

UNE MÉTHODE GÉNÉRALE DE LINÉARISATION DES PROBLÈMES PHYSIQUES

par

J. M. SOURIAU

(Rédigé en collaboration avec Jérôme CHASTENET DE GÉRY)

INTRODUCTION

Linéariser un problème physique, c'est remplacer les équations du problème, lorsqu'elles sont trop difficiles à résoudre directement, par des équations approchées, donc fausses, mais linéaires, donc plus faciles à résoudre.

On obtiendra ainsi une solution approchée du problème : pour vérifier sa validité, on pourra soit recourir à l'expérience, soit évaluer mathématiquement l'erreur commise.

La linéarisation est extrêmement courante en physique et dans l'art de l'ingénieur. Cependant cette opération se fait le plus souvent par tâtonnements, et ceci présente de nombreux inconvénients : nécessité pour le chercheur d'avoir déjà une assez grande expérience pour pouvoir l'effectuer correctement; impossibilité de savoir si l'on n'a pas consenti plus d'approximations qu'il n'était nécessaire pour arriver au but cherché; difficulté à « coupler » plusieurs systèmes linéarisés indépendamment, etc. C'est pourquoi nous avons jugé utile de présenter une méthode de linéarisation *générale* et en quelque sorte *automatique*.

Cette méthode a été exposée sommairement par l'auteur (réf. [1]) et enseignée dans le cours « *Les mathématiques de l'Ingénieur* » à l'École Spéciale des Travaux Aéronautiques. Elle a déjà rendu des services appréciables dans des branches variées de l'art de l'ingénieur : problèmes divers de vibrations et de stabilité, aérodynamique théorique, mécanique des fils, optique géométrique, calcul numérique et mécanique, etc.

Cet exposé comprend cinq parties :

— après une analyse rapide [1] du processus de linéarisation sur quelques exemples classiques, qui nous permet de poser le problème de façon précise, nous indiquons [2] comment on peut lui donner une réponse théorique grâce au calcul opérationnel et au calcul matriciel; l'introduction du symbole ε et l'étude de ses propriétés nous permet d'indiquer [3] *la méthode pratique* qui ne fait d'ailleurs plus appel au calcul matriciel.

Nous indiquons ensuite [4] un certain nombre d'exemples d'applications, dont un seul est traité en entier, faute de place. La cinquième partie indiquera rapidement l'extension de cette méthode au calcul des approximations supérieures, et les services qu'on peut en attendre.

1

POSITION DU PROBLÈME

Un problème physique peut, en général, être posé de la façon suivante :

— L'« état » d'un système physique variable étant défini par un certain nombre de paramètres, il s'agit de calculer, en fonction de ces paramètres, un certain nombre d'autres caractéristiques inconnues du système et d'étudier leur comportement. Les paramètres donnés et les inconnues sont reliés par un certain nombre de relations, en général implicites, qui sont fournies par les lois physiques applicables au système. Considérons comme exemple la marche d'un rayon lumineux dans un système optique centré. La donnée étant constituée par la position d'un rayon lumineux qui frappe le système, les lois de Descartes, appliquées à chaque dioptré, nous permettront de définir les inconnues, à savoir les paramètres définissant la position du rayon émergent. Mais ce calcul est en général excessivement compliqué.

Un second exemple nous sera donné par les vibrations d'un système mécanique complexe, tel que celui constitué par un avion en vol et l'atmosphère qui l'entoure. L'« état » du système sera défini par la donnée, en tout point de l'atmosphère, de la densité, de la pression et de la vitesse du fluide; les paramètres qui définissent la position géométrique des parties de l'avion susceptible de vibrer; le tout à un instant donné.

Les lois qui régissent le problème sont les équations d'Euler valables en tout point de l'atmosphère, les équations de Lagrange qui définissent les possibilités de mouvement de l'avion, et les conditions de contact et de glissement qui définissent les interactions mutuelles de l'avion et de l'atmosphère.

Les inconnues seront les valeurs prises par les données à un instant ultérieur, et, plus généralement, leur comportement en fonction du temps (stabilité). Ces deux problèmes très complexes sont susceptibles tous les deux d'être linéarisés : « approximation de Gauss » dans le premier cas, « linéarisation de Prandtl » dans le second.

Nous allons chercher la « philosophie » commune à ces deux exemples.

On sait que l'approximation de Gauss est valable lorsque l'angle du rayon incident avec l'axe du système, ainsi que sa distance à celui-ci, sont petits. La linéarisation de Prandtl est valable lorsque l'aile est mince, son incidence faible, ainsi que l'amplitude de ses vibrations. Nous voyons que dans les deux cas nous nous plaçons au voisinage d'un « cas limite » : rayon lumineux porté par l'axe dans le premier cas, aile plate et non vibrante à incidence nulle dans le second.

Quelles sont les particularités physiques de ces cas-limites ?

C'est que, dans le premier cas, le rayon lumineux n'est réfracté par aucun dioptré et sort du système suivant l'axe. Que, dans le second cas, les paramètres divers définissant le système restent constants au cours du temps; de façon plus générale, c'est que, dans ces cas-limites, nous connaissons la solution exacte des problèmes posés.

Ceci est évidemment général, et nous allons en abstraire le principe suivant :

1,1

Pour linéariser un problème physique, il faudra au préalable connaître une *solution particulière exacte* des équations. On effectuera la linéarisation *autour* de cette solution et le résultat sera en principe valable lorsque les données seront voisines des valeurs particulières qui conduisent à cette solution.

Nous voyons que ce principe va nous suggérer de nombreuses linéarisations : chaque fois que l'on connaîtra une solution particulière d'un problème, on pourra tenter de le linéariser autour de celle-ci. On pourra même trouver plusieurs linéarisations distinctes *d'un même problème*; nous en verrons des exemples.

Pour continuer à préciser ce processus de linéarisation, nous allons maintenant emprunter quelques notations au calcul matriciel [2], en particulier la définition d'une *colonne* de nombres x_1, x_2, \dots, x_n , que l'on désignera par :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

On sait que deux colonnes :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

sont égales lorsque leurs éléments correspondants sont égaux : $X = Y$ signifie $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n$.

La *somme* de deux colonnes X et Y est la colonne :

$$X + Y = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}.$$

Le produit de la colonne X par le nombre λ est par définition :

$$X \cdot \lambda = \begin{bmatrix} x_1 \cdot \lambda \\ x_2 \cdot \lambda \\ \vdots \\ x_n \cdot \lambda \end{bmatrix}.$$

Les opérations vérifient les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}X + Y &= Y + X; \\[X + Y] + Z &= X + [Y + Z]; \\[X + Y] \cdot \lambda &= X \cdot \lambda + Y \cdot \lambda; \\X \cdot [\lambda + \mu] &= X \cdot \lambda + X \cdot \mu; \\[X \cdot \lambda] \cdot \mu &= X \cdot [\lambda \cdot \mu].\end{aligned}$$

Nous utiliserons aussi la *norme* d'une colonne X , qui est par définition le nombre positif ou nul :

$$|X| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Cette norme a les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}|X| = 0 &\text{ entraîne } X = 0 \quad (\text{c'est-à-dire } x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0); \\|X + Y| &\leq |X| + |Y|; \\|X \cdot \lambda| &= |X| \cdot |\lambda|, \quad \lambda \text{ étant un nombre.}\end{aligned}$$

Nous pourrions *représenter* l'ensemble des données, $\alpha, \beta, \dots, \delta$ du système par la colonne :

$$A = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \vdots \\ \delta \end{bmatrix},$$

et celui des inconnues x, y, \dots, t par la colonne :

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \vdots \\ t \end{bmatrix}.$$

L'ensemble de toutes les relations physiques liant les données et les inconnues, c'est-à-dire des équations du problème, pourra s'écrire sous la forme :

$$R(A, X) = 0,$$

R étant une « fonction » des deux colonnes A et X . Puisque par hypothèse, les données A du problème déterminent complètement l'état du système, donc en particulier les inconnues X , la relation :

$$R(A, X) = 0$$

peut se résoudre sous la forme :

$$X = F(A),$$

F étant un certain « opérateur » qui fait correspondre à la colonne A la colonne X. Cette résolution est d'ailleurs l'objet du problème.

Par hypothèse, nous connaissons une solution particulière du problème, c'est-à-dire un couple de colonnes A_0 et X_0 telles que :

$$R(A_0, X_0) = 0,$$

ou, ce qui revient au même :

$$X_0 = F(A_0).$$

Pour étudier le problème autour de cette solution, nous serons donc amenés à prendre les nouvelles variables A_1 et X_1 définies par :

$$A = A_0 + A_1, \quad X = X_0 + X_1.$$

Les équations s'écrivent alors :

$$R(A_0 + A_1, X_0 + X_1) = 0 \quad \text{et} \quad X_0 + X_1 = F(A_0 + A_1),$$

cette dernière relation pouvant d'ailleurs s'écrire aussi :

$$X_1 = F(A_0 + A_1) - F(A_0),$$

et à étudier ces relations lorsque les éléments des colonnes X_1 et A_1 seront petits.

Dans le cas particulier où A et X ne contiennent qu'un élément, c'est-à-dire se réduisent à des nombres, on a affaire à des fonctions classiques et la solution est fournie par la formule des accroissements finis qui donne une valeur approchée de X_1 :

$$X_1 = F(A_0 + A_1) - F(A_0) \approx F'(A_0) \cdot A_1;$$

la dérivée $F'(A_0)$ étant elle-même obtenue en différentiant la relation $R(A, X) = 0$:

$$R'_A \cdot dA + R'_X dX = 0,$$

ce qui fournit :

$$F'(A_0) = \left[\frac{dX}{dA} \right]_0 = - \frac{R'_A(A_0, X_0)}{R'_X(A_0, X_0)}.$$

C'est ce procédé que nous allons étendre au cas général, en définissant la dérivée d'une fonction de colonne. Nous dissocierons dans ce procédé deux parties bien distinctes :

- 1° le calcul de la dérivée généralisée $F'(A_0)$, qui est du calcul différentiel pur;
- 2° l'approximation due à l'emploi de la formule des accroissements finis généralisée.

Nous indiquerons ensuite un artifice qui permet d'effectuer ces calculs sans utiliser les calculs opérationnel et matriciel.

Soit donc une colonne X , fonction d'une colonne A par l'intermédiaire d'un opérateur F :

$$X = F(A).$$

Pour définir la dérivée de F , nous ne pouvons pas utiliser le rapport $\frac{F(A_0 + A_1) - F(A_0)}{A_1}$ qui n'a pas de sens. Nous utiliserons le « quotient différentiel dans la direction A_1 », défini par l'expression :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{F(A_0 + A_1 \cdot \lambda) - F(A_0)}{\lambda}, \quad \lambda \text{ étant un nombre.}$$

(Nous disons, par définition, qu'une colonne variable Z tend vers une colonne fixe Z_0 lorsque tous les éléments de Z tendent vers les éléments de Z_0 , ou, ce qui revient au même, lorsque la *norme* de la colonne $Z - Z_0$ tend vers 0.)

Cette limite, si elle existe, dépend de la colonne A_1 choisie, elle sera donc de la forme :

$$K(A_1),$$

K étant un certain opérateur, qui ne dépendra lui que de la fonction F et de la colonne A_0 .

L'opérateur K a la propriété suivante : il est *homogène du premier degré*, c'est-à-dire que l'on a :

$$K(A_1 \cdot \mu) = K(A_1) \cdot \mu;$$

quel que soit le nombre μ .

En effet :

$$K(A_1 \cdot \mu) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{F(A_0 + A_1 \mu \lambda) - F(A_0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{F(A_0 + A_1 \mu \lambda) - F(A_0)}{\mu \lambda} \cdot \mu,$$

soit, en posant $\lambda \mu = \lambda'$:

$$K(A_1 \cdot \mu) = \lim_{\lambda' \rightarrow 0} \frac{F(A_0 + A_1 \lambda') - F(A_0)}{\lambda'} \cdot \mu = K(A_1) \cdot \mu.$$

C. Q. F. D.

L'opérateur K , dépendant de A_0 , pourra être mis sous la forme $G(A_0)$, l'opérateur G ne dépendant plus que de la fonction F : par définition, l'opérateur G sera appelé *dérivée* de l'opérateur F , nous le noterons F' et nous pourrons écrire :

$$\boxed{[F'(A_0)](A_1) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{F(A_0 + A_1 \lambda) - F(A_0)}{\lambda}} \quad (1)$$

(1) Dans le cas des fonctions d'une seule variable, la relation :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(a_0 + a_1 \lambda) - f(a_0)}{\lambda} = [f'(a_0)] \cdot a_1$$

montre que cette définition de la dérivée prolonge bien la définition classique, à condition de poser $u(v) = u \cdot a$ lorsque u et v sont des nombres, c'est-à-dire d'identifier le nombre u et l'opérateur « multiplication par u ».

Le fait pour un opérateur d'être dérivable n'est pas encore suffisant pour l'objet que nous avons en vue : obtenir des équations linéaires. Nous allons préciser davantage en définissant les opérateurs *différentiables*.

La relation qui définit la dérivée peut s'écrire :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{F(A_0 + A_1 \lambda) - F(A_0) - [F'(A_0)](A_1) \cdot \lambda}{\lambda} = 0;$$

soit, en utilisant la propriété d'homogénéité :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{F(A_0 + A_1 \lambda) - F(A_0) - [F'(A_0)](A_1 \cdot \lambda)}{\lambda} = 0,$$

ou encore, en divisant par le nombre constant $|A_1|$ et en utilisant les normes :

$$\lim_{|A_1 \lambda| \rightarrow 0} \frac{|F(A_0 + A_1 \lambda) - F(A_0) - [F'(A_0)](A_1 \lambda)|}{|A_1 \lambda|} = 0.$$

Nous disons que la fonction est *différentiable* dans un domaine, si cette convergence est *uniforme* lorsque A_0 et $A_0 + A_1 \lambda$ sont pris dans ce domaine, c'est-à-dire si la quantité :

$$\frac{|F(A_0 + U) - F(A_0) - [F'(A_0)](U)|}{|U|}$$

peut être rendue inférieure à tout nombre ε , pourvu que la norme $|U|$ de la colonne U soit inférieure à un certain nombre $\eta(\varepsilon)$.

Les opérateurs différentiables jouissent de propriétés extrêmement importantes, qu'on ne peut songer à démontrer dans le cadre de cet exposé, et qui sont les suivantes :

2,1 Si F est différentiable dans un domaine, sa dérivée $F'(A_0)$ est un opérateur *linéaire*, c'est-à-dire que l'on a :

$$[F'(A_0)](A_1 + A_2) = [F'(A_0)](A_1) + [F'(A_0)](A_2).$$

Comme nous avons vu que cet opérateur est également homogène, c'est une *matrice*, et on peut le représenter par un tableau de nombres. Les éléments de A et de X étant $\alpha, \beta, \dots, \delta$ d'une part, x, y, \dots, t , de l'autre, on aura d'ailleurs :

$$F'(A_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \beta} & \dots & \frac{\partial x}{\partial \delta} \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \beta} & \dots & \frac{\partial y}{\partial \delta} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial t}{\partial \alpha} & \frac{\partial t}{\partial \beta} & \dots & \frac{\partial t}{\partial \delta} \end{bmatrix},$$

ainsi qu'on peut le voir en appliquant la règle de représentation des matrices (voir réf. [2]).

2,2 La dérivée est *continue*, c'est-à-dire que lorsque A tend vers B, $F'(A)$ tend vers $F'(B)$.

2,3 La fonction F est elle-même continue, et elle vérifie à l'intérieur du domaine une condition dite de Cauchy-Lipschitz : il existe un nombre k tel que l'on ait :

$$\frac{|F(A) - F(B)|}{|A - B|} \leq k,$$

quels que soient A et B (pris dans un ensemble fermé intérieur au domaine).

Nous sommes maintenant en mesure d'étendre à ces opérateurs le calcul différentiel proprement dit : des colonnes A, B, C, ... étant supposées dépendre d'un même paramètre réel λ , nous appellerons *différentielles* de ces colonnes, et nous noterons dA , dB , dC , ... les *dérivées* de ces colonnes par rapport au paramètre commun λ . Si la colonne X est fonction de la colonne A par l'intermédiaire de l'opérateur *différentiable* F :

$$X = F(A),$$

X sera elle-même une fonction composée de λ ; sa dérivée sera obtenue par la formule :

$$dX = X'_{\lambda} = \lim_{\lambda_1 \rightarrow 0} \frac{F[A(\lambda + \lambda_1)] - F[A(\lambda)]}{\lambda_1};$$

on voit aisément que cette expression est égale à :

$$[F'(A)](dA),$$

ce qui généralise la formule classique :

$$d[F(X)] = F'(X) \cdot dX$$

valable lorsque X et $F(X)$ sont des nombres.

Pour cette raison, nous pourrions poser :

$$F'(A) = \frac{\partial X}{\partial A}$$

(nous mettons des ∂ pour rappeler que ce symbole n'est pas un quotient), et nous aurons :

$$dX = \frac{\partial X}{\partial A}(dA),$$

ou même :

$$dX = \frac{\partial X}{\partial A} \cdot dA,$$

puisqu'il s'agit d'une multiplication matricielle.

Nous sommes maintenant en mesure de résoudre le problème posé : supposons que les colonnes A et X soient reliées par la relation $R(A, X) = 0$, relation qui est

vérifiée pour $A = A_0$, $X = X_0$, et que la fonction R soit elle-même différentiable. On aura alors :

$$\frac{\partial R}{\partial A} \cdot dA + \frac{\partial R}{\partial X} \cdot dX = 0.$$

Si la matrice $\frac{\partial R}{\partial X}$ est régulière (ceci a lieu s'il y a autant d'équations que d'inconnues et si le déterminant de cette matrice, qui est le *jacobien* du système, n'est pas nul), elle possède un inverse, et l'on pourra écrire après multiplication à gauche par cet inverse :

$$\left[\frac{\partial R}{\partial X} \right]^{-1} \cdot \left[\frac{\partial R}{\partial A} \right] \cdot dA + dX = 0,$$

X sera alors une fonction F de A , définie au voisinage de A_0 , et différentiable, et l'on aura d'après la relation ci-dessus :

$$\frac{\partial X}{\partial A} = - \left[\frac{\partial R}{\partial X} \right]^{-1} \left[\frac{\partial R}{\partial A} \right] = F' (A),$$

ce qui nous permet de calculer $F' (A_0)$.

La relation de différentiabilité, qui s'écrit :

$$\frac{| F (A_0 + A_1) - F (A_0) - [F' (A_0)] (A_1) |}{| A_1 |} \leq \varepsilon,$$

si $| A_1 | < \eta (\varepsilon)$, ou encore, si nous posons comme ci-dessus $X_1 = F (A_0 + A_1) - F (A_0)$:

$$\frac{| X_1 - [F' (A_0)] (A_1) |}{| A_1 |} \leq \varepsilon,$$

nous montre que nous pourrions prendre comme valeur approchée de X_1 la quantité $[F' (A_0)] (A_1)$, l'erreur étant un infiniment petit d'ordre supérieur à $| A_1 |$.

Grâce à cette approximation, nous aurons donc ramené le problème au problème *linéaire* défini par l'équation :

$$\frac{\partial R}{\partial A} \cdot A_1 + \frac{\partial R}{\partial X} \cdot X_1 = 0,$$

nous avons linéarisé le problème.

2.4 Le symbole ε .

Afin d'effectuer commodément les calculs ci-dessus, nous allons introduire une nouvelle notion.

Considérons à nouveau les colonnes A, B, C, \dots , fonctions d'un même paramètre λ (mais pas nécessairement dérivables). Nous dirons que les colonnes A et B sont équivalentes, et nous noterons $A \sim B$, si l'on a la relation :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{A - B}{\lambda} = 0.$$

La relation « \sim » est une « relation d'équivalence », au sens algébrique du terme, ce qui veut dire que :

- 1° $A \sim A$ quelle que soit A ;
- 2° $A \sim B$ entraîne $B \sim A$;
- 3° $A \sim B$ et $B \sim C$ entraînent $A \sim C$.

On appelle *classe* d'une colonne A , suivant cette relation d'équivalence, la famille de toutes les colonnes qui lui sont équivalentes. Nous désignerons cette classe par $\{A\}$.

Le lecteur vérifiera sans peine, à l'aide des trois propriétés ci-dessus, que la condition nécessaire et suffisante pour que deux colonnes soient équivalentes est qu'elles aient mêmes classes; ainsi la relation :

$$A \sim B$$

pourra aussi bien s'écrire :

$$\{A\} = \{B\},$$

Si une fonction F vérifie la condition de Cauchy-Lipschitz, c'est-à-dire s'il existe un nombre k tel que :

$$\frac{|F(A) - F(B)|}{|A - B|} \leq k$$

(on sait que c'est le cas des fonctions différentiables) elle transforme deux colonnes équivalentes en colonnes équivalentes : en effet, la relation :

$$|F(A) - F(B)| \leq k |A - B|$$

donne :

$$\left| \frac{F(A) - F(B)}{\lambda} \right| \leq k \left| \frac{A - B}{\lambda} \right|,$$

et si le deuxième membre tend vers 0, il en sera de même *a fortiori* du premier.

Par conséquent, si :

$$\{A\} = \{B\},$$

on aura :

$$\{F(A)\} = \{F(B)\};$$

la classe de $F(A)$ ne dépendra que de la classe de A : ceci va nous permettre de *prolonger* l'opérateur F , en le définissant aussi sur les classes, par la convention :

$$2.4.1 \quad F(\{A\}) = \{F(A)\}.$$

Nous identifierons également une colonne constante (c'est-à-dire indépendante de λ) et sa classe, en posant :

$$A_0 = \{A_0\}.$$

Ces conventions vont nous permettre d'effectuer directement des calculs « aux infiniment petits d'ordre supérieur près ».

Considérons, en effet, la classe de λ lui-même, classe que nous désignerons par ε :

2,4.2

$$\boxed{\lambda \doteq \varepsilon}.$$

Nous avons par définition, si F est une fonction différentiable et si A_0 et A_1 sont des colonnes constantes :

$$F(A_0 + A_1 \varepsilon) = F(A_0 + A_1 \lambda \doteq) = F(\doteq A_0 + A_1 \lambda \doteq);$$

comme :

$$\frac{F(A_0 + A_1 \lambda) - F(A_0) - [F'(A_0)](A_1) \lambda}{\lambda}$$

tend vers 0 avec λ , ce qui signifie que :

$$F(A_0 + A_1 \lambda)$$

est équivalente à :

$$F(A_0) + [F'(A_0)](A_1) \cdot \lambda,$$

nous aurons :

$$\doteq F(A_0 + A_1 \lambda) \doteq \doteq F(A_0) + [F'(A_0)](A_1) \lambda \doteq,$$

d'où :

$$F(A_0 + A_1 \varepsilon) = \doteq F(A_0) + [F'(A_0)](A_1) \lambda \doteq = F(A_0) + [F'(A_0)](A_1) \doteq \lambda \doteq,$$

ou finalement :

2,4.3

$$\boxed{F(A_0 + A_1 \varepsilon) = F(A_0) + [F'(A_0)](A_1) \cdot \varepsilon}.$$

Inversement, on voit facilement que si l'on a :

$$F(A_0 + A_1 \varepsilon) = P + Q \varepsilon,$$

les colonnes P et Q étant indépendantes de ε , la fonction F est dérivable et l'on a :

$$P = F(A_0), \quad Q = [F'(A_0)](A_1).$$

Le symbole ε , grâce à la propriété (2,4.3), permet donc de dériver automatiquement.

Signalons pour terminer quelques propriétés du symbole ε . Un cas particulier de 2,4.3 est le suivant :

$$(a + \varepsilon)^2 = a^2 + 2 a \varepsilon;$$

en faisant $a = 0$ il vient la relation fondamentale :

2,4.4

$$\boxed{\varepsilon^2 = 0}$$

On aurait de même :

$$\varepsilon^x = 0 \quad \text{pour} \quad x > 1.$$

Le symbole ε^x n'a pas de sens pour $x < 1$, la fonction λ^x ne vérifiant pas la condition de Cauchy-Lipschitz au voisinage de 0 dans ces conditions. En particulier $\frac{1}{\varepsilon}$ n'existe pas, on n'a pas le droit de « simplifier » une relation par ε . Cependant, lorsque le produit par ε d'une colonne *indépendante de ε* est nul, cette colonne est nulle; en effet :

$$A_0 \varepsilon = 0 \quad \text{signifie} \quad ; A_0 \lambda ; = 0,$$

soit :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{A_0 \lambda}{\lambda} = 0,$$

soit, encore :

$$A_0 = 0$$

si A_0 ne dépend pas de λ .

Les considérations que nous venons d'exposer permettent au lecteur de justifier maintenant la règle de linéarisation que nous allons exposer.

Il reste évidemment un point essentiel à étudier, c'est celui où les relations données sont des équations différentielles ou aux dérivées partielles. Nous ne pouvons l'aborder ici; signalons toutefois que si le problème est linéarisable, la méthode permet de trouver le résultat.

3

MÉTHODE DE LINÉARISATION

3,1 On écrit les équations complètes et exactes du problème (y compris les conditions dites « aux limites » s'il y en a).

3,2 En désignant par $\alpha_0, \beta_0, \dots, \delta_0; x_0, y_0, \dots, t_0$ les valeurs des paramètres $\alpha, \beta, \dots, \delta$ et des inconnues x, y, \dots, t dans la solution particulière exacte autour de laquelle on veut linéariser, on écrit :

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon, & \beta &= \beta_0 + \beta_1 \varepsilon, \dots & \delta &= \delta_0 + \delta_1 \varepsilon; \\ x &= x_0 + x_1 \varepsilon, & y &= y_0 + y_1 \varepsilon, \dots & t &= t_0 + t_1 \varepsilon \end{aligned}$$

et l'on porte ces valeurs dans les équations.

3,3 On développe ces équations avec les règles de calcul suivantes :

a) ε doit être considéré comme une constante dont on peut, à tout instant du calcul, remplacer le carré et les puissances supérieures par zéro;

b) une fonction f différentiable vérifie :

$$\begin{aligned} f(x_0 + \alpha_1 \varepsilon, \dots, t_0 + t_1 \varepsilon) &= f(x_0, \dots, t_0) \\ &+ \varepsilon \alpha_1 f'_x(x_0, \dots, t_0) \\ &+ \dots \dots \dots \\ &+ \varepsilon t_1 f'_t(x_0, \dots, t_0); \end{aligned}$$

c) on n'a pas le droit de diviser par ε .

3,4 Tous calculs faits, on arrivera à mettre toutes les équations sous la forme $\varepsilon z = 0$, z étant une quantité *indépendante de ε* . On simplifiera alors par ε .

3,5 On a alors un système d'équations linéaires pour déterminer les inconnues x_1, y_1, \dots, t_1 : on le résout.

3,6 On revient ensuite aux paramètres initiaux, en remplaçant, dans les formules 3,2, ε par 1.

4

EXEMPLES D'APPLICATIONS

Nous traitons complètement le premier exemple choisi, et nous nous contenterons d'indiquer les résultats que fournit la méthode sur les exemples suivants. Cette liste n'est nullement limitative des exemples déjà traités.

4,1 Vibrations d'un système conservatif au voisinage d'une position d'équilibre.

Soit un système mécanique conservatif, à liaisons indépendantes du temps, dont la position est définie par les n paramètres q_1, q_2, \dots, q_n . Les équations du mouvement sont les n équations de Lagrange :

$$4,1.1 \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0;$$

en désignant par $2T$ l'énergie cinétique du système et par V son énergie potentielle.

$2T$ est une forme quadratique des \dot{q}_i , on peut donc écrire :

$$4,1.2 \quad 2T = \sum_{ij} a_{ij}(q_1, q_2, \dots, q_n) \dot{q}_i \dot{q}_j;$$

avec :

$$a_{ij} = a_{ji}.$$

Les équations de Lagrange s'écrivent donc, développées :

4,1.3

$$\sum_{jk} \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} (q_1, \dots, q_n) \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k + \sum_j a_{ij} (q_1, \dots, q_n) \ddot{q}_j - \frac{1}{2} \sum_{jk} \frac{\partial a_{jk}}{\partial q_i} (q_1, \dots, q_n) \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0$$

Si le système admet une position d'équilibre (nous supposons pour simplifier que c'est pour la valeur nulle des paramètres), c'est que $q_i \equiv 0$ est solution de ces équations, donc que tous les $\frac{\partial V}{\partial q_i}$ sont nuls pour $q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0$. C'est ce que nous admettrons désormais.

Le problème étant ainsi posé : connaissant les valeurs des q_i et des \dot{q}_i à l'instant initial, trouver leurs valeurs à un instant t quelconque, nous allons le linéariser autour de la solution que nous connaissons, à savoir le repos dans la position d'équilibre.

On pose donc, conformément à 3,2 :

$$q_i = \varepsilon r_i, \quad \text{d'où} \quad \dot{q}_i = \varepsilon \dot{r}_i$$

et l'on porte dans les équations 4,1.3.

La quantité $\dot{q}_i \dot{q}_j = \varepsilon^2 \dot{r}_i \dot{r}_j$ est nulle, puisque $\varepsilon^2 = 0$.

On a, d'autre part :

$$a_{ij} (q_1, \dots, q_n) \ddot{q}_j = \varepsilon a_{ij} (\varepsilon r_1, \dots, \varepsilon r_n) \ddot{r}_j = \varepsilon a_{ij} (0, \dots, 0) \ddot{r}_j;$$

puisque la différence entre ces deux derniers termes vaut :

$$\varepsilon^2 \sum_k \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} r_k \cdot \ddot{r}_j = 0.$$

On a enfin :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial q_i} (q_1, \dots, q_n) &= \frac{\partial V}{\partial q_i} (\varepsilon r_1, \dots, \varepsilon r_n) \\ &= \frac{\partial V}{\partial q_i} (0, \dots, 0) + \varepsilon \sum_j \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} (0, \dots, 0) r_j = \varepsilon \sum_j \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} (0, \dots, 0) \cdot r_j, \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de l'existence d'une position d'équilibre, les $\frac{\partial V}{\partial q_i} (0, \dots, 0)$ sont nuls.

Finalement, les équations 4,1.3 deviennent :

$$\varepsilon \sum_j a_{ij} (0, \dots, 0) \ddot{r}_j + \varepsilon \sum_j \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} (0, \dots, 0) r_j = 0,$$

soit encore, puisque ε est en facteur d'une quantité qui ne le contient plus :

$$4.1.4 \quad \boxed{\sum_j \left\{ a_{ij}(0, \dots, 0) \ddot{r}_j + \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \cdot \partial q_j}(0, \dots, 0) r_j \right\} = 0}$$

On est donc ramené à un système d'équations différentielles linéaires du second ordre, à coefficients constants, qui se traite aisément par le calcul matriciel.

Solution générale est de la forme :

$$r_i = \sum_k p_{ik} [A_k e^{\lambda_k t} + B_k e^{-\lambda_k t}];$$

les A_k et B_k étant des constantes arbitraires d'intégration, que l'on déterminera par les valeurs initiales des r_i et des r'_i , les λ_k des nombres soit réels, soit imaginaires purs.

La linéarisation s'achèvera en remplaçant ε par 1 dans les formules $q_i = \varepsilon r_i$, c'est-à-dire en remplaçant r_i par q_i .

Si les λ_k sont tous imaginaires purs (on montre que ceci a lieu en général si l'énergie potentielle est minimum pour la position d'équilibre considérée), on trouve un mouvement oscillant d'amplitude bornée; le système *vibre* autour de sa position d'équilibre, il est *stable*. S'il y a un λ_k au moins réel, les valeurs trouvées pour les q_i croissent exponentiellement avec le temps (sauf pour des valeurs très particulières des conditions initiales). La linéarisation cesse rapidement d'être valable, puisqu'on a supposé les q_i petits, mais nous avons obtenu le *mouvement commençant*.

Puisqu'il n'y a pas de solution pour laquelle les q_i restent petits, on est certain que le système est *instable*.

4,2 Le mouvement d'un solide mobile autour de son centre de gravité admet, comme cas particulier, la rotation uniforme autour de l'un des axes principaux d'inertie, lorsque les forces auquel il est soumis ont un moment nul par rapport à G. La linéarisation conduit automatiquement à la théorie de l'«effet gyroscopique», valable tant que le moment de ces forces n'est pas trop grand.

4,3 Les équations du mouvement d'un fil élastique pesant, tendu entre deux points A et B, admettent une solution évidente : le repos du fil suivant le segment AB avec une tension arbitraire lorsque l'accélération g de la pesanteur est nulle.

La linéarisation permettra d'obtenir la position d'équilibre du fil, lorsque g ne sera pas trop grand, ainsi que les équations de propagation des ébranlements longitudinaux et transversaux sur un câble tendu.

4,4 Le pendule simple nous fournit un exemple de système que l'on peut linéariser de plusieurs façons :

a) une première solution des équations de mouvement est le repos du pendule au point le plus bas de sa trajectoire : la linéarisation fournira la théorie classique des petits mouvements du pendule, qui est un cas particulier de 4,1;

b) une autre solution est donnée par le mouvement de rotation uniforme, lorsque g est nul : on obtiendra par linéarisation une théorie des mouvements révolutifs, valable lorsque g est assez petit, ou, ce qui revient au même, lorsque la vitesse initiale est assez grande.

4,5 Les équations d'Euler, qui définissent le mouvement d'un fluide parfait compressible, ont une solution exacte : le repos. En linéarisant, on obtiendra les équations de la *propagation du son*.

Pour étudier l'interaction du fluide et d'une paroi vibrante, il est nécessaire de linéariser simultanément la condition de glissement du fluide sur la paroi.

4,6 En linéarisant les équations d'un fluide visqueux (équations de Navier) autour de la même solution du repos, on arrive aux équations de Stokes.

4,7 Une autre solution particulière des équations d'Euler, avec conditions aux limites, est formée par l'écoulement uniforme du fluide autour d'une aile plane immobile infiniment mince, parallèle à la direction générale de l'écoulement : la linéarisation fournira les équations de Prandtl, qui définissent le mouvement du fluide autour d'une aile suffisamment mince, avec un angle d'attaque suffisamment petit. On peut de plus supposer l'aile animée d'un mouvement de vibration. Ce sont les équations qui sont à la base des théories aérodynamiques « linéarisées » en régime subsonique et supersonique.

On trouvera le calcul de linéarisation effectué dans la référence [1].

4,8 L'écoulement plan et irrotationnel d'un fluide parfait incompressible, autour d'une aile donnée, admet une solution bien connue, lorsque l'écoulement est permanent : la linéarisation autour de cette solution permettra d'étudier les vibrations du fluide provoquées par une vibration du profil. Une transformation conforme permet d'ailleurs de ramener les équations trouvées aux équations de Küssner (voir réf. [3]).

4,9 Les équations du mouvement d'un liquide pesant dans un bassin immobile ont comme solution l'équilibre hydrostatique, la surface de séparation avec l'atmosphère étant plane.

La linéarisation nous donnera les équations de propagation de la houle.

4,10 Les équations générales définissant le mouvement d'un corps élastique dépourvu de tension à l'état « neutre » permettent, par linéarisation autour de cet état, d'obtenir les théories d'« élasticité linéaire », et d'étudier par exemple la propagation des vibrations dans le corps.

D'autres linéarisations permettront d'étudier par exemple les corps admettant des tensions résiduelles à l'état neutre, etc.

4,11 Cette méthode permet d'obtenir automatiquement l'« approximation de Gauss », pour les systèmes centrés dans les conditions que nous avons déjà définies. Voir référence [1].

4,12 La méthode de linéarisation s'applique particulièrement bien aux *calculs d'erreurs*, c'est-à-dire à l'étude des répercussions, sur les résultats d'un calcul, d'erreurs sur les données expérimentales qui y interviennent : on linéarise évidemment autour du cas où il n'y a pas d'erreurs.

L'application de cette méthode, soit directement pour obtenir des majorations, soit en faisant intervenir le calcul des probabilités, fait l'objet de la référence [4].

Il est des cas où la validité de la linéarisation peut se vérifier aisément par un moyen expérimental : c'est le cas des petites oscillations du pendule simple, ou encore de l'approximation de Gauss.

Mais, si l'on désire une approximation meilleure, ou simplement une évaluation de l'erreur commise, on peut effectuer une linéarisation au second ordre. Le procédé que nous avons indiqué peut s'étendre :

En introduisant la relation d'équivalence :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{X - Y}{\lambda^2} = 0,$$

on peut définir un nouveau symbole ε qui vérifiera :

$$5,1 \quad \varepsilon^2 \neq 0, \quad \varepsilon^3 = 0.$$

En remplaçant les variables $\alpha, \beta, \dots, \delta, x, y, \dots, t$ par les expressions :

$$5,2 \quad \begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon, & \beta_0 + \beta_1 \varepsilon, \dots & \delta_0 + \delta_1 \varepsilon, \\ x_0 + x_1 \varepsilon + x_2 \varepsilon^2, & y_0 + y_1 \varepsilon + y_2 \varepsilon^2, \dots & t_0 + t_1 \varepsilon + t_2 \varepsilon^2, \end{cases}$$

où $\alpha_0, \beta_0, \dots, t_0$ d'une part, $\alpha_1, \beta_1, \dots, t_1$ d'autre part sont les expressions trouvées au premier ordre, en les développant par la formule de Taylor limitée au second ordre, on arrivera à mettre ε^2 en facteur dans tous les termes.

Les équations obtenues par ce procédé sont des équations linéaires par rapport aux variables x_2, \dots, t_2 , mais non homogènes : il y a un « second membre », qui est une forme quadratique des variables $\alpha_1, \beta_1, \dots, t_1$. Le premier membre est le même que précédemment, au changement près des variables. Une fois ce système résolu en x_2, \dots, t_2 , on fera $\varepsilon = 1$ dans les formules 5,2 pour revenir aux variables initiales.

Il faut remarquer que les formules 5,2 ne sont plus symétriques par rapport aux données et aux inconnues : on sait, en effet, que pour les différentielles secondes, le choix des variables indépendantes n'est pas indifférent comme pour les différentielles premières.

Les quantités x_2, y_2, \dots, t_2 donnent donc des évaluations des erreurs commises par la linéarisation au premier ordre.

A priori, rien n'empêche de continuer, et en linéarisant à des ordres successifs, on pourra obtenir dans les cas les plus favorables un développement en série convergente de la solution exacte.

Les linéarisations à des ordres supérieurs ont été utilisées avec succès sur un certain nombre d'exemples : problèmes de chocs sur des câbles tendus, pendule simple, propagation du son, de la houle; étude des systèmes centrés, où elle fournit un procédé automatique pour le calcul des aberrations de sphéricité, etc.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. M. SOURIAU. — *Une méthode générale de linéarisation des problèmes physiques.* L'Information des Sciences Physiques, 5, 1947.
 - [2] J. M. SOURIAU. — *Les calculs matriciel et spinoriel.* Publication O.N.E.R.A., n° 42.
 - [3] J. M. SOURIAU et Jérôme CHASTENET DE GÉRY. — *Extension de la méthode de Küssner aux profils épais.* C. R. Académie des Sciences, 22 mai 1950.
 - [4] J. M. SOURIAU. — *Théorie des erreurs en calcul matriciel.* La Recherche Aéronautique, N° 19, 1951.
-