CLASSIF.

THÉORIE DES ERREURS EN CALCUL MATRICIEL

Conférence faite le 16 Mars 1950 à l'Institut Henri Poincaré devant le Groupe de Calcul Numérique de la Sorbonne.

par

J.-M. SOURIAU

Rédigée en collaboration avec

R. BONNARD

SOMMAIRE

On sait que les problèmes techniques linéaires, ou linéarisés, sont traités avantageusement par les méthodes du calcul matriciel, surtout lorsqu'on se trouve en présence d'un grand nombre de paramètres. C'est justement cette multiplicité de paramètres qui pose avec acuité le problème des calculs d'erreurs. Nous indiquons deux méthodes pour parvenir à ce but.

Dans la première partie, nous montrons comment deux théories, celle de la linéarisation et celle des normes, permettent d'obtenir des majorations des erreurs sur le résultat d'une suite de calculs matriciels. Comme application, nous nous limiterons à deux problèmes-clés : inversion et décomposition spectrale.

Dans la deuxième partie nous envisageons le problème d'un point de vue probabiliste en introduisant la notion de colonnes floues et de tenseur fluctuation. Cette méthode nous permet de résoudre complètement le problème du calcul des erreurs quadratiques moyennes sur des quantités obtenues à partir de résultats expérimentaux.

Les notations matricielles utilisées sont celles de la référence bibliographique [I]. *Pour plus de détails sur la méthode de linéarisation utilisée, le lecteur se reportera à* [II] *et* [III].

PREMIÈRE PARTIE

1.1. — Erreur sur l'inverse d'une matrice.

1.1.1 - *Linéarisation.*

Considérons une matrice carrée régulière A, résultat de certaines mesures. Soit A+B la matrice exacte.

Le problème préliminaire que nous nous posons consiste à exprimer en fonction de A et B l'erreur que l'on commet en prenant A^{-1} pour inverse de la matrice exacte A+B. Nous supposerons essentiellement que B est petit ; ce qui nous permettra de linéariser le problème. Pour cela [1] nous remplacerons B par ε B, ε étant un symbole qu'on traitera comme un nombre, mais dont on remplacera le carré par zéro. Dans ces conditions, on pourra poser :

$$[A + \varepsilon B]^{-1} = C + \varepsilon C_1$$

d'où :

$$\underline{1} = [C + \varepsilon C_1]\,[A + \varepsilon B] = C.A + \varepsilon\,[C_1 A + CB]$$

ce qui entraîne : $\begin{cases} \underline{1} = C.A \\ \underline{0} = C_1 A + CB \end{cases}$

ou enfin $\begin{cases} C = A^{-1} \\ C_1 = - A^{-1}B.A^{-1} \end{cases}$

on a donc :

$[A + B]^{-1} = A^{-1} - A^{-1}BA^{-1}$ dès que B est petit.

L'erreur cherchée vaut donc :

$$\boxed{- A^{-1}BA^{-1}} \qquad (1)$$

CLASSIF.

1.2. — Majoration.

En fait la matrice B est inconnue, sans cela on inverserait directement A+B. Mais nous supposons que nous connaissons une certaine majoration de l'erreur, c'est-à-dire une « majoration » de la matrice B. Pour donner un sens précis à cette expression, nous sommes obligés d'introduire la théorie mathématique des *normes* dont nous allons dire quelques mots.

1.2.1 - *Norme d'une colonne.*

Etant donnée une colonne X, on appellera norme de X et on notera $|X|$, la quantité non négative

$$|X| = \sqrt{\bar{X}X} \tag{2}$$

$\bar{X}$ étant la ligne transposée de X, le produit $\bar{X}X$ est un nombre non négatif.

1.2.2 - *Inégalité de Schwarz.*

Si Y est une colonne de même ordre que X et λ un nombre réel, $X+Y\lambda$ est une colonne dont le carré de la norme vaut :

$$\begin{aligned} |X + Y\lambda|^2 &= [\bar{X} + \bar{Y}\lambda][X + Y\lambda] \\ &= \bar{X}X + 2\bar{X}Y\lambda + \bar{Y}Y\lambda^2 \end{aligned}$$

Or, le trinôme du second degré est toujours positif, ainsi que le coefficient de λ^2. Donc, le discriminant de ce trinôme n'est jamais positif et, par conséquent

$$\boxed{|\bar{X}Y| \leqslant |X| \,.\, |Y|} \tag{3}$$

Cette inégalité est connue sous le nom d'inégalité de Schwarz.

1.2.3 - *Inégalité triangulaire.*

En faisant $\lambda = 1$ dans l'expression de $|X + Y\lambda|^2$ on a :

$$\begin{aligned} |X + Y|^2 &= \bar{X}X + \bar{Y}Y + 2\bar{X}Y \\ &= |X|^2 + |Y|^2 + 2\bar{X}Y \leqslant |X|^2 + |Y|^2 + 2|\bar{X}Y|, \end{aligned}$$

puisque $\bar{X}Y \leqslant |\bar{X}Y|$. Mais en vertu de l'inégalité de Schwarz, on a :

$$\begin{aligned} |X|^2 + |Y|^2 + 2|\bar{X}Y| &\leqslant |X|^2 \\ + |Y|^2 + 2|X|.|Y| &= [|X| + |Y|]^2 \end{aligned}$$

et par suite :

$$\boxed{|X + Y| \leqslant |X| + |Y|} \tag{4}$$

1.2.4 - *Norme d'un opérateur linéaire.*

Soit A un opérateur linéaire défini sur les colonnes, et X une colonne quelconque du domaine de définition de A.

Nous appellerons encore norme de A et nous noterons $|A|$, *la borne supérieure exacte* du quotient

$$\frac{|A(X)|}{|X|}$$

pour toutes les valeurs possibles de X.

Nous écrirons :

$$\boxed{|A| = \sup. \frac{|A(X)|}{|X|}} \tag{5}$$

1.2.5 - *Extension de l'inégalité triangulaire.*

Soit A' un opérateur linéaire ayant même domaine de définition que A. On a alors :

$$\begin{aligned} |A+A'| = \sup. \frac{|[A+A'](X)|}{|X|} &= \sup. \frac{|A(X)+A'(X)|}{|X|} \\ &\leqslant \sup. \frac{|A(X)|}{|X|} + \sup. \frac{|A'(X)|}{|X|} \end{aligned}$$

ce qui entraîne l'inégalité triangulaire :

$$\boxed{|A + A'| \leqslant |A| + |A'|} \tag{6}$$

qui est donc valable pour les opérateurs linéaires comme pour les colonnes.

1.2.6 - *Inégalité du produit.*

Remarquons que d'après la définition même de la norme de A, on a :

$$|A| \geqslant \frac{|A(X)|}{|X|}$$

ou encore : $|A(X)| \leqslant |A| \,.\, |X|$

Mais si A' est un opérateur linéaire défini sur les colonnes, et tel que A' (X) appartienne au domaine de définition de A, on peut écrire :

$$|A(A'(X))| \leqslant |A| \,.\, |A'(X)| \leqslant |A| \,.\, |A'| \,.\, |X|$$

et comme $A(A'(X)) = [A \,.\, A'](X)$ par définition du produit AA', il vient :

$$\frac{|[A \,.\, A'](X)|}{|X|} \leqslant |A| \,.\, |A'|$$

ce qui entraîne nécessairement que

$$\sup. \frac{|[AA'](X)|}{|X|} \leqslant |A| \,.\, |A'|$$

ou encore :

$$\boxed{|AA'| \leqslant |A| \,.\, |A'|} \tag{7}$$

1.2.7 - Faisons enfin la remarque suivante : l'inégalité de Schwarz qui s'écrit :

$$|\bar{X}Y| \leqslant |X|\,|Y|$$

peut encore s'écrire : $\dfrac{|\bar{X}(Y)|}{|Y|} \leqslant |X|$

ou encore : $|\bar{X}| \leqslant |X|$

en faisant $Y=X$, on voit que $\dfrac{|\bar{X}(Y)|}{|Y|}$ peut effectivement prendre la valeur $|X|$, et par suite :

CLASSIF.

$$\boxed{|\bar{X}| = |X|} \tag{8}$$

Il en résulte que si A est un opérateur linéaire, on a :

$$\frac{|\bar{A}X|}{|X|} = \frac{|\bar{X}A|}{|X|} \leqslant \frac{|\bar{X}|\,|A|}{|X|} = |A|$$

et que par conséquent : $|\bar{A}| \leqslant |A|$

Comme $|A| = |\bar{\bar{A}}| \leqslant |\bar{A}|$ pour la même raison,

il vient : $$\boxed{|\bar{A}| = |A|} \tag{9}$$

Signalons enfin que cette théorie s'applique sans changement au cas particulier des opérateurs multilinéaires. Ainsi, le spineur fondamental δ (Cf. I) ayant une norme égale à 1, on a :

$$|\delta\,(X_1)(X_2)\dots\;(X_n)| \leqslant |X_1|\;|X_2|\dots|X_n| \tag{10}$$

Ceci entraîne comme conséquence, par exemple, qu'un déterminant, est, en valeur absolue, au plus égal au produit des normes de ses colonnes, et des relations nombreuses, telles que :

$$|A^{-1}| \leqslant \frac{|A|^{n-1}}{|\text{dét}\,(A)|} \tag{11}$$

1.2.8 - *Application aux matrices.*

Tout ce qui précède s'applique évidemment aux matrices puisque ce sont des opérateurs linéaires.

Soit une matrice A. On sait (Cf. I) qu'un quelconque de ses éléments s'écrit :

$$a_{ij} = \bar{E}_i\; A\; E_j,$$

l'inégalité du produit donne donc :

$$|a_{ij}| = |\bar{E}_i\; A\, E_j| \leqslant |\bar{E}_i|\;|A|\;|E_j| = |A|$$

> Tous les éléments d'une matrice sont en valeur absolue inférieurs à la norme de cette matrice :
>
> $$|a_{ij}| \leqslant |A| \tag{12}$$

On voit comment la norme de A peut être considérée comme une majoration de A.

Nous allons maintenant montrer que si on a une majoration de chaque élément de la matrice, on pourra inversement en déduire une majoration de sa norme. Remarquons à cet effet que :

Si M est une matrice semi-positive [1], la matrice $AM\bar{A}$ l'est également, A étant une matrice. Il est aisé de s'en assurer. Dans ce cas, sa trace, que nous désignons par $T\,(A\;M\;\bar{A})$, est positive ou nulle.

Appliquons ceci à la matrice $M = \underline{\bar{X}X} - X\bar{X}$, X étant une colonne du domaine de définition de A. Cette matrice est semi-positive [2], et par conséquent :

$$T\,(A\;.\;\underline{\bar{X}\,X}\;.\;\bar{A}) \geqslant T\,(A\;X\bar{X}\;\bar{A})$$

ou : $$\bar{X}\,X\,.\,T\,(\bar{A}A) \geqslant \bar{X}\;\bar{A}A\;X$$

c'est-à-dire : $$\frac{\bar{X}\;\bar{A}A\;X}{\bar{X}X} \leqslant T\,(\bar{A}\,A)$$

ce qui entraîne nécessairement que :

$$\text{sup.}\;\frac{\bar{X}\;\bar{A}A\;X}{\bar{X}X} = \text{sup.}\;\left(\frac{|A\,(X)|}{|X|}\right)^2 \leqslant T\,(\bar{A}A)$$

On a donc :

$$\boxed{|A| \leqslant \sqrt{T\,(\bar{A}\;A)}} \tag{13}$$

L'expression $T\,(\bar{A}A)$ est égale à la somme des carrés de tous les éléments de la matrice A. On obtient donc ainsi une majoration facile à calculer de $|A|$, qui est bien suffisante souvent dans la pratique. Par exemple, si tous les termes de A sont en valeur absolue inférieurs à un même nombre α on a

$$T\,(\bar{A}\;A) \leqslant n^2\,\alpha^2$$

d'où : $|A| \leqslant n\,\alpha$

Signalons cependant que la valeur exacte de $|A|$ est calculable. C'est la racine carrée de la plus grande valeur propre de $\bar{A}A$.

1.3. — Majoration de l'erreur sur l'inverse.

1.3.1 - Nous allons maintenant utiliser ce qui précède pour majorer l'erreur sur l'inverse de la matrice A en fonction d'une majoration de la *norme* de l'erreur sur A.

En effet, on a au second ordre près :

$$|[A+B]^{-1} - A^{-1}| = |A^{-1}\;B\;A^{-1}| \leqslant |A^{-1}|^2\;|B| \tag{14}$$

d'après l'inégalité du produit ; donc, si la norme de B est inférieure ou égale à β, il suffira, après le calcul de A^{-1}, de calculer $k = |A^{-1}|^2$ (on peut la majorer par la formule $|A^{-1}|^2 \leqslant T\,(\bar{A}^{-1}\;A^{-1})$ et on saura que l'erreur sur tous les termes de l'inverse est inférieure à $k\,\beta$.

1.3.2 - *Majoration exacte.*

La majoration que nous venons de donner, n'est qu'une approximation du fait de la linéarisation. Dans la plupart des cas, il ne sera pas nécessaire d'en chercher une meilleure, car la linéarisation ne cesse d'être justifiée que si l'erreur devient trop grande, mais dans ce cas, les calculs d'erreurs perdent de leur intérêt.

Toutefois, nous pouvons donner pour le problème qui nous occupe, une majoration exacte.

(1) Ceci signifie que $M = \bar{M}$ et que $\bar{X}MX \geqslant O$ quel que soit X.

(2) Ceci signifie que $\bar{Y}\,(\underline{\bar{X}X} - X\bar{X})\;Y\;O \geqslant$ quel que soit Y.

Or, $\bar{Y}\,(\underline{\bar{X}X} - X\bar{X})\,Y = \bar{Y}\,\underline{\bar{X}X}\,Y - \bar{Y}X\bar{X}\,Y = \bar{X}X\;\bar{Y}Y - (\bar{Y}\,X)^2 = |X|^2\,|Y|^2 - (\bar{Y}\,X)^2$

expression qui est bien positive ou nulle d'après l'inégalité de Schwarz.

CLASSIF.

On sait, en effet, qu'étant donnée une matrice M, telle que $|M| < 1$ la série :

$$1 - M + M^2 - M^3 + \dots \qquad + (-1)^n M^n + \dots$$

converge et a pour somme $(1 + M)^{-1}$. Appliquons ceci à la matrice exacte $[A + B]$, A étant toujours la matrice mesurée ; on a :

$$[A + B]^{-1} = A^{-1} [1 + B A^{-1}]^{-1} \quad \text{et si } |B A^{-1}| < 1$$

$$[A + B]^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B A^{-1} + A^{-1} [B A^{-1}]^2 + \dots + (-1)^p A^{-1} [B A^{-1}]^p + \dots$$

L'erreur sur l'inverse est donc donnée par :

$$|[A + B]^{-1} - A^{-1}| = |A^{-1}BA^{-1} - A^{-1} [B A^{-1}]^2 + \dots + (-1)^p A^{-1} [B A^{-1}]^p + \dots|$$

$$\leqslant |A^{-1}| (|BA^{-1}| + |BA^{-1}|^2 + \dots\dots + |B A^{-1}|^p + \dots)$$

$$\leqslant |A^{-1}| \cdot \frac{|BA^{-1}|}{1 - |B A^{-1}|}$$

et par conséquent :

$$\boxed{|[A + B]^{-1} - A^{-1}| \leqslant \frac{|A^{-1}|^2 . |B|}{1 - |B| . |A^{-1}|}} \qquad (15)$$

1.3.3 - *Application numérique.*

Comme application de ce qui précède, résolvons le problème suivant. Etant donnée la matrice A :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \\ 4 & 5 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{dont l'inverse est :}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{33} \begin{bmatrix} 16 & -11 & -1 \\ -11 & -11 & 11 \\ -1 & 11 & -2 \end{bmatrix}$$

Avec quelle précision α faut-il mesurer chacun des éléments de A, supposés tous connus avec *la même précision*, pour être sûr que l'erreur sur chacun des éléments de A^{-1} est inférieure à γ.

En gardant les mêmes notations que précédemment, on aura :

$$\beta = |B| \leqslant 3\,\alpha \text{ et } |A^{-1}|^2 \leqslant T\,(\overline{A}^{-1} A^{-1}) = \frac{289}{363} \;\#\; 0{,}8$$

On aura par conséquent :

$$|[A + B]^{-1} - A^{-1}| \leqslant 0{,}8\,\beta \leqslant 2{,}4\,\alpha$$

le résultat escompté sera obtenu si $2{,}4\,\alpha = \gamma$

d'où : $\alpha = 0{,}416\,\gamma$

par exemple, pour être sûr que tous les termes de A^{-1} soient définis à 0,1 près en valeur relative, il faut prendre :

$$\gamma = \frac{1}{33} \times 0{,}1 \quad \text{d'où } \alpha = 0{,}416 \frac{0{,}1}{33} = 0{,}0013$$

Ces majorations conduisent souvent à exiger des données initiales une précision impossible à obtenir pour avoir le résultat final avec une précision honnête. ceci est d'autant plus marqué que l'ordre des matrices considérées est élevé.

Cependant, on se rend compte intuitivement que toutes les erreurs ne jouent pas dans le même sens : il se produit une certaine compensation au hasard, et ceci conduit à introduire le calcul des probabilités, ce que nous ferons dans la deuxième partie de cet exposé.

1.4. — Erreur sur les valeurs propres d'une matrice.

Nous allons au préalable traiter dans le même esprit que précédemment, les calculs d'erreurs sur la seconde opération fondamentale du calcul matriciel : la recherche des valeurs propres.

Le problème est le suivant : étant donnée une matrice A « mesurée » avec une certaine précision, quelle erreur commet-on en prenant pour valeurs propres de la matrice exacte A+B, celles de la matrice A.

Pour répondre à cette question, nous suivrons le même plan que précédemment.

1.4.1 - *Linéarisation.*

Soit λ une valeur propre de la matrice A, X et Y les modes à droite et à gauche correspondants. On sait que l'on aura les deux relations :

$$A\,X = X\,\lambda \quad (16) \qquad \overline{Y}A = \lambda\,\overline{Y} \quad (17)$$

Soit $\lambda + \lambda_1$ la valeur propre de la matrice exacte $A + B$; $X + X_1$ et $\overline{Y + Y_1}$ les modes à droite et à gauche de cette matrice.

Nous admettons que $\lambda + \lambda_1$, $X + X_1$ et $Y + Y_1$ sont voisins de λ, X et Y, ce qui nous autorisera à linéariser le problème. Nous remplacerons donc λ_1, X_1, Y_1 par $\varepsilon\lambda_1$, εX_1, εY_1 :

On aura donc :

$$(A + \varepsilon B)\,(X + \varepsilon X_1) = (X + \varepsilon X_1)\,(\lambda + \varepsilon \lambda_1)$$

c'est-à-dire en développant :

$$A\,X + (A\,X_1 + B\,X)\,\varepsilon = X\,\lambda + (X_1\,\lambda + X\,\lambda_1)\,\varepsilon$$

qui entraîne :

$$A\,X_1 + B\,X = X_1\,\lambda + X\,\lambda_1 \qquad (18)$$

en vertu de (16).

En multipliant à gauche (18) par $\overline{Y}$, et compte tenu de (17), il vient :

$$\boxed{\lambda_1 = \frac{\overline{Y}\,B\,X}{\overline{Y}X}} \qquad (19)$$

qui représente l'erreur cherchée.

1.4.2 - *Majoration.*

Pour majorer cette erreur, en supposant connue la norme de B, il suffit d'écrire :

$$|\lambda_1| = \left| \frac{\overline{Y}\,B\,X}{\overline{Y}X} \right| = \frac{|\overline{Y}\,B\,X|}{|\overline{Y}\,X|}$$

CLASSIF.

donc :

$$|\lambda_1| \leqslant \frac{|\overline{Y}|\,|X|}{|\overline{Y}X|}\,|B| \qquad (20)$$

1.4.3 - *Cas des matrices hermitiennes.*

Si A est hermitienne ($A = \overline{A}$), on sait que le mode à gauche est le transposé du mode à droite $\overline{Y} = \overline{X}$. Par conséquent, l'erreur sur la valeur propre λ, prend la forme :

$$\lambda_1 = \frac{\overline{X}BX}{\overline{X}X}$$

et l'on a : $|\lambda_1| \leqslant \dfrac{|\overline{X}|\,|B|\,|X|}{\overline{X}X} = |B|\,\dfrac{|X|^2}{|X|^2}$

On a donc cette relation intéressante, valable seulement dans le cas où A est hermitienne :

$$\boxed{|\lambda_1| \leqslant |B|} \qquad (21)$$

CONCLUSION

On voit donc que la théorie des normes permet d'obtenir très rapidement une majoration de l'erreur, mais que cette majoration risque souvent d'être trop large.

DEUXIÈME PARTIE

CALCUL PROBABILISTE

2.1. — Introduction. Colonnes floues.

Nous allons d'abord rappeler quelques résultats essentiels du calcul des probabilités, définir ce que nous entendrons par nombre et colonne flous, et nous appliquerons ces notions aux problèmes qui nous occupent. Considérons la mesure d'une quantité scalaire x ; lorsqu'on dit que cette mesure se fait avec une précision α, on peut entendre, comme nous l'avons fait jusqu'à présent, que l'erreur est en valeur absolue inférieure à α ; mais il semble plus conforme à la réalité d'admettre que l'erreur n'est pas bornée en valeur absolue par α, mais que c'est un nombre aléatoire, dont l'erreur quadratique moyenne sera α ou un nombre du même ordre de grandeur.

Rappelons que par définition, un nombre aléatoire x est un nombre qui peut prendre plusieurs valeurs x_1, x_2..., chacun d'eux étant affecté d'une probabilité p_1, p_2....

Une de ces éventualités ayant nécessairement lieu, on a :

$$\Sigma\, p_i = 1$$

La valeur moyenne de ce nombre aléatoire sera par définition :

$$\frac{\Sigma\, x_i\, p_i}{\Sigma\, p_i}$$

ou simplement : $\Sigma\, x_i\, p_i$

nous la désignerons par $\{x\}$. L'erreur du nombre aléatoire est par définition la différence entre ce nombre aléatoire et sa valeur moyenne, soit :

$$x - \{x\}$$

La valeur moyenne du carré de l'erreur :

$$\left\{\left[x - \{x\}\right]^2\right\}$$

s'appelle la *fluctuation* et sa racine carrée est l'*erreur quadratique moyenne.*

Par définition, nous appellerons nombre flou, un nombre aléatoire dont nous supposerons l'erreur infiniment petite, soit, conformément à [III], dont les valeurs possibles sont de la forme $x_0 + \varepsilon\, y_i$. D'autre part, puisque x_0 est la valeur moyenne du nombre aléatoire x, on a :

$$\Sigma\,(x_0 + \varepsilon\, y_i)\, p_i = x_0 \qquad \text{d'où} \quad \Sigma\, y_i\, p_i = 0$$

Nous supposerons enfin que nous connaissons seulement la fluctuation de x, c'est-à-dire la valeur moyenne de y_i^2 :

$$\varphi = \Sigma\, y_i^2\, p_i = \{y^2\}$$

L'avantage de ce concept pour le calcul d'erreur est le suivant : si f est une fonction dérivable et si x un nombre flou, f (x) est aussi un nombre flou.

En effet, les valeurs possibles de f (x) sont :

$$f\,(x_0 + \varepsilon\, y_i) = f\,(x_0) + \varepsilon\, f'(x_0)\, y_i$$

et on constate bien que $f(x)$ est un nombre flou de valeur moyenne $f(x_0)$ et de fluctuation :

$$\Sigma\,[f'(x_0)]^2\, y_i^2\, p_i = [f'(x_0)]^2\, \varphi$$

Pour étendre ce concept au cas où il y a plusieurs mesures, c'est-à-dire où l'on mesure une colonne, on est amené à définir les colonnes floues de la façon suivante :

Une colonne floue sera une colonne aléatoire X dont les valeurs possibles seront de la forme $X_0 + \varepsilon Y_i$, X_0 étant la valeur moyenne mesurée ($\Sigma\, Y_i\, p_i = 0$) et dont on connaîtra la fluctuation, qui sera par définition la valeur moyenne de la matrice $Y\overline{Y}$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\Phi = \Sigma\, Y_i\, p_i\, \overline{Y}_i} \qquad (22)$$

dans le cas des colonnes d'ordre 1, on retrouve les nombres flous. Si on doit calculer une autre colonne F (X), déduite de X par des calculs différentiables, on peut montrer de même que le résultat sera encore une colonne floue. Nous le vérifierons d'ailleurs dans des cas particuliers.

Si les éléments d'une colonne floue :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$

sont mesurés directement et indépendamment, il

CLASSIF.

est facile de voir que sa fluctuation est une matrice diagonale, les éléments de cette diagonale étant justement les fluctuations de :

$$x_1,\ x_2,\ \dots\dots\dots\ x_n$$

Nous serons donc en mesure, connaissant ces fluctuations, d'en déduire la fluctuation de tout nombre calculé à partir de :

$$x_1,\ x_2,\ \dots\dots\dots\ x_n$$

et par conséquent, d'effectuer un calcul d'erreur qui nous fournira l'erreur quadratique moyenne sur les résultats si nous connaissons l'erreur quadratique moyenne sur chaque mesure indépendante.

2.2. — Application au calcul matriciel.

2.2.1 - Laissant de côté le cas général, nous allons appliquer ce qui précède au calcul probabiliste d'erreur dans les deux problèmes d'inversion et de recherche des valeurs propres.

Pour cela, il nous faudra définir une matrice floue A ; on peut évidemment former une seule colonne d'ordre n^2 avec tous les éléments de A et la considérer comme une colonne floue d'ordre n^2 ; mais pour conserver une plus grande symétrie des calculs, nous introduirons le *tenseur fluctuation* Φ défini par la relation :

$$\Phi\ (X)\ (Y) = \left\{ BX\ .\ \overline{BY} \right\} \tag{23}$$

B étant l'erreur sur la matrice A.

Φ est un tenseur double à quatre indices, et nous allons interpréter ses composantes, qui seront par définition les quantités :

$$\boxed{\varphi_{ijkl} = \overline{E}_i\ .\ \Phi\ (E_j)\ (E_l)\ .\ E_k} \tag{24}$$

Ceci peut encore s'écrire :

$$\left\{ \overline{E}_i \left[B\,E_j\ .\ \overline{B\,E_l} \right] E_k \right\}$$

soit :

$$\left\{ \overline{E}_i\ BE_j \overline{E}_l\, \overline{B}\, E_k \right\} = \left\{ \overline{E}_i\, B\, E_j\ \overline{E}_k\, BE_l \right\} = \left\{ b_{ij}\ .\ b_{kl} \right\}$$

en désignant par b_{ij} l'élément de la ligne i et de la colonne j de B, c'est-à-dire l'erreur sur le terme correspondant a_{ij} de A.

Inversement, si nous connaissons les composantes φ_{ijkl} de Φ, ce tenseur est déterminé par les relations :

$$\Phi\,(X)\,(Y) = \sum_{ijkl} E_i\ \overline{E}_i\, \Phi\, (E_j\ \overline{E}_j\ X)\ (E_l\ \overline{E}_l\ Y)\ E_k\ \overline{E}_k$$

$$= \sum_{ijkl} E_i\ [\overline{E}_i\ \Phi\ (E_j)\ (E_l)\ E_k]\ \overline{E}_j\ X\ \overline{E}_l\ Y\ \overline{E}_k$$

$$\boxed{\Phi\ (X)\,(Y) = \sum_{ijkl} E_i\ \varphi_{ijkl}\, \overline{E}_j\, X\, \overline{E}_l\, Y\, \overline{E}_k} \tag{25}$$

Φ (X) (Y) est une matrice dont l'élément de la ligne i et de la colonne k a pour valeur :

$$\sum_{jl} x_j\ \varphi_{ijkl}\ y_l$$

x_j et y_l étant les éléments des colonnes X et Y.

Avant d'utiliser ce tenseur fluctuation pour l'étude de l'inverse et des valeurs propres, nous allons préciser sa valeur dans quelques cas particuliers importants.

2.2.2 Cas où les éléments de A sont mesurés indépendamment avec la même erreur quadratique moyenne α.

On a par conséquent :

$$\varphi_{ijkl} = \begin{cases} \alpha^2 \text{ Si } i = k,\ j = l \\ 0 \text{ dans les autres cas.} \end{cases}$$

On peut donc prendre

$$\varphi_{ijkl} = \alpha^2\, \overline{E}_i\ E_k\ \overline{E}_j\ E_l$$

d'où :

$$\Phi(X)(Y) = \alpha^2 \sum_{ijkl} E_i\ \overline{E}_i\ E_k\ \overline{E}_j\ E_l\ \overline{E}_j\ X\ \overline{E}_l\ Y\ \overline{E}_k$$

$$= \alpha^2 \sum_{jkl} E_k\ \overline{E}_j\ E_l\ \overline{E}_j\ X\ \overline{E}_l\ Y\ \overline{E}_k$$

$$= \alpha^2 \sum_{jkl} E_k\, \overline{X}\ E_j\ \overline{E}_j\ E_l\ \overline{E}_l\ Y\ \overline{E}_k$$

$$= \alpha^2 \sum_{kl} E_k\ \overline{X}\ E_l\ \overline{E}_l\ Y\ \overline{E}_k = \alpha^2 \sum_{k} E_k\ \overline{X}\ Y\ \overline{E}_k$$

Φ (X) (Y) est donc une matrice scalaire ayant dans sa diagonale le nombre $\alpha^2\ \overline{X}\ Y$, ce que nous écrivons

$$\boxed{\Phi\ (X)\ (Y) = \alpha^2\ \overline{X}\ Y} \tag{26}$$

2.2.3 Cas où les coefficients de A sont encore mesurés indépendamment, avec la même erreur quadratique moyenne α, mais où l'on sait que A est hermitienne.

On prend alors pour valeur commune des coefficients a_{ji} et a_{ij} la moyenne arithmétique de leurs mesures. Un calcul élémentaire montre alors que la fluctuation de cette moyenne est $\frac{\alpha^2}{2}$. On a alors :

$$\varphi_{ijkl} = \begin{cases} \alpha^2 \text{ si } i = j = k = l \\ \alpha^2/2 \text{ si } i = l,\ j = k \text{ ou } i = k,\ j = l \\ 0 \text{ dans tous les autres cas.} \end{cases}$$

Ceci se résume simplement par la formule :

$$\boxed{\varphi_{ijkl} = \frac{\alpha^2}{2} (\overline{E}_i\ E_k\ \overline{E}_j\ E_l + \overline{E}_i\ E_l\ \overline{E}_j\ E_k)} \tag{27}$$

d'où :

$$\Phi\,(X)\,(Y) = \frac{\alpha^2}{2} \sum_{ijkl} E_i\ \overline{E}_i\ E_k\ \overline{E}_j\ E_l\ \overline{E}_j\ X\ \overline{E}_l\ Y\ \overline{E}_k$$

$$+ \frac{\alpha^2}{2} \sum_{ijkl} E_i\ \overline{E}_i\ E_l\ \overline{E}_j\ E_k\ \overline{E}_j\ X\ \overline{E}_l\ Y\ \overline{E}_k$$

$$\boxed{\Phi\ (X)\ (Y) = \frac{\alpha^2}{2} \left[\underline{\overline{X}Y} + Y\overline{X} \right]} \tag{28}$$

Nous venons d'indiquer le calcul du tenseur Φ dans certains cas particuliers, et il est bien évident

CLASSIF.

que ce calcul est théoriquement possible dans tous les cas. Toutefois, s'il est trop compliqué ou trop long, nous pouvons en obtenir rapidement une majoration par la théorie des normes. Cette théorie peut s'appliquer *sans changement* aux tenseurs, puisque nous considérons ceux-ci comme des opérateurs multilinéaires.

Dans le cas qui nous occupe, on aura :

$$|\Phi| = \sup \frac{|\Phi(X)|}{|X|} = \sup \frac{1}{|X|} \sup \frac{|\Phi(X)(Y)|}{|Y|}$$

$$= \sup \frac{|\Phi(X)(Y)|}{|X|\,|Y|}$$

et par suite :

$$\boxed{|\Phi(X)(Y)| \leqslant |\Phi| \,.\, |X| \,.\, |Y|} \qquad (29)$$

Par exemple, dans le premier cas considéré on avait :

$$\Phi(X)(Y) = \alpha^2 \, \underline{\overline{X}\ Y}$$

d'où :

$$|\Phi| = \alpha^2$$

2.2.4 - *Fluctuation de l'inverse.*

Nous allons exprimer le tenseur fluctuation Ψ de A^{-1} en fonction du tenseur Φ.

Si C est l'erreur sur A^{-1}, erreur que nous savons être égale à $- A^{-1}. BA^{-1}$, on aura par définition :

$$\Psi(X)(Y) = \left\{ CX \,.\, \overline{CY} \right\}$$

$$= \left\{ A^{-1} B\ A^{-1}\ X\ \overline{Y}\ \overline{A^{-1}}\ \overline{B}\ \overline{A^{-1}} \right\}$$

$$= A^{-1} \left\{ BA^{-1} X \overline{Y}\ \overline{A^{-1}}\ \overline{B} \right\} \overline{A^{-1}}$$

$$= A^{-1} \Phi(A^{-1} X)(A^{-1} Y) \overline{A^{-1}}$$

$$\boxed{\Psi(X)(Y) = A^{-1} . \Phi(A^{-1} X)(A^{-1} Y) . \overline{A^{-1}}} \qquad (30)$$

Nous pouvons, par exemple, en déduire l'erreur quadratique moyenne sur l'élément i, j de l'inverse, c'est :

$$\sqrt{\Psi_{ijij}} = \sqrt{\overline{E}_i\ \Psi(E_j)(E_j)\ E_i}$$

$$= \sqrt{\overline{E}_i\, A^{-1} \Phi(A^{-1} E_j)(A^{-1} E_j)\, \overline{A^{-1}}\, E_i}$$

Nous pourrions également en déduire la fluctuation de la solution du système d'équations linéaires qui s'écrit $AX = U$. Puisque l'on a $X = A^{-1} U$, l'erreur sur X est :

$$- A^{-1} BA^{-1} U$$

et sa fluctuation vaut :

$$\left\{ A^{-1} B\ A^{-1} U \,.\, \overline{U}\ \overline{A^{-1}}\, \overline{B}\ \overline{A^{-1}} \right\} = (A^{-1} \Phi(A^{-1} U)(A^{-1} U) \overline{A^{-1}}$$

Dans le cas particulier où $\Phi(X)(Y) = \underline{\overline{X}\ Y}\, \alpha^2$ on a

$$\Psi(X)(Y) = A^{-1}\ \underline{\overline{A^{-1}\ X}\ A^{-1}\ Y}\ \overline{A^{-1}}\ \alpha^2$$

$$= A^{-1}\ \underline{\overline{X}\ \overline{A^{-1}}\ A^{-1}\ Y}\ \overline{A^{-1}}\ \alpha^2 = \alpha^2\ \underline{\overline{X}\ \overline{A^{-1}}\ A^{-1} Y} \,.\, A^{-1} \,.\, \overline{A^{-1}}$$

L'erreur quadratique moyenne sur le terme *i*, *j* de l'inverse vaudra donc :

$$\sqrt{\Psi_{ijij}} = \sqrt{\overline{E}_i\ A^{-1}\ \Phi(A^{-1} E_j)(A^{-1} E_j)\ \overline{A^{-1}}\ E^i}$$

$$= \alpha \sqrt{\overline{E}_i\ \underline{\overline{E}_j\ \overline{A^{-1}}\ A^{-1}\ E_j}\ A^{-1}\ \overline{A^{-1}}\ E_i}$$

$$= \alpha \sqrt{\overline{E}_i\ A^{-1}\ \overline{A^{-1}}\ E_i \ .\ \overline{E}_j\ \overline{A^{-1}} A^{-1}\ E_j}$$

Cette erreur quadratique moyenne est donc égale au produit de α par la moyenne géométrique de l'élément n° *i* de la diagonale de $A^{-1} \,.\, \overline{A^{-1}}$ et de l'élément n° *j* de la diagonale de $\overline{A^{-1}} \,.\, A^{-1}$.

Si nous désirons seulement une majoration de cette erreur quadratique moyenne, on peut utiliser la théorie des normes et il vient :

$$\sqrt{\Psi_{ijij}} = \sqrt{\overline{E}_i\ A^{-1}\ \Phi(A^{-1} E_j)(A^{-1} E_j)\ \overline{A^{-1}}\ E_i}$$

$$\leqslant \sqrt{|A^{-1}|^4 \,.\, |\Phi|} = |A^{-1}|^2 \sqrt{|\Phi|}$$

Remarque. — Dans le cas où l'erreur sur chacun des termes de la matrice était inférieure à α, nous avons trouvé en calcul non probabiliste une majoration de l'erreur sur les termes de l'inverse égale à $|A^{-1}|^2 n \alpha$; si c'est l'erreur quadratique moyenne sur chacun des termes qui est égale à α, l'erreur quadratique moyenne sur les termes de l'inverse est inférieure à $|A^{-1}|^2 \alpha$. On voit donc l'intérêt qu'il y a à employer le calcul des probabilités pour les calculs d'erreur sitôt que l'ordre de la matrice est un peu élevé.

2.2.5 - *Fluctuation des valeurs propres.*

Le calcul de la fluctuation des valeurs propres est immédiat lorsqu'on connaît le tenseur Φ. On sait, en effet, que l'erreur sur la valeur propre λ vaut :

$$\lambda_1 = \frac{\overline{Y}_0\ B\ X_0}{\overline{Y}_0\ X_0}$$

sa fluctuation sera donc :

$$\left\{ \lambda_1\ \overline{\lambda_1} \right\} = \left\{ \frac{\overline{Y_0} B\ X_0\ \overline{\overline{Y_0} B\ X_0}}{(\overline{Y_0}\ X_0)^2} \right\}$$

$$= \frac{1}{(\overline{Y}_0\ X_0)^2}\ \overline{Y_0} \left\{ B\ X_0 \,.\, \overline{B\ X_0} \right\} Y_0$$

$$= \frac{1}{(\overline{Y}_0\ X_0)^2}\ \overline{Y_0}\ \Phi(X_0)(X_0)\ Y_0$$

Nous allons la calculer dans les deux cas particuliers où nous avons obtenu l'expression de Φ.

> Cas où tous les termes de la matrice A sont mesurés indépendamment avec la même erreur quadratique α.

On a : $\Phi(X)(Y) = \alpha^2\ \underline{\overline{X} Y}$

CLASSIF.

donc

$$\boxed{\big\}\lambda_1 \overline{\lambda_1}\big\{ = \frac{\alpha^2}{(\overline{Y}_0 X_0)^2} \overline{Y}_0 Y_0 \,.\, \overline{X}_0 X_0} \qquad (31)$$

Cas où la matrice A est en outre hermitienne.

On a d'une part :

$$\Phi (X) (Y) = \frac{\alpha^2}{2} \left[\underline{\overline{X}\, Y} + Y \overline{X} \right]$$

et d'autre part : $X_0 = Y_0$

Il vient :

$$\big\}\lambda_1 \overline{\lambda_1}\big\{ = \frac{1}{(\overline{X}_0 X_0)^2} \overline{X_0} \left[\frac{\alpha^2}{2} \left[\underline{\overline{X}_0 X_0} + X_0 \overline{X}_0 \right] \right] X_0$$

$$= \frac{\alpha^2}{2} \frac{1}{(\overline{X}_0 X_0)^2} \left[(\overline{X}_0 X_0)^2 + (\overline{X}_0 X_0)^2 \right] = \alpha^2$$

Nous arrivons donc au résultat essentiel suivant :

(32) Si on mesure tous les éléments d'une matrice A dont on sait qu'elle est hermitienne, indépendamment et avec la même erreur quadratique moyenne α, si on la symétrise en la remplaçant par $\frac{A + \overline{A}}{2}$ et si on calcule ses valeurs propres sous cette forme, l'erreur quadratique sera α pour toutes les valeurs propres.

Ce résultat est particulièrement intéressant car il est indépendant de l'ordre de la matrice d'une part, et d'autre part du fait que deux valeurs propres soient voisines ; il montre également qu'en valeur relative, les plus grandes valeurs propres sont les mieux déterminées.[1]

(1) Ce résultat a été retrouvé indépendamment, et par d'autres voies, par M. F. Sorg.

BIBLIOGRAPHIE

[I] J.-M. SOURIAU. — *Les calculs matriciel et spinoriel.* Publication O. N. E. R. A., n° 42.

[II] J.-M. SOURIAU. — *Une méthode générale de linéarisation des problèmes physiques.* L'Information des Sciences Physiques, n° 5, 1947.

[III] J.-M. SOURIAU. — *Une méthode générale de linéarisation des problèmes physiques.* Conférence faite au colloque international de Poitiers le 29 avril 1950. Rédigée en collaboration avec J. Chastenet de Gery.

PUBLICATIONS RÉCENTES DU SERVICE DE DOCUMENTATION ET D'INFORMATION TECHNIQUE DE L'AÉRONAUTIQUE

I. **Historique de l'allumage. Généralités sur le fonctionnement d'un moteur à explosion : avance à l'allumage-départ à froid.**

L'étincelle d'allumage produite par les appareils à induction. Schéma général. Production du courant primaire par batterie, par magnéto. Avance automatique. Caractère de l'étincelle.

II. **L'Allumage électrostatique. Théorie sommaire d'une machine électrostatique à influence. Excitation-fonctionnement avec capacités parasites.**

Mise au point progressive de l'allumeur électrostatique. Principe des appareils. Prototype aux différents stades.

Comparaison des différents systèmes et résultats d'essais. Essais à l'éclateur sous pression, sans et avec blindage. Essais d'antiparasitage. Essais à l'éclateur tournant. Essais sur moteurs au banc. Essais sur voiture. Départs à froid.

Démonstration de la supériorité générale de l'allumage électrostatique sur l'allumage à induction.

84 pages, 36 figures, 8 références.

Série grise n° 245.

ÉTUDE ET RÉALISATION D'UN ÉQUIPEMENT ÉLECTRONIQUE POUR LA MESURE ET L'ENREGISTREMENT DES FAIBLES VARIATIONS DE CAPACITÉ. APPLICATION AUX MESURES AÉRODYNAMIQUES ET HYDRODYNAMIQUES, par **Paul SAUVAGE,** préface de **M. A. FORTIER.**

« Après quelques essais sur des appareils à quartz, M. Sauvage a imaginé un montage électronique très simple permettant de mesurer et d'enregistrer de faibles variations de capacité. Puis, il a adapté ce montage à l'enregistrement des pressions variables, en employant le procédé classique du condensateur variable, dont l'armature est une membrane mince qui se déforme sous l'action de la pression à mesurer.

« M. Sauvage a fait, ensuite, une étude critique très intéressante de tous les dispositifs électriques actuellement employés pour des mesures de grandeurs quelconques dont il est possible de transformer les variations en variations d'une grandeur électrique.

« Au total, l'appareil de M. Sauvage est susceptible de multiples applications dans de nombreux domaines de la technique. » A. Fortier.

(suite page 65)