

CLASSIF.

# EXTENSION DE LA MÉTHODE DE KUSSNER AUX PROFILS ÉPAIS

par

Jean-Marie SOURIAU et Jérôme CHASTENET de GERY

Ingénieurs de Recherches à l'O.N.E.R.A.

## SOMMAIRE

Pour étudier l'écoulement d'un fluide parfait et incompressible autour d'un profil plan en vibrations, et déterminer en particulier les coefficients aérodynamiques instationnaires, on utilise, en général, la méthode de Küssner [1], complétée par L. Schwartz [2]. Cette méthode s'applique à des profils plats ou d'épaisseur négligeable. Cependant, des calculs effectués par MM. Mazet et Dörr [3] à partir d'une théorie de M. Couchet [4] ont montré que, si l'épaisseur semblait relativement peu influencer les vitesses critiques de vibration dans le cas d'un profil Joukowski, certaines forces aérodynamiques se trouvaient par contre notablement modifiées.

C'est pourquoi il nous a paru intéressant d'exposer ici une méthode originale qui permet de ramener de façon simple le cas des vibrations d'un profil d'épaisseur quelconque à celui d'un profil infiniment mince justiciable de la méthode de Küssner.

## I. — THÉORIE

On sait que l'écoulement irrotationnel d'un fluide parfait et incompressible autour d'un profil du plan  $(x, y)$  est régi par l'équation de Laplace :

$$(1) \quad \Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad \varphi(x, y, t) \text{ étant le potentiel des vitesses.}$$

La fonction harmonique  $\varphi$  est déterminée par l'équation ci-dessus et par les conditions aux limites (condition de glissement du fluide sur le profil, condition de Kutta-Joukowski, vitesse donnée à l'infini).

On en tire la vitesse :  $\vec{V} = \text{grad } \varphi = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)$  (2) et l'on sait que la pression en un point est :

$$p = -\rho \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad}^2 \varphi \right) \quad (3)$$

à une constante additive près.

Si  $\psi$  est une fonction harmonique associée à  $\varphi$ , c'est-à-dire si  $\varphi + i\psi$  est holomorphe ou si

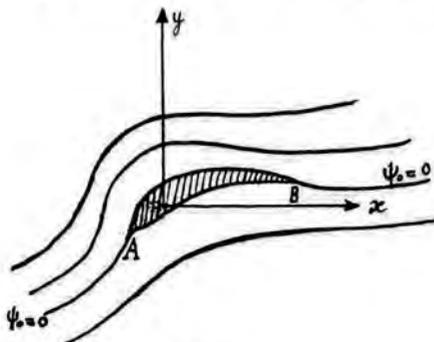


Fig. 1.

$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}$  et  $\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ , les lignes à  $\psi$  constant sont les lignes de courant.

Dans le cas d'un mouvement permanent on peut prendre  $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ , de plus, comme la fonction  $\psi$  est déterminée à une constante près, nous pourrions la prendre nulle sur le profil immobile, puisqu'il fait alors partie d'une ligne de courant.

Nous allons écrire les équations générales du mouvement et les conditions aux limites en prenant comme variables de position les fonctions  $\varphi_0$  et  $\psi_0$  du mouvement permanent autour de la position moyenne du profil <sup>(1)</sup>. Comme  $\varphi_0 + i\psi_0$  est une

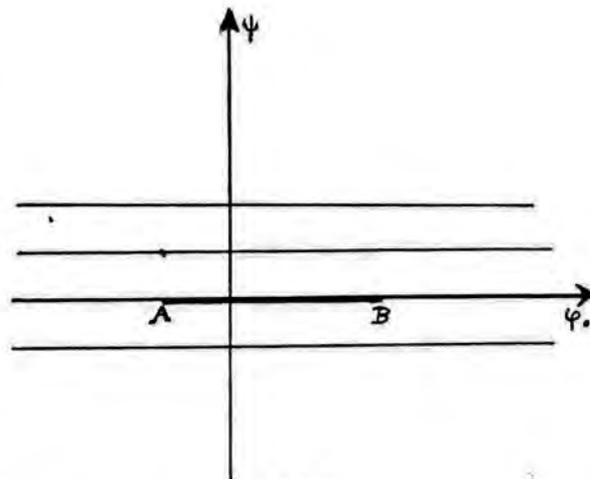


Fig. 2.

(1) Dans tout ce qui suit, nous supposons la fonction  $\varphi$  uniforme, ce qui signifie que la circulation autour du profil est nulle; nos conclusions ne sont donc valables que pour un profil à portance nulle. On pourrait chercher à les étendre à un cas plus général, mais ceci ne semble pas présenter un gros intérêt pratique.

CLASSIF.

fonction holomorphe de  $x + iy$ , et réciproquement, ceci revient à faire une application conforme de la région du plan des  $(x, y)$  extérieure au profil, sur le plan  $(\varphi_0, \psi_0)$  privé d'un segment de l'axe des  $\varphi_0$ . (En effet, la ligne de courant  $\psi_0 = 0$  se partage en deux de A à B pour suivre les deux faces du profil).

Le potentiel  $\varphi$  des vitesses du mouvement général, étant une fonction harmonique de  $x$  et  $y$ , le sera encore de  $\varphi_0$  et  $\psi_0$  puisqu'une fonction holomorphe de fonction holomorphe est encore holomorphe.

$$\text{On aura donc aussi : } \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varphi_0^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi_0^2} = 0 \quad (4)$$

Pour établir la condition de glissement, nous prendrons l'équation du profil en vibration sous la forme :

$$(5) \quad \begin{cases} \psi_0 = F^+(\varphi_0, t) & \text{pour la face supérieure} \\ \psi_0 = F^-(\varphi_0, t) & \text{pour la face inférieure.} \end{cases}$$

On obtiendra ainsi les conditions sur les deux faces ; nous ferons le calcul pour une face seulement, en désignant l'une quelconque de ces deux fonctions par  $F(\varphi_0, t)$ .

La condition de glissement du fluide sur la surface s'obtient en écrivant que la vitesse relative d'un élément de paroi et de l'élément de fluide au contact est tangente à la surface.

En un point du fluide  $(x(\varphi_0, \psi_0), y(\varphi_0, \psi_0))$  en contact avec la paroi, c'est-à-dire pour  $\psi_0 = F(\varphi_0, t)$ , la vitesse du fluide est  $(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y})$ , celle du point de la paroi est  $(\frac{\partial x}{\partial \psi_0} \cdot F'_t, \frac{\partial y}{\partial \psi_0} \cdot F'_t)$ , donc la vitesse du fluide par rapport à la paroi est :

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial \psi_0} \cdot F'_t, \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial \psi_0} \cdot F'_t \right)$$

pour qu'elle soit tangente à la surface, il faut que

$$\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial \psi_0} \cdot F'_t}{\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial \psi_0} \cdot F'_t} = \frac{\frac{\partial x}{\partial \psi_0} + \frac{\partial x}{\partial \psi_0} \cdot F'_{\varphi_0}}{\frac{\partial y}{\partial \psi_0} + \frac{\partial y}{\partial \psi_0} \cdot F'_{\varphi_0}} \quad \text{pour } \psi_0 = F(\varphi_0, t);$$

ceci est la condition de glissement cherchée.

Elle s'écrit aussi en développant et en réduisant :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial \psi_0} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial \psi_0} + F'_{\varphi_0} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial \psi_0} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial \psi_0} \right] - F'_t \left[ \frac{\partial x}{\partial \psi_0} \frac{\partial y}{\partial \psi_0} - \frac{\partial y}{\partial \psi_0} \frac{\partial x}{\partial \psi_0} \right] = 0$$

ou encore, puisque :

$$\frac{\partial x}{\partial \psi_0} = \frac{\partial y}{\partial \psi_0} \quad \text{et} \quad \frac{\partial x}{\partial \psi_0} = -\frac{\partial y}{\partial \psi_0},$$

$$\begin{aligned} - \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \psi_0} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \psi_0} \right] + F'_{\varphi_0} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \psi_0} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \psi_0} \right] \\ + F'_t \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \psi_0} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \psi_0} \right)^2 \right] = 0. \end{aligned}$$

En posant

$$K^2 = \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi_0} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \varphi_0} \right)^2 = \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi_0} \right)^2 + \left( \frac{\partial x}{\partial \psi_0} \right)^2 \quad (6)$$

$$\text{il vient : } \frac{\partial \varphi}{\partial \psi_0} = \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi_0} \cdot F'_{\varphi_0} + K^2 \cdot F'_t \quad (7)$$

sur la surface, c'est-à-dire pour  $\psi_0 = F(\varphi_0, t)$

$$\text{avec toujours } \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varphi_0^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi_0^2} = 0 \quad (4)$$

Ces équations sont satisfaites exactement par le mouvement permanent autour du profil au repos puisqu'alors :

$$\psi_0 = F(\varphi_0, t) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(\varphi_0, \psi_0, t) = \varphi_0.$$

Nous allons chercher l'écoulement voisin du mouvement permanent pour de petites vibrations du profil ; c'est-à-dire que nous allons linéariser les équations autour de la solution exacte précédente, en posant :

$$F(\varphi_0, t) = \varepsilon F_1(\varphi_0, t) \quad (8)$$

$$\varphi(\varphi_0, \psi_0, t) = \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1(\varphi_0, \psi_0, t)$$

$\varepsilon$  étant une petite quantité dont nous négligerons le carré.

$$\text{L'équation (4) donne encore } \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \varphi_0^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \psi_0^2} = 0 \quad (9)$$

Transformons la relation (7) terme à terme ; sans oublier qu'elle doit être vérifiée sur la surface, c'est-à-dire pour  $\psi_0 = F(\varphi_0, t) = \varepsilon F_1(\varphi_0, t)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi_0} = \varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial \psi_0} (\varphi_0, \varepsilon F_1(\varphi_0, t), t) \neq \varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial \psi_0} (\varphi_0, 0, t) \\ + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \psi_0^2} \neq \varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial \psi_0} (\varphi_0, 0, t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi_0} = 1 + \varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi_0} (\varphi_0, \varepsilon F_1(\varphi_0, t), t) \\ \neq 1 + \varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi_0} (\varphi_0, 0, t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi_0} \cdot F'_{\varphi_0} = \left[ 1 + \varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi_0} (\varphi_0, 0, t) \right] \varepsilon [F_1]'_{\varphi_0} (\varphi_0, t) \\ \neq \varepsilon [F_1]'_{\varphi_0} (\varphi_0, t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K^2 \cdot F'_t = \varepsilon [F_1]'_t (\varphi_0, t) \cdot \left( \left[ \frac{\partial x}{\partial \varphi_0} (\varphi_0, \varepsilon F_1(\varphi_0, t)) \right]^2 \right. \\ \left. + \left[ \frac{\partial y}{\partial \varphi_0} (\varphi_0, \varepsilon F_1(\varphi_0, t)) \right]^2 \right) \end{aligned}$$

$$\neq \varepsilon [F_1]'_t (\varphi_0, t) \cdot \left( \left[ \frac{\partial x}{\partial \varphi_0} (\varphi_0, 0) \right]^2 + \left[ \frac{\partial y}{\partial \varphi_0} (\varphi_0, 0) \right]^2 \right)$$

La relation (7) devient alors :

CLASSIF.

$$(10) \quad \varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial \psi_0} (\varphi_0, 0, t) = \varepsilon [F_1]'_{\varphi_0} (\varphi_0, t) + \varepsilon [F_1]'_t (\varphi_0, t) \cdot K^2 (\varphi_0, 0)$$

ou encore :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \psi_0} (\varphi_0, 0, t) = F'_{\varphi_0} (\varphi_0, t) + K^2 (\varphi_0, 0) \cdot F'_t (\varphi_0, t)$$

Pour déterminer le potentiel complémentaire  $\varepsilon \varphi_1$  on s'est ainsi ramené au cas d'un fluide fictif du plan  $(\varphi_0, \psi_0)$  qui aurait un potentiel des vitesses harmoniques  $\varphi_0 + \varepsilon \varphi_1$ , avec vitesse unité à l'infini. La composante normale  $\varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial \psi_0}$  de la vitesse fictive sur les faces du profil qui cette fois est plat, est donnée par la formule (10) en fonction du potentiel des vitesses en régime permanent qui figure dans  $K^2$ , et de la déformation du profil qui figure par  $F'_{\varphi_0}$  et  $F'_t$ .

On peut remarquer que la transformation conforme considérée conserve la condition de vitesse à l'infini et la condition de Kutta-Joukowski, dans le cas d'un profil à pointe arrière.

La méthode de Küssner appliquée au fluide fictif nous permet d'obtenir son potentiel des vitesses  $\varphi_0 + \varepsilon \varphi_1$ . On pourra alors calculer les efforts aérodynamiques en remarquant toutefois que la pression en un point du fluide réel ne sera pas donnée par la même formule que la pression du fluide fictif au point correspondant. En effet, les formules (2) et (3) nous donnent :

$$p = -\rho \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] \right);$$

$$\text{mais } \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi_0} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi_0} = \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi_0} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \psi_0} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \psi_0} = \frac{\partial \varphi}{\partial \psi_0} \end{cases}$$

$$\text{d'où : } K^2 \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi_0} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \psi_0} \right)^2,$$

et par suite :

$$p = -\rho \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} K^2 \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi_0} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \psi_0} \right)^2 \right] \right) \quad (11)$$

et non pas, comme pour le fluide fictif,

$$p = -\rho \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi_0} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \psi_0} \right)^2 \right] \right)$$

Cherchons maintenant la pression en un point situé sur le profil. Transformons la formule (11) en posant :

$$\varphi = \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 (\varphi_0, \psi_0, t), \quad \psi_0 = \varepsilon F_1 (\varphi_0, t), \quad p = p_0 + \varepsilon p_1.$$

On a alors :

$$K^2 (\varphi_0, \varepsilon F_1 (\varphi_0, t)) \neq K^2 (\varphi_0, 0) + \varepsilon F'_t (\varphi_0, t) \cdot \frac{\partial}{\partial \psi_0} (K^2 (\varphi_0, 0))$$

donc :

$$\frac{1}{K^2} \neq \frac{1}{K^2 (\varphi_0, 0)} \left[ 1 + \varepsilon F_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \psi_0} (K^2 (\varphi_0, 0)) \right]$$

$$\text{et } \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi_0} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \psi_0} \right)^2 \neq \left[ 1 + \varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi_0} (\varphi_0, 0, t) \right]^2 + 1 + 2 \varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi_0} (\varphi_0, 0, t)$$

d'où :

$$p_0 + \varepsilon p_1 (\varphi_0, t) = -\rho \left[ \varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} (\varphi_0, 0, t) + \frac{1}{2} \frac{1}{K^2 (\varphi_0, 0)} \left( 1 + 2 \varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi_0} (\varphi_0, 0, t) - \varepsilon F_1 (\varphi_0, t) \frac{\partial}{\partial \psi_0} (K^2 (\varphi_0, 0)) \right) \right]$$

C'est-à-dire qu'en plus de la pression permanente

$$p_0 = -\frac{\rho}{2} \frac{1}{K^2 (\varphi_0, 0)}$$

on a une pression complémentaire :

$$\varepsilon p_1 = -\rho \left[ \varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi_0} \frac{1}{K^2} - \varepsilon F_1 \frac{\partial K^2}{\partial \psi_0} \right] \quad (12)$$

Ceci nous permet d'obtenir les efforts en intégrant [2] sur le profil réel.

*Remarque.* — La méthode que nous venons d'exposer permet aussi d'étudier l'écoulement permanent autour d'un profil quelconque voisin d'un profil pour lequel on connaît déjà l'écoulement permanent.

La différence entre les deux profils se traduira par une fonction  $\psi_0 = F (\varphi_0) = \varepsilon F_1 (\varphi_0)$  qui, cette fois, sera indépendante de  $t$ .

$$\text{La formule (10) se réduira alors à : } \frac{\partial \varphi}{\partial \psi_0} (\varphi_0, 0) = F'_{\varphi_0}$$

## II. — EXEMPLE D'APPLICATION

Selon une suggestion de M. Maurice Roy, nous allons indiquer comment cette méthode peut être appliquée à un exemple particulier, celui d'un profil Joukowski symétrique avec aileron.

Elle conduit à des calculs assez longs mais ne présentant aucune difficulté particulière.

Le profil s'obtient en faisant subir la transformation conforme  $z = Z + \frac{b^2}{Z}$ , au cercle  $Z = a + (b+a)e^{i\theta}$  du plan des  $Z$ .

Le potentiel complexe uniforme autour du cercle étant :

$$\Phi_0 = \varphi_0 + i \psi_0 = V_0 \left[ Z + a + \frac{(b+a)^2}{Z+a} \right],$$



CLASSIF.

le potentiel complexe autour du profil Joukowski sera déterminé par :

$$(13) \quad \Phi_0 = \varphi_0 + i \psi_0 = V_0 \left( Z + a + \frac{(b+a)^2}{Z+a} \right)$$

avec  $z = Z + \frac{b^2}{Z}$  et  $|Z + a| \geq b + a$

Les relations ci-dessus définissent, on le sait, une correspondance biunivoque entre  $z$  et  $\Phi_0$ .

Au profil Joukowski du plan des  $z$  correspondent : le cercle  $Z = -a + (b+a)e^{i\theta}$  dans le plan des  $Z$  et le segment  $[-2V_0(a+b), +2V_0(a+b)]$  dans le plan des  $\Phi_0$ .

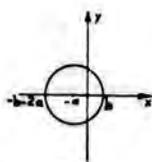


Fig. 3

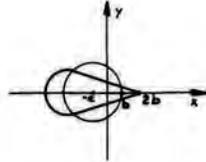


Fig. 4

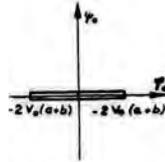


Fig. 5

Nous allons chercher à déterminer la fonction  $\psi_0 = F(\varphi_0, t)$  qui donne le mouvement du fluide fictif pour une vibration harmonique de la partie arrière du profil, correspondant à l'aileron.

Supposons que l'axe de rotation de l'aileron soit situé dans le plan de symétrie du profil, désignons par  $k$  son abscisse et supposons que l'aileron soit soumis à une vibration autour de cet axe d'angle polaire  $\varepsilon = \alpha_1 \cos \omega t$  ( $\varepsilon$  étant encore une petite quantité dont nous négligerons le carré.)

Un point du profil de l'aileron, ayant au repos l'affixe  $z$ , aura pendant la vibration l'affixe

$$z' = k + (z - k) \varepsilon i \alpha_1 \cos \omega t = z + \varepsilon [i \alpha_1 (z - k) \cos \omega t].$$

Nous appellerons  $z_1$  la quantité  $i \alpha_1 (z - k) \cos \omega t$ .

Cherchons à quoi correspond cette vibration dans le plan  $\Phi_0$ .

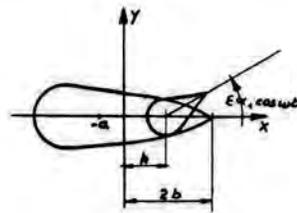


Fig. 6.

Un point du profil, dont l'affixe  $\Phi_0 = \varphi_0$  était réel avant la vibration, vient en

$$\Phi' = \Phi_0 + \varepsilon \Phi_1 = \varphi_0 + \varepsilon (\varphi_1 + i \psi_1) = [\varphi_0 + \varepsilon \varphi_1] + i \psi_1$$

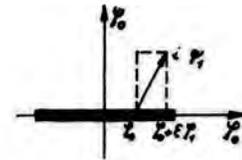


Fig. 7.

Le déplacement oblique  $\varepsilon (\varphi_1 + i \psi_1)$  du point  $\varphi_0$ , peut aussi bien être considéré comme un déplacement vertical  $i \varepsilon \psi_1$  du point  $\varphi_0 + \varepsilon \varphi_1$ . Ainsi, la fonction  $F_1(\varphi_0, t)$  cherchée sera définie par

$$\varepsilon F_1(\varphi_0 + \varepsilon \varphi_1, t) = \varepsilon \psi_1(\varphi_0)$$

Puisque  $\varepsilon \neq 0$  cette relation s'écrira

$$F_1(\varphi_0, t) = \psi_1(\varphi_0).$$

Nous n'avons donc besoin que de calculer  $\psi_1$  en fonction de  $\varphi_0$ .

Faisons ce calcul :

nous avons  $z' = z + \varepsilon z_1$  avec  $z_1 = i \alpha_1 (z - k) \cos \omega t$ .

$$\text{Or, } z = Z + \frac{b^2}{Z}; \text{ nous en tirons } z_1 = Z_1 \left( 1 - \frac{b^2}{Z^2} \right).$$

$$\text{De plus, } \Phi = V_0 \left[ Z + a + \frac{(b+a)^2}{Z+a} \right],$$

d'où  $\Phi_1 = V_0 Z_1 \left[ 1 - \frac{(b+a)^2}{(Z+a)^2} \right]$  ou encore, en remplaçant  $Z_1$ ,  $z_1$  et  $z$  par leurs valeurs ;

$$\Phi_1 = V_0 i \alpha_1 \cos \omega t \left( Z + \frac{b^2}{Z} - k \right) \left( \frac{Z}{Z+a} \right)^2 \left( \frac{Z+b+2a}{Z+b} \right)$$

Mais nous nous plaçons sur le profil, c'est-à-dire pour  $Z = -a + (b+a)e^{i\theta}$  et nous cherchons  $\psi_1$  qui est la partie imaginaire de  $\Phi_1$ , soit :

$$\psi_1 = V_0 \alpha_1 \cos \omega t \Im \left( \left[ Z + \frac{b^2}{Z} - k \right] \left[ \frac{Z}{Z+a} \right]^2 \left[ \frac{Z+b+2a}{Z+b} \right] \right)$$

$Z$  ayant la valeur ci-dessus.

D'où en effectuant le calcul :

$$\psi_1 = \frac{V_0 \alpha_1 \cos \omega t}{a+b} \cdot \frac{A \cos^3 \theta + B \cos^2 \theta + C \cos \theta + D}{a^2 + b^2 + (b^2 - a^2) \cos \theta}$$

$$\text{avec : } A = -2a(a+b)(a^2 + ak + b^2)$$

$$B = 2(a^2 + ab + b^2)(a^2 + ak + b^2)$$

$$C = [2a^2(a+b) - b^3]k + 2[a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4]$$

$$D = a^3(2b-k)(a+b)(a^2 + ab + b^2)(2a+k)$$

mais sur le profil  $\Phi_0 = \varphi_0 = 2V_0(b+a) \cos \theta$

d'où  $\cos \theta = \frac{\varphi_0}{2V_0(b+a)}$  ce qui nous donne bien  $F_1$  en fonction de  $\varphi_0$ .

CLASSIF.

$$(14) \quad F_1(\varphi_0, t) = \cos \omega t \frac{\alpha_1}{4(a+b)^2 V_0} \times \frac{A \varphi_0^3 + 2V_0(b+a) B \varphi_0^2 + 4V_0^2(b+a)^2 C \varphi_0 + 8V_0^3(b+a)^2 D}{2V_0(a^2 + b^2) + (b-a)\varphi_0}$$

Ceci est l'équation de vibration du profil transformé ; la vibration étant limitée à l'aileron, il ne faut considérer que les valeurs de  $\varphi_0$  correspondantes.

Si l'aile et l'aileron se raccordent tangentiellement il est clair que ce seront les valeurs supérieures à la racine de la fonction  $F_1$  comprise entre  $-2V_0(b+a)$  et  $+2V_0(b+a)$ .

Pour les valeurs inférieures, il faudra prendre  $F_1 = 0$ .

Pour  $a = 0$  le profil Joukowski est réduit à son squelette, et l'équation précédente devient :

$$\psi_0 = \varepsilon x_1 \cos \omega t (\varphi_0 - k V_0) \text{ pour } \varphi_0 \geq k V_0$$

ce qui nous donne une déformée constituée par deux segments rectilignes.

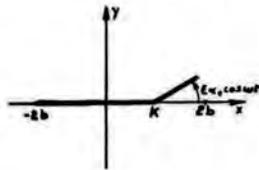


Fig. 8.

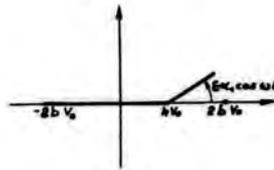


Fig. 9.

Pour avoir une idée de la modification qu'apporte l'épaisseur de l'aile, supposons cette épaisseur faible, et linéarisons autour de  $a = 0$  en posant  $a = \varepsilon a_1$ .

Dans ces conditions, nous obtenons :

$$(15) \quad F_1(\varphi_0, t) = \alpha_1 \cos \omega t \left[ \varphi_0 - k V_0 - \varepsilon a_1 \frac{\varphi_0^3 - 2V_0(k-b)\varphi_0^2 - 2V_0^2 b(k-2b)\varphi_0 + 4V_0^3 b^2(2b+k)}{2V_0 b^2(2V_0 b + \varphi_0)} \right]$$

Le calcul intéressant pour l'application de la méthode de Küssner est celui de  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial \psi_0}$ ; or

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \psi_0}(\varphi_0, 0, t) = [F_1]_{\varphi_0}'(\varphi_0, t) + [F_1]_{\psi_0}'(\varphi_0, t) K^2(\varphi_0, 0)$$

Calculons tout d'abord  $K^2(\varphi_0, 0)$  :  $K^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi_0}\right)^2$  mais  $\frac{dz}{d\Phi_0} = \frac{\partial x}{\partial \varphi_0} + i \frac{\partial y}{\partial \varphi_0}$

$$\text{donc } K^2 = \frac{dz}{d\Phi_0} \cdot \overline{\frac{dz}{d\Phi_0}} \quad \frac{dz}{d\Phi_0} = \frac{dz}{dZ} \times \frac{dZ}{d\Phi_0} = \frac{dz}{dZ} \times \frac{1}{\frac{d\Phi_0}{dZ}} = \frac{1 - \frac{b^2}{Z^2}}{V_0 \left[ 1 - \frac{(b+a)^2}{(2+a)^2} \right]}$$

$$\frac{dz}{d\Phi_0} = \frac{1}{V_0} \left( \frac{Z+a}{Z} \right)^2 \frac{Z+b}{Z+b+2a}$$

Nous nous plaçons sur le profil, c'est-à-dire : pour  $Z = -a + (b+a) e^{i\theta}$  et pour  $\Phi_0 = \varphi_0 = 2V_0(b+a) \cos \theta$

$$\text{donc } \frac{dz}{d\Phi_0} = \frac{1}{V_0} \frac{(b+a)^2 e^{2i\theta}}{[a - (b+a) e^{i\theta}]^2} \frac{b-a + (b+a) e^{i\theta}}{(b+a)(1+e^{i\theta})}$$

$$\text{et } K^2(\varphi_0, 0) = \frac{dz}{d\varphi_0} \times \overline{\frac{dz}{d\varphi_0}} = \frac{1}{V_0^2} \frac{(b+a)^2 [b^2 + a^2 + (b^2 - a^2) \cos \theta]}{[a^2 + (b+a)^2 - 2a(b+a) \cos \theta] [1 + \cos \theta]}$$

$$(16) \quad K^2(\varphi_0, 0) = \frac{(b+a)^2 [2V_0(b^2 + a^2) + \varphi_0(b-a)]}{[V_0 a^2 + V_0(b+a)^2 - a\varphi_0]^2 [2V_0(b+a) + \varphi_0]}$$

En dérivant la formule (14), on obtient sans difficulté  $[F_1]_{\varphi_0}'(\varphi_0, t)$  et  $[F_1]_{\psi_0}'(\varphi_0, t)$ , ce qui nous permet de calculer  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial \psi_0}(\varphi_0, 0, t)$  à l'aide de la formule (10).

CLASSIF.

Si on désire simplement avoir un terme de correction d'épaisseur, on linéarise les formules précédentes en supposant  $a$  petit.

Si l'on pose  $a = \varepsilon a_1$ , on obtient :

$$(17) \quad \begin{aligned} K^2(\varphi_0, 0) &= \frac{1}{V_0^2} + 2\varepsilon a_1 \frac{\varphi_0 - V_0 b}{V_0^3 b^2} \\ [F_1]_{\varphi_0}'(\varphi_0, t) &= \alpha_1 \cos \omega t \left[ 1 - \varepsilon a_1 \frac{\varphi_0^3 + (4b-k)V_0 \varphi_0^2 - 4b V_0^2 (k-b) \varphi_0 - 4 V_0^3 b^2 k}{V_0 b^2 (2 V_0 b + \varphi_0)^2} \right] \\ [F_1]_t'(\varphi_0, t) &= -\omega \alpha_1 \sin \omega t \left[ \varphi_0 - k V_0 - \varepsilon a_1 \frac{\varphi_0^3 - 2V_0(k-b)\varphi_0^2 - 2V_0^2 b(k-2b)\varphi_0 + 4V_0^3 b^2 (2b+k)}{2 V_0 b^2 (2 V_0 b + \varphi_0)} \right] \\ \text{d'où } \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi_0}(\varphi_0, 0, t) &= [F_1]_{\varphi_0}'(\varphi_0, t) + [F_1]_t'(\varphi_0, t) \cdot K^2(\varphi_0, 0) \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant calculer la pression par la formule (12) en posant toujours  $a = \varepsilon a_1$ . Le calcul exact pour une épaisseur plus forte est faisable aussi, quoique plus long.

Nous partons de la formule (12) que l'on peut écrire :

$$-\frac{p_1}{\rho} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi_0} \cdot \frac{1}{K^2} - F_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial K^2}{\partial \varphi_0} \quad \text{ces quantités étant prises sur le profil.}$$

Il nous faut en particulier calculer  $\frac{\partial K^2}{\partial \varphi_0}$  sur le profil :  $K^2 = \frac{dz}{d\Phi_0} \cdot \frac{d\bar{z}}{d\Phi_0}$

$$\frac{\partial K^2}{\partial \varphi_0} = \frac{\partial}{\partial \varphi_0} \left( \frac{dz}{d\Phi_0} \right) \cdot \frac{d\bar{z}}{d\Phi_0} + \frac{dz}{d\Phi_0} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi_0} \left( \frac{d\bar{z}}{d\Phi_0} \right) = \frac{\partial}{\partial \varphi_0} \left( \frac{dz}{d\Phi_0} \right) \cdot \frac{d\bar{z}}{d\Phi_0} + \frac{dz}{d\Phi_0} \frac{\partial}{\partial \varphi_0} \left( \frac{d\bar{z}}{d\Phi_0} \right)$$

puisque  $\varphi_0$  est réel ; mais  $\Phi_0 = \varphi_0 + i \psi_0$  donc

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_0} = i \frac{d}{d\Phi_0} \quad \text{et} \quad \frac{\partial K^2}{\partial \varphi_0} = i \frac{d^2 z}{d\Phi_0^2} \cdot \frac{d\bar{z}}{d\Phi_0} + \frac{dz}{d\Phi_0} \cdot i \frac{d^2 \bar{z}}{d\Phi_0^2} = i \left[ \frac{d^2 z}{d\Phi_0^2} \cdot \frac{d\bar{z}}{d\Phi_0} - \frac{dz}{d\Phi_0} \cdot \frac{d^2 \bar{z}}{d\Phi_0^2} \right]$$

quantité qui est bien réelle, ainsi que l'on peut s'en assurer en prenant la transposée.

Le calcul, analogue à celui de  $K^2$ , donne d'abord :  $\frac{d^2 z}{d\Phi_0^2} = \frac{-2a[Z(2b+a) + b(2a+b)](Z+a)^2}{V_0^2(Z-b)Z^3(Z+b+2a)^2}$

comme sur le profil  $z = -a + (b+a)e^{i\theta}$ , on obtient :

$$\frac{\partial K^2}{\partial \varphi_0} = \frac{a(a+b)[2(a+b)(b^2-a^2)\cos^2\theta + 2(a+b)(2a^2+b^2)\cos\theta - (2a^3+2a^2b+4ab^2+b^3)]}{V_0^2 \sin^3\theta (1+\cos\theta)[a^2+(b+a)^2-2a(b+a)\cos\theta]^2}$$

soit, puisqu'alors  $\Phi_0 = \varphi_0 = 2V_0(b+a)\cos\theta$ ,

$$\frac{\partial K^2}{\partial \varphi_0} = \frac{2a(a+b)^2[(b-a)\varphi_0^2 + 2V_0(2a^2+b^2)\varphi_0 - 2V_0^2(2a^3+2a^2b+4ab^2+b^3)]}{\gamma_1 \sqrt{4V_0^2(b+a)^2 - \varphi_0^2} \times [2V_0(b+a) + \varphi_0] [V_0(2a^2+2ab+b^2) - a\varphi_0]^2}$$

$\gamma_1$  étant égal à  $+1$  ou  $-1$  suivant la face considérée.

Si on linéarise en posant  $a = \varepsilon a_1$ , il vient :

$$\frac{\partial K^2}{\partial \varphi_0} = \frac{2\varepsilon a_1}{V_0^3 b^2} \cdot \frac{\varphi_0^2 + 2V_0 b \varphi_0 - 2V_0^2 b^2}{\gamma_1 \sqrt{4V_0^2 b^2 - \varphi_0^2} \times (2V_0 b + \varphi_0)} \cdot \alpha_1 \cos \omega t (\varphi_0 - k V_0)$$

$$\text{d'où } F_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial K^2}{\partial \varphi_0} = -\varepsilon a_1 \frac{V_0}{b^2} \frac{\varphi_0^2 + 2V_0 b \varphi_0 - 2V_0^2 b^2}{\gamma_1 \sqrt{4V_0^2 b^2 - \varphi_0^2} \times (2V_0 b + \varphi_0)} \cdot \alpha_1 \cos \omega t (\varphi_0 - k V_0)$$

mais nous avons aussi  $\varphi_1 = \varphi_{10} + \varepsilon \varphi_{11}$

$$\text{et } \frac{1}{K^2} = \frac{1}{\frac{1}{V_0^2} + 2\varepsilon a_1 \frac{\varphi_0 - V_0 b}{V_0^3 b^2}} = V_0^2 \left( 1 - 2\varepsilon a_1 \frac{\varphi_0 - V_0 b}{V_0 b^2} \right)$$

CLASSIF.

Finalement, nous pouvons écrire :

$$(18) \quad - \frac{p_1}{\rho} = A + \varepsilon B + \varepsilon C + \varepsilon D, \text{ avec } A = \frac{\partial \varphi_{10}}{\partial l} + \frac{\partial \varphi_{10}}{\partial \varphi_0} V_0^2$$

$$B = \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial l} + \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \varphi_0} V_0^2$$

$$C = -2 a_1 \frac{V_0}{b^2} (\varphi_0 - V_0 b) \frac{\partial \varphi_{10}}{\partial \varphi_0}$$

$$D = a_1 \frac{V_0}{b^2} \frac{\varphi_0^2 + 2 V_0 b \varphi_0 - 2 V_0^2 b^2}{\eta \sqrt{4 V_0^2 b^2 - \varphi_0^2} \times (2 V_0 b + \varphi_0)} \cdot x_1 \cos \omega t (\varphi_0 - k V_0)$$

ou bien encore :

$$- \frac{p_1}{\rho} \neq \frac{\partial \varphi_1}{\partial l} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi_0} V_0^2 - 2 \frac{\alpha V_0}{b^2} (\varphi_0 - V_0 b) \frac{\partial \varphi_{10}}{\partial \varphi_0}$$

$$+ \frac{\alpha V_0}{b^2} \frac{\varphi_0^2 + 2 V_0 b \varphi_0 - 2 V_0^2 b^2}{\eta \sqrt{4 V_0^2 b^2 - \varphi_0^2} \times (2 V_0 b + \varphi_0)} \cdot x_1 \cos \omega t (\varphi_0 - k V_0)$$

Pour calculer cette expression à l'aide de la méthode de Küssner sous sa forme classique, nous devons prendre  $2 b V_0$  comme unité de longueur [2].

$A = \frac{\partial \varphi_{10}}{\partial l} + \frac{\partial \varphi_{10}}{\partial \varphi_0} V_0^2$  est alors la pression obtenue par la méthode de Küssner en prenant le terme sans  $\varepsilon$  dans l'expression de  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial \psi_0}$  donnée par les équations (17), soit :

$$\frac{\partial \varphi_{10}}{\partial \psi_0} (\varphi_0, 0, t) = x_1 \cos \omega t - \omega x_1 \sin \omega t \frac{(\varphi_0 - k V_0)}{V_0^2}$$

la méthode de Küssner nous donne aussi  $\frac{\partial \varphi_{10}}{\partial \varphi_0}$  seul, qui nous permet de calculer C.

$B = \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial l} + \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \varphi_0} V_0^2$  est, de même, la pression

obtenue par la méthode de Küssner en prenant seulement le terme en  $\varepsilon$  dans l'expression de

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \psi_0} = \frac{\partial \varphi_{10}}{\partial \psi_0} + \varepsilon \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \psi_0} \text{ donnée par les équations (17).}$$

Enfin D, qui ne dépend que de la transformation conforme, est déjà tout calculé.

Nous avons ainsi la pression complémentaire et, en revenant au profil réel et en intégrant sur ce profil, nous obtenons les forces et les moments [2].

Si on remarque qu'en faisant  $k$  infini dans les formules précédentes, on obtient la translation verticale d'ensemble du profil, on pourra en superposant les trois mouvements suivants :

- 1° Translation d'ensemble du profil,
  - 2° Rotation d'ensemble du profil,
  - 3° Rotation de l'aileron seul,
- étudier la vibration la plus générale du profil avec aileron.

*L'essentiel de la méthode qui vient d'être exposée a fait l'objet d'une communication à l'Académie des Sciences (Séance du 22 mai 1950).*

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] KUSSNER. — *Oscillations d'ailes d'avions*. Luftfahrtforschung, 1929.
- [2] J. DORR. — *Détermination des forces aérodynamiques instationnaires*. (Méthode Betz-L. Schwartz et méthode Küssner.) Publication O. N. E. R. A., n° 9.
- [3] R. MAZET et J. DORR. — *Détermination par le calcul et par essais en soufflerie des vitesses critiques de vibrations d'une maquette rigide de profil constant, montée sur ressorts*. Publication O. N. E. R. A., n° 39.
- [4] G. COUCHET. — *Les mouvements plans non stationnaires à circulation constante et les mouvements infiniment voisins*. Publication O. N. E. R. A., n° 31.

REVUE DOCUMENTAIRE « DOCAÉRO »

Sommaire du N° 4 (Juillet 1990)

*Quelques nouveaux détails sur l'avion Leduc.*

*De quelques accéléromètres, par J. Besson et E. Leygue.*

*Les aciers inoxydables, par H. Fournier.*

*Antennes radio pour avions rapides, par B. Boselli.*

*Les bois améliorés dans la construction aéronautique, par G. Bruner.*

*Revue des conférences de Sir Frederick Handley-Page et de l'ingénieur René Dorand, par Edmond Blanc.*

*Revue bibliographique : les diagrammes thermodynamiques, par G. Gourdet et A. Proust.*

84 pages, 83 figures, 10 tableaux.

PUBLICATIONS SCIENTIFIQUES ET TECHNIQUES DE L'AIR

Série grise n° 242.

**ÉQUATIONS INTÉGRALES ET TRANSFORMATION DE LAPLACE, par Maurice PARODI, préface de M. Henri VILLAT.**

**I. Propriétés fondamentales de la transformation de Laplace.**

Propriétés fondamentales de l'image d'une fonction. Inversion de la transformation de Laplace. Unicité de l'original d'une fonction image. Règles fondamentales du calcul symbolique. Représentation symbolique de quelques fonctions usuelles.

**II. Premier type d'équations intégrales à limites fixes résolubles par le calcul symbolique.**

Forme du noyau; méthode générale de résolution. Équations de seconde espèce où  $\psi(s)$  est une fonction périodique du second ordre ou une fonction périodique d'ordre  $n$ . Équations intégrodifférentielles. Équations homogènes. Étude particulière des équations de première espèce. Résolution d'équations de première espèce par l'emploi de deux transformations de Laplace successives. Étude de quelques équations intégrales dont le noyau contient la fonction  $v(t)$ .

**III. Équations du type**

$$f(t) + \lambda \int_a^b K(x) f(\mu(x) + t) dx = g(t),$$

$$\int_a^b K(\mu(x) + t) f(x) dx = g(t).$$

**IV. Séquences symboliques et équations intégrales.**

Application à la résolution d'équations intégrales. Équations dont le noyau renferme la fonction  $K$  de Bessel ou la fonction  $\Gamma$ .

**V. Étude de quelques équations intégrales construites à partir d'équations fonctionnelles.**

Équations dont le noyau renferme les polygones d'Hermite. Équations homogènes déduites d'équations fonctionnelles se ramenant au type de Schroder. Sur quelques relations satisfaites par des transcendentes. Équations intégrales déduites d'équations fonctionnelles du type d'Ozumi.