS DIRECTIONS (ROSETTE) abaques pratiques d'emploi,** par **F. T. SALLES,** Préface de **P. GROSS.**

Méthode précise et surtout rapide de dépouillement des essais mécaniques.

Exposé théorique : théorie du cercle des déformations ; problèmes des rosettes ; formules pour la rosette rectangulaire ; formules pour la rosette équilatérale ; remarques sur les formules précédentes ; convention de signe, détermination de la direction de contrainte maximum.

Applications pratiques : tableaux et abaques pour la rosette rectangulaire ; tableaux et abaques pour la rosette équilatérale ; aperçu des améliorations possibles : conclusion, abaques, bibliographie.

41 pages, 27 figures, 6 abaques

**En vente au magasin C.T.O. — S.D.I.T.** 2, rue de la Porte-d'Issy - Paris XV$^{e}$.

**Prix : 350 Francs**

CLASSIF. .....

# LE CALCUL SPINORIEL ET SES APPLICATIONS

par

J.-M. SOURIAU

Ingénieur de Recherches à l'O.N.E.R.A.

Agrégé de l'Université

## SOMMAIRE

*Le calcul spinoriel est un outil de calcul nouveau qui, joint au calcul matriciel, permet de résoudre aisément un grand nombre de problèmes techniques. Son exposé schématique complet fait l'objet d'une publication ONERA* [1].

*On trouvera ici un exposé rapide de la méthode et de son application aux problèmes de vibrations et de stabilité. Nous ajoutons quelques détails sur la nouvelle méthode de décomposition spectrale qui s'en déduit.*

*Un exposé ultérieur de M. Janin indiquera la réalisation de ce calcul au moyen de machines mécanographiques à cartes perforées.*

## I. — CALCUL MATRICIEL

On sait que le calcul matriciel est l'étude de certains « objets mathématiques » appelés *colonnes*, qui sont formés de *n* nombres (réels ou complexes), écrits verticalement entre crochets :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

On peut ajouter deux colonnes, multiplier une colonne par un nombre :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \times \lambda = \begin{bmatrix} x_1 \times \lambda \\ x_2 \times \lambda \\ \vdots \\ x_n \times \lambda \end{bmatrix}$$

En désignant par $E_1, E_2, \ldots E_n$ les colonnes

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

on peut mettre toute colonne sous la forme

$$\sum_{i=1}^{n} E_i \times x_i .$$

Les *matrices* sont les « opérateurs linéaires » transformant les colonnes en colonnes : si A est une matrice, X une colonne, A (X) est une nouvelle colonne, et les identités :

$$A(X + Y) = A(X) + A(Y) \quad , \quad A(X.\lambda) = A(X).\lambda$$

sont valables quelles que soient les colonnes X, Y, le nombre $\lambda$. Toute matrice A peut se représenter par un tableau de nombres :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \ldots \\ a_{p1} & a_{p2} & \ldots & a_{pn} \end{bmatrix}$$

On l'obtient en écrivant, à la suite l'une de l'autre, les colonnes

$$A(E_1), \quad A(E_2), \quad \ldots \quad A(E_n).$$

CLASSIF.

X étant une colonne quelconque, mise sous la forme $\sum E_i \cdot x_i$, on en déduira $A(X) = \sum A(E_i) \cdot x_i$.

On peut définir la somme et le produit de deux matrices A et B au moyen des relations :

$$[A+B](X) = A(X)+B(X), \quad [A.B](X)=A(B(X))$$

valables quelle que soit la colonne X.

Les matrices étant mises sous forme de tableau, des règles algébriques simples permettent de calculer leur somme et leur produit [1].

Ces opérations sont soumises aux règles de calcul habituelles pour les nombres réels ou complexes, à une exception près : le produit n'est pas commutatif, les produits A.B et B.A de deux matrices sont en général différents.

De plus, il existe une troisième opération fondamentale, « l'opération barre » : A étant une matrice, on désigne par $\overline{A}$ la matrice obtenue en « échangeant les lignes et les colonnes » (si les éléments sont complexes, il faut en plus les remplacer par leur conjugués).

Exemple :

$$\overline{E}_1=[1\ 0\ 0\ldots 0],\ \overline{E}_2=[0\ 1\ 0\ldots 0],\ \overline{E}_n=[0\ 0\ 0\ldots 1].$$

Cette opération vérifie les identités suivantes :

$$\overline{\overline{A}} = A \qquad \overline{A+B} = \overline{A}+\overline{B} \qquad \overline{A.B} = \overline{B}.\overline{A}$$

Les matrices qui vérifient $\overline{A} = A$, ou matrices *hermitiennes*, jouent un rôle important dans les problèmes physiques.

Signalons également les matrices *scalaires :* $\lambda$ étant un nombre, on désignera encore par $\lambda$ la matrice A définie par :

$$A(X) = X \cdot \lambda$$

Cette matrice se représente par le tableau :

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & \ldots & 0 \\ \ldots & & \ldots & \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{bmatrix}$$

## II. — SPINEURS

On appelle *opérateur double* tout opérateur A qui, appliqué à un objet X donne pour résultat un nouvel opérateur $B = A(X)$.

Si on applique B à un autre objet Y, on obtient l'objet :

$$B(Y) = [A(X)](Y)$$

Pour simplifier, nous écrirons A (X) (Y), en supprimant les crochets inutiles. On définira sans peine les opérateurs triples, et plus généralement les opérateurs *d'ordre p.*

Un opérateur A, d'ordre p, est *multilinéaire* s'il est linéaire par rapport à chacune de ses variables : on a alors une formule de développement analogue à celle des produits :

$$A(X+X')(Y+Y') = A(X)(Y)+A(X)(Y') + A(X')(Y)+A(X')(Y')$$

Lorsque l'échange de deux variables quelconques laisse invariante la valeur de A, on dit que A est *symétrique.* Si au contraire cette valeur change de signe, A est *antisymétrique.*

On appelle *spineur* tout opérateur multilinéaire et antisymétrique.

Le théorème fondamental du calcul spinoriel est le suivant :

**« Les spineurs d'ordre *n* sur les colonnes d'ordre *n* sont tous proportionnels. »**

A et B étant deux d'entre eux, il existe donc un nombre *k* tel que :

$$A(X_1)(X_2)\ldots(X_n) = k.\ B(X_1)(X_2)\ldots(X_n),$$

*k* étant indépendant du choix des colonnes $X_1, X_2, \ldots X_n$.

Il suffit donc pour déterminer tous ces spineurs d'en connaître un seul.

Nous appellerons *spineur fondamental* le spineur $\delta$ qui vérifie :

$$\delta(E_1)(E_2)\ldots(E_n) = 1.$$

Les spineurs permettent d'obtenir facilement d'importantes propriétés des matrices. Prenons un exemple :

A étant une matrice carrée, la quantité

$$\delta(A(X_1))\ (A(X_2))\ \ldots\ (A(X_n))$$

dépend des colonnes $X_1, X_2, \ldots X_n$,
de façon visiblement multilinéaire et antisymétrique. Elle peut donc se mettre sous la forme

$$k\ \delta(X_1)(X_2)\ldots(X_n),$$

le coefficient de proportionalité *k* ne dépendant pas des colonnes $X_1, X_2, \ldots X_n$. *k* est donc fonction de la seule matrice A, on l'appelle *déterminant* de A, en abrégé dét (A). (On démontre aisément que cette définition coïncide avec la définition classique).

La théorie des déterminants peut s'établir immédiatement à partir de cette définition.

CLASSIF.

On sait par exemple que le produit de deux matrices A et B est défini par l'identité :

$$[A.B]\ (X) = A\ (B\ (X))$$

Le déterminant de ce produit sera défini par :

$$\text{dét}\ (A.B).\ \delta\ (X_1)\ (X_2)\ \ldots\ (X_n) = \delta\ (A.B\ (X_1))\ (A.B\ (X_2))\ \ldots\ (A.B\ (X_n)).$$

Cette dernière quantité étant égale à :

$$\delta\ (A\ (B\ (X_1)))\ (A\ (B\ (X_2)))\ \ldots\ (A\ (B\ (X_n)))$$

soit à :

$$\text{dét}\ (A)\ .\ \delta\ (B\ (X_1))\ (B\ (X_2))\ \ldots\ (B\ (X_n))$$

ou encore à :

$$\text{dét}\ (A)\ .\ \text{dét}\ (B)\ .\ \delta\ (X_1)\ (X_2)\ \ldots\ (X_n),$$

nous avons établi la formule du « produit de deux déterminants » :

$$\text{dét}\ (A.B) = \text{dét}\ (A)\ .\ \text{dét}\ (B)$$

si difficile à obtenir par les voies classiques.

On peut également démontrer qu'il existe une matrice B et une seule telle que :

$$\delta\ (X_1)\ (A\ (X_2))\ (A\ (X_3))\ \ldots\ (A\ (X_n)) = \delta\ (B\ (X_1))\ (X_2)\ \ldots\ (X_n)$$

quelles que soient les colonnes $X_1, X_2, \ldots X_n$. Cette matrice B, qui ne dépend donc que de A, s'appelle *matrice adjointe* de A, en abrégé Adj (A).

Le calcul spinoriel fournit les identités suivantes :

$$\text{Adj}\ (A.B) = \text{Adj}\ (B)\ .\ \text{Adj}\ (A)$$

$$\text{Adj}\ (A)\ .\ A = \text{dét}\ (A)$$

Cette dernière formule donne la *règle de Cramer* pour la résolution des systèmes d'équations linéaires :

Soit le système représenté [2,5] par l'équation A (X) = Y, X étant la colonne des inconnues, A la matrice des coefficients, Y la colonne des «seconds membres ».

En appliquant la matrice Adj (A), il vient :

$$\text{Adj}\ (A)\ (Y) = [\text{Adj}\ (A)\ .\ A]\ (X) = X.\ \text{dét}\ (A)$$

Donc, si le déterminant de A n'est pas nul, ce système a une solution et une seule :

$$X = \frac{\text{Adj}\ (A)\ (Y)}{\text{dét}\ (A)}\ ;$$

En particulier, l'équation *homogène* A (X) = 0 n'admet que la solution X = 0. (Si dét (A) = 0, on peut montrer que ce système a, au contraire, des solutions non nulles.)

## III. — APPLICATION AUX PROBLÈMES DE VIBRATION. DÉCOMPOSITION SPECTRALE

L'équation des vibrations libres d'un système mécanique à $n$ paramètres peut se mettre sous la forme [2,5] :

$$A\ (\ddot{X}) + X = 0,$$

X étant la colonne des paramètres définissant le système, A une certaine matrice que l'on peut déduire des propriétés élastiques et massiques du système.

La méthode classique de résolution consiste à rechercher des solutions de la forme $Y\ .\ e^{i\omega t}$, Y étant une colonne constante ; elles correspondent à des vibrations harmoniques de pulsation $\omega$.

L'équation devient alors :

$$A(-\omega^2 Y) + Y = 0,$$

ou encore :

$$\left[\frac{1}{\omega^2} - A\right]\ (Y) = 0.$$

Ainsi que nous l'avons vu, cette équation n'admet que la solution Y = 0 si le déterminant de la matrice $\frac{1}{\omega^2} - A$ n'est pas nul.

Cette solution correspondant au repos, on n'obtiendra des vibrations que pour $\text{dét}\left(\frac{1}{\omega^2} - A\right) = 0$.

Nous avons ainsi obtenu l'*équation aux fréquences propres.*

On voit donc s'introduire la quantité :

$$P\ (\lambda) = \text{dét}\ (\lambda - A),$$

à laquelle nous joindrons l'expression :

$$Q\ (\lambda) = \text{Adj}\ (\lambda - A).$$

En développant ces expressions, au moyen de leur définition spinorielle, on trouve :

$$P\ (\lambda) = \lambda^n + k_1\ \lambda^{n-1} + \ldots + k_n$$

$$Q\ (\lambda) = \lambda^{n-1} + B_1\ \lambda^{n-2} + B_2\ \lambda^{n-3} + \ldots + B_{n-1}.$$

$k_1, k_2, \ldots k_n$ étant des nombres, $B_1, B_2, \ldots B_{n-1}$ des matrices.

Le polynôme P s'appelle *polynôme caractéristique* de la matrice A.

On voit alors que le système admet en général $n$ pulsations propres $\omega_j$, définies par $\frac{1}{\omega_j^2} = \lambda_j$, les $\lambda_j$ étant les racines du polynôme P.

Les polynômes P et Q sont liés par deux relations importantes :

$$Q\ (\lambda)\ .\ [\lambda - A] = P\ (\lambda)$$

CLASSIF.

qui se déduit de la formule générale :

$$\text{Adj (A)} \cdot \text{A} = \text{dét (A)}$$

et :

$$\boxed{\text{P}'(\lambda) = \text{T}(\text{Q}(\lambda)),}$$

en désignant par T (M) la *trace* d'une matrice M, c'est-à-dire la somme des éléments de sa diagonale principale.

En combinant ces deux relations on trouve, d'une part, la formule :

$$\boxed{A^n + k_1 \cdot A^{n-1} + \ldots + k_n = 0}$$

appelée *théorème de Hamilton — Cayley* (« toute matrice carrée vérifie son équation caractéristique »), et d'autre part l'ensemble d'égalités :

$$k_1 = -\text{T (A)} \qquad B_1 = A + k_1$$

$$k_2 = -\frac{1}{2}\text{T}(B_1 \cdot A) \qquad B_2 = B_1 \cdot A + k_2$$

$$k_3 = -\frac{1}{3}\text{T}(B_2 \cdot A) \qquad B_3 = B_2 \cdot A + k_3$$

. . . . . .

$$k_n = -\frac{1}{n}\text{T}(B_{n-1} \cdot A)$$

Ces égalités permettent d'obtenir successivement $k_1$, $B_1$, $k_2$, $B_2$, $B_{n-1}$, $k_n$, uniquement au moyen de calculs de traces et de multiplications matricielles. (Voir plus loin le détail des calculs.)

Le polynôme caractéristique étant ainsi obtenu, on fait le calcul numérique de ses racines, $\lambda_j$, et l'on obtient les pulsations propres par la formule :

$$\frac{1}{\omega_j^2} = \lambda_j.$$

correspondant à la fréquence $\omega_j$.

On appelle *déformée propre* ou *mode* toute colonne $Y_j$ telle que $Y_j\, e^{i\omega_j t}$ soit solution de l'équation. On montre que l'on peut prendre une colonne quelconque de la matrice $Q(\lambda_j)$ qui se calcule immédiatement à partir de $B_1$, $B_2$, ... $B_{n-1}$.

Le problème de la recherche des vibrations harmoniques est alors complètement résolu ; on voit facilement que toute vibration libre est une combinaison linéaire de celles-ci.

Dans le cas où l'on trouve des expressions complexes pour les valeurs des $\omega_j$, on aura des mouvements exprimés par une formule $Y\, e^{[p + i\omega]\, t}$

Si $p$ est négatif, on trouve ainsi un mouvement *harmonique amorti.*

Au contraire, si $p$ est positif, on se trouve en face d'un mouvement oscillatoire amplifié, donc d'une instabilité : la condition nécessaire et suffisante de stabilité est donc que les parties réelles de toutes les racines soient négatives [1].

Nous avons indiqué dans cette revue, en collaboration avec M. Herrmann, un critère qui permet d'étudier cette stabilité sans résoudre l'équation caractéristique [3-4].

Dans le cas des racines réelles, c'est-à-dire des systèmes élastiques stables sans amortissement, la recherche des modes présente aussi un grand intérêt : on peut prendre les $n$ déformées propres $Y_1$, $Y_2$, ... $Y_n$ comme nouvelles coordonnées, c'est-à-dire représenter tout état X du système par la colonne Z des nombres $z_i$, tels que :

$$X = Y_1 z_1 + Y_2 z_2 + \ldots + Y_n z_n.$$

Avec ces « coordonnées généralisées » l'équation des vibrations libres s'écrit aussi sous la forme :

$$D\ (\ddot{Z}) + Z = 0,$$

mais on peut montrer que la matrice D est maintenant une matrice *diagonale*, la diagonale des valeurs propres :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_1^2} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\omega_2^2} & \ldots & 0 \\ \ldots & & & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{\omega_n^2} \end{bmatrix}$$

et l'équation des vibrations forcées, avec un second membre F donné :

$$D\ (Z) + Z = F,$$

devient simplement :

$$\frac{1}{\omega_1^2}\ddot{z}_1 + z_1 = f_1$$

$$\frac{1}{\omega_2^2}\ddot{z}_2 + z_2 = f_2$$

. . . . . .

$$\frac{1}{\omega_n^2}\ddot{z}_n + z_n = f_n$$

On voit que les coordonnées généralisées introduites ici sont *découplées*, chaque équation pouvant être résolue séparément.

(1) Dans l'étude des systèmes asservis, par exemple, dans le problème du flutter d'un avion, l'équation des vibrations prend un aspect plus compliqué :

$A\ (\ddot{X}) + B\ (\dot{X}) + X = 0.$ Il faut effectuer certaines modifications, mais la méthode reste valable « mutatis mutandis ».

CLASSIF.

De plus, on pourra négliger en première approximation les paramètres correspondant à un mouvement de fréquence élevée, car un tel mouvement a des chances d'être étouffé par l'amortissement de structure ; on obtiendra ainsi une *réduction du nombre des paramètres*, qui simplifiera les calculs ultérieurs.

On voit l'intérêt de cette réduction des matrices à la forme diagonale, appelée encore *décomposition spectrale*. Nous avons introduit ici cette opération à partir d'un problème de vibrations, mais elle a des applications importantes dans de nombreux autres domaines : élasticité, optique, etc...

La méthode pratique que nous indiquons ici, permettra donc d'apporter une clarté nouvelle dans de nombreuses applications scientifiques et techniques que l'on ne pourrait songer à aborder par les autres méthodes, à cause de la complexité des calculs auxquels elles conduisent.

Ajoutons que cette méthode est employée couramment à l'O.N.E.R.A., dans la direction scientifique OR. Les calculs sont effectués au moyen de machines mécanographiques à cartes perforées, et on a déjà pu étudier ainsi un grand nombre de problèmes de stabilité.

## IV. — MISE EN ŒUVRE PRATIQUE DE LA DÉCOMPOSITION SPECTRALE

Le problème se pose sous la forme suivante :
Etant donnée une matrice A, calculer les quantités définies par les relations :

$$k_1 = -\,T\,(A) \qquad B_1 = A + k_1$$

$$k_2 = -\,\frac{1}{2}\,T\,(B_1 A) \qquad B_2 = B_1 A + k_2$$

. . . . . .

$$k_n = -\,\frac{1}{n}\,T\,(B_{n-1}.A)$$

On voit que le calcul essentiel est celui de la multiplication de deux matrices. C'est une suite de multiplications et d'additions, dans un ordre déterminé à l'avance, donc une opération parfaitement mécanisable. La seconde opération, calcul de la trace d'une matrice, est très simple.

Pour avoir des résultats numériques exacts, on a intérêt à supprimer les virgules dans les nombres décimaux, et à effectuer les calculs en *nombres entiers*.

Ceci conduit à deux catégories importantes de vérifications :

1° Les nombres $k_1, k_2, \ldots k_n$ étant des entiers, les quantités :

$$T\,(B_1.A),\quad T\,(B_2.A),\quad \ldots\quad T\,(B_{n-1}.A)$$

que l'on calcule successivement, doivent être divisibles par 2,3 ... $n$ respectivement : ceci permet de déceler rapidement une erreur accidentelle de la machine, sans avoir besoin de pousser jusqu'au bout un calcul erroné.

2° En faisant $\lambda = 0$ dans la définition de P ($\lambda$) et de Q ($\lambda$), on trouve $k_n = (-1)^n$ dét (A),

$$B_{n-1} = (-1)^{n-1}\ \mathrm{Adj}\ (A).$$

Le résultat de la dernière multiplication matricielle $B_{n-1}.A$ est donc :

$$(-1)^{n-1}\ \mathrm{Adj}(A)\ .\ A = (-1)^{n-1}\ \mathrm{dét}(A),$$

c'est-à-dire une matrice *scalaire*.

Nous avons vu qu'elle est de la forme :

$$\begin{bmatrix} a & 0 & \ldots & 0 \\ o & a & \ldots & 0 \\ \ldots & & \ldots & \\ 0 & 0 & \ldots & a \end{bmatrix}$$

Donc tous les termes de la diagonale sont égaux, tous les autres sont nuls. Dans la méthode mécanographique, il suffit de superposer toutes les cartes correspondant aux termes de la diagonale d'une part, toutes les autres cartes de l'autre, pour voir par transparence les perforations se coïncider.

Ajoutons que cette vérification est trop puissante, et qu'on peut se contenter de n'effectuer qu'une partie de cette multiplication matricielle, le dernier coefficient cherché $k_n$ étant justement l'un quelconque des éléments de la diagonale, changé de signe.

Mais, d'autre part, il faut tenir compte du fait que la capacité des machines est limitée (20 à 30 chiffres, au maximum).

Dans ces conditions on est conduit à restreindre le nombre des chiffres admis au départ, donc à utiliser une matrice légèrement erronée. Ceci n'est pas un inconvénient majeur, car on peut facilement évaluer et corriger l'erreur commise.

En effet, si la matrice A est remplacée par $A + \varepsilon B$, $\varepsilon$ étant un petit nombre dont on néglige le carré, le calcul spinoriel montre que le nouveau polynôme caractéristique est $P_1(\lambda) = P(\lambda) - \varepsilon\, T\,(B\ .\ Q(\lambda))$ que l'on obtient immédiatement au moyen des matrices $B_1, B_2, \ldots B_{n-1}$.

Cette méthode de correction permet aussi de faire un *calcul d'erreurs* dans le cas où les données numériques sont entachées d'erreurs expérimentales. Dans un problème de stabilité, on pourra ainsi apprécier la précision des valeurs obtenues pour le passage de la stabilité à l'instabilité.

Signalons enfin une dernière caractéristique de cette méthode : si l'on modifie une colonne quelconque de la matrice A, en lui ajoutant une colonne $X_0$ arbitraire, on obtient une nouvelle matrice égale à $A + X_0\ .\ E_i$ , i étant le numéro de la colonne modifiée.

Le calcul spinoriel fournit alors l'expression du polynôme caractéristique de la matrice modifiée :

$$P_1(\lambda) = P(\lambda) - \overline{E}\ .\ Q(\lambda)\ .\ X_0.$$

CLASSIF.

Ce nouveau polynôme se calcule donc immédiatement.

Ceci se présente dans les applications, par exemple lorsqu'il s'agit, au cours d'un problème de vibrations d'avion, de rechercher les fréquences propres pour différentes valeurs de la rigidité d'une gouverne. On peut même de façon analogue, obtenir directement la modification du polynôme caractéristique lorsqu'on augmente l'ordre de la matrice d'une unité (adjonction d'un degré de liberté supplémentaire).

## CONCLUSION

Nous voyons que les deux problèmes fondamentaux des systèmes linéaires, l'inversion [5] et la décomposition spectrale, sont maintenant résolus au moyen de la même opération fondamentale : la multiplication matricielle.

Cette opération est effectuée de façon assez satisfaisante par les machines mécanographiques, bien que celles-ci soient conçues, à l'origine, comme machines comptables. Mais il serait d'un grand intérêt pour la collectivité de construire une machine spécialement adaptée à cette opération, puisqu'elle permettrait de résoudre un très grand nombre de problèmes techniques, *normalisés* grâce au calcul matriciel.

## BIBLIOGRAPHIE


1. J. M. SOURIAU. — *Les calculs matriciel et spinoriel.* Publication O.N.E.RA. n° 42.
2. W. BARROIS, J. SIMON-SUISSE, R. BASILE. — *Introduction technique au calcul matriciel et à son utilisation.* (La Recherche Aéronautique, 1948, n° 6.)
3. A. HERRMANN, J. M. SOURIAU. — *Un critère de stabilité déduit du théorème de Sturm.* (C. R. Académie des Sciences, avril 1949.)
4. A. HERRMANN, J. M. SOURIAU. — *Un critère de stabilité pour les équations caractéristiques à coefficients réels ou complexes.* (La Recherche Aéronautique, 1949, n° 9.)
5. R. BASILE, R. JANIN. — *Résolution de systèmes d'équations linéaires algébriques et inversion de matrices au moyen des machines de mécanographie comptables.* (O.N.E.R.A. Publication n° 28.)
6. J. M. SOURIAU. — *Une méthode nouvelle pour la décomposition spectrale et l'inversion des matrices.* (C.R. Académie des Sciences, 15 novembre 1948.)



PUBLICATIONS SCIENTIFIQUES ET TECHNIQUES DU MINISTÈRE DE L'AIR

Série verte, N° B.S.T. 111

**LE POINT ASTRONOMIQUE A TERRE, SANS INSTRUMENT** par Robert **GENTY**, Commandant de l'Armée de l'Air, Docteur ès sciences. Ingénieur E.S.E., Diplômé de l'École Libre des Sciences Politiques. Préface du **Général Paul JACQUIN**, Inspecteur Technique de l'Armée de l'Air.

Détermination de leur position, *a priori* incertaine à plusieurs centaines de kilomètres près, par des aviateurs perdus au sol, ne possédant d'autre instrument que la montre, et appréciation des limites d'imprécision de cette détermination. La méthode indiquée convient particulièrement aux zones désertiques de l'Empire Français.

**En vente au magasin C.T.O. — S.D.I.T.**, 2, rue de la Porte d'Yssy - Paris XV^e^

**Prix : 300 Fr.**