MI/CDD

T H E S E S

présentées

A LA FACULTE DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITE DE PARIS

Pour obtenir le grade de Docteur ès-Sciences

par

Jean-Marie SOURIAU

1ère THESE : Sur la stabilité des avions.

2ème THESE : Proposition de la Faculté.

Soutenues le devant la Commission d'Examen

\- Président

\- Examinateurs

TABLE DES MATIERES

Sommaire p.

Liste des principaux symboles utilisés p.

Chapitre I - INTRODUCTION p.

§ 1.1 - Nature du problème p.

1.1.1 - Stabilité d'un véhicule p.

1.1.2 - Les deux méthodes d'étude de la stabilité p.

1.1.3 - Cas des avions p.

§ 1.2 - Etude critique des méthodes usuelles p.

1.2.1 - Classification des instabilités p.

1.2.2 - Méthode des tranches p.

1.2.3 - Hypothèse de l'incompressibilité p.

1.2.4 - Hypothèse des mouvements harmoniques p.

1.2.5 - Méthode d'étude de la stabilité p.

Chapitre II - LE PROBLEME DE LA DETERMINATION DU MOUVEMENT p.

§ 2.1 - Géométrie et cinématique du vol p.

2.1.1 - Représentation des mouvements de l'avion p.

2.1.2 - Cinématique de l'écoulement p.

2.1.3 - Symétries p.

§ 2.2 - Equations du mouvement p.

2.2.1 - Equations mécaniques de l'avion p.

2.2.2 - Equations aérodynamiques p.

§ 2.3 - Etude énergétique de l'écoulement p.

§ 2.4 - Linéarisation p.

2.4.1 - Méthode générale p.

2.4.2 - Conditions de possibilité
Nouvelles variables p.

2.4.3 - Linéarisation des équations
mécaniques p.

2.4.4 - Linéarisation des équations
aérodynamiques p.

§ 2.5 - Etude théorique du problème aérody-
namique linéarisé p.

2.5.1 - Réduction du problème pour
l'étude de la stabilité p.

2.5.2 - Ondes de choc - Linéarisation
du principe d'Hamilton p.

2.5.3 - Potentiel des vitesses p.

2.5.4 - Bilan énergétique dans le cas
linéarisé p.

2.5.5 - Théorème d'unicité p.

2.5.6 - Hypothèses relatives à l'exis-
tence des solutions p.

Chapitre III - ETUDE DE LA STABILITE p.

§ 3.1 - Introduction de la transformation de
Laplace-Carson p.

3.1.1 - Equations symboliques p.

3.1.2 - Séparation des problèmes méca-
niques et aérodynamiques p.

§ 3.2 - L'aspect symbolique des hypothèses
aérodynamiques p.

3.2.1 - Interprétation physique des
solutions symboliques p.

3.2.2 - Prolongement des solutions pour p imaginaire pur p.

3.2.3 - Les grandes valeurs de p - Ondes de choc et rayonnement directif p.

§ 3.3 - Critère de stabilité p.

3.3.1 - Généralisation du critère de Cauchy-Nyquist p.

3.3.2 - Caractère intrinsèque de la courbe de stabilité p.

Chapitre IV - CALCUL DES COEFFICIENTS AERODYNAMIQUES EN REGIME SUBSONIQUE p.

§ 4.1 - Equation intégrale du problème p.

§ 4.2 - Méthode numérique de résolution p.

§ 4.3 - Cas des mouvements cylindriques Aile droite et aile en flèche p.

N.B. - Dans chaque chapitre les formules sont repérées par le numéro du chapitre écrit en chiffre romain suivi d'un numéro d'ordre.

Exemples : 3.2.1 - première partie du deuxième paragraphe du troisième chapitre.
(III, 7) septième formule du troisième chapitre.

SOMMAIRE

Chapitre I - INTRODUCTION -

Ce chapitre est une étude critique des hypothèses habituellement utilisées dans l'étude de la stabilité des avions (linéarisation, méthode des tranches, incompressibilité, mouvements harmoniques, détermination de la stabilité par continuité).

On indique que la linéarisation semble actuellement la méthode susceptible de fournir les résultats les plus valables pour l'étude de la stabilité, et on signale en particulier que l'hypothèse de l'incompressibilité cesse d'être valable pour les mouvements rapidement variables quelle que soit la vitesse de vol.

Chapitre II - LE PROBLEME DE LA DETERMINATION DU MOUVEMENT -

Le problème est mis en équations au moyen du principe de Lagrange-Hamilton, dans le cas d'un avion susceptible de déformations élastiques, volant dans un fluide parfait compressible. Cette méthode permet d'étudier les échanges d'énergie. On discute le rôle des symétries.

Les équations sont ensuite linéarisées de façon aussi correcte que possible, par une méthode systématique; on indique les facteurs dont il est possible de tenir compte (effet gyroscopique), et ceux qui doivent nécessairement être négligés. Les équations auxquelles on est conduit sont présentées sous forme matricielle.

Ce même problème est repris en appliquant directement à la fonction de Lagrange la méthode de linéarisation. Le problème variationnel correspondant est traité dans l'espace temps quadridimensionnel, ce qui permet une étude complète des ondes de choc et des échanges d'énergie dans le cadre de la linéarisation.

Ceci nous conduit à un théorème général d'unicité pour les écoulements à énergie finie partant du repos qui ne fait intervenir aucune condition supplémentaire : on montre en particulier que la condition de Kutta-Joukowski, dans son domaine de validité, caractérise les écoulements permanents que l'on peut obtenir à partir du repos.

On indique ensuite quelques hypothèses relatives aux solutions du problème aérodynamique (existence, stabilité).

Chapitre III - ETUDE DE LA STABILITE -

En introduisant la transformation de Laplace-Carson, on sépare le problème mécanique du problème aérodynamique.

On donne une interprétation physique directe des solutions symboliques qui, dans le cas du vol subsonique, représentent des écoulements réguliers même si l'écoulement initial comporte des ondes de choc; on montre que si la partie réelle de la variable symbolique est positive, les relations énergétiques peuvent se traduire dans la transformation, avec le théorème d'unicité qu'elles impliquent.

On étudie le prolongement des solutions pour p imaginaire pur (écoulements harmoniques et permanents), et le cas des grandes valeurs de p : le terme de Kelvin disparaît par suite de la compressibilité de l'air, il est remplacé par un terme du premier ordre que l'on donne explicitement, et qui est susceptible d'une double interprétation (ondes de choc, impédance de rayonnement).

On donne ensuite une condition nécessaire et suffisante de stabilité à une vitesse de vol déterminée, condition qui fait intervenir une courbe intrinsèque (indépendante des paramètres choisis pour représenter les mouvements de l'avion).

Chapitre IV - DETERMINATION DES COEFFICIENTS AERODYNAMIQUES -

Le problème tridimensionnel est étudié dans le cas d'une aile plane, de contour quelconque, en régime subsonique.

....

En adaptant la formule des potentiels retardés, on est ramené à une équation intégrale bidimensionnelle, pour laquelle on étudie une méthode de résolution numérique par développement en série.

On étudie ensuite le cas de l'aile droite et de l'aile en flèche, en écoulement cylindrique.

*   *
*

LISTE DES PRINCIPAUX SYMBOLES UTILISES

a	Célérité du son
A	Avion Matrice des coefficients aérodynamiques
$\mathcal{A}$	Action hamiltonienne
$\mathrm{Adj}(\bullet)$	Matrice adjointe de la matrice $\bullet$
$\mathcal{B}$	Matrice d'amortissement interne
β	Nombre de Mach
C	Classe des écoulements stationnaires pour $t \leq 0$
ds	Elément de longueur
$d\sigma$	Elément d'aire
$\det(\bullet)$	Déterminant de la matrice $\bullet$
Δ	Discontinuité Laplacien
Δ'	Laplacien dans l'espace
E	Energie totale de l'atmosphère
E_i	Colonne $\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ (1 à la place n° i) Ecoulement de base
ε	Paramètre de linéarisation
$f\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)$	Energie élastique spécifique de l'air
$f(x,y,z)$	Valeur de t au point x, y, z d'une onde de choc

F_j	Composante normale des déplacements élémentaires de l'avion ($q_j = 1$) Ecoulements orthogonaux aux écoulements G_i
g	Accélération de la pesanteur
G_j	Ecoulements orthogonaux aux écoulements F_i
γ	Rapport des chaleurs spécifiques de l'air
Γ	Courbe arbitraire
H	Matrice de changement de base
$H_0^{(1)}, H_1^{(1)}$	Fonctions de Hankel de première espèce
I	Vecteur unitaire de l'axe des x
J	Vecteur unitaire dirigé dans le sens de la poussée des propulseurs.
k	Nombre de paramètres de maniabilité $p/a\sqrt{1-\beta^2}$
K	Matrice des rigidités de l'avion
K_0, K_1	Fonctions de Hankel modifiées
L	Fonction de Lagrange
λ_i	Paramètres de perturbation d'épreuve
Λ	Colonne des λ_i
m_{ij}	Coefficients d'inertie (éléments de la matrice M)
M	molécule d'air matrices des masses
n	Normale à une surface Nombre de paramètres utiles
O	Centre de gravité de l'avion
ω_i	Pulsations propres de l'avion

p Variable symbolique

$\mathcal{P}$ Point courant de l'avion

ϖ Pression de l'air

ϖ_0 Pression initiale de l'air

φ Potentiel des vitesses

φ_j Potentiels des vitesses correspondant aux q_j

φ^* Potentiel harmonique correspondant à un potentiel complexe

$\Phi(x,y,z,t)=0$ Equation d'une onde de choc

Ψ $\varphi e^{-\beta k X}$

q_i Paramètres définissant la position de l'avion

Q Colonne des q_i

r Distance dans l'espace X, y, z

$\mathcal{R}(z)$ Partie réelle de z

ρ Masse spécifique de l'air

ρ_0 Masse spécifique initiale de l'air

s Surpression ($a^2 \rho_0$ étant pris pour unité)

S $\begin{cases}\text{Sillage}\\ \text{Opérateur}\end{cases}$

Σ Surface arbitraire

t Temps

T Energie cinétique

$\mathcal{T}$ Travail virtuel

$Tr(\bullet)$ Trace de la matrice $\bullet$

u e^{-kr}/r

U Vecteur déplacement des molécules d'air

....

$\mathcal{v}$ Volume

V Vecteur vitesse $\begin{cases} \text{de l'écoulement général} \\ \text{de propagation normale d'une surface} \end{cases}$

W $\begin{cases} \text{Energie potentielle} \\ \text{Vitesse additionnelle (la vitesse du son étant prise pour unité)} \end{cases}$

x, y, z Variables d'espace (x dirigée dans le sens du déplacement)

x_0, y_0, z_0 Variables d'espace dans un état de référence

X $x/\sqrt{1-\beta^2}$

$Z(p)$ Matrice d'impédance aéroélastique $Mp^2 + K + a^2 \rho_0 A$

$+, -$ Indices distinguant les deux faces d'une surface

$\bar{\bullet}$ Complexe conjuguée du nombre complexe $\bullet$

$\tilde{\bullet}$ Transposée de la colonne ou matrice $\bullet$

$\dot{\bullet}$ Dérivée par rapport au temps de la variable $\bullet$

(A, B) Produit scalaire des vecteurs A et B

$\bullet$ Variable muette.

* * *

.mvodd.

CHAPITRE I

- I N T R O D U C T I O N

§ 1.1 - Nature du problème -

1.1.1.- Stabilité d'un véhicule

Un véhicule est un engin destiné à remplir une mission de déplacement.

Il comporte deux parties essentielles :

a) Un dispositif de propulsion, capable d'emprunter de l'énergie à une source donnée, et de déplacer le véhicule par réaction sur le milieu ambiant.

b) Un dispositif de commandes, destiné à mettre l'énergie du propulseur au service de l'utilisateur.

En général, il est prévu un " régime de croisière " dans lequel les commandes restent immobiles, et où le mouvement d'ensemble se réduit essentiellement à une translation rectiligne uniforme.

Pour que le véhicule puisse remplir sa mission, il est nécessaire qu'il possède les deux qualités suivantes :

a) La stabilité, c'est-à-dire la possibilité d'atteindre effectivement le régime de croisière.

b) La maniabilité, c'est-à-dire la possibilité pour l'utilisateur de passer à volonté d'un régime de croisière donné à tel autre qu'il a choisi.

Le problème de la maniabilité ne se pose et n'a de sens que si la stabilité est atteinte.

../...

../...

Par ailleurs, le problème de la stabilité est mieux défini et plus facile à résoudre que celui de la maniabilité, puisqu'il ne fait pas intervenir les réactions de l'utilisateur.

1.1.2.- Les deux méthodes d'étude de la stabilité -

Il est clair qu'aucun véhicule ne pourra être stable, au sens rigoureux du terme. On ne peut espérer obtenir qu'un régime de croisière pratique, dans lequel le mouvement d'ensemble restera voisin d'une translation rectiligne uniforme.

On pourra donc étudier la stabilité de deux façons :

a) On tiendra compte de l'impossibilité d'un régime de croisière rigoureux, on admettra l'existence de perturbations plus ou moins régulières, et on cherchera à s'assurer que leur amplitude reste bornée. C'est ce qu'on fait, par exemple, pour étudier une locomotive présentant le phénomène du lacet, et qui reste utilisable tant qu'il n'y a pas de danger de déraillement.

Cette méthode est la plus proche de la réalité, et elle nous permet d'étudier la " qualité " de la stabilité - c'est-à-dire l'amplitude maximum des perturbations.

Malheureusement, c'est la plus difficile à mettre en oeuvre, car elle fait intervenir un grand nombre de données mal connues (état de la voie pour une locomotive, rafales de l'atmosphère dans le cas d'un avion, etc...), et qu'elle pose des problèmes mathématiques en général très complexes.

En fait, il ne semble pas qu'elle soit applicable actuellement aux avions, les problèmes de turbulence qu'elle pose étant encore loin d'être résolus.

../...

../...

b) Une deuxième méthode consiste à remplacer le véhicule réel par un schéma simplifié, pour lequel le régime de croisière rigoureux sera possible.

On étudiera ensuite les régimes voisins de ce régime de croisière, en général par la méthode des petits mouvements, qui conduit à des problèmes linéaires et homogènes [1]. On supposera le régime permanent jusqu'à l'instant $t = 0$, puis on appliquera une petite perturbation d'épreuve.

Si on constate que la " réponse " reste suffisamment petite au cours du temps, on pourra compter sur une certaine stabilité.

Si au contraire, on constate que les équations ont des solutions " explosives " (par exemple des exponentielles $e^{\lambda t}$, $\lambda > 0$), on sera certain que le véhicule quittera le domaine linéaire.

Dans ce cas, seule une étude critique serrée nous permettra de savoir si cette instabilité est réellement incompatible avec l'utilisation du véhicule, ou si on ne conclura pas au contraire à une stabilité suffisante en utilisant la première méthode.

1.1.3.- Cas des avions -

L'étude théorique rigoureuse de l'écoulement de l'air autour d'un avion est actuellement impossible : nos connaissances sur

../...

1) Voir ci-dessous (2.4.1).

../...

l'influence de la viscosité sur les écoulements à grande vitesse sont encore fragmentaires, et de nature surtout qualitative (turbulence, couche limite).

Une approximation satisfaisante dans un grand nombre de cas consiste à assimiler l'air à un fluide compressible, dépourvu de viscosité, et à admettre qu'il possède un champ de vitesse continu, sauf éventuellement sur certaines surfaces (sillage, ondes de choc).

Le problème de la recherche de l'écoulement permanent, avec ces hypothèses, est extrêmement difficile.

Mais, par ailleurs, il est inutile pour l'étude de la stabilité : les essais en soufflerie autour de maquettes immobiles ont en effet montré :

1°/ que l'écoulement permanent, s'il existe, est instable dès que l'épaisseur ou l'incidence de l'avion cessent d'être très petites (phénomènes des tourbillons alternés de Benard-Karman, par exemple).

2°/ que cette instabilité n'est cependant pas prohibitive, car elle ne crée sur le profil que des actions assez modérées.

Par suite, même si on parvenait à appliquer la méthode des petits mouvements au voisinage d'un écoulement permanent, la réponse serait très probablement " instabilité ", sans qu'on puisse en tirer de conclusion pratique sur l'utilisation de l'avion lui-même.

Il est donc nécessaire d'utiliser un autre schéma, dans lequel l'écoulement apparaîtra stable par lui-même. Les instabilités qui apparaîtront dans le système complet avion-atmosphère, auront alors des chances de correspondre à un phénomène pratiquement important: l'expérience a montré qu'il arrivait effectivement aux avions en vol

../...

../...

des phénomènes d'instabilité, explicables par un couplage mécanique avion-atmosphère.

En particulier, le phénomène du flutter (instabilité à fréquence bien définie) se présente généralement comme un phénomène très brutal, qui ne prend fin que par la rupture d'une partie de la voilure.

Le schéma aérodynamique que nous utiliserons s'obtiendra en supposant que l'avion est constitué de surfaces minces, à incidence faible. Dans ces conditions, on arrive à des équations linéaires (équations de Prandtl), et il semble bien que les solutions de ces équations soient stables en elles-mêmes.

Par ailleurs, puisque les équations sont linéaires, la méthode des petits mouvements n'introduira aucune simplification supplémentaire et l'étude de la stabilité sera considérablement simplifiée.

Dans ce travail, nous introduisonsd'abord les équations rigoureuses des fluides parfaits compressibles, puis nous linéariserons de façon aussi correcte que possible .

Ainsi, d'une part, les réponses au problème de stabilité que l'on pourra en déduire auront des chances d'être pratiquement importantes pour les avions réels; d'autre part, notre étude sera rigoureuse dans le cas limite d'un avion infiniment mince, à incidence nulle.

§ 1.2 - Etude critique des méthodes usuelles -

1.2.1.- Classification des instabilités -

Le plus souvent, on étudie séparément deux catégories de

../...

../...

stabilité :

a) La stabilité générale de l'avion, dans l'étude de laquelle on ne tient compte le plus souvent que des déplacements d'ensemble de l'avion et des rotations des gouvernes, et où l'on suppose que les efforts aérodynamiques ne dépendent que de l'incidence des diverses parties.

b) La stabilité au flutter, pour laquelle on tient compte de déformations élastiques de la voilure, où l'on recherche une expression des efforts aérodynamiques valables en régime non permanent, mais où l'on suppose souvent que certaines parties de l'appareil restent immobiles (fuselage par exemple).

Cette méthode conduit le plus souvent à des résultats corrects, mais il est bien clair qu'une telle discrimination est arbitraire, et qu'il convient a priori de commencer par une étude globale de la stabilité, si l'on veut pouvoir juger de la valeur de ces approximations.

1.2.2. Méthode des tranches -

On admet le plus souvent que les efforts aérodynamiques sur une section de l'aile par un plan parallèle au vent sont les mêmes que si cette section faisait partie d'une aile d'envergure infinie, perpendiculaire au vent, ayant un mouvement d'ensemble déduit par translation de celui de la section : c'est ce qui constitue l'hypothèse des tranches.

Cette hypothèse semble acceptable à condition que l'aile soit d'envergure assez grande, de flèche assez faible, et que sa torsion reste faible.

Même dans ces conditions, elle conduit à une expression très incorrecte des efforts aérodynamiques en bout d'aile.

../...

../...

Elle a reçu différents aménagements, dont le plus connu est la théorie de Prandtl de l'aile d'envergure finie, valable en régime permanent seulement.

Différents auteurs, en particulier Reissner, ont proposé des théories analogues, valables en régime varié, mais il est très difficile d'apprécier les approximations consenties.

En fait, si on traite actuellement tous les problèmes de flutter avec cette hypothèse, c'est faute d'avoir une théorie réellement tridimensionnelle numériquement applicable.

Une telle théorie permettrait au moins de faire une comparaison numérique montrant dans quelles conditions la méthode des tranches peut être appliquée sans danger.

Les essais expérimentaux publiés à l'heure actuelle ne sont pas assez précis pour donner une réponse décisive à cette question.

1.2.3.- Hypothèse de l'incompressibilité -

On considère souvent que la compressibilité de l'air peut être négligée dans l'étude des écoulements dont la vitesse n'est pas trop grande.

Par ailleurs, cette hypothèse , jointe à celle des tranches, permet d'utiliser les fonctions de variable complexe et la représentation conforme pour l'étude du problème aérodynamique - et conduit ainsi à la belle théorie de Küssner et Theodorsen de l'aile vibrante.

Mais en fait, l'hypothèse d'incompressibilité n'est valable que pour les écoulements lentement variables, et ceci, quelle que soit la vitesse du vent.

En particulier dans le cas des écoulements à grande fréquence d'un fluide incompressible, les efforts aérodynamiques dans la théorie incom - pressible, peuvent être représentés par une masse fictive ajoutée à celle de l'aile (terme de Kelvin), qui indique si l'on veut la " masse d'air entraîné ". Nous montrerons au contraire (cf. ci-dessous : 3.2.4)que la compressibilité remplace ce terme, du deuxième degré par rapport à la ../...

../...

fréquence, et en phase avec le déplacement, par un terme du premier degré, en quadrature, c'est-à-dire par un terme d'amortissement visqueux, que nous calculerons.

Il correspond si l'on veut à une impédance de rayonnement de l'aile.

Ce fait a une importance pratique considérable, car il nous montre que le phénomène du flutter ne peut pas se produire aux fréquences très élevées, puisque les forces aérodynamiques constituent alors nécessairement un terme d'amortissement, qui se superposera à l'amortissement interne.

On peut donc prévoir que si l'avion est assez rigide, c'est-à-dire si ses fréquences propres sont assez élevées, les seules vibrations dont il sera capable seront étouffées par les forces aérodynamiques, et qu'un tel avion sera nécessairement à l'abri du phénomène du flutter.

Les avions de chasse récents sont assez rigides pour que cette remarque joue pleinement: il est donc nécessaire de tenir compte de la compressibilité pour évaluer correctement leur stabilité, quelle que soit la vitesse de vol.

1.2.4.- L'hypothèse des mouvements harmoniques -

Küssner et la plupart des auteurs qui ont étudié le problème, ont étudié a priori les mouvements harmoniques - c'est-à-dire les mouvements où toutes les variables sont de la forme $a \cos \omega t + b \sin \omega t$

Cette hypothèse soulève de graves difficultés.

D'abord, les phénomènes d'instabilité que l'on veut étudier en dernier ressort ne sont pas des mouvemenss harmoniques. Il semble donc, à première vue, que cette étude soit insuffisante pour prévoir la stabilité et qu'il soit nécessaire de faire le calcul dans des cas plus généraux. Nous établirons cependant qu'il n'en est rien.

Mais la difficulté la plus importante est la suivante : le mouvement supposé harmonique n'est pas déterminé de façon unique par les équations de la mécanique des fluides, et ceci est également valable

../...

../...

pour le cas particulier du régime permanent.

Pour pouvoir déterminer l'écoulement, il a fallu faire un certain nombre d'hypothèses, plus ou moins arbitraires : hypothèse de l'écoulement irrotationnel, principe de la conservation de l'intensité tourbillonnaire, condition d'émission de Sommerfeld, et enfin condition de Kutta-Joukowski.

Nous nous affranchirons ici de <u>toutes</u> ces hypothèses, de la façon suivante :

Au lieu d'étudier les mouvements harmoniques , nous porterons notre attention sur la classe suivante de mouvements, classe que nous appellerons C :

(a) le régime est permanent pour $t \leqslant 0$

(b) le mouvement de l'avion est imposé pour $t > 0$.

Nous utiliserons de tels mouvements pour définir et étudier la stabilité, et nous établirons un critère qui sera applicable si nous pouvons déterminer le mouvement de l'atmosphère dans certains mouvements (C).

Or, nous établirons (2.5.5.) que cette détermination est unique- sans introduire aucune autre hypothèse que celles de la mécanique rationnelle.

Les hypothèses ci-dessus deviendront donc des théorèmes, à l'exclusion peut-être de la condition de Kutta-Joukowski.

De toutes façons, elles ne seront plus nécessaires pour déterminer le mouvement.

Nous transformerons ensuite les écoulements (C) par la transformation de Laplace-Carson : les écoulements " symboliques " trouvés de cette façon recevront une interprétation physique : nous leur ferons correspondre des écoulements réels où les variables seront de la forme $\mathcal{R}(z e^{pt})$, et dans le cas limite où p sera imaginaire pur, on retrouvera des écoulements harmoniques. C'est ce cas qui interviendra

../...

../...

d'ailleurs au premier chef dans notre critère de stabilité.

Mais grâce à la considération des écoulements (C) , ces derniers écoulements seront eux aussi parfaitement déterminés par le mouvement de l'avion.

1.2.5.- Méthode d'étude de la stabilité -

Par analogie avec les systèmes linéaires à un nombre fini de degrés de liberté, on admet en général que lorsqu'un paramètre évolue (on considère le plus souvent la vitesse de vol), le passage de la stabilité à l'instabilité a lieu lorsqu'un mouvement libre du système avion-atmosphère cesse d'être " amorti" pour devenir " amplifié " c'est-à-dire lorsqu'un mouvement libre harmonique est possible.

Les vitesses ainsi déterminées sont appelées vitesses critiques.

On admet en général que l'avion est stable en-dessous de la première vitesse critique, cesse de l'être au-dessus, et on détermine par une discussion assez délicate si la vitesse critique suivante rétablit la stabilité, ou, au contraire, aggrave l'instabilité.

Afin d'éliminer ces hypothèses et les erreurs qu'elles risquent d'entraîner, nous donnerons une condition nécessaire et suffisante de stabilité, valable à une vitesse arbitraire donnée, et qui ne fait cependant intervenir que les écoulements harmoniques du type défini ci-dessus.

../...

CHAPITRE II

- LE PROBLEME DE LA DETERMINATION DU MOUVEMENT

§ 2.1 - Géométrie et cinématique du vol -

2.1.1. - Représentation des mouvements de l'avion -

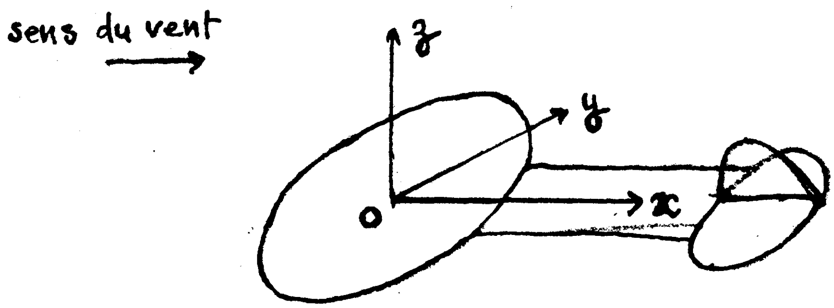
Dans les premières études de la stabilité des avions, on considérait que celui-ci était un ensemble de solides articulés ; les degrés de liberté du système étaient constitués par les déplacements d'ensemble et les rotations de gouvernes.

Puis on s'est aperçu que les déformations élastiques, particulièrement celles de la voilure, jouaient un grand rôle dans le phénomène du flutter.

Sans traiter l'avion comme un corps élastique continu, nous pourrons cependant tenir compte de l'élasticité en ajoutant aux paramètres précédents un certain nombre de degrés de liberté correspondant à des déformations élastiques.

Nous verrons ci-dessous (2.4.3) comment un essai de vibrations au sol permet de les choisir et d'en limiter raisonnablement le nombre.

Nous repérerons les déformations de l'avion par rapport à un système d'axes A défini dans le mouvement permanent ; O est le centre de gravité de l'avion, Ox le vecteur unitaire dirigé dans le sens opposé de la vitesse, Oz est dans le plan de symétrie de l'avion, le trièdre Oxyz est direct.



Les déformations étant repérées par rapport à ces axes, nous aurons une représentation de tous les mouvements possibles en ajoutant les six paramètres définissant la position du trièdre Oxyz par rapport à celle qu'il aurait si le régime était resté permanent.

2.1.2 - Cinématique de l'écoulement -

Pour représenter l'état de l'atmosphère, nous considérerons un état de référence où celle-ci est immobile, avec une pression ϖ_0 et une masse spécifique ρ_0 constantes.

M_0 étant le point occupé par une molécule dans l'état de référence, le mouvement de l'atmosphère sera complètement défini si nous connaissons le point M occupé par cette molécule, en fonction de M_0 et t.

Les points M et M_0 seront repérés dans les mêmes axes fixes (distincts par conséquent des axes mobiles A définis au paragraphe précédent).

Nous admettrons que M_0 est fonction dérivable de x, y, z, t, sauf sur un certain nombre de surfaces particulières. Le jacobien $\dfrac{\mathcal{D}(x_0, y_0, z_0)}{\mathcal{D}(x, y, z)}$ ne sera pas nul, il sera même positif : il représente en effet la densité du fluide par rapport à l'état de référence

(II,1) $$\boxed{\frac{\mathcal{D}(x_0, y_0, z_0)}{\mathcal{D}(x, y, z)} = \frac{\rho}{\rho_0}}$$

Le contact de l'atmosphère et de l'avion s'exprimera sous forme variationnelle en écrivant qu'une molécule en contact avec la surface de l'avion ne peut en général ni le quitter, ni le traverser :

(II,2) $$\boxed{\left(\vec{n}_A , \delta M - \delta P\right) = 0}$$

$\vec{n}_A$ désignant la normale à l'avion, δP la variation de la molécule P de l'avion coïncidant à l'instant t avec M.

Elle s'écrira sous forme cinématique :

(II,3) $$\boxed{\left(\vec{n}_A , \dot{M} - \dot{P}\right) = 0}$$

Cette relation peut évidemment tomber en défaut sur une ligne particulière (ligne de décollement).

M sera supposée fonction continue de M_0 (deux molécules voisines à l'instant t étaient voisines dans la position de référence) sauf dans un cas : celui des molécules ayant été en contact avec l'avion.

Nous admettrons en effet que l'atmosphère quitte l'avion le long d'une ligne L, et que les deux nappes d'air qui arrivent en contact de part et d'autre de L resteront en contact le long d'une surface S, appelé <u>sillage</u> - sans toutefois se ressoudre nécessairement entre elles.

Cette condition s'écrit :

(II,4) $$\boxed{\left(\vec{n}_S \,,\, \delta M^+ - \delta M^-\right) = 0}$$

ou

(II,5) $$\boxed{\left(\vec{n}_S \,,\, \dot{M}^+ - \dot{M}^-\right) = 0}$$

en désignant par $\vec{n}_S$ la normale au sillage, et en affectant de façon arbitraire les indices + et - aux deux faces du sillage.

Cette dernière relation donne une interprétation du sillage: c'est une surface de <u>discontinuité tangentielle</u> de vitesse, que l'on peut, si l'on veut, interpréter comme une nappe tourbillonnaire, l'intensité tourbillonnaire étant le vecteur déduit de $\dot{M}^+ - \dot{M}^-$ par rotation de $+\pi/2$ autour de la normale extérieure de la face + (ce vecteur est indépendant du choix de la face +).

La théorie des tourbillons rend de grands services dans l'étude des fluides incompressibles, mais nous ne l'utiliserons pas ici, parce que son interprétation est délicate dans le cas des fluides compressibles.

En dehors du sillage, nous pourrons avoir des surfaces singulières, avec discontinuité de vitesse (ondes de choc) ou d'accélération (onde de Mach), mais nous postulerons la continuité de M en x_o , y_o , z_o , t sur ces surfaces.

2.1.3 - Symétries -

Notre but étant d'étudier la stabilité par les petits mouvements au voisinage du régime permanent, nous pourrons appliquer à ceux-ci le principe de superposition.

Si l'avion est doué d'un plan de symétrie géométrique et mécanique, il est clair que le régime permanent postulé sera symétrique par rapport à ce plan, et qu'à tout mouvement possible correspondra un autre mouvement possible ; le mouvement énantiomorphe.

Désignons par A l'opérateur linéaire définissant la symétrie par rapport au plan.

Dans un mouvement quelconque, la vitesse additionnelle d'un point M de l'avion ou de l'atmosphère étant V, celle du point symétrique A(M) étant W, nous sommes certains qu'il existe un autre mouvement dans lequel la vitesse additionnelle de M est A(W), et celle de A(M), A(V). Le principe de superposition nous permet de définir deux autres mouvements, en faisant la somme et la différence des vitesses additionnelles de ces deux-là.

On a alors les vitesses :

	Mouvement 1	Mouvement 2
vitesse de M	$V_1 = V + A(W)$	$V_2 = V - A(W)$
vitesse de A(M)	$W_1 = W + A(V)$	$W_2 = W - A(V)$

L'opérateur A étant une symétrie, c'est-à-dire vérifiant $A^2 = 1$, il en résulte que l'on a :

$$\begin{cases} V_1 = A(W_1) \\ W_1 = A(V_1) \end{cases} \qquad \begin{cases} V_2 = -A(W_2) \\ W_2 = -A(V_2) \end{cases}$$

Nous dirons que le premier mouvement est symétrique, le second antisymétrique. Comme on a évidemment :

$$V = \frac{1}{2}\left[V_1 + V_2\right] \quad , \quad W = \frac{1}{2}\left[W_1 + W_2\right]$$

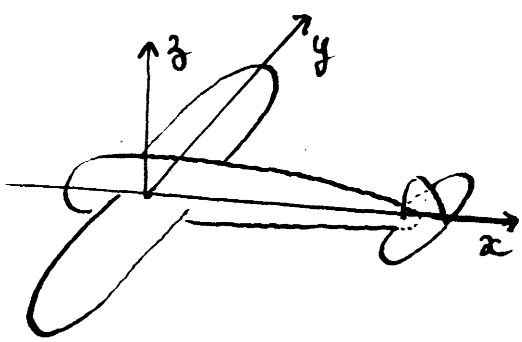
nous voyons que tout mouvement voisin du régime permanent peut être considéré comme obtenu par superposition d'un mouvement symétrique et d'un mouvement antisymétrique.

Sans avoir défini encore ce que nous entendons par mouvement stable et par mouvement instable, nous admettrons intuitivement que la superposition de deux mouvements stables est un mouvement stable. Il en résulte que si les deux composantes (symétrique et antisymétrique) d'un mouvement sont stables, celui-ci est stable, ou, ce qui revient au même, <u>qué s'il existe un mouvement instable, il existera un mouvement symétrique ou un mouvement antisymétrique instable</u>.

Par conséquent, la condition nécessaire et suffisante de stabilité est la stabilité pour tous les mouvements symétriques d'une part, pour tous les mouvements antisymétriques d'autre part.

Ceci nous permet donc de séparer le problème en deux parties, que nous pourrons étudier séparément, si nous prenons la précaution de répartir nos paramètres de façon à ce qu'ils représentent des petits mouvements, soit symétriques, soit antisymétriques.

Etudions, en particulier, la répartition des degrés de liberté de déplacement de l'avion. Nous pourrons représenter ces 6 paramètres par trois translations infinitésimales suivant les axes et par trois rotations infinitésimales autour des axes également.



On définit ainsi des mouvements symétriques et antisymétriques, avec la répartition suivante :

Symétriques	translation suivant Ox translation suivant Oz rotation autour de Oy (tangage)
Antisymétriques	translation suivant Oy rotation autour de Ox (roulis) rotation autour de Oz (lacet)

Remarquons encore que, dans un mouvement symétrique, les vitesses des points du plan de symétrie vérifient $V_1 = A(V_1)$, elles sont donc situées dans ce plan. Dans un mouvement antisymétrique, elles vérifient $V_2 = - A(V_2)$, elles sont donc perpendiculaires au plan.

§ 2.2 - Equations du mouvement -

2.2.1 - Equations mécaniques de l'avion -

En portant désormais notre attention sur l'une de ces deux catégories de mouvements, nous désignerons par $q_1, q_2, \dots q_n$ les n paramètres utiles déterminant la position de l'avion.

Négligeons pour l'instant [1] l'amortissement interne de l'avion.

Celui-ci sera alors entièrement caractérisé au point de vue mécanique par la donnée de son énergie potentielle de déformation W, fonction des q_i, et de son énergie cinétique T par rapport au trièdre A. T est une forme quadratique des $\dot{q}_i$.

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j} m_{ij} \cdot \dot{q}_i \dot{q}_j$$

L'équation du mouvement de l'avion s'écrit alors :

$$\sum_j \left[\frac{d}{dt} \left(\sum_i m_{ij} \dot{q}_i \right) - \frac{1}{2} \sum_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k \frac{\partial m_{ik}}{\partial q_j} + \frac{\partial W}{\partial q_j} \right] \delta q_j = \delta \mathcal{C}$$

en désignant par $\delta \mathcal{C}$ le travail des forces extérieures dans le déplacement virtuel δq_i. Il se compose :

1°/ du travail des forces aérodynamiques qui s'écrira [2] :

$$- \iint_A \varpi \cdot [\delta \underline{P}]_n \cdot d\sigma$$

1) voir (2.4.3)

2) voir ci-dessous (2.3)

en désignant par ϖ la pression, $\delta \mathcal{P}$ le déplacement virtuel d'un point P de la surface de l'avion, $[\delta \mathcal{P}]_n$ sa composante normale extérieure, $d\sigma$ l'élément d'aire, soit encore :

$$-\sum_j \left[\iint_A \varpi \left[\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial q_j}\right]_n \cdot d\sigma \right] \delta q_j$$

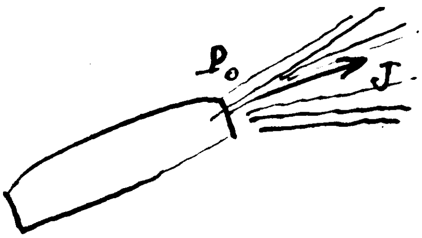
2°/ du travail de la pesanteur, qui s'écrira :

$$-m_o g \sum \frac{\partial z_G}{\partial q_j} \delta q_j$$

$m_o g$ étant le poids de l'avion, z_G la cote de son centre de gravité.

3°/ du travail des propulseurs. Evaluons-le dans le cas d'un seul propulseur, par exemple.

Soit f la poussée, P_o son point d'application, J le vecteur unitaire de la direction du jet.



Le travail sera le produit scalaire $-f(\delta \mathcal{P}_o, J)$, soit

$$-f \sum_j \left(\frac{\partial \mathcal{P}_o}{\partial q_j}, J\right) \delta q_j$$

4°/ du travail de petites forces perturbatrices arbitraires, que nous supposons appliquées afin d'éprouver la stabilité de l'avion; il s'écrira :

$$-\sum_j \lambda_j \delta q_j$$

Les équations du mouvement s'écriront donc finalement :

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\sum_i m_{ij} \dot{q}_i\right) - \frac{1}{2}\sum_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k \frac{\partial m_{ik}}{\partial q_j} + \frac{\partial W}{\partial q_j} + \\ &+ \iint_A \varpi \left[\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial q_j}\right]_n d\sigma + f\left(\frac{\partial \mathcal{P}_o}{\partial q_j}, J\right) + m_o g \frac{\partial z_G}{\partial q_j} = \lambda_j \end{aligned}} \qquad (II,6)$$

pour j = 1, 2, ... n.

2.2.2 - Equations aérodynamiques -

Puisque nous assimilons l'air à un fluide parfait compressible, l'atmosphère constituera un système mécanique non dissipatif, dont nous pourrons déterminer le mouvement par le principe de Lagrange-Hamilton.

Puisque nous avons déterminé les liaisons mécaniques auxquelles elle est soumise (2.1.2), il nous suffira de connaître son énergie cinétique et son énergie potentielle.

En introduisant l'état de référence défini en (2.1.2), on pourra écrire l'énergie cinétique T sous la forme :

$$\frac{1}{2}\iiint \rho_0 \left[\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right] dx_0\, dy_0\, dz_0$$

L'énergie potentielle de l'atmosphère, si nous négligeons l'influence de la pesanteur, sera simplement son énergie élastique de déformation.

Considérons un élément de volume de l'atmosphère dans l'état de référence : dire que le fluide est parfait et compressible, c'est dire que l'énergie de cet élément à l'instant t ne dépendra que du volume qui lui sera offert. Nous pourrons l'écrire :

$$f\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) dx_0\, dy_0\, dz_0$$

et nous pourrons supposer f(1) = 0, puisque l'énergie n'est définie qu'à une constante additive près.

Nous pouvons donc mettre la fonction de Lagrange sous la forme :

(II,7) $$\boxed{L = \iiint \left[\frac{1}{2}\rho_0\left[\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right] - f\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)\right] dx_0\, dy_0\, dz_0}$$

l'énergie totale de l'atmosphère étant

(II,8) $$\boxed{E = \iiint \left[\frac{1}{2}\rho_0\left[\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right] + f\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)\right] dx_0\, dy_0\, dz_0}$$

../...

et l'action hamiltonnienne $\mathcal{A} = \int_{t_0}^{t_1} L\, dt$

Pour exprimer la fonction f, considérons une certaine masse d'air, occupant le volume υ_0 dans l'état de référ nce. Lorsque son volume sera υ , sa masse spécifique étant $\rho = \frac{\upsilon_0}{\upsilon} \rho_0$, son énergie sera :

$$W = \upsilon_0 f\left(\frac{\upsilon}{\upsilon_0}\right)$$

et sa pression ϖ , qui est par définition $-\frac{dW}{dt}$, vaudra

$$-f'\left(\frac{\upsilon}{\upsilon_0}\right)$$

En admettant la loi de compressibilité adiabatique :

$$\varpi \rho^{-\gamma} = \varpi_0 \rho_0^{-\gamma}$$

(γ , rapport des chaleurs spécifiques de l'air, est voisin de 1,41),

il vient :

(II,9) $$\boxed{f'\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) = -\varpi = -\varpi_0 \left[\frac{\rho_0}{\rho}\right]^{-\gamma}}$$

et puisque f(1) = 0

(11,10) $$\boxed{f(u) = \frac{\varpi_0}{\gamma - 1}\left[u^{1-\gamma} - 1\right]}$$

Le principe d'Hamilton nous apprend que le mouvement sera déterminé en écrivant que l'action hamiltonnienne $\mathcal{A}$ est stationnaire pour les variations de l'état de l'atmosphère compatibles à tout instant avec les liaisons, et nulles pour $t = t_0$, $t = t_1$.

Nous calculerons donc :

$$\delta\mathcal{A} = \delta\mathcal{A}_1 + \delta\mathcal{A}_2$$

avec $\delta\mathcal{A}_1 = \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint \rho_0 \left[\dot{x}\,\delta\dot{x} + \dot{y}\,\delta\dot{y} + \dot{z}\,\delta\dot{z}\right] dx_0\, dy_0\, dz_0$

../...

../...

$$\delta \mathcal{A}_2 = \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint \left[f'\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) \frac{\rho_0}{\rho^2} \delta\rho \right] dx_0\, dy_0\, dz_0$$

On a

$$\delta \mathcal{A}_1 = \iiint \rho_0\, dx_0\, dy_0\, dz_0 \int_{t_0}^{t_1} \dot{x}\, d\delta x + \dot{y}\, d\delta y + \dot{z}\, d\delta z =$$

$$= -\iiint \rho_0\, dx_0\, dy_0\, dz_0 \int_{t_0}^{t_1} [\ddot{x}\,\delta x + \ddot{y}\,\delta y + \ddot{z}\,\delta z]\, dt$$

soit, en remarquant que $\rho_0\, dx_0\, dy_0\, dz_0 = \rho\, dx\, dy\, dz$

$$\delta \mathcal{A}_1 = -\int_{t_0}^{t_1} dt \iiint (\ddot{M}, \delta M)\, \rho\, dx\, dy\, dz$$

Par ailleurs l'égalité (II,1)

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{D(x, y, z)}{D(x_0, y_0, z_0)}$$

donne par différenciation :

(II,11) $$\frac{\delta\rho}{\rho} = -\operatorname{div}(\delta M)$$

en désignant par div l'opérateur de divergence dans l'espace x,y,z.

On a donc

$$\delta \mathcal{A}_2 = -\int_{t_0}^{t_1} dt \iiint f'\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) \frac{\rho_0\, dx_0\, dy_0\, dz_0}{\rho} \operatorname{div}(\delta M) =$$

$$= -\int_{t_0}^{t_1} dt \iiint dx\, dy\, dz \left[\operatorname{div}\left(f'\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) \delta M \right) - \left(\operatorname{Grad} f'\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right), \delta M \right) \right]$$

d'où , par application de la formule d'Ostrogradsky :

$$\delta \mathcal{A}_2 = \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint \left(\operatorname{Grad} f'\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right), \delta M \right) dx\, dy\, dz + \int_{t_0}^{t_1} dt \iint f'\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) \left(\delta M, \vec{n}\, d\sigma \right)$$

cette dernière intégrale étant étendue à la surface limitant le domaine de régularité de l'atmosphère, c'est-à-dire l'aile et le sillage

../...

../...

($d\sigma$ désigne l'élément d'aire, $\vec{n}$ le vecteur unitaire de la normale orienté vers le fluide).

Les intégrales à l'infini ne créent pas de difficultés si on suppose que $\dot{M}$ (donc δM) est nul en dehors d'une certaine sphère dont le rayon est fonction du temps; ceci aura lieu si l'agitation de l'atmosphère a été créée dans une région bornée de celle-ci, en raison de la vitesse finie de propagation des ébranlements. Par ailleurs, nous supposerons provisoirement qu'il n'y a pas d'onde de choc (voir ci-dessous 2.5.2).

On écrira donc finalement :

$$\delta \mathcal{A} = \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ \iiint \left(\operatorname{grad}\left(f'\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)\right) - \rho \ddot{M}, \delta M \right) dx\,dy\,dz + \iint f'\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)\left(\delta M, \vec{n}\, d\sigma\right) \right\} = 0$$

δM étant arbitraire à l'intérieur du fluide, l'intégrale triple fournit la relation d'Euler :

$$\ddot{M} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{Grad} \varpi$$

L'intégrale double sur les deux faces du sillage s'écrit :

$$\iint \varpi^+ \left(\delta M^+, n_S^+\right) d\sigma + \iint \varpi^- \left(\delta M^-, n_S^-\right) d\sigma$$

soit, puisque $n_S^+ = -n_S^-$

$$\iint \left(\varpi^+ \delta M^+ - \varpi^- \delta M^-, n_S^+ \right) d\sigma = 0$$

avec la liaison (II.4) : $\left(n_S^+ , \delta M^+ - \delta M^- \right) = 0$

cette relation qui s'écrit :

$$\iint \left\{ \left(\varpi^+ \left[\delta M^+ - \delta M^-\right], n_S^+ \right) + \left(\left[\varpi^+ - \varpi^-\right] \delta M^-, n_S^+ \right) \right\} d\sigma = 0$$

../...

../...

devient simplement, puisque $(\delta M^-, n_S^+)$ est arbitraire :

$$\varpi^+ = \varpi^-$$

elle exprime la continuité de la pression au travers du sillage.

Considérons enfin l'intégrale sur l'avion.

Puisque nous n'avons pas introduit la fonction de Lagrange de celui-ci, c'est que nous considérons son déplacement comme imposé. On a donc :

$\delta \ell = 0$ dans (II,2), soit :

$$(\vec{n}_A \,;\, \delta M) = 0$$

et l'intégrale $-\iint \varpi\,(\delta M, \vec{n}_A\, d\sigma)$

s'annule automatiquement sur lui.

Si, au contraire, nous traitions globalement le système avion-atmosphère, cette intégrale se transformerait en :

$$-\iint \varpi\,(\delta \ell, \vec{n}_A)\, d\sigma$$

et fournirait l'expression des efforts aérodynamiques que nous avons admise en (2.2.1).

Nous avons donc le système complet d'équations :

(II,12)

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{M} = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{Grad}\,\varpi \\ &\varpi = -f'\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) = \varpi_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma} \\ &\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{D(x,y,z)}{D(x_0,y_0,z_0)} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\,\mathrm{div}(\dot{M}) \end{aligned}\right\} \quad \underline{\text{dans l'atmosphère}}$$

$$(\vec{n}_A, \dot{M} - \dot{\ell}) = 0 \qquad \underline{\text{sur l'avion}}$$

$$\left.\begin{aligned} &(\vec{n}_S, \dot{M}^+ - \dot{M}^-) = 0 \\ &\varpi^+ = \varpi^- \end{aligned}\right\} \quad \underline{\text{sur le sillage}}$$

../...

../...

Ces équations restent inchangées si nous supposons les axes de coordonnées en mouvement de translation rectiligne uniforme, puisque le temps n'intervient que par des accélérations ou des différences de vitesses.

§ 2.3 - Etude énergétique de l'écoulement -

Dérivons par rapport au temps l'expression (II,8) de l'énergie. Il vient :

$$\frac{dE}{dt} = \iiint \left[\rho_0 \left[\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} \right] - f'\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) \frac{\rho_0}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right] dx_0\, dy_0\, dz_0 =$$

$$= \iiint \left[\rho\left(\dot{M}, \ddot{M}\right) + \frac{\varpi}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right] dx\, dy\, dz$$

(II,12) nous permet de remplacer $\ddot{M}$ par $-\frac{1}{\rho}\,\mathrm{Grad}\,\varpi$

$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t}$ par $-\mathrm{div}(\dot{M})$, il vient donc :

$$\frac{dE}{dt} = -\iiint \left[\left(\dot{M}, \mathrm{Grad}\,\varpi\right) + \varpi\, \mathrm{div}\, \dot{M} \right] dx\, dy\, dz =$$

$$= -\iiint \mathrm{div}\left(\dot{M}\,\varpi\right) dx\, dy\, dz$$

soit, grâce à la formule d'Ostrogravsky :

$$\frac{dE}{dt} = \iint \varpi \left[\dot{M}\right]_n d\sigma$$

l'intégrale étant étendue à l'aile et au sillage, $\left[\dot{M}\right]_n$ était la composante de $\dot{M}$ sur la normale dirigée vers le fluide.

Les relations $\varpi^+ = \varpi^-$, $\left(\vec{n}_S, \dot{M}^+ - \dot{M}^-\right) = 0$ montrent que l'intégrale s'annule sur le sillage, et en tenant compte de

$$\left(\vec{n}_A, \dot{M}\right) = \left(\vec{n}_A, \dot{P}\right)$$

../...

../...

il vient :

(II,13) $$\boxed{\frac{dE}{dt} = \iint \overline{\varpi} \cdot (\vec{n}_A, \dot{\ell})\, d\sigma}$$

l'intégrale étant étendue à la surface de l'avion.

Cette expression est bien celle de la puissance fournie par l'avion : on vérifie la conservation de l'énergie, comme dans tous les cas où l'on peut appliquer le principe d'Hamilton.

Nous allons maintenant transformer l'expression (II,8) de l'énergie.

Nous avons supposé qu'à un instant t donné, les ébranlements ne s'étaient pas propagés à l'extérieur d'une certaine sphère Σ centrée sur l'avion.

La masse d'air contenue dans Σ a pour expression

$$\iiint_{\Sigma - [A+S]} \rho \, dx\, dy\, dz$$

en désignant pas $A+S$ l'avion et son sillage.

Cette masse ne varie pas depuis l'instant initial jusqu'à l'instant t, puisqu'aucune molécule ne franchit Σ avant l'instant t. Elle est donc égale au produit par ρ_0 du volume occupé initialement par cette masse d'air, soit le volume de Σ diminué du volume initial de l'avion.

Par suite, si ce volume ne change pas, l'intégrale

$$\iiint_{\Sigma - [A+S]} [\rho - \rho_0]\, dx\, dy\, dz$$

est nulle.

Puisque $\rho = \rho_0$ en dehors de Σ, on a donc :

(II,14) $$\boxed{\iiint [\rho - \rho_0]\, dx\, dy\, dz = 0}$$

../...

../...

à condition que le volume de l'avion reste invariable.

L'énergie

$$E = \iiint \left[\frac{1}{2} \rho_0 \dot{H}^2 + f\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) \right] dx_0\, dy_0\, dz_0 = \iiint \left[\frac{1}{2} \rho \dot{H}^2 + \frac{\rho}{\rho_0} f\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) \right] dx\, dy\, dz$$

pourra aussi s'écrire :

$$E = \iiint \left[\frac{1}{2} \rho \dot{H}^2 + \frac{\rho}{\rho_0} f\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) + \lambda \left[\rho - \rho_0\right] \right] dx\, dy\, dz$$

λ étant une constante quelconque.

Nous prendrons $\lambda = \dfrac{f'(1)}{\rho_0} = -\dfrac{\varpi_0}{\rho_0}$

L'expression $\dfrac{\rho}{\rho_0} f\left(\dfrac{\rho_0}{\rho}\right) + \lambda \left[\rho - \rho_0\right]$ devient, avec $u = \dfrac{\rho_0}{\rho}$

$\dfrac{1}{u} \left[f(u) + f'(1) \cdot (1-u) \right]$

L'expression $f(u) + f'(1) \cdot (1-u)$ est nulle, ainsi que sa dérivée par rapport à u, pour $u = 1$. Elle sera donc toujours positive si sa dérivée seconde, $f''(u)$ est positive.

Ceci a lieu en particulier pour la loi adiabatique, où l'on a :

$$f''(u) = \frac{\gamma\, \varpi_0}{u^{\gamma+1}}$$

Dans ces conditions l'énergie totale de l'atmosphère qui s'écrit:

$$E = \iiint \left\{ \frac{1}{2} \rho \dot{H}^2 + \frac{\rho}{\rho_0} f\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) + \varpi_0 \left[1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right] \right\} dx\, dy\, dz \qquad \text{(II,15)}$$

et qui était nulle dans l'état de référence, est positive dès qu'il y a mouvement: si le volume de l'avion reste invariable, celui-ci doit fournir du travail pour la mettre en mouvement.

Cette propriété jouera un rôle essentiel dans la détermination de l'écoulement linéarisé (cf 2.5.5.).

§ 2.4 - LINEARISATION

2.4.1 - Méthode générale [1)]

Considérons un système physique quelconque, défini par un certain nombre de paramètres s_i , vérifiant des équations

$$f_j(s_i)=0$$

Supposons que nous connaissions une solution particulière exacte de ces équations.

Pour étudier les solutions voisines, nous chercherons une solution où les dépendent tous d'un même paramètre ε , et qui se réduise à la solution S_0 pour $\varepsilon=0$.

Si la dérivation par rapport à ε est possible, on aura

$$f_j(S_i)=0 \qquad \sum_h \frac{\partial f_j}{\partial S_h}(S_i)\cdot\frac{\partial S_h}{\partial \varepsilon}=0$$

et en faisant $\varepsilon=0$, on obtient les relations :

$$\sum_h \frac{\partial f_j}{\partial S_h}(S_{i_0})\left[\frac{\partial S_h}{\partial \varepsilon}\right]_0=0$$

qui constituent un système d'équations linéaires et homogènes en les $\left[\frac{\partial S_h}{\partial \varepsilon}\right]_0$.

Si nous résolvons ce système, nous aurons une solution approchée du problème en faisant un développement limité au premier ordre :

$$S_i=\left[S_i\right]_0+\varepsilon\left[\frac{\partial S_i}{\partial \varepsilon}\right]_0$$

../...

1) Cf. Bibl. 1.

../...

solution que nous pouvons espérer satisfaisante si nous ne nous éloignons pas trop de la solution S_0 .

<u>Pratiquement</u>, on voit qu'on sera amené à poser

$$S_i = [S_i]_0 + \varepsilon [S_i]_1$$

et à remplacer toutes les équations du problème par les équations dérivées par rapport à ε , dans lesquelles on fera $\varepsilon = 0$.

Pour interpréter les résultats, on devra ensuite remplacer

$[S_i]_1$ par $\dfrac{S_i - [S_i]_0}{\varepsilon}$. Mais comme les équations sont homogènes au 1er degré, le résultat sera indépendant de la valeur attribuée à ε , on pourra par exemple remplacer ε par 1.

2.4.2.- <u>Conditions de possibilité</u> - <u>Nouvelles variables</u> -

Pour pouvoir linéariser notre problème, représenté par les équations (II,6) (II,12), il est indispensable d'en connaître une solution particulière exacte.

Nous en chercherons une où l'avion ne trouble pas l'air sur son passage : dans les axes A, le vecteur $\dot{M}$ sera constant et égal à $-\dot{I}V$, $\dot{I}$ étant le vecteur unitaire de l'axe des x, V la vitesse de vol, on aura $\varpi = \varpi_0$, $\rho = \rho_0$. Les équations indéfinies de (II,12) seront ainsi satisfaites.

Nous pourrons satisfaire l'équation

$$(\vec{n}_A , \dot{M} - \dot{P}) = 0$$

qui s'écrit

$$(\vec{n}_A , \dot{P}) = V (\vec{n}_A , \dot{I})$$

en prenant[1] $\dot{P} = 0$, $(\vec{n}_A , \dot{I}) = 0$

../...

1) D'autres solutions sont évidemment possibles: on pourrait, par exemple, considérer une hélice mince de forme convenable tournant à vitesse constante.

../...

L'avion doit être immobile, et se réduire à une surface mince constamment tangente au vecteur $\dot{I}$, c'est-à-dire à une portion de cylindre à génératrice parallèles à Ox.

Dans ces conditions, le sillage se réduit au prolongement arrière de ce cylindre, et les conditions (II,12) sont bien toutes vérifiées.

Considérons maintenant les équations (II,6).

Elles seront vérifiées, et la surface de l'avion sera immobile :

1°/ Si les paramètres q_i dont dépend la surface extérieure de l'avion sont constants.

2°/ Si les autres paramètres q_i ont une dérivée par rapport au temps constante, les coefficients m_{ii} étant constants quand les q_i le sont.

Ce sera notamment le cas lorsque q_i représentera l'angle de rotation propre d'un arbre intérieur : nous pourrions par ce moyen étudier l'influence de l'effet gyroscopique sur la stabilité.

En fait, nous nous limiterons ici aux q_i constants, et nous prendrons nulle leur valeur dans le cas S_o.

3°/ Si $\left[\frac{\partial W}{\partial q_j}\right]_o = 0$ la position $q_i = 0$ est une position d'équilibre de l'avion lorsqu'il n'est soumis à aucune force.

4°/ Si l'avion reste une surface mince dans ses déformations éventuelles. En effet, ϖ étant une constante, l'expression $\iint \varpi \left[\frac{\partial P}{\partial q_j}\right]_n d\sigma$ est égale au produit par ϖ de la dérivée par rapport à q_j du volume de l'aile: elle est alors nulle.

5°/ Si f et g sont nuls.

6°/ Si les forces perturbatrices λ_i sont nulles.

C'est au voisinage de ces conditions que nous nous placerons.

Conformément à la méthode générale, nous introduirons de nouvelles variables, dépendant linéairement du paramètre ε, de façon à retrouver la solution S_o pour $\varepsilon = 0$.

../...

../...

a) Pour les variables aérodynamiques, on a dans le cas S_0 :

$$\varpi = \varpi_0 \quad , \quad \rho = \rho_0$$

La vitesse de l'air relativement à l'avion étant $\dot{I}\,V$

Nous introduirons la quantité $a = \sqrt{\dfrac{f''(1)}{\rho_0}} = \sqrt{\dfrac{\gamma\varpi_0}{\rho_0}}$

qui est la célérité du son (cf d'ailleurs 2.5.2) dans les conditions considérées, le nombre de Mach du vol $\beta = V/a$

et nous poserons

(II,16) $$\boxed{\begin{aligned} \varpi &= \varpi_0 + \varepsilon a^2 \rho_0 s \\ \rho &= \rho_0 + \varepsilon \rho_0 s' \\ \dot{M} &= I a \beta + \varepsilon a W \end{aligned}}$$

les quantités s, s' , W introduites étant sans dimensions.

b) Dans le cas S_0 , nous voulons que l'avion se réduise à une surface mince dans ses déformations éventuelles.

Nous aurons donc une représentation paramétrique valable pour les deux faces $P = F(u, v, q_i)$

Par ailleurs, pour $q_i = 0$, cette surface se réduit à une surface cylin - drique à génératrices parallèles au vent, que nous appellerons squelette de l'avion réel.

Nous poserons donc :

(II,17) $$\boxed{P = F(u, v, q_i) + \varepsilon\, G^{\pm}(u, v, q_i)}$$

les indices + et - correspondant aux deux faces de l'avion.

Par ailleurs, dans le cas S_0 , on a :

$$q_i = f = g = \lambda_i = 0$$

Nous ferons donc la substitution :

../...

../...

(II,18)
$$\boxed{\begin{array}{l} q_i \to \varepsilon q_i \\ f \to \varepsilon f \\ g \to \varepsilon g \\ \lambda_i \to \varepsilon \lambda_i \end{array}}$$

Enfin l'équation du sillage se mettra sous la représentation paramétrique:

(II,19)
$$\boxed{H = F(u,v,0) + \varepsilon H}$$

puisque dans le cas S_o le sillage est le prolongement arrière du squelette.

L'avion réel étant donné , nous choisirons comme squelette la surface cylindrique mince qui l'approche au mieux dans sa position $q_i = 0$ qui est , rappelons-le, sa position d'équilibre, quand il n'est soumis à aucune force. Pratiquement, on se contentera le plus souvent de prendre un squelette plan.

Le terme $F(u,v,q_i)$ représentera la déformation du squelette pour la valeur correspondante des q_i , les termes $G^{\pm}$ seront un terme d'épaisseur de l'aile. Nous constaterons que ce terme disparaîtra dans l'étude de la stabilité.

2.4.3.- Linéarisation des équations mécaniques -

On fait dans (II,6) la substitution (II,18). Il vient

$$\varepsilon \frac{d}{dt}\left(\sum_{ij} m_{ij}\dot{q}_i\right) - \frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k\frac{\partial m_{ik}}{\partial q_j} + \frac{\partial W}{\partial q_j} +$$
$$+ \iint \left[\varpi_o + \varepsilon a^2 \rho_o s\right]\left[\frac{\partial P}{\partial q_j}\right]_n d\sigma + \varepsilon f \cdot \left(\frac{\partial P_o}{\partial q_j}, \partial\right) +$$
$$+ \varepsilon m_o g \frac{\partial z_G}{\partial q_j} = \varepsilon \lambda_j$$

../...

../...

Le terme $\varpi_0 \iint \left[\frac{\partial P}{\partial q_j}\right]_n d\sigma$ est identiquement nul, si comme nous le supposons, le volume de l'avion réel reste constant dans les déformations.

L'intégrale double se réduit donc à

$$\varepsilon a^2 \rho_0 \iint s \left[\frac{\partial P}{\partial q_j}\right]_n d\sigma$$

En décrivant par rapport à ε , et en faisant $\varepsilon = 0$, il restera :

$$a^2 \rho_0 \iint s \left[\frac{\partial P}{\partial q_j}\right]_n d\sigma$$

l'intégrale étant prise dans le cas S_0 , c'est-à-dire sur le squelette, et avec $\varepsilon = 0$.

(II,17) nous montre que pour $\varepsilon = 0$, $\left[\frac{\partial P}{\partial q_j}\right]_n$ a la même valeur au signe près, sur les deux faces de l'avion.

En appliquant le même traitement aux différents termes de l'équation on arrive finalement à l'équation :

$$\boxed{\sum_i m_{ij}\ddot{q}_i + \sum_i \frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial q_j} + a^2 \rho_0 \iint [s^+ - s^-]\cdot\left[\frac{\partial P}{\partial q_j}\right]_{n^+} d\sigma = \lambda_j + \xi_j} \qquad \text{(II,20)}$$

où l'intégrale est prise sur la face + de l'avion, et où ξ_j représente le terme constant

$$-\rho\cdot\left[\frac{\partial P_0}{\partial q_j} , J\right] - m_0 g \frac{\partial z_G}{\partial q_j}$$

qui n'interviendra pas dans l'étude de la stabilité.

Ce système d'équations linéaires pourra s'écrire en notation matricielle.

En désignant pour abréger par E_i la colonne $\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ (rang i) par $\overline{E}_i$ la ligne transposée, nous poserons

../...

../...

(II,21)
$$\boxed{\begin{aligned}
&Q = \sum_i E_i q_i \\
&M = \sum_{ij} E_j \, w_{ij} \, \overline{E}_i \\
&K = \sum_{ij} E_j \frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial q_j} \overline{E}_i \\
&\Lambda = \sum_i E_i \lambda_i \\
&\Xi = \sum_i E_i \xi_i \quad , \quad F_j = \left[\frac{\partial \ell}{\partial q_j}\right]_{n^+}
\end{aligned}}$$

et l'équation (II,20) deviendra :

(II,22)
$$\boxed{M\ddot{Q} + KQ + a^2 \rho_0 \sum_j E_j \iint F_j \left[\delta^+ - \delta^-\right] d\sigma = \Lambda + \Xi}$$

Les matrices M et K sont appelées respectivement <u>matrice des masses</u> et <u>matrices de rigidités</u>. Ce sont des matrices hermitiennes toutes les deux. La matrice M est définie positive, car l'énergie cinétique de l'avion, qui s'écrit $\frac{1}{2}\overline{\dot{Q}} M \dot{Q}$ est toujours positive (si elle s'an - nulait pour $\dot{Q} = 0$, on pourrait trouver une variation de Q qui n'entraînerait aucun déplacement de masse, les q_i seraient surabondants). Son déterminant est donc positif.

K est semi-positive car l'avion étant supposé stable dans sa position de repos, son énergie potentielle élastique y est minimum; et par ailleurs, les dérivées de cette énergie par rapport aux paramètres de déplacement sont nulles.

Pratiquement, on peut calculer directement la matrice M , à partir de la formule $2T = \dot{Q} M \dot{Q}$.

La matrice K peut être déterminée par la mesure des coefficients d'influence des efforts imposés en différents points de l'aile sur les déformations.

../...

../...

Une autre méthode consistera à faire un essai de vibrations (Bibl. 2) au sol, l'avion étant dans des conditions telles que l'équation de ses petits mouvements se réduise pratiquement à

$$M\ddot{Q} + KQ = 0$$

La matrice M étant régulière, puisque définie positive, cette équation s'écrira :

$$\ddot{Q} + M^{-1}KQ = 0$$

La matrice $M^{-1}K$, produit d'une matrice positive et d'une matrice semi-positive, a toutes ses valeurs propres réelles, positives ou nulles.

En désignant par ω_i^2 l'une d'elles, Q_i le mode associé :

$$M^{-1}KQ_i = Q_i\,\omega_i^2$$

on voit que l'on obtiendra les mouvements propres de l'aile sous la forme

$$Q = Q_i\,(\cos \omega_i t)$$

Par suite, l'essai de vibration nous donnera les valeurs propres et les modes de la matrice $M^{-1}K$, celle-ci sera entièrement déterminée.

On peut utiliser la recherche des mouvements propres pour réduire le nombre de degrés de liberté, puisqu'on peut estimer que ceux qui correspondent à des fréquences trop élevées ne peuvent entraîner d'instabilité.

On pourra également tenir compte d'un certain amortissement de structure en ajoutant au premier membre de l'équation (II,22) un terme $B\dot{Q}$, B étant une matrice symétrique semi-positive. L'expression $\frac{1}{2}\bar{\dot{Q}}B\dot{Q}$ sera la fonction de dissipation.

L'expérience ayant également déterminé les fonctions $F_j = \left[\frac{\partial \ell}{\partial q_j}\right]_u$ et éventuellement le second membre, nous voyons que nous connaîtrons l'équation des mouvements de l'avion si nous pouvons déterminer la valeur de $\mathfrak{s}$ sur le squelette.

../...

../...

2.4.4.- Linéarisation des équations aérodynamiques -

Les équations (II,12) s'écrivent, en considérant comme une fonction de x , y , z , t :

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \dot M}{\partial t} + \dot M_x \dfrac{\partial \dot M}{\partial x} + \dot M_y \dfrac{\partial \dot M}{\partial y} + \dot M_z \cdot \dfrac{\partial \dot M}{\partial z} + \dfrac{1}{\rho}\,\mathrm{Grad}\,\varpi = 0 \\[2ex] \varpi = -f'\left(\dfrac{\rho_0}{\rho}\right) \\[2ex] \mathrm{div}(\rho \dot M) + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \end{array}\right\} \text{dans l'atmosphère}$$

$$(\vec{n}_A \,,\, \dot M - \dot P) = 0 \qquad \text{sur les deux faces de l'avion}$$

$$\left.\begin{array}{l} (\vec{n}_S \,,\, \dot M^+ - \dot M^-) = 0 \\ \varpi^+ = \varpi^- \end{array}\right\} \text{sur le sillage}$$

En faisant les changements de variables (II,16,17,18,19) en dérivant par rapport à ε et en faisant ε = 0, il vient respectivement :

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial W}{\partial t} + \beta \frac{\partial W}{\partial x} + \mathrm{Grad}\, s = 0 \qquad s = s'$$

$$\mathrm{div}(W') + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial s'}{\partial t} + \beta \frac{\partial s'}{\partial x} = 0$$

$$W_n^{\pm} = \sum_i \frac{1}{\alpha} F_i \frac{\partial q_i}{\partial t} + \beta \frac{\partial F_i}{\partial x} q_i + \beta \frac{\partial \sigma^{\pm}}{\partial x} \qquad \text{sur le squelette}$$

$$\left.\begin{array}{l} W^+_{n+} = W^-_{n+} \\[2ex] s^+ = s^- \end{array}\right\} \text{sur le prolongement arrière du squelette.}$$

../...

../...

Nous voyons que le vecteur H représentant l'écart entre le prolongement du squelette et le sillage n'intervient plus :
désormais <u>c'est ce prolongement que nous appellerons le sillage</u>.

En posant :

(II,23) $$\boxed{S = \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t} + \beta\frac{\partial}{\partial x}}$$

en éliminant s' qui ne nous intéresse pas, nous aurons finalement le système complet des équations linéarisées.

(II,22) $$\boxed{H\ddot{Q} + KQ + a^2\rho_0 \sum_j E_j \iint F_j\left[s^+ - s^-\right] d\sigma = \Lambda + \Xi}$$

(II,24)
$$\boxed{\begin{array}{ll}
\left.\begin{array}{l} \mathrm{Grad}(s) + S(W) = 0 \\ \mathrm{div}(W) + S(s) = 0 \end{array}\right\} & \text{dans l'atmosphère} \\
W_{n+}^{\pm} = S\left(\sum_j F_j q_j\right) + \beta\dfrac{\partial \sigma^{\pm}}{\partial x} & \text{sur le squelette} \\
\left.\begin{array}{l} W_{n+}^{+} = W_{n+}^{-} \\ s^+ = s^- \end{array}\right\} & \text{sur le sillage}
\end{array}}$$

Le système (II,24) se réduit aux équations de PRANDTL dans le cas que cet auteur avait envisagé. On constate d'ailleurs, en l'écrivant dans les axes fixes (il suffit de faire $\beta = 0$), qu'il se réduit aux équations de l'acoustique.

../...

../...

§ 2.5 - ETUDE THEORIQUE DU PROBLEME AERODYNAMIQUE LINEARISE-

2.5.1.- Réduction du problème pour l'étude de la stabilité -

Ainsi que nous l'avons indiqué plus haut (1.1.1.) pour étudier la stabilité, nous supposerons qu'un régime permanent est établi et règne jusqu'à l'instant t = 0, à partir duquel on appliquera une petite perturbation d'épreuve, et on étudiera la réponse de l'avion par la méthode des petits mouvements.

Ici, nous avons schématisé notre problème par un système linéaire. Par suite, la méthode des petits mouvements consistera simplement à remplacer les variables W, q, s par leur différence avec le cas permanent, c'est-à-dire à supposer qu'elles sont nulles pour $t<0$ et à remplacer le système (II,22,24) par le système rendu homogène, à l'exception, bien entendu, de la perturbation d'épreuve. Λ.

Ce système sera donc remplacé par

$$\boxed{M\ddot{Q} + KQ + a^2\rho_0 \sum_j E_j \iint F_j\,[s^+ - s^-]\,d\sigma = \Lambda} \qquad \text{(II,25)}$$

$$\text{(II,26)} \qquad \boxed{\begin{array}{ll} \left.\begin{array}{l} \mathrm{Grad}(s) + \delta(W) = 0 \\ \mathrm{div}(W) + \delta(s) = 0 \end{array}\right\} & \text{dans l'atmosphère} \\ W_n^{\pm} = \delta\left(\sum_j F_j\, q_j\right) & \text{sur le squelette} \\ \left.\begin{array}{l} W_n^+ = W_n^- \\ s^+ = s^- \end{array}\right\} & \text{sur le sillage} \end{array}}$$

avec les conditions :

$$\boxed{Q = 0,\ W = 0,\ s = 0,\ \Lambda = 0 \quad \text{pour } t<0} \qquad \text{(II,27)}$$

../...

../...

Par suite, nous arrivons à la conclusion suivante :

> Dans le cadre de la linéarisation, ni le poids de l'avion, ni son épaisseur, ni la poussée des propulseurs , ni le régime permanent, n'ont d'influence sur la stabilité.

Ceci peut s'énoncer ainsi :

> Pour étudier la stabilité, on peut se ramener au cas de l'avion d'épaisseur nulle, sans poids, en vol plané, régi par les équations (II,25,26).

Par ailleurs, nous voyons que si l'un des F_j est nul, le paramètre q_j disparaît des équations aérodynamiques. Ceci s'applique en particulier au paramètre q_1 de translation suivant Ox , pour lequel $F_1 = \left[\frac{\partial p}{\partial q_1}\right]_n$ est nul. Comme $\frac{\partial W}{\partial q_1}$ est également nul , les éléments m_{1j} sont nuls : la première équation nous donne

$m_{11}\ddot{q}_1 = \lambda_1(t)$ et toutes les autres équations sont indépendantes de q_1 <u>il est donc inutile d'introduire le paramètre de translation suivant Ox</u> dans l'étude de la stabilité. Il en sera de même des paramètres de translation suivant Oy , et de rotation autour de Oz (lacet) , si le squelette se réduit à une portion du plan xOy .

2.5.2.- <u>Ondes de choc</u> - <u>Linéarisation du principe d'Hamilton</u> -

Au paragraphe (2.2.1.), nous avions laissé en suspens la question des ondes de choc. La raison est la suivante : si nous avions introduit a priori des surfaces de discontinuité pour les dérivées premières de $\mathcal{H}$ dans l'écoulement, nous aurions trouvé que ces discontinuités devraient nécessairement être nulles: les ondes de choc ne sont possibles dans un fluide compressible que si on admet aussi l'existence d'une discontinuité d'entropie : la quantité $p\rho^{-\gamma}$ sautant d'une valeur à une autre à la traversée de la surface.

../...

../...

Autrement dit, les ondes de choc réelles sont des phénomènes irréversibles, qui ne peuvent être traités par le principe d'Hamilton sous sa forme énergétique.

Mathématiquement, on peut dire que le problème de variations correspondant à l'application du principe l'Hamilton à des écoulements isentropiques n'admet pas de solution discontinue[1].

Il en va tout autrement si on se place dans les hypothèses de la linéarisation.

Pour le montrer, nous allons rétablir les équations aérodyna - miques linéarisées par une autre voie.

Considérons en effet l'expression (II,15) de l'énergie

$$E = \iiint \left\{ \frac{1}{2}\rho \dot{\mathcal{K}}^2 + \frac{\rho}{\rho_0} f\left(\frac{\rho_0}{\rho_0}\right) + \varpi_0 \left[1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right] \right\} dx\,dy\,dz$$

et l'expression correspondante dela fonction de Lagrange :

$$L = \iiint \left\{ \frac{1}{2}\rho \dot{\mathcal{K}}^2 - \left[\frac{\rho}{\rho_0} f\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) + \varpi_0 \left[1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right]\right] \right\} dx\,dy\,dz$$

En faisant le changement de variable (II,16)qui nous a conduit à la linéarisation (en se plaçant dans les axes fixes $\beta = 0$) on trouve par exemple pour E l'expression

$$\iiint \left\{ \frac{1}{2}\rho_0 [1+\varepsilon s]\, \varepsilon^2 a^2 W^2 + [1+\varepsilon s]\, f\left(\frac{1}{1+\varepsilon s}\right) - \varpi_0\, \varepsilon s \right\} dx\,dy\,dz$$

1) Classiquement, on étudie une onde de choc en admettant que l'entropie subit une variation brusque au travers de la surface, et aucune variation, même continue dans le reste de l'écoulement. Suivant une remarque, de M. CABANNES, le succès de cette hypothèse arbitraire pourrait s'expliquer en étudiant un fluide visqueux et conducteur de la chaleur, puis en faisant tendre sa viscosité vers 0. De toutes façons, le problème de l'existence d'un principe variationnel thermodynamique, généralisant celui d'Hamilton, se pose avec netteté dans de tels problèmes, comme dans celui du choc des solides avec frottements.

../...

qui s'annule pour $\varepsilon = 0$.

En dérivant par rapport à ε , et en faisant $\varepsilon = 0$, on trouve une quantité nulle, le terme principal en ε est du second ordre. On l'obtiendra en dérivant une seconde fois .

En se souvenant que $f''(1) = a^2 \rho_0$ il vient :

$$E = \frac{\varepsilon^2 a^2 \rho_0}{2} \iiint [W^2 + s^2]\, dx\, dy\, dz + O(\varepsilon^2)$$

et de même $L = \dfrac{\varepsilon^2 a^2 \rho_0}{2} \iiint [W^2 - s^2]\, dx\, dy\, dz + O(\varepsilon^2)$

Il est probable que nous retrouverons les résultats de la linéarisation en appliquant le principe d'Hamilton à la fonction de Lagrange réduite à sa partie principale, soit :

$$\text{(II,28)} \qquad \boxed{L' = \frac{a^2 \rho_0}{2} \iiint [W^2 - s^2]\, dx\, dy\, dz}$$

et en prenant les conditions géométriques et cinématiques linéarisées.

Pour cela, nous posons $M = M_0 + \varepsilon U$ (εU est le vecteur déplacement), et il vient

$$\dot{U} = aW, \quad div(U) = -1$$

$(\vec{n}_A, \delta U) = 0$ sur le squelette

$(\vec{n}_S, \delta U^+ - \delta U^-) = 0$ sur le sillage.

Nous prendrons, x, y, z comme variables indépendantes.

L'action s'écrit maintenant :

$$\text{(II,29)} \qquad \boxed{\mathcal{A}' = \frac{\rho_0}{2} \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint \left\{ \left[\frac{\partial U}{\partial t}\right]^2 - a^2 [div\, U]^2 \right\} dx\, dy\, dz}$$

../...

../...

et nous écrirons qu'elle est stationnaire avec les conditions

$$\delta U = 0 \quad \text{pour} \quad t = t_0 \ , \ t = t_1$$

Cette fois, nous admettrons l'existence de surfaces mobiles où $\frac{\partial U}{\partial t}$, $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial z}$ peuvent être discontinues, le déplacement U étant lui-même continu.

Nous ne traiterons pas à nouveau le problème dans son ensemble: nous allons nous contenter de vérifier qu'il fournit bien les équations indéfinies déjà trouvées, et d'obtenir les équations de choc.

Pour cela, nous traiterons de façon symétrique les 4 variables x, y, z, t. Nous avons trois fonctions inconnues, les composantes u, v, w du déplacement U.

L'onde de choc apparaîtra comme une multiplicité à trois dimensions, dont nous écrirons l'équation sous la forme :

$$t = f(x, y, z)$$

On aura alors:

$$\mathcal{A}' = \frac{\rho_0}{\rho} \iiiint \left\{ \left[\frac{\partial U}{\partial t}\right]^2 - a^2 [\operatorname{div} U]^2 \right\} dt\, dx\, dy\, dz$$

d'où

$$\delta \mathcal{A}' = \rho_0 \iiiint \left[\left(\frac{\partial U}{\partial t}, \delta \frac{\partial U}{\partial t}\right) - a^2 \operatorname{div}(U) \operatorname{div}(\delta U) \right] dt\, dx\, dy\, dz$$

$$= \rho_0 \iiiint \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial U}{\partial t}, \delta U\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(-a^2 \operatorname{div} U\, \delta u\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-a^2 \operatorname{div} U\, \delta v\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(-a^2 \operatorname{div} U\, \delta w\right) \right]$$

$$- \rho_0 \iiiint \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - a^2 \operatorname{Grad} \operatorname{div} U, \delta U \right) dt\, dx\, dy\, dz$$

../...

../...

Dans la première intégrale apparaît la divergence d'un quadrivecteur de l'espace t , x , y, z . Cette intégrale est donc égale au flux du quadrivecteur sur les variétés tridimensionnelles limitant le domaine d'intégration.

L'expression $\delta \mathcal{A}'$ ainsi transformée ne fait plus intervenir que le vecteur δU , à l'exclusion de ses dérivées : le lemme fondamental du calcul des variations nous indique que les coefficients de δU doivent être nuls séparément.

On trouve donc :

1°/ l'équation $\dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \, \mathrm{Grad}\, \mathrm{div}\,(U)$

c'est-à-dire, puisque $\dfrac{\partial U}{\partial t} = a W$, $\mathrm{div}\, U = -s$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + a \, \mathrm{Grad}\, s = 0$$

Elle est identique à l'équation $\mathcal{S}(W) + \mathrm{Grad}\, s = 0$ de (II,24) puisque nous sommes ici en axes fixes.

2°/ que le flux du quadrivecteur de composantes

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}, \delta U\right), -a^2 \mathrm{div}(U)\,\delta u, -a^2 \mathrm{div}(U)\,\delta v, -a^2 \mathrm{div}(U)\,\delta w$$

sur les surfaces limites s'annule quels que soient δu , δv , δw .

Pour les surfaces intérieures à l'écoulement, plus particulièrement sur les ondes de choc, c'est l'accroissement de ce flux au travers de la surface qui doit s'annuler.

En prenant x , y , z comme variables indépendantes sur les ondes de choc et en remplaçant t par $f(x, y, z)$, on peut exprimer ce flux à l'aide d'un déterminant :

../...

../...

$$\Phi = \iiint \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial U}{\partial t}, \delta U\right) & f'_x\, dx & f'_y\, dy & f'_z\, dz \\ -a^2 \operatorname{div}(U)\,\delta u & dx & 0 & 0 \\ -a^2 \operatorname{div}(U)\,\delta v & 0 & dy & 0 \\ -a^2 \operatorname{div}(U)\,\delta w & 0 & 0 & dz \end{vmatrix}$$

Puisque nous supposons $\mathbf{U}$ continu au travers de la surface , l'équation de choc s'écrira donc :

$$\begin{vmatrix} \left(\Delta \frac{\partial U}{\partial t}, \delta U\right) & f'_x\, dx & f'_y\, dy & f'_z\, dz \\ -a^2 \Delta \operatorname{div}(U)\,\delta u & 1 & 0 & 0 \\ -a^2 \Delta \operatorname{div}(U)\,\delta v & 0 & 1 & 0 \\ -a^2 \Delta \operatorname{div}(U)\,\delta w & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

soit

$$\Delta \frac{\partial u}{\partial t}\delta u + \Delta \frac{\partial v}{\partial t}\delta v + \Delta \frac{\partial w}{\partial t}\delta w = \lambda f'_x + \mu f'_y + \nu f'_z -$$

$$-a^2 \Delta\left(\operatorname{div}(U)\right)\delta u = \lambda$$

$$-a^2 \Delta\left(\operatorname{div}(U)\right)\delta v = \mu$$

$$-a^2 \Delta\left(\operatorname{div}(U)\right)\delta w = \nu$$

ou

$$\boxed{\begin{aligned} &\Delta\left(\frac{\partial u}{\partial t} + a^2 f'_x \operatorname{div}(U)\right) = 0 \\ &\Delta\left(\frac{\partial v}{\partial t} + a^2 f'_y \operatorname{div}(U)\right) = 0 \\ &\Delta\left(\frac{\partial w}{\partial t} + a^2 f'_z \operatorname{div}(U)\right) = 0 \end{aligned}} \qquad (II,30)$$

../...

../...

Par ailleurs, U étant continu à la traversée de l'onde, toute intégrale curviligne $\int_A^B \frac{\partial U}{\partial t}dt + \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$ prise sur l'hypersurface $t = f(x,y,z)$ prend la même valeur sur les deux faces. On a donc :

$$\Delta \int_A^B \left[\frac{\partial U}{\partial t} f'_x + \frac{\partial U}{\partial x}\right] dx + \left[\frac{\partial U}{\partial t} f'_y + \frac{\partial U}{\partial y}\right] dy + \left[\frac{\partial U}{\partial t} f'_z + \frac{\partial U}{\partial z}\right] dz = 0$$

ce qui exige :

$$\boxed{\Delta\left(\frac{\partial U}{\partial t} f'_x + \frac{\partial U}{\partial x}\right) = 0, \quad \Delta\left(\frac{\partial U}{\partial t} f'_y + \frac{\partial U}{\partial y}\right) = 0, \quad \Delta\left(\frac{\partial U}{\partial t} f'_z + \frac{\partial U}{\partial z}\right) = 0} \tag{II,31}$$

Chacune de ces trois équations étant vectorielle, le système (II,30, 31) se compose de 12 équations, linéaires et homogènes, qui doivent être vérifiées par les accroissements des 12 dérivées partielles de u, v, w par rapport à t, x, y, z.

Pour obtenir leur condition de compatibilité, projetons les équations (II,31) sur les axes x, y, z respectivement et ajoutons. Il vient

$$\Delta(\operatorname{div} U) + f'_x \, \Delta\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) + f'_y \cdot \Delta\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) + f'_z \cdot \Delta\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right) = 0$$

et en tirant $\Delta\frac{\partial u}{\partial t}$, $\Delta\frac{\partial v}{\partial t}$, $\Delta\frac{\partial w}{\partial t}$ de (II,30)

$$\left[1 - a^2\left[f'^2_x + f'^2_y + f'^2_z\right]\right] \Delta(\operatorname{div} U) = 0$$

Si $a^2\left[f'^2_x + f'^2_y + f'^2_z\right]$ n'est pas égal à 1, $\Delta(\operatorname{div} U)$ est nul, donc d'après (II,30) $\Delta\frac{\partial U}{\partial t}$ également, et d'après (II,31) $\Delta\frac{\partial U}{\partial x}$, $\Delta\frac{\partial U}{\partial y}$, $\Delta\frac{\partial U}{\partial z}$ aussi.

../...

../...

Nous obtenons donc la condition de compatibilité :

$$f_x'^2 + f_y'^2 + f_z'^2 = \frac{1}{a^2}$$

qui exprime que la vitesse de propagation normale de l'onde de choc est égale à a , et les équations (II,30,31) permettront alors d'exprimer les discontinuités de toutes les dérivées en fonction de $\Delta(\mathrm{div}\, U) = -\Delta s$.

Si nous voulons éliminer le déplacement U et ne plus considérer que les variables $s = -\mathrm{div}\, U$ et $W = \frac{1}{a}\frac{\partial U}{\partial t}$

il suffira d'écrire les équations (II,30) sous la forme :

$$\Delta W = a\, \Delta s\, \mathrm{Grad}\, f$$

et de leur joindre la condition de compatibilité

$$\mathrm{Grad}^2 f = \frac{1}{a^2}$$

l'onde de choc étant mise sous la forme : $t = f(x, y, z)$

Si on passe maintenant en axes mobiles , W et s ne changeront pas, les équations seront les mêmes en écrivant l'onde de choc sous la forme $t = f(x - \beta a t, y, z)$

En les prenant sous la forme plus générale :

$$\Phi(x, y, z, t) = 0$$

d'où

$$\frac{\Phi_x'}{f_x'} = \frac{\Phi_y'}{f_y'} = \frac{\Phi_z'}{f_z'} = \frac{-\Phi_t'}{1 + \beta a f_x'} = -a\, S(\Phi)$$

nous aurons finalement les équations de choc sous la forme :

../...

../...

(II,32)
$$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{Grad}\,\Phi\,\Delta s + S(\Phi)\,\Delta W = 0 \\ \text{sur la surface } \Phi = 0 \\ \text{vérifiant } \mathrm{Grad}^2\,\Phi = [S(\Phi)]^2 \end{array}}$$

Il suffira d'ajouter ces relations aux équations aérodynamiques (II,24) ou (II,26) pour obtenir les écoulements avec ondes de choc.

2.5.3. - Potentiel des vitesses -

Plaçons-nous dans les axes fixes et considérons l'intégrale

$$\varphi(M) = -a\int_0^t s\,dt$$

la valeur de s étant prise au point fixe M.

Si aucune onde de choc n'est passée en M dans l'intervalle (o, t) on aura

$$\mathrm{Grad}\,\varphi = -a\int_0^t \mathrm{Grad}\,s\,dt = \int_0^t \frac{\partial W}{\partial t}\,dt = W(t) - W(o)$$

Ce résultat reste valable si il y a eu passage d'onde de choc, à l'instant $t_o = f(M)$.

On peut écrire en effet :

$$-\frac{1}{a}\varphi(M) = \int_0^{f(M)} s\,dt + \int_{f(M)}^t s\,dt$$

d'où

$$-\frac{1}{a}\mathrm{Grad}\,\varphi = \int_0^{f(M)} \mathrm{Grad}\,s\,dt + \mathrm{Grad}\,f\cdot s\,(f(M)-0) + \int_{f(M)}^t \mathrm{Grad}\,s\,dt -$$

$$- \mathrm{Grad}\,f\cdot s(f(M)+0) - \int_0^t \mathrm{Grad}\,s\,dt - \mathrm{Grad}\,f\cdot\Delta s$$

../...

../...

Les relations $\frac{\partial W}{\partial t} + a \,\mathrm{Grad}\, s = 0$, $\Delta W = a \,\mathrm{Grad} \int \Delta s$ permettent d'écrire cette quantité sous la forme :

$$-\frac{1}{a}\left[\Delta W + \int_0^t \frac{\partial W}{\partial t}\, dt\right]$$

d'où

$$-\mathrm{Grad}\, \varphi = W(t) - W(0)$$

Par suite, si le fluide était au repos jusqu'à l'instant $t = 0$, il existe un potentiel φ tel que :

$$\text{(II,33)} \quad W = \mathrm{Grad}\, \varphi, \quad s = \frac{1}{a}\frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad ; \quad \varphi = 0 \quad \text{pour } t < 0$$

φ est continu partout, à l'exception des points qui ont été en contact avec l'avion pendant l'intervalle $(0, t)$, c'est-à-dire du sillage.

Ses dérivées premières seules sont discontinues à la traversée des ondes de choc.

En dehors de celles-ci, l'équation de continuité

$$\mathrm{div}(W) + \frac{1}{a}\frac{\partial s}{\partial t} = 0$$

montre que φ vérifie l'équation des ondes :

$$\Delta \varphi = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

Δ désignant ici le laplacien.

En passant de nouveau aux axes mobiles, on peut éliminer complètement W et s des équations, et écrire le système (II,25,26,27) complété par la considération des ondes de choc, sous

../...

../...

la forme :

(II,34)

$$
\begin{array}{ll}
1) & M\ddot{Q} + KQ + a^2\rho_0 \sum_j E_j \iint f_j \left[S(\varphi)^+ - S(\varphi)^- \right] d\sigma = \Lambda \\
2) & \Delta\varphi = S^2(\varphi) \text{ dans l'atmosphère} \\
3) & \begin{cases} \left[\operatorname{Grad} \Phi\right]^2 = S(\Phi)^2 \\ \left[\operatorname{Grad}\varphi \, S(\Phi) - \operatorname{Grad}\Phi . S(\varphi)\right]^+ = \left[\operatorname{Grad}\varphi \, S(\Phi) - \operatorname{Grad}\Phi \, S(\varphi)\right]^- \\ \varphi \text{ continue sur l'onde de choc } \Phi = 0 \end{cases} \\
4) & \left[\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right]^{\pm} = S\left(\sum_j f_j q_j\right) \text{ sur le squelette} \\
5) & \left[\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right]^+ = \left[\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right]^- , \quad \left[S(\varphi)\right]^+ = \left[S(\varphi)\right]^- \text{ sur le sillage} \\
6) & \varphi = 0 , \ \Phi = 0 , \ \Lambda = 0 \text{ pour } t < 0
\end{array}
$$

avec pour mémoire

$$W = \operatorname{Grad}\varphi \quad , \quad s = -S(\varphi)$$

2.5.4.- Bilan énergétique dans le cas linéarisé -

Reprenons la formule (II,13) qui exprime la conservation de l'énergie avant linéarisation

$$\frac{dE}{dt} = \iint_A \varpi \left(\vec{n}_A , \dot{P} \right) d\sigma$$

Nous avons vu en 2.5.2. que l'énergie E avait une partie principale en ε qui s'écrit :

$$\frac{\varepsilon^2 a^2 \rho_0}{2} \iiint \left[W^2 + s^2 \right] dx\, dy\, dz$$

En tenant compte du fait que le volume de l'avion est supposé constant, on trouve pour le second membre de (II,13) une partie principale du second ordre également

../...

../... $\varepsilon^2 a^3 \rho_0 \iint W_n^+ [s^+ - s^-] \, d\sigma$

l'intégrale étant prise sur la face + du squelette.

L'écoulement linéarisé doit donc vraisemblablement vérifier la relation :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\iiint \frac{W^2+s^2}{2}\,dx\,dy\,dz = a\iint W_n^+ [s^+ - s^-]\,d\sigma} \qquad \text{(II,35)}$$

Nous allons vérifier cette formule dans le cas général des écoulements avec ondes de choc.

Plaçons-nous dans les axes fixes, et considérons l'intégrale

$$\iiint \frac{W^2+s^2}{2}\,dx\,dy\,dz$$

prise à l'extérieur de l'avion.

Les ondes de choc et le sillage pourront découper ce domaine en plusieurs domaines: soit D l'un d'eux.

On aura :

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\mathcal{D}} \frac{W^2+s^2}{2}\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{W^2+s^2}{2}\right)dx\,dy\,dz + \iint_{\Sigma} \frac{W^2+s^2}{2} V_n \, d\sigma$$

V étant le vecteur vitesse de propagation de la surface limitant $\mathcal{D}$, V_n se mesure sur la normale orientée vers l'extérieur de $\mathcal{D}$.

Comme

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{W^2+s^2}{2}\right) = W\frac{\partial W}{\partial t} + s\frac{\partial s}{\partial t} = -a\left[W.\mathrm{Grad}\,s + s\,\mathrm{div}\,W\right] = -a\,\mathrm{div}(Ws)$$

../...

on peut écrire :

$$\text{(II,36)} \quad \frac{d}{dt}\iiint_{D} \frac{W^2+s^2}{2} dx dy dz = \iint_{\Sigma} \left[V \frac{W^2+s^2}{2} - aWs \right]_n d\sigma$$

Si une portion de Σ est constituée par une caractéristique $V^2 = a^2$, l'intégrale correspondante s'écrira :

$$\frac{1}{2}\iint \left[W - \frac{sV}{a} \right]^2 V_n \, d\sigma$$

En particulier, si une onde de choc partage D, en deux domaines D_1 et D_2, il faudra ajouter à l'intégrale sur la frontière de $D_1 + D_2$, l'intégrale sur l'onde, qui est la frontière commune à D_1 et D_2 :

$$\frac{1}{2}\iint \left\{ \left[W_1 - \frac{s_1 V}{a} \right]^2 V_{n_1} + \left[W_2 - \frac{s_2 V}{a} \right]^2 V_{n_2} \right\} d\sigma$$

et comme $V_{n_1} = - V_{n_2}$ d'une part, le vecteur $W - \dfrac{sV}{a}$ étant continu à la traversée de l'onde d'autre part, cette contribution est nulle.

Par ailleurs, sur le sillage V est nul, $W_n s$ est continu puisque W_n et s le sont : la contribution du sillage est également nulle.

La formule (II,36) est donc valable, Σ constituant la frontière de D, quelle que soit la position de D par rapport aux ondes de choc et au sillage.

Prenons en particulier pour D l'ensemble des points dont la distance aux points du squelette à l'instant t=0 est plus grande que at.

La surface limite Σ est une caractéristique, dont la vitesse de propagation V_n, mesurée vers l'extérieur de D est $- a$.

../...

../.....

En régime subsonique, l'avion ne comporte aucun point dans D, on peut donc écrire :

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\mathcal{D}} \frac{W^2+s^2}{2}\,dx\,dy\,dz = -\frac{a}{2}\iint \left[W-\frac{Vs}{a}\right]^2 d\sigma$$

L'intégrale est donc non croissante: puisqu'elle est nulle pour t=0, elle restera identiquement nulle : W et s restent nuls en dehors de Σ, $W-\frac{Vs}{a}$ est nul sur Σ, de part et d'autre puisque ce vecteur est continu: on en déduit que si on impose brusquement à l'instant 0 une vitesse normale W_n à l'avion, il partira une onde de choc de l'aile, qui sera la surface Σ ci-dessus, et que la valeur de s sur le front de Σ sera égale à la composante normale extérieure de W : en particulier, la pression initiale sur l'avion sera donnée par la formule :

$$\text{(II,37)} \qquad \boxed{s_0^+ = \left[W_{n^+}\right]_0 \quad , \quad s_0^- = -\left[W_{n^+}\right]_0}$$

qui est indépendante du nombre de Mach (ce résultat s'établit d'ailleurs aussi bien en régime supersonique).

Prenons maintenant pour D l'extérieur de la surface Σ lieu des points situés à la distance λ des points balayés par le squelette pendant l'intervalle $(0,t)$. Σ est fixe dans les axes fixes. On peut alors écrire :

$$\iiint_{\mathcal{D}} \frac{W^2+s^2}{2}\,dx\,dy\,dz = a\int_0^t dt \iint_{\Sigma} \left[Ws\right]_n d\sigma$$

en désignant par n la normale dirigée vers D.

../...

../...

Lorsque l'épaisseur λ tend vers 0, le premier membre tend vers l'intégrale dans toute l'atmosphère de $\frac{W^2+s^2}{2}$, qui est supposée essentiellement finie, et pour laquelle on trouve l'expression

$$a \lim_{\lambda\to 0} \int_0^t dt \iint_\Sigma W_n s \, d\sigma$$

En considérant deux écoulements E et E' représentés par les variables W , s d'une part, W' , s' , d'autre part, on trouvera de même :

$$\iiint \left[W W' + s s' \right] dx\,dy\,dz = a \lim_{\lambda\to 0} \int_0^t \left[W_n s' + W_n' s \right] d\sigma$$

Nous allons profiter de cette formule pour préciser de quelle manière les conditions aux limites doivent être vérifiées :

(II,38)

Nous exigerons que W_n tende vers sa limite $\left[W_n\right]_0$ de sorte que l'intégrale

$$\iint \left[W_n - W_{n0} \right] s' \, d\sigma$$

tende vers 0 quel que soit l'écoulement E'

(vérifiant $\iiint \frac{W'^2+s'^2}{2} dx\,dy\,dz < +\infty$)

Nous exigerons de même que sur le sillage $W_n^+ - W_n^-$ et $s^+ - s^-$

tendent vers 0 de façon que les intégrales

$$\iint \left[W_n^+ - W_n^- \right] s' \, d\sigma \quad \text{et} \quad \iint W' \left[s^+ - s^- \right] d\sigma$$

tendent également vers 0 quel que soit E' .

Grâce à ce choix, on aura les deux propriétés suivantes :

1°/ La superposition de deux écoulements vérifiant la condition (II,38) définira encore un écoulement les vérifiant. On sait que la condition $\iiint \frac{W'^2+s'^2}{2} dx\,dy\,dz < +\infty$ se conserve également par superposition.

../...

../...

2°/ En faisant $E = E'$, on trouve la relation :

$$\iiint \frac{W^2+s^2}{2}\,dx\,dy\,dz = a \lim_{\lambda \to 0} \int_0^t dt \iint_{\Sigma} W_n\, s\, d\sigma$$

formule qui remplace et précise la formule (II,35) de conservation de l'énergie.

2.5.5.- Théorème d'unicité -

Il résulte immédiatement des considérations précédentes que si deux écoulements E et E' ont la même valeur de W_n sur le squelette, leur différence constitue un écoulement vérifiant :

$$\iiint \frac{W^2+s^2}{2}\,dx\,dy\,dz = 0$$

W et s étant continus en dehors des ondes de choc et du sillage, seront nuls partout : les écoulements E, E' seront identiques.

Par suite :

(II,39) Les équations aérodynamiques indiquées, avec les conditions $\iiint \frac{W^2+s^2}{2}\,dx\,dy\,dz < +\infty$, $W = s = 0$ pour $t < 0$ et la condition (II,38) déterminent de façon unique l'écoulement à partir des valeurs de W_n sur le squelette.

Cet énoncé est indépendant de la valeur de β qui peut être inférieur, supérieur ou égal à 1 .

Nous constatons, d'autre part, qu'il ne fait intervenir aucune condition du type Kutta-Joukovski, introduisant des conditions de régularité sur le bord de fuite de l'aile.

../...

../...

Il est clair qu'une telle condition peut très bien n'être pas vérifiée pour des écoulements transitoires, particulièrement en fluide compressible.

Par ailleurs, il était probable a priori que les équations de la mécanique rationnelle devaient déterminer entièrement le mouvement à partir de conditions initiales connues.

Il en va tout autrement si on cherche à déterminer un écoulement supposé permanent : rien n'impose par exemple, de le supposer irrotationnel, si ce n'est le désir d'exprimer que cet écoulement a pu être formé à partir du repos; rien ne s'oppose non plus à ce que l'hypothèse d'irrotationnalité soit insuffisante pour le déterminer, ainsi qu'on le constate dans les problèmes bidimensionnels en fluide incompressible.

Il semble donc que l'hypothèse de Kutta-Joukovski soit également caractéristique des écoulements que l'on peut obtenir à partir du repos, c'est-à-dire soit une condition de stabilité, au sens que nous avons donné ci-dessus à ce terme (1.1.1.).

Ceci résulte en effet des travaux de Küssner et Wagner: ces auteurs ont donné l'expression de tous les écoulements variés, autour d'une aile mince d'envergure infinie en fluide incompressible, obtenus à partir du repos par agitation arbitraire de l'aile.

Or, il est clair que dans ce cas particulier, les équations de la mécanique doivent également déterminer l'écoulement de façon unique, et que le résultat de Küssner et Wagner est nécessairement indépendant des hypothèses supplémentaires qu'ils ont pu formuler.

Or, ces équations ont pour conséquence que si l'aile prend une position fixe, l'écoulement tend vers un écoulement permanent, qui est justement celui que l'on détermine par application de la condition de Kutta : il en résulte que celle-ci est une condition nécessaire de stabilité .

../...

../...

2.5.6.- Hypothèses relatives à l'existence des solutions -

Par analogie avec les résultats de Küssner, nous admettrons les hypothèses suivantes :

1°/ Le problème aérodynamique posé en (II,39) admet effectivement une solution si la valeur imposée de W_n sur le squelette y est une fonction continue, constante à partir de l'instant $t = 0$.
(II,40) s est alors une fonction sommable sur le squelette.

2°/ Si, dans un écoulement, W_n s'annule pour $t > t_0$ sur le squelette la pression tend vers 0 assez vite pour que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} dt \iint_A |s| \, d\sigma$$

converge.

Ces hypothèses expriment l'existence et la stabilité de l'écoulement linéarisé; elles nous seront nécessaires pour discuter de la stabilité du système avion-atmosphère.

.mvcdd.

CHAPITRE III

- ETUDE DE LA STABILITE

§ 3.1 - INTRODUCTION DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE-CARSON -

3.1.1.- Equations symboliques -

Nous effectuerons sur les variables Q, s, W, φ qui définissent l'état du système mécanique la transformation de LAPLACE-CARSON, faisant correspondre par exemple à φ la fonction de x, y, z, p

$$p \int_0^{\infty} e^{-p\tau} \varphi(x, y, z, \tau)\, d\tau$$

x, y, z étant les coordonnées dans les axes liés à l'avion.

Nous désignerons par la même lettre les anciennes variables et leurs transformées respectives : il s'agira maintenant de quantités complexes avec p.

Dans le cas des écoulements continus, la transformation des équations se fait immédiatement : les fonctions à transformer étant nulles pour $t < 0$, les bornes de l'intégrale de Laplace peuvent se ramener à $-\infty$, $+\infty$, la dérivation par rapport au temps se réduit à la multiplication par p, on obtient le système :

../...

../...

(III,1)

$$\begin{array}{ll}
1 & \left[Mp^2+K\right]\Phi + a^2\rho_0 \sum E_j \iint F_j\left[S(\varphi)^+ - S(\varphi)^-\right] d\sigma = \Lambda(p) \\
2 & \Delta(\varphi) = S^2(\varphi) \quad \text{dans l'atmosphère} \\
3 & \left[\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right]^{\pm} = S\left(\sum_j F_j q_j\right) \quad \text{sur le squelette.} \\
4 & \left[\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right]^{+} = \left[\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right]^{-}, \quad S(\varphi)^+ = S(\varphi)^- \quad \text{sur le sillage}
\end{array}$$

en posant maintenant

(III,2)

$$\boxed{S = \frac{p}{a} + \beta\frac{\partial}{\partial x}}$$

Considérons maintenant le cas d'un écoulement avec ondes de choc.

Si une onde passe au point M à l'instant t_0, deux cas peuvent se produire :

1°/ L'onde traverse le point M.

2°/ Le point M est caractéristique de l'onde dans les axes liés à l'avion, celle-ci semblera envelopper une surface Σ.

Plaçons-nous dans le premier cas, et considérons une variable u discontinue sur l'onde de choc (par exemple une des dérivées premières de φ).

La transformée de Laplace de $\frac{\partial u}{\partial t}$ s'écrira :

$$p\int_{-\infty}^{t_0} e^{-p\tau}\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,z,\tau)\,d\tau + p\int_{t_0}^{\infty} e^{-p\tau}\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,z,\tau)\,d\tau$$

soit, en intégrant par parties :

$$p\left[\, u(x,y,z,p) - e^{-pt_0}\left[u(x,y,z,t_0+0) - u(x,y,z,t_0-0)\right]\right]$$

../...

../...

La transformée de $\frac{\partial u}{\partial x}$ s'écrira :

$$p\int_{-\infty}^{t_0} e^{-p\tau}\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z,\tau)\,d\tau + p\int_{t_0}^{\infty} e^{-p\tau}\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z,\tau)\,d\tau$$

$$= p\frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p\tau}u(x,y,z,\tau)\,d\tau + pe^{-pt_0}\frac{\partial t_0}{\partial x}\left[u(x,y,z,t_0+0)-u(x,y,z,t_0-0)\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(u(x,y,z,p)\right) + pe^{-pt_0}\frac{\partial t_0}{\partial x}\left[u(x,y,z,t_0+0)-u(x,y,z,t_0-0)\right]$$

Nous voyons que dans ce cas, $u(x, y, z, p)$ sera différentiable, donc continu. Nous pourrons former l'expression

$$\Delta(\varphi(x,y,z,p)) - S^2(\varphi(x,y,z,p))$$

Le calcul donne :

$$\Delta(\varphi(x,y,z,p)) = p\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p\tau}\Delta(\varphi(x,y,z,\tau))\,d\tau - pe^{-pt_0}(\mathrm{Grad}\,\varphi^+ - \mathrm{Grad}\,\varphi^-, \mathrm{Grad}\,t_0)$$

$$S^2(\varphi(x,y,z,p)) = p\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p\tau}S^2(\varphi(x,y,z,\tau))\,d\tau - pe^{-pt_0}\left[S(\varphi)^+ - S(\varphi)^-\right]\left[\beta\frac{\partial t_0}{\partial x} - \frac{1}{a}\right]$$

d'où

$$\left[\Delta - S^2\right](\varphi(x,y,z,p)) = p\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p\tau}\left[\Delta - S^2\right](\varphi(x,y,z,\tau))\,d\tau$$
$$- pe^{-pt_0}\left[(\mathrm{Grad}\,\varphi, \mathrm{Grad}\,t_0) - S(\varphi)\left[\beta\frac{\partial t_0}{\partial x} - \frac{1}{a}\right]\right]_-^+$$

En mettant l'équation de l'onde de choc sous la forme

$\Phi(x, y, z, t_0) = 0$, ce dernier terme s'écrit :

$$\frac{pe^{-pt_0}}{\frac{\partial\Phi}{\partial t_0}}\left[(\mathrm{Grad}\,\varphi, \mathrm{Grad}\,\Phi) - S(\varphi)\,S(\Phi)\right]_-^+$$

d'où finalement :

$$\left[\Delta - S^2\right](\varphi(x,y,z,p)) = p\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p\tau}\left[\Delta - S^2\right](\varphi(x,y,z,\tau))\,d\tau$$

......../...

$$\ldots/\ldots \quad + \frac{p\,e^{-pt_0}}{\frac{\partial \Phi}{\partial t_0} S(\Phi)} \left\{ \left(\mathrm{Grad}\,\Phi,\; S(\Phi)\,\mathrm{Grad}\,\varphi - S(\varphi)\,\mathrm{Grad}\,\Phi \right) + S(\varphi)\left[\mathrm{Grad}^2\Phi - S(\Phi)^2 \right] \right\}_{-}^{+}$$

D'après les équations (II,34) n° 2 et 3, cette quantité est nulle :en ce point φ vérifie la même équation aux dérivées partielles que dans le cas d'un écoulement continu.

Considérons maintenant le cas où le point M_0 est à l'instant t_0 point caractéristique de l'onde de choc.

La surface Σ enveloppée par celle-ci est aussi formée par une solution de l'équation aux dérivées partielles du 1er ordre :

$$\left[\mathrm{Grad}\,(\Phi) \right]^2 = \left[S(\Phi) \right]^2 \qquad \text{indépendante du temps,}$$

Soit une solution commune à

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \qquad \left[\mathrm{Grad}\,\Phi \right]^2 = \beta^2 \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]^2$$

Cette dernière équation s'écrivant :

$$\left[1-\beta^2 \right] \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]^2 + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right]^2 + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right]^2 = 0$$

on constate que ce cas ne peut pas se produire en régime subsonique. (en régime sonique ou supersonique, on constaterait que les dérivées partielles de la transformée de Laplace de φ peuvent être discontinues sur Σ , mais qu'on a continuité du vecteur

$$\mathrm{Grad}\,\Phi \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \mathrm{Grad}\,\varphi \frac{\partial \Phi}{\partial x} \;).$$

On peut donc énoncer :

(III,3) En régime subsonique, la transformée de Laplace de φ est continue dans l'atmosphère privée du squelette et du sillage,et vérifie le système(III,1) que l'écoulement comporte ou non des ondes de choc.

Ce résultat est d'ailleurs suggéré par le fait que l'équation aux dérivées partielles $\Delta\varphi = S^2(\varphi)$ qui était hyperbolique, devient elliptique après la transformation dans le cas $\beta < 1$.

../...

../...

3.1.2.- Séparation des problèmes mécaniques et aérodynamiques -

Considérons le système (III,1) qui régit notre problème. L'écoulement φ_j solution des équations aérodynamiques avec la condition sur le squelette :

$$\left[\frac{\partial \varphi_j}{\partial n}\right]^{\pm} = S(F_j) = \frac{p}{a} F_j + \beta \frac{\partial F_j}{\partial x}$$

est déterminé de façon unique. C'est la superposition des transformées de Laplace de deux écoulements du type considéré dans notre hypothèse (II,40) ; nous admettrons donc qu'il existe.

Nous constatons alors que la solution des équations aérodynamiques de (III,1) est donnée par la formule $\varphi = \sum_i \varphi_i q_i$ et que , par conséquent, l'équation mécanique (III,1,1) devient

$$\left[M p^2 + K\right] Q + a^2 \rho_0 \sum_{ij} E_j \iint F_j \left[S(\varphi_i)^+ - S(\varphi_i)^-\right] q_i \, d\sigma = \Lambda(p)$$

soit

(III,4) $$\boxed{\left[M p^2 + K + a^2 \rho_0 A\right] Q = \Lambda(p)}$$

en désignant par A la matrice

(III,5) $$\boxed{A = \sum_{ij} E_j \iint F_j \left[S(\varphi_i)^+ - S(\varphi_i)^-\right] d\sigma \, \overline{E}_i}$$

appelée matrice des coefficients aérodynamiques. Elle est fonction de p.

Dans ces conditions, nous pouvons résoudre immédiatement l'équation (III,4) :

$$Q(p) = \left[M p^2 + K + a^2 \rho_0 A\right]^{-1} \Lambda(p)$$

Nous aurons ensuite l'écoulement par :

$$\varphi = \sum \varphi_j \overline{E}_j Q$$

Nous pourrons ensuite passer aux mouvements réels par inversion de la transformation de Laplace.

../...

../...

Nous constatons ainsi que le problème, grâce à l'emploi de cette transformation, se scinde en deux parties bien distinctes :

a) le problème aérodynamique, qui ne fait intervenir que la forme de l'avion, la vitesse du vol, et les fonctions F_j définissant les déformations possibles de l'avion.

b) le problème mécanique, qui nécessite la résolution du précédent, qui fait intervenir en plus les propriétés mécaniques de l'avion, représentées par les matrices M et K, et bien entendu, l'excitation Λ .

§ 3.2- L'aspect symbolique des hypothèses aérodynamiques-

3.2.1.- Interprétation physique des solutions symboliques -

Considérons un écoulement réel, pour lequel $\vec{W}$ est nul sur l'avion à partir d'un instant t_0 . La formule de conservation de l'énergie (II ,35) nous montre que l'intégrale :

$$\iiint \frac{W^2 + s^2}{2} \, dx \, dy \, dz$$

restera constante à partir de l'instant t_0 ; elle sera donc majorée uniformément par un nombre positif E_0 .

On aura donc par application de l'inégalité triangulaire

$$\iiint \frac{\left|\sum \lambda_i W(t_i)\right|^2 + \left|\sum \lambda_i s(t_i)\right|^2}{2} \, dx \, dy \, dz \leq \left[\sum |\lambda_i|\right]^2 E_0$$

les λ_i étant des nombres complexes arbitraires, d'où par passage à la limite

$$\iiint \frac{1}{2} \left[\left| \int_a^b f(t) W(t) \, dt \right|^2 + \left| \int_a^b f(t) s(t) \, dt \right|^2 \right] dx \, dy \, dz \leq E_0 \left[\int_a^b |f(t)| \, dt \right]^2$$

../...

../...
En prenant $f(t) = p\,e^{-pt}$, $a=0$, et en faisant tendre b vers l'infini, il vient

$$\iiint \frac{|W(p)|^2+|s(p)|^2}{2}\,dx\,dy\,dz \leqslant E_0\left[\int_0^\infty |p\,e^{-pt}|\,dt\right]^2$$

Soit :

(III,6)
$$\iiint \frac{|W(p)|^2+|s(p)|^2}{2}\,dx\,dy\,dz \leqslant \frac{|p|^2}{[\mathcal{R}(p)]^2}E_0 \quad \text{si } \mathcal{R}(p)>0$$

Le cas des écoulements φ_J considérés plus haut se ramène à celui-ci : en posant $\varphi'_J = [1-e^{-pt_0}]\varphi_J$, on voit que

$$\frac{\partial\varphi'_J}{\partial n} = [1-e^{-pt_0}]\left[\frac{1}{a}F_J + p\frac{\partial F_J}{\partial x}\right]$$

Or $[1-e^{-pt_0}]F_J$ est la transformée de Laplace de la fonction égale à F_J pour $0<t<t_0$, nulle pour $t>t_0$.
Comme la fonction $1-e^{-pt_0}$ ne s'annule pas pour $\mathcal{R}(p)>0$, on en déduit que

$$\iiint \frac{|W_J|^2+|s_J|^2}{2}\,dx\,dy\,dz < \infty$$

Nous voyons donc que la propriété $\iiint \frac{W^2+s^2}{2}\,dx\,dy\,dz<\infty$ se conserve dans la transformation de Laplace, si $\mathcal{R}(p)$ est positive. Nous verrons qu'il n'en est pas de même si $\mathcal{R}(p)$ s'annule.

Considérons maintenant une valeur bien déterminée de p, le potentiel φ complexe correspondant, et posons :

$$\varphi^*(t) = \mathcal{R}\left(\varphi(p)\,e^{pt}\right)$$

On constate immédiatement que $\varphi^*(t)$ est une solution des équations aérodynamiques (II,34) correspondant au mouvement de l'avion défini par

$$\Phi(t) = \mathcal{R}\left(\Phi(p)\,e^{pt}\right)$$

../...

On a de même

$$W^*(t) = \mathcal{R}\left(W(p) e^{pt} \right)$$

$$s^*(t) = \mathcal{R}\left(s(p) e^{pt} \right)$$

et $$\iiint \frac{W^*(t)^2 + s^*(t)^2}{2} dx\,dy\,dz \leq |e^{pt}|^2 \iiint \frac{|W(p)|^2 + |s(p)|^2}{2} dx\,dy\,dz < \infty$$

Par suite φ^* définit un écoulement réel à énergie finie, qui tend vers 0 quand t tend vers $-\infty$, et qui peut servir à interpréter la solution symbolique complexe $\varphi(p)$.

Dans cet écoulement, nous écrirons l'équation de conservation de l'énergie (II,35):

$$\frac{d}{dt} \iiint \frac{W^{*2} + s^{*2}}{2} dx\,dy\,dz = a \iint W_n^* \left[s^{*+} - s^{*-} \right] d\sigma$$

En exprimant W^* et s^* en fonction de W et s complexes, cette formule se décompose en :

(III,7)
$$\boxed{\begin{aligned} p \iiint \left[W^2 + s^2 \right] dx\,dy\,dz &= a \iint_{A^+} W_n \left[s^+ - s^- \right] d\sigma \\ \mathcal{R}(p) \iiint \left[\overline{W} W + \overline{s} s \right] dx\,dy\,dz &= a\, \mathcal{R} \iint_{A^+} \overline{W}_n \left[s^+ - s^- \right] d\sigma \end{aligned}}$$

valables pour les solutions des équations symboliques, avec

$$\mathcal{R}(p) > 0 .$$

On pourrait d'ailleurs les déduire directement des équations aérodynamiques symboliques.

La seconde nous montre que le théorème d'unicité subsiste pour les équations symboliques, pour chaque valeur de p à partie réelle positive : si W_n est nul sur l'avion, l'écoulement se réduira à l'écoulement nul.

3.2.2.- Prolongement des solutions pour p imaginaire pur -

Considérons à nouveau les écoulements φ'_j définis par

../...

et qui sont les images symboliques d'écoulements où W_n est nul sur le squelette pour $t \geqslant t_0$.

$\int_{t_0}^{t} dt \iint |s| d\sigma$ Notre hypothèse (II,40, 2°), indique que l'intégrale sera alors convergente: il en résulte que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} dt \iint F s\, d\sigma$$

où F désigne une fonction continue sur le squelette sera convergente et continue pour $\mathcal{R}(p) \geqslant 0$, holomorphe pour $\mathcal{R}(p) > 0$ (le cas $\mathcal{R}(p) = 0$ conduit à une intégrale de Fourier).

En multipliant par $p/(1-e^{pt_0})$, on arrive au même résultat pour les éléments de la matrice A (coefficients aérodynamiques), à l'exception près des pôles de la fonction $p/(1-e^{-pt_0})$

$$p = 2ik\pi/t_0 \qquad k = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Comme ces pôles sont tous mobiles avec t_0, et que A n'en dépend pas, on arrive à la conclusion suivante:

(III,8)

L'hypothèse (II,40, 2°) entraîne que la matrice A est holomorphe pour $\mathcal{R}(p) > 0$, et continue pour $\mathcal{R}(p) \geqslant 0$.

Il en résulte immédiatement que si nous imposons à W_n une valeur constante, l'écoulement tendra, en moyenne au sens de Borel (*), vers un écoulement permanent, dont les coefficients aérodynamiques seront obtenus en faisant $p = 0$ dans la matrice A.

(*) - Nous dirons que $f(t)$ tend vers a en moyenne au sens de Borel si $p\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, dt$ tend vers a quand p tend vers 0 par valeurs positives. On sait que ceci a lieu en particulier si $f(t)$ borné, tend vers a. (Réf.3).

3.2.3.- Les grandes valeurs de p - Ondes de choc et rayonnement directif

On a vu (3.1.2.) que dans les écoulements φ_j , on a

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial n} = \frac{p}{a} F_j + \beta \frac{\partial F_j}{\partial x}$$

φ_j s'obtient par combinaison linéaire des images symboliques des deux écoulements où l'on a $W_n = F_j$, $W_n = \frac{\partial F_j}{\partial x}$ pour $t > 0$.

Ces écoulements ont une discontinuité de vitesse à l'instant $t = 0$, et nous avons donné (II,37) l'expression de la valeur initiale de s :

$$s_0^+ = [W_n]_0 \quad , \quad s_0^- = -[W_n]_0$$

soit, pour le premier des écoulements considérés:

$$s^+(0) = F_j \quad , \quad s^-(0) = -F_j$$

Or, on sait que si $\mathcal{R}(p)$ tend vers ∞ ,

$$p\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt \quad \text{tend vers } f(0+0)$$

Par suite la valeur de s , dans l'écoulement complexe φ_j , a pour partie principale, lorsque $\mathcal{R}(p)$ tend vers l'infini $\pm p F_j$, et en portant dans (III,5), on en tire la partie principale de A :

$$\text{(III,9)} \qquad \boxed{p A_0 = 2p \sum_{ij} E_j \left[\iint_{A^+} F_j F_i \, d\sigma \right] \bar{E}_i}$$

C'est cette expression qui remplace le terme de Kelvin (du second ordre en p) lorsqu'on fait intervenir la compressibilité.

La matrice A_0 est une matrice symétrique et définie positive: elle correspond donc à un terme d'amortissement visqueux aérodynamique.

Lorsque p tend vers l'infini par valeurs imaginaires pures, nous ne pouvons affirmer que $p A_0$ est encore la partie principale de A ; mais ceci aura lieu moyennant des hypothèses peu restrictives et vraisemblablement réalisées sur l'écoulement.

....

Dans l'interprétation d'un écoulement symbolique φ au moyen de l'écoulement réel $\varphi^* = \mathcal{R}(\varphi e^{pt})$, les grandes valeurs de $|p|$ correspondent à des écoulements rapidement variables.

Nous pouvons admettre pour ces derniers, l'approximation de l'écoulement par le processus bien connu des caractéristiques (il s'interprète ici comme un rayonnement sonore émis par l'avion, perpendiculairement à son squelette, et qui est simplement entraîné par l'écoulement général ambiant).

Il est bien clair que A, qui représente <u>l'impédance de rayonnement</u>, tendra vers la valeur approchée que l'on peut déduire de ce schéma simplifié si $|p|$ tend vers l'infini, indépendamment de la valeur de $\mathcal{R}(p)$, et qui est nécessairement celle que nous avons indiquée.

(III,10) Nous admettrons donc que $A(p)/p$ tendra vers A_0 uniformément lorsque $|p|$ tendra vers l'infini - ou tout au moins que $A(p)/p^2$ tendra uniformément vers 0.

§ 3.3 - <u>Critère de stabilité</u> -

3.3.1.- <u>Généralisation du critère de Cauchy-Nyquist</u> -

Considérons l'équation (III,4) qui donne l'image symbolique du mouvement de l'avion, et que nous écrirons:

$$Z(p)\, Q = \Lambda(p)$$

en désignant par $Z(p)$ la matrice $Mp^2 + K + a^2 \rho_0 A$. $Z(p)$ est fonction holomorphe de p dans le demi-plan $\mathcal{R}(p) \geq 0$. Il en est de même de son déterminant et de la <u>matrice adjointe</u>.

Nous allons établir le théorème suivant:

(III,11) Si le déterminant de $Z(p)$ possède un zéro à partie réelle α_0 positive, une force perturbatrice constante, appliquée pendant un temps fini, pourra donner à l'avion un mouvement dont l'amplitude dépassera toute exponentielle $C\, e^{\mu t}$ $(0 < \mu < \alpha_0)$, aussi faibles que soient l'intensité de cette force et sa durée d'application.

....

En effet, soit ρ_0 ce zéro, $\det(Z(\rho_0)) = 0$, $\mathcal{R}(\rho_0) = \alpha_0$

En posant $p - p_0 = z$, $\det(\Phi(p)) = g(z)$, $\mathrm{Adj}(\Phi(p)) = H(z)$

les fonctions $g(z)$ et $H(z)$ sont holomorphes autour de $z = 0$, et l'on a $g(0) = 0$. g n'étant pas identiquement nul, admet un développement en série de Mac-Laurin:

$$g(z) = z^n [k_n + k_{n+1} z + \cdots] \quad k_n \neq 0$$

ainsi d'ailleurs que

$$H(z) = H_0 + H_1 z + H_2 z^2 + \cdots$$

$$\text{et } Z(\rho_0 + z) = Z_0 + Z_1 z + Z_2 z^2 + \cdots$$

les H_i et Z_i étant des matrices.

Soit H_q le premier coefficient non nul dans le développement de $H(z)$. On aura alors $H(z) = z^q (H_q + z H_{q+1} + \cdots)$, $H_q \neq 0$

Les éléments de l'adjointe d'une matrice A sont donnés par la formule:

$$[\mathrm{Adj}(A)]_{ij} = \frac{\partial [\det(A)]}{\partial A_{ji}}$$

ou mieux:

$$d(\det A) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{Adj}(A) \cdot dA)$$

il en résulte que l'on a $g'(z) = \mathrm{Tr}\,(H(z) \cdot Z'(\rho_0 + z))$

Le premier terme du développement en série de $g(z)$ est $n k_n z^{n-1}$, $k_n \neq 0$

Le premier terme du développement de $\mathrm{Tr}\,(H(z)\, Z'(\rho_0 + z))$ est $z^q\, \mathrm{Tr}\,(H_q Z_0)$

ou un terme de degré supérieur, si celui-ci était nul. On a donc la relation: $q \leq n-1$

et par conséquent $H(z)/g(z)$, c'est-à-dire $[Z(p)]^{-1}$, a un élément au moins qui tend vers l'infini lorsque p tend vers ρ_0.

..... / .....

Il existe donc une colonne Λ_0 telle que l'un des éléments au moins de $[Z(p)]^{-1}\Lambda_0$ tende vers l'infini lorsque p tend vers p_0 .

L'image symbolique de la force $\lambda\Lambda_0$ appliquée pendant l'intervalle de temps (o,t_0) est:

$$\lambda\int_0^{t_0} p e^{-pt}\Lambda_0 dt = \lambda\Lambda_0\left[1-e^{-pt_0}\right]$$

la fonction $1-e^{-pt_0}$ n'ayant que des racines imaginaires pures, nous voyons que l'image symbolique d'une des composantes q_i dans le mouvement induit par la force $\lambda\Lambda_0$ appliquée pendant l'intervalle de temps (o,t_0) admet $p=p_0$ comme pôle.

Si nous pouvions majorer $q_i(t)$ par une exponentielle $Ce^{\mu p}$, $\mu<\alpha_0$, nous aurions

$$|q_i(p)| = \left|\int_0^{+\infty} p e^{-pt} q_i(t)dt\right| < \int_0^{+\infty} |p| e^{-\mathcal{R}(p)t} Ce^{\mu t}dt = \frac{C|p|}{\mathcal{R}(p)-\mu} \quad \text{pour } \mathcal{R}(p)>\mu$$

relation qui est contradictoire avec l'existence d'un pôle pour son image symbolique. C.Q.F.D.

Nous pouvons donc considérer la non-existence de zéros du déterminant dans le demi-plan $\mathcal{R}(p)>0$ comme une condition nécessaire de stabilité. Supposons qu'elle soit vérifiée, et supposons de plus que $\det(Z(p))$ ne s'annule pas non plus sur l'axe imaginaire.

Dans ces conditions l'équation se résout en

$$Q = [Z(p)]^{-1}\Lambda(p) = \frac{1}{\det(Z(p))} \mathrm{Adj}(Z(p))\Lambda(p)$$

Q est une fonction holomorphe dans le demi-plan.

Par ailleurs, il résulte de nos hypothèses que $Z(p)/p^2$ tend uniformément vers M , matrice des masses, lorsque $|p|$ tend vers ....

l'infini.

Nous avons établi en (2.4.3.) que M est une matrice régulière. Donc lorsque p tend vers l'infini,
$[Z(p)/p^2]^{-1} = p^2 Z(p)^{-1}$
tend uniformément vers M^{-1}. Il en résulte que la matrice $[Z(p)]^{-1}$ est uniformément bornée dans le demi-plan $\mathcal{R}(p) \geq 0$ par un nombre k.

On peut alors déterminer $Q(t)$ par l'intégrale de Bromwich Mellin, prise le long d'une droite $\mathcal{R}(p) = \alpha$, positif quelconque.

La formule de Parseval, (Bibl.4) qui s'écrit:

$$\int_0^{+\infty} e^{-2\alpha t} |G(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \left| \frac{G(p)}{p} \right|^2 |dp|$$

s'applique alors, et l'on aura:

$$\int_0^{+\infty} e^{-2\alpha t} |Q(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \left| \frac{Z(p)^{-1} A(p)}{p} \right|^2 d|p| \leq k^2 \int_0^{+\infty} e^{-2\alpha t} |\Lambda(t)|^2 dt <$$

$$< k^2 \int_0^{+\infty} |\Lambda(t)|^2 dt$$

Nous avons donc, en faisant tendre α vers 0, la proposition

(III,12) Si $\det(Z(p))$ ne s'annule pas pour $\mathcal{R}(p) \geq 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} |Q(t)|^2 dt$ sera finie pour toutes les excitations appliquées pendant un temps fini.

Nous pourrions prendre cette propriété comme une condition suffisante de stabilité pratique pour les avions: (III,11) et (III,12) nous permettraient alors de discuter la stabilité. Mais ce critère n'est pas directement applicable: en effet la matrice K est singulière, les lignes et les colonnes correspondant aux paramètres de

....

déplacement étant nulles, puisque les déplacements ne modifient pas l'énergie élastique.

Considérons les paramètres de déplacement q_j pour lesquels $\frac{\partial F_j}{\partial x} = 0$.

Il s'agit essentiellement des translations suivant Ox, Oy et Oz, et de la rotation autour de Ox (roulis).

La rotation autour de Oz (lacet) complète cette catégorie dans le cas d'un squelette situé dans le plan xOy.

Les écoulements φ_j correspondants vérifient:

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} = \rho F_j$$

et F_j n'est pas nul, car nous avons déjà éliminé des équations (cf.2.5.1) les paramètres q_j pour lesquels cette circonstance a lieu (translation suivant Ox dans le cas général; translation suivant Oy et rotation autour de Oz dans le cas du squelette plan).

Par suite les φ_j s'annulent pour $\rho = 0$, les <u>colonnes</u> correspondantes de la matrice A également, ainsi que celles de $Z(\rho)$: $\det(Z(\rho))$ s'annule pour $\rho = 0$.

Ces paramètres introduisent donc une instabilité à fréquence nulle, mais elle n'est pas gênante: elle correspond à la maniabilité de l'avion dans les évolutions du type "tonneau".

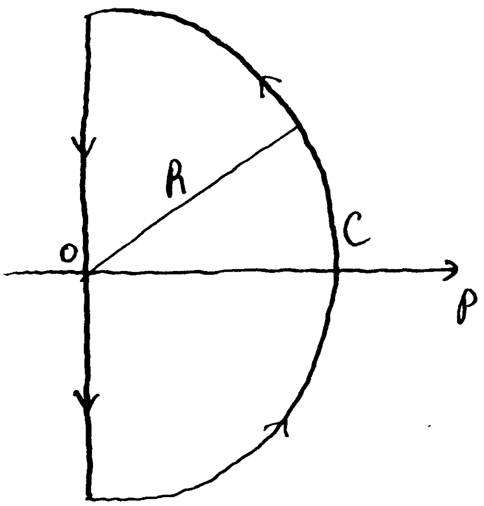
Il suffira, pour nous ramener au critère précédent, de remplacer ces paramètres par leur dérivée par rapport au temps: ceci reviendra à diviser $\det(Z(\rho))$ par ρ^h, h étant le nombre de ces paramètres, que nous appellerons "paramètres de maniabilité".

Pour l'application pratique de ce critère, nous utiliserons le théorème de Cauchy: si une fonction $f(\rho)$ est holomorphe à l'intérieur d'une courbe C, continue et ne s'annule pas sur le contour C, le

..... / .....

nombre de zéros de $f(p)$ à l'intérieur de cette courbe est égal au nombre de tours décrits par le point $f(p)$ autour de l'origine quand p décrit C.

Supposons donc que $\dfrac{\det(Z(p))}{p^k}$ ne s'annule pas pour p imaginaire pur, et prenons le contour C ci-contre. Cette courbe contiendra tous les zéros de $\det(Z(p))$ dès que le rayon R du demi-cercle sera assez grand. Nous connaissons l'allure de $\det(Z(p))/p^k$ sur le demi-cercle: cette quantité est équivalente à $p^{2n-k}\det(M)$ son argument varie de $-\left[n-\frac{k}{2}\right]\pi$ à $\left[n-\frac{k}{2}\right]\pi$ puisque $\det(M) > 0$ ainsi que nous l'avons vu en (2.4.3.). Par suite, si le point représentatif de $\det(Z(p))/p^k$ fait moins de $2n-k$ demi-tours autour de l'origine quand p varie de $-i\infty$ à $+i\infty$, il y aura une racine dans le demi-cercle, l'avion sera instable. S'il fait $2n-k$ demi-tours, il n'y aura pas de racine, et nous serons dans les conditions de stabilité.



On peut remarquer par ailleurs que si on remplace par , sera remplacé par la quantité conjuguée. La variation de son argument est la même quand la variable varie de à 0 que lorsqu'elle varie de à . Il suffira donc de se ramener à l'intervalle 0, + la variation d'argument devra être de).

Comme doit être la valeur de l'argument pour , on voit qu'il doit partir de la valeur 0 pour . On peut donc énoncer le critère pratique:

....

(III,13)

On trace la courbe de $z = \det(M\rho^2 + K + a^2 \rho_0 A) / \rho^{k}$, k étant le nombre de paramètres de maniabilité envisagés, ρ variant par valeurs imaginaires pures de 0 à $+ i\infty$.
Si la courbe fait $n - k/2$ demi-tours autour de l'origine dans le sens direct, l'avion est stable.
Si elle fait un nombre moindre de demi-tours, en particulier si z n'est pas positif pour $\rho = 0$, l'avion est instable.

Lorsque nous ferons varier un paramètre, la vitesse en particulier, le nombre de zéros ne pourra changer que lorsque la courbe passera par l'origine; ce phénomène définira les vitesses critiques. Nous évaluerons le danger d'instabilité, dans les cas stables, par la proximité de la courbe et de l'origine.

Pour calculer effectivement des déterminants d'ordre quelconque, nous avons proposé une méthode (Bibl.5) qui fournit en même temps le polynôme caractéristique et l'adjointe; elle a l'avantage pratique d'être systématique, elle est réalisée de façon entièrement automatique à l'O.N.E.R.A. avec des machines mécanographiques à cartes perforées.

La formule $d(\det Z) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Adj}(Z)\, dZ)$ nous permettra donc d'étudier les variations de la courbe caractéristique en fonction des variations des paramètres.

Lorsque nous aurons déterminé la vitesse critique, la valeur correspondante de ρ / i sera la pulsation critique. Une colonne quelconque de l'adjointe de $Z(\rho)$ (elles sont toutes proportionnelles dès que le déterminant est nul) nous donnera la valeur de Q susceptible de croître indéfiniment en amplitude, donc le paramètre (ou l'association de paramètres dangereux) (on déterminera ainsi s'il s'agit d'une instabilité de gouverne, ou d'un flutter général de structure).

Enfin la formule $d(\det(Z)) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Adj}(Z)\, dZ)$ nous indiquera dans quel sens il faut modifier les masses et rigidités de l'avion pour augmenter la vitesse critique.

..... • .....

Nous sommes donc en possession d'un critère valable moyennant les hypothèses que nous avons énoncées (II,40) (III,10), et qui nous permet de déterminer la stabilité à l'aide des transformées de Laplace de certains écoulements, pour les valeurs purement imaginaires de la variable p ; ou, ce qui revient au même, au moyen d'écoulements harmoniques réels stables.

Il sera applicable pratiquement dès que l'on connaîtra la matrice A , soit par une mesure sur maquette en soufflerie, soit par un calcul théorique (cf. chapitre IV).

3.3.2- Caractère intrinsèque de la courbe de stabilité -

Supposons que nous ayons pris d'autres paramètres pour décrire les mouvements de l'avion. Après linéarisation, ceux-ci deviendront des combinaisons linéaires des précédents, leur colonne Q' sera égale à HQ , H étant une certaine matrice régulière.

L'énergie cinétique sera

$$\frac{1}{2}\overline{\dot{Q}} M \dot{Q} = \frac{1}{2}\overline{\dot{Q}}' H^{-1} M H^{-1} \dot{Q}'$$

l'énergie potentielle élastique

$$\frac{1}{2}\overline{Q} K Q = \frac{1}{2}\overline{Q'}\, \overline{H^{-1}} K H^{-1} Q'$$

si bien que les matrices M et K seront remplacées respectivement par $M' = \overline{H^{-1}} M H^{-1}$ et $K' = \overline{H^{-1}} K H^{-1}$.

Par ailleurs, dans le déplacement $Q' = E_j$, $Q = H^{-1} E_j$ la déformée de l'avion F_j sera remplacée par

$$F'_j = \sum_{j'} F_{j'} q_{j'} = \sum_{j'} F_{j'} \overline{E}_{j'} \,.\, H^{-1} E_j = \sum_{j'} F_{j'} \overline{E}_j \overline{H}^{-1} E_j$$

De même les potentiels φ_i seront remplacés par

$$\varphi'_i = \sum_{i'} \varphi_{i'} \overline{E}_{i'} H^{-1} E_i$$

La matrice A sera remplacée par

......

$$A' = \sum_{ij} E_j \iint_{A+} F'_j \left[S(\varphi'_i)^+ - S(\varphi'_i)^- \right] d\sigma \, \bar{E}_i =$$

$$= \sum_{i,j,i',j'} E_j \bar{E}_j \bar{H}^{-1} E_{j'} \iint_{A+} F_{j'} \left[S(\varphi_{i'})^+ - S(\varphi_{i'})^- \right] d\sigma \, \bar{E}_{i'} H^{-1} E_i \bar{E}_i$$

et les matrices $\sum_j E_j \bar{E}_j$, $\sum_i E_i \bar{E}_i$ étant égales à l'unité, il vient

$$A' = \bar{H}^{-1} A H^{-1}$$

Par suite la matrice $Z(p)$ est remplacée par $\bar{H}^{-1} Z(p) H^{-1}$, et son déterminant est multiplié par $[\det(H)]^2$, qui est un nombre positif. Ainsi:

> Dans un changement quelconque des paramètres représentant les mouvements de l'avion, la courbe de stabilité est conservée à une homothétie de module positif près.

Si on veut éliminer ce dernier facteur arbitraire, on pourra normer la courbe en choisissant des paramètres tels que

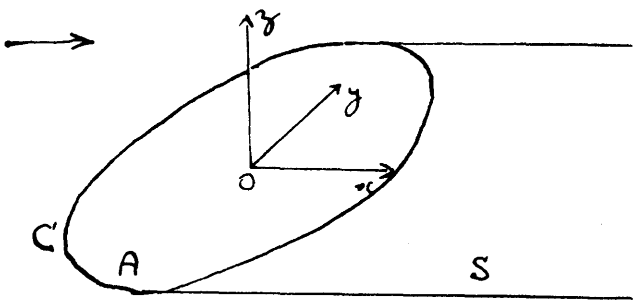
$$\det(H) = +1 .$$

CHAPITRE IV

CALCUL DES COEFFICIENTS AERODYNAMIQUES EN REGIME SUBSONIQUE

§ 4.1 - Equation intégrale du problème -

Nous allons étudier le problème tridimensionnel en nous limitant au cas d'un squelette plan : nous considérerons une seule aile, dont le squelette sera la région du plan $z=0$ limitée par une courbe fermée C.



Nous prendrons comme face + celle des z positifs.

Rappelons les données du problème :

Il faut calculer les éléments de la matrice A définis par

(IV,1)
$$A_{ji} = \iint_A F_j \left[S(\varphi_i)^+ - S(\varphi_i)^- \right] dx\,dy$$

φ_i étant la solution du système

$$\begin{cases} \Delta(\varphi) = S^2(\varphi) & \text{dans l'atmosphère} \\ \dfrac{\partial \varphi^+}{\partial z} = \dfrac{\partial \varphi^-}{\partial z}, \quad S(\varphi)^+ = S(\varphi)^- & \text{sur le sillage} \end{cases}$$

qui vérifie sur l'aile $\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}^{\pm} = S(F_i)$

....

On a posé $S = \frac{p}{a} + \beta \frac{\partial}{\partial x}$

et l'on veut que l'intégrale $\iiint \left[|\mathrm{Grad}\,\varphi|^2 + |S(\varphi)|^2 \right] dx\, dy\, dz$

étendue à toute l'atmosphère soit finie pour $\mathcal{R}(p) > 0$.

Considérons la fonction $\hat{\varphi}$ définie par

$$\hat{\varphi}(x, y, z) = \varphi(x, y, -z)$$

elle vérifie évidemment les mêmes équations, sauf la condition de dérivée normale sur l'aile où l'on a :

$$\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial z} = - \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

Par suite la fonction $\varphi + \hat{\varphi}$ a une dérivée nulle sur l'aile, elle est identiquement nulle :

(IV,2) φ_i est antisymétrique en z, et par conséquent nulle dans le plan $z = 0$, en dehors de l'aile et du sillage.

Il en résulte que l'on a

(IV,3)
$$\boxed{A_{zi} = 2 \iint_{A^+} F_z \; S(\varphi_i)^+ \, dy\, dx}$$

et qu'il suffira de déterminer φ_i dans le demi-espace $z > 0$.

Nous réduirons l'équation

$$\Delta \varphi = S^2(\varphi)$$

en faisant le changement de variables suivant :

(IV,4)
$$\boxed{x = X\sqrt{1-\beta^2} \qquad k = \frac{p}{a\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \varphi = e^{\beta k X}\, \Psi}$$

Il vient alors

(IV,5) $$\boxed{S(\varphi) = -s = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\, e^{\beta k x}\left[\beta \frac{\partial \psi}{\partial x} + k\psi\right]}$$

et l'équation devient

$$\boxed{\Delta \psi = k^2 \psi}$$

en désignant maintenant par Δ le laplacien dans l'espace

x, y, z.

Les conditions sur le sillage deviennent :

$$\frac{\partial \psi}{\partial z}^{+} = \frac{\partial \psi}{\partial z}^{-} \qquad \left[\beta \frac{\partial \psi}{\partial x} + k\psi\right]_{-}^{+} = 0$$

En tenant compte de l'antisymétrie en , il suffira d'écrire

(IV,6) $$\boxed{\left[\beta \frac{\partial \psi}{\partial x} + k\psi\right]^{+} = 0 \quad \text{sur le sillage}}$$

équation qui s'intègre immédiatement en

(IV,7) $$\boxed{\psi^{+} = f(y)\, e^{-\frac{kx}{\beta}}}$$

Enfin la condition sur l'aile s'écrit :

(IV,8) $$\frac{\partial \psi^{+}}{\partial z} = \frac{e^{-\beta k x}}{\sqrt{1-\beta^2}}\left[k[1-\beta^2] F_i + \beta \frac{\partial F_i}{\partial x}\right]$$

L'équation $\Delta \psi = k^2 \psi$ possède la solution fondamentale

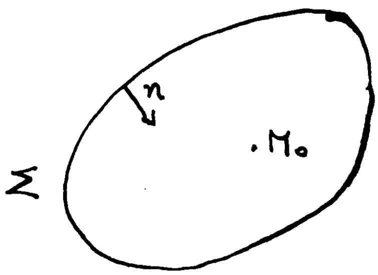
(IV,9) $$\boxed{u(x_0, y_0, z_0; x, y, z) = \frac{e^{-kr}}{r}}$$

en désignant par r la distance dans l'espace x, y, z :

(IV,10) $$r = \sqrt{[x-x_0]^2 + [y-y_0]^2 + [z-z_0]^2}$$

....

La formule de Green donne par conséquent

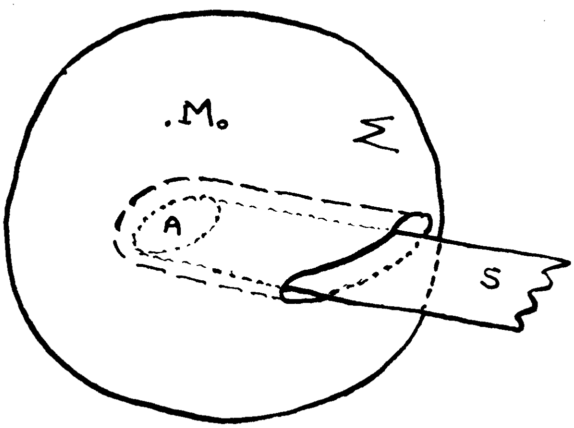


$$\psi(M_0) = \frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}\left[\psi\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial \psi}{\partial n}\right] d\sigma$$

l'intégrale étant étendue à une surface Σ entourant M_0, la normale étant orientée vers l'intérieur.

Cette formule est la transcription au cas qui nous occupe de la formule de Kirchhoff (Bibl. 6) exprimant le potentiel acoustique au moyen des potentiels retardés.

Appliquons-la en prenant pour Σ la surface composée par une sphère de rayon R centrée sur l'origine et par la surface lieu des points situés à une distance λ de l'aile et du sillage.



D'après notre condition (II,38) l'intégrale prise sur cette dernière surface tendra vers l'intégrale sur les deux faces de l'aile et du sillage, quand λ tendra vers 0.
Comme le résultat est indépendant du choix de λ nous pourrons donc nous ramener à l'aile et au sillage.

La condition d'énergie finie indique que φ et ses dérivées partielles du 1er ordre sont à carré sommable dans tout l'espace : il en sera de même des produits par $e^{-\beta h X}$ de ψ et de ses dérivées partielles. Soit ζ l'un de ces produits. On a donc :

$$\iiint |\zeta|^2 \, dX\,dy\,dz < \infty$$

ou $\int_0^{R_0} dR \ I(R) < A$ quel que soit R_0, en désignant par $I(R)$ l'intégrale double $\iint |\zeta|^2 d\sigma$ étendue à la sphère de centre O, de rayon R.

Par suite la fonction $I(R)$ est sommable sur $(0 \ +\infty)$, elle sera inférieure à tout nombre positif ε, sauf sur un ensemble de mesure finie de valeurs de R.

L'inégalité de Schwarz nous donne

$$\left[\iint |\zeta| \, d\sigma\right]^2 \leqslant \iint d\sigma \times \iint |\zeta|^2 d\sigma$$

On a donc

$$\iint |\zeta| \, d\sigma \leqslant 2R\sqrt{\pi}\,\varepsilon$$

en dehors d'un ensemble de mesure finie; en majorant le facteur $e^{-\beta k X}$ par $e^{\beta R \mathcal{R}(k)}$, on voit que les intégrales

$$\iint |\psi| \, d\sigma \ , \ \iint |\operatorname{Grad} \psi| \, d\sigma$$

seront majorées par $2\varepsilon\sqrt{\pi}\, R \, e^{\beta R \mathcal{R}(k)}$ sauf sur un ensemble de mesure finie.

En désignant par r_0 la distance de l'origine au point M_0, on voit que l'on peut majorer $|u|$ et $|\operatorname{Grad} u|$ sur la sphère par

$$e^{r_0} \, e^{-R\mathcal{R}(k)} \left[\frac{1+|k|}{R-r_0} + \frac{1}{[R-r_0]^2} \right]$$

et que par suite l'intégrale

$$\iint \left[\psi \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \psi}{\partial n}\right] d\sigma$$ est majorée par

$$4\varepsilon\sqrt{\pi} . e^{r_0} . e^{-R\mathcal{R}(k)[1-\beta]} . R . \left[\frac{1+|k|}{R-r_0} + \frac{1}{[R-r_0]^2} \right]$$

Il y a donc des R aussi grands que l'on veut pour lesquels elle est inférieure à tout ε' donné à l'avance.

On a donc par suite

$$\left| \psi(M_0) - \frac{1}{4\pi} \iint \left[\psi \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \psi}{\partial n} \right] dX\, dy \right| < \varepsilon'$$

l'intégrale étant prise sur les deux faces de l'aile et du sillage jusqu'à la distance R.

La fonction u étant paire en z_0 puisque $z = 0$ sur l'aile et le sillage, et $\psi(M_0)$ étant impair, on en tire immédiatement :

$$\left| \psi(M_0) - \frac{1}{4\pi} \iint \psi \frac{\partial u}{\partial n} dX\, dy \right| < \varepsilon'$$

La relation (IV,7) $\psi = f(y) e^{-\frac{kX}{\beta}}$ montre immédiatement que l'intégrale est convergente sur le sillage : elle différera de moins de ε' de l'intégrale indéfinie pourvu que R soit assez grand, ce qui est toujours possible en même temps que l'inégalité ci-dessus.

On aura donc

$$\left| \psi(M_0) - \frac{1}{4\pi} \iint_{A+S} \psi \frac{\partial u}{\partial n} dX\, dy \right| < 2\varepsilon'$$

et puisque ε' est arbitraire :

$$\psi(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{A+S} \psi \frac{\partial u}{\partial n} dX\, dy$$

L'intégrale doit être prise avec la normale dirigée vers le fluide, sur les deux faces : l'antisymétrie de ψ montre que ceci s'écrit :

$$\psi(M_0) = \frac{1}{2\pi} \iint_{[A+S]^+} \psi \frac{\partial u}{\partial z} dX\, dy$$

(IV,11) ou

$$\boxed{\psi(M_0) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{[A+S]^+} \psi \frac{\partial u}{\partial z_0} dX\, dy}$$

Inversement, soit $g(X,y)$ une fonction continue dans tout le plan, nulle en dehors de l'aile et le sillage, et vérifiant sur ce dernier

$$g(X,y) = f(y) e^{-\frac{kX}{\beta}}$$

La fonction ψ' définie par

$$\psi'(M_0) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{[A+S]^+} g(X,y) \frac{\partial u}{\partial z_0} dX\, dy$$

vérifie $\Delta \psi' = k^2 \psi'$, puisque $\frac{\partial u}{\partial z_0}$ vérifie cette équation, et que les intégrales sont absolument et uniformément convergentes pour $\mathcal{R}(k) > 0$; on peut vérifier que ψ' tend bien vers $g(X,y)$ lorsque

....

z tend vers 0, en tout point autour duquel g vérifie la condition de Cauchy-Lipschitz.

On tire de (IV,11) $\frac{\partial \psi}{\partial z_0}(M_0) = -\frac{1}{2\pi}\iint_{A,S} \psi \frac{\partial^2 u}{\partial z_0^2}\, dx\, dy$

Comme $\frac{\partial^2 u}{\partial z_0^2} = \frac{\partial^2}{\partial z_0^2}\left(\frac{e^{-kr}}{r}\right) = z_0^2 \frac{e^{-kr}}{r^5}\left[k^2r^2-3kr-3\right] - \frac{e^{-kr}}{r^3}\left[1+kr\right]$

On voit que lorsque z_0 tend vers 0, cette quantité tend vers $-\frac{e^{-kr}}{r^3}\left[1+kr\right]$, uniformément à l'extérieur d'un domaine D contenant le point x_0, y_0. (nous supposons que sa frontière est une courbe fermée Γ).

Par ailleurs, l'équation $\Delta u = k^2 u$ montre que l'on a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_0^2} = k^2 u - \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y_0^2} = k^2 u - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = k^2 u - \Delta' u$$

en désignant par Δ' le laplacien dans le plan x, y.

Si ψ est deux fois différentiable, on peut appliquer à l'intégrale

$$I = \iint_D \psi \left[k^2 u - \Delta' u\right] dx\, dy$$

la formule de Green :

$$\iint_D \left[\psi\, \Delta' u - u\, \Delta' \psi\right] dx\, dy = \int_\Gamma \left[\psi \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \psi}{\partial n}\right] ds$$

Il vient

$$-I = \iint_D u\left[\Delta'\psi - k^2\psi\right] dx\, dy + \int_\Gamma \left[\psi \frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial \psi}{\partial n}\right] ds$$

formule dans laquelle nous pouvons faire $z_0 = 0$, les intégrales étant uniformément convergentes.

Nous aurons donc la formule :

(IV,12)
$$\boxed{\begin{aligned} 2\pi \frac{\partial \psi}{\partial z_0}(x_0,y_0) = &\iint_{A+S-D} \psi(x,y)\,\frac{e^{-kr}}{r^3}\,[1+kr]\,dX\,dy \\ &+ \iint_D \left[\Delta'\psi - k^2\psi\right] \frac{e^{-kr}}{r}\,dX\,dy \\ &+ \int_\Gamma \left[\psi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-kr}}{r}\right) - \frac{e^{-kr}}{r}\frac{\partial \psi}{\partial n}\right] ds \end{aligned}}$$

avec $r = \sqrt{[X - X_0]^2 + [y - y_0]^2}$

Le potentiel ψ_i doit vérifier

(IV,8)
$$\frac{\partial \psi_i}{\partial z_0} = \frac{e^{-\beta k x_0}}{\sqrt{1-\beta^2}}\left[k[1-\beta^2]F_i + \beta \frac{\partial F_i}{\partial X}\right]$$

En portant dans (IV,12), nous avons une équation intégrale pour déterminer ψ_i, équation à laquelle il faut joindre la condition (IV,7) sur le sillage.

La courbe Γ est arbitraire : nous pouvons par exemple prendre un cercle de centre (x_0, y_0), de rayon r_0.

L'intégrale curviligne devient alors

$$- \frac{e^{-kr_0}}{r_0^2}[1+kr_0] \int_{r=r_0} \psi\, ds - \frac{e^{-kr_0}}{r_0}\int_{r=r_0} \frac{\partial \psi}{\partial n}\, ds$$

Ces deux expressions s'évaluent par un développement limité autour du point X_0, y_0 ; la deuxième est équivalente à $\pi r_0\, \Delta' \psi_0$, elle s'annule avec r_0.

La première a pour partie principale $2\pi \frac{\psi_0}{r_0}$, le terme constant étant nul. Enfin, l'intégrale $\iint_D [\Delta'\psi - k^2\psi] \frac{e^{-kr}}{r}\, dX\, dy$ tend visiblement vers 0 avec r_0. On peut donc écrire :

(IV,13)
$$\boxed{\frac{\partial \psi}{\partial z_0} = \lim_{r_0 \to 0}\left[\frac{1}{2\pi}\iint_{\substack{A+S \\ r>r_0}} \psi\, \frac{e^{-kr}}{r^3}[1+kr]\, dX\, dy - \frac{\psi_0}{r_0}\right]}$$

....

§ 4.2 - Méthode numérique de résolution -

L'équation intégrale du problème ne se ramenant pas à un type classique, nous pourrons chercher à la résoudre numériquement par une méthode de superposition.

Considérons, en effet, un système complet de fonctions s_i définies sur l'aile. Quelle que soit la fonction s définie et continue sur l'aile et son contour, il existera une combinaison linéaire finie $\sum_i \lambda_i s_i$ telle que l'on ait

$$\sqrt{\iint_A \left| s - \sum \lambda_i s_i \right|^2 dX\,dy} < \varepsilon$$

et d'après l'inégalité de Schwarz

$$\iint_A \left| s - \sum \lambda_i s_i \right| dX\,dy < \varepsilon \sqrt{\text{Aire}(A)}$$

F étant une fonction continue sur A, on aura :

$$\left| \iint_A s F \, dX\,dy - \iint_A \left[\sum \lambda_i s_i \right] F \, dX\,dy \right| < \varepsilon \sqrt{\text{Aire}(A)} \sup(|F|)$$

L'espace des fonctions sommables étant complet pour la norme $\|s\| = \iint_A |s| \, dX\,dy$, et l'espace des fonctions continues y étant partout dense, ce résultat reste valable si s est une fonction sommable quelconque:

> Si les s_i forment un système complet sur l'aile, et si s y est sommable, il existera une combinaison linéaire finie des s_i que l'on pourra substituer à s sans introduire une erreur sur les coefficients aérodynamiques supérieure à ε .

Pratiquement, on pourra donc se donner à priori un certain nombre de fonctions s_i prises dans un système complet. On en déduira, par intégration de la relation (IV,5) :

$$\beta \frac{\partial \psi}{\partial X} + k\psi = -e^{-\beta k X} \sqrt{1-\beta^2}\, s$$

....

avec la condition $\Psi = 0$ sur le bord d'attaque, les valeurs correspondantes de Ψ et l'une des formules (IV,12) (IV,13) donnera les valeurs correspondantes de $\frac{\partial \Psi}{\partial \gamma}$ si les fonctions qu'on s'est données sont suffisamment régulières.

Il restera à obtenir les combinaisons linéaires approchant au mieux les potentiels Ψ_i cherchés, pour lesquelles on connaît la valeur de $\frac{\partial \Psi_i}{\partial \gamma}$ (formule (IV,8)).

Nous allons à cette fin utiliser la formule énergétique (III,7)

$$\mathcal{R}(p) \iiint \left[\overline{W} W + \overline{s} s\right] dx\,dy\,dz = a\, \mathcal{R}\left(\iint_{A^+} \overline{W}_n \left[s^+ - s^-\right] d\sigma \right)$$

qui donne $$\mathcal{R}\left(H(E_1, E_1) \right) > 0$$

si on pose, E_1 et E_2 étant deux écoulements quelconques,

(IV,14) $$\boxed{H(E_1, E_2) = \frac{1}{2} \iint_A \overline{W_1}_n \left[s_2^+ - s_2^-\right] d\sigma = - \iint_{A^+} e^{\beta \mathcal{R}(k) X}\, \overline{\frac{\partial \Psi_1}{\partial \gamma}} \left[\beta \frac{\partial \Psi_2}{\partial X} + k \Psi_2\right] dX\,dy}$$

On a donc, si E n'est pas nul

$$H(E, E) \neq 0$$

H vérifie évidemment les propriétés

$$H(\lambda E_1, E_2) = \overline{\lambda}\, H(E_1, E_2)$$
$$H(E_1, \lambda E_2) = \lambda\, H(E_1, E_2)$$

mais il ne présente pas la symétrie hermitienne, en raison du caractère "dissipatif" des écoulements en atmosphère illimitée.

Considérons la suite d'écoulements indépendants $E_1, E_2, \ldots$ $\ldots E_p, \ldots$ définis à partir des fonctions s_i que l'on s'est données, et cherchons à former une double suite F_p, G_p de la forme

$$\begin{array}{ll} F_1 = E_1 & G_1 = E_1 \\ F_2 = E_2 + \lambda_{21} F_1 & G_2 = E_2 + \mu_{21} G_1 \\ F_3 = E_3 + \lambda_{32} F_2 + \lambda_{31} F_1 & G_3 = E_3 + \mu_{32} G_2 + \mu_{31} G_1 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

vérifiant $$H(F_i, G_j) \begin{cases} = 0 & \text{pour } i \neq j \\ \neq 0 & \text{pour } i = j \end{cases}$$

....

Nous allons en montrer la possibilité par récurrence : supposons ces deux propriétés vérifiées pour i et $j < n$.

Nous chercherons $F_n = E_n + \lambda_{n,n-1} F_{n-1} + \lambda_{n,n-2} F_{n-2} + \dots + \lambda_{n,1} F_1$

$$G_n = E_n + \mu_{n,n-1} G_{n-1} + \mu_{n,n-2} G_{n-2} + \dots + \mu_{n,1} G_1$$

Nous voulons avoir, pour $i < n$

$$H(F_n, G_i) = 0$$

ce qui donne
$$H(E_n, G_i) + \overline{\lambda_{n,i}}\ H(F_i, G_i) = 0$$

et détermine $\lambda_{n,i}$ puisque $H(F_i, G_i) \neq 0$

De même $H(F_i, G_n) = 0$ nous donne

$$H(F_i, E_n) + \mu_{n,i}\ H(F_i, G_i) = 0$$

F_n et G_n sont complètement déterminés.

Il nous reste à prouver que $H(F_n, G_n) \neq 0$

Remarquons que $F_n - G_n$ est une combinaison linéaire des F_i et des G_i pour $i < n$.

Les F_i peuvent visiblement s'exprimer comme combinaison des E_i, qui, eux-mêmes s'expriment au moyen des G_i. Par suite, on a une relation :

$$F_n - G_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i G_i$$

d'où
$$H(F_n, G_n) = H(F_n, F_n) + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i\ H(F_n, G_i)$$
$$= H(F_n, F_n)$$

F_n n'est pas nul, sinon on aurait, en exprimant $F_{n-1}, F_{n-2}, \dots F_1$ en fonction de $E_{n-1}, \dots E_1$ une relation

$$E_n + \beta_{n-1} E_{n-1} + \dots + \beta_1 E_1 = 0$$

ce qui n'a pas lieu puisque les E_i sont indépendants.

On a donc $H(F_n, G_n) = H(F_n, F_n) \neq 0$, C.Q.F.D.

Nous formons ainsi une double suite biorthogonale pour l'opérateur H.

....

Supposons maintenant que l'écoulement cherché E puisse se mettre sous la forme $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i E_i$.

On pourra exprimer les E_i en fonction des F_i , donc mettre E sous la forme $\sum_{i=1}^{n} \beta_i F_i$

et l'on aura $H(E - \sum_{i=1}^{n} \beta_i F_i , G_j) = 0$

pour $j = 1, 2, \ldots n$ ou $H(E, G_j) = \overline{\beta_j} \; H(F_j, G_j)$

formule dont on peut tirer β_j , puisque $H(F_j, G_j) \neq 0$

On peut donc énoncer :

Etant donné une suite d'écoulements E_i indépendants, il existe une seule combinaison linéaire $\sum_{i=1}^{n} E_i \alpha_i$

telle que

$$H(E - \sum E_i \alpha_i , E_j) = 0$$

pour $j = 1, 2, \ldots n$. Nous considérons cette combinaison linéaire comme une valeur approchée de E.

... ...

En résumé, on obtiendra une résolution numérique approchée de notre équation intégrale de la façon suivante :

1°/ On choisit une famille de fonctions Δ_j deux fois différentiables, complète sur l'aile.

2°/ On en déduit les fonctions ψ_j en intégrant (IV,5)

3°/ On calcule les fonctions $\frac{\partial \psi_j}{\partial \gamma}$ par la formule (IV,12) ou (IV,13)

4°/ On calcule les nombres :

$$H(E_i, E_j) = -\iint_A e^{i\beta R(k) X} \overline{\frac{\partial \psi_i}{\partial \gamma}} \left[\beta \frac{\partial \psi_j}{\partial X} + k \psi_j \right] dX\, dy$$

5°/ On forme la suite biorthogonale F_j, G_j par la méthode indiquée, en vérifiant que les nombres $H(F_j, G_j)$ ont leur partie réelle positive.

6°/ $\frac{\partial \psi}{\partial \gamma}$ ayant la valeur indiquée en (IV,8), on obtient les coefficients du développement en série de l'écoulement cherché sur les F_i par la formule

$$\overline{\beta_i}\; H(F_j, G_j) = \iint_A e^{i\beta R(k) X} \overline{\frac{\partial \psi}{\partial \gamma}} \left[\beta \frac{\partial \psi_i}{\partial X} + k \psi_i \right] dX\, dy$$

où ψ_i désigne la valeur de ψ dans l'écoulement G_i.

Tous ces calculs ont été étudiés dans l'hypothèse $R(p) > 0$ Mais leur prolongement par continuité au cas $R(p) = 0$ est possible.

En particulier, dans la formule (IV,12), l'intégrale sur le sillage reste absolument convergente puisque, d'après (IV,8), $|\psi|$ est non croissante sur le sillage pour $R(k) \geqslant 0$ et que l'intégrale $\int \frac{e^{-kr}}{r^3} [1 + kr]\, dX$ est absolument et uniformément convergente pour $R(k) \geqslant 0$, $|k|$ borné.

....

§ 4.3 - Cas des écoulements cylindriques - Aile droite et aile en flèche -

La méthode des tranches, que l'on utilise le plus souvent dans le cas d'une aile droite, consiste à supposer que, pour chaque section de l'aile pour un plan parallèle à xOz, tout se passe comme si l'écoulement était cylindrique, φ étant indépendant de y.

La méthode générale s'applique dans ce cas, et les intégrales intervenant dans (IV,12) se ramènent à des intégrales simples, à condition que l'on ait d'abord calculé

(IV,15) $$\boxed{I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-kr}}{r}\, dy \quad , \quad I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-kr}}{r^3}\left[1+kr\right] dy}$$

avec $r = \sqrt{[X-X_0]^2 + y^2}$

En posant $|X-X_0| = \alpha$, $y = \alpha\, \mathrm{sh}\varphi$

I_1 devient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k\alpha\, \mathrm{ch}\varphi}\, d\varphi = i\pi\, H_0^{(1)}(ik\alpha) = 2K_0(k\alpha) \quad [\text{Bibl. 7}]$$

Pour calculer I_2 qui devient par le même changement de variables

$$\frac{1}{\alpha^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-k\alpha\, \mathrm{ch}\varphi}}{\mathrm{ch}^2\varphi}\left[1 + k\alpha\, \mathrm{ch}\varphi\right] d\varphi$$

intégrons par parties

$$I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k\alpha\, \mathrm{ch}\varphi}\, \frac{d\varphi}{\mathrm{ch}^2\varphi}$$

Il vient

$$I_3 = k\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k\alpha\, \mathrm{ch}\varphi}\left[\mathrm{ch}\varphi - \frac{1}{\mathrm{ch}\varphi}\right] d\varphi$$

d'où

$$I_2 = \frac{k}{\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k\alpha\, \mathrm{ch}\varphi}\, \mathrm{ch}\varphi\, d\varphi$$

$$= -\frac{\pi k}{\alpha} H_1^{(1)}(ik\alpha) = \frac{2k}{\alpha} K_1(k\alpha) \quad [\text{Bibl. 7}]$$

....

et par suite

(IV,16) $$\boxed{I_1 = 2\,K_0\left(k\,|x-x_0|\right)\;,\quad I_2 = \frac{2k}{|x-x_0|}\;K_1\left(k\,|x-x_0|\right)}$$

On possède actuellement des tables très complètes (Bibl. 8) des fonctions cylindriques d'ordre 0 et 1, qui permettent d'effectuer les calculs numériques.

Dans le cas d'une aile en flèche, on peut chercher à supposer que l'on a un écoulement

$$\varphi = f(x\cos\alpha + y\sin\alpha,\, z)$$

α étant l'angle de flèche.

On peut appliquer à celui-ci une méthode analogue.

Mais on peut se ramener au cas précédent.

Remarquons, en effet, que φ vérifie

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \left[\frac{p}{a} + \beta\frac{\partial}{\partial x}\right]^2(\varphi)$$

soit, en posant $x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha \qquad \beta' = \beta\cos\alpha$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \left[\frac{p}{a} + \beta'\frac{\partial}{\partial x'}\right]^2(\varphi)$$

L'équation est la même que dans le cas de l'aile droite, au changement près de x en x' et de β en β'.

Il en va de même pour les conditions sur l'aile et le sillage, et l'on peut donc énoncer :

> Dans l'hypothèse des écoulements cylindriques, une tranche d'aile en flèche d'angle α est soumise aux mêmes efforts aérodynamiques que si elle volait perpendiculairement au vent, avec le nombre de Mach $\beta' = \beta\cos\alpha$.

Ceci étend aux écoulements variés un résultat bien connu pour les écoulements permanents. On constate que dans ce cas les méthodes de calcul subsonique s'étendent aux écoulements supersoniques dont le nombre de Mach est inférieur à $\frac{1}{\cos\alpha}$.

B I B L I O G R A P H I E

Références du texte -

1 J.M. SOURIAU — Une méthode générale de linéarisation des problèmes physiques "L'Information des Sciences physiques" - Paris, Baillière - déc. 1947

2 R. BASILE — Recherche des caractéristiques dynamiques des systèmes continus. Colloque international de mécanique de Poitiers, 1950. (A paraître aux publications S.D.I.T. Paris)

3 J.M. SOURIAU — Valeurs moyennes et transformation de Laplace - C.R. AC. Sciences - Paris - 7 Juil. 1947

4 D.V. WIDDER — The Laplace transform - Princeton University Press 1946. p 81.

5 J.M. SOURIAU — Une méthode générale de décomposition spectrale et d'inversion des matrices. C.R. Acad. des Sciences - Paris, 15 Nov. 1948

6 Y. ROCARD — Dynamique générale des vibrations - Paris - Masson, 2ème édition 1949 p. 330

....

7 W. MAGNUS, F. OBERHETTINGER Formel und Sätze fur die Speziellen Funktionen der mathematischen Physik- Berlin, Springer 1948 pp. 38-39.

8 NATIONAL BUREAU OF STANDARDS Table of the Bessel Functions Jo (z) and J_1 (z) for complex arguments. New-York, Columbia University Press 1947

NATIONAL BUREAU OF STANDARDS Table of the Bessel Functions Y_o (z) and Y_1 (z) for complex arguments - New-York, Columbia University Press 1950

OUVRAGES CONSULTES

H. ASHLEY Some unsteady aerodynamic problems affecting the dynamic stability of aircraft - Thèse - Mass. Inst. Techn. 1951

A.E. PILLINGTON Harmonic oscillations of an aerofoil in subsonic flow. Aeronautical research laboratories. Report A. 65 Melbourne. Déc. 1949.

P. CICALA L'état actuel des recherches sur le mouvement non-stationnaire d'une surface portante - l'Aerotechnica, sept. oct. nov. et déc. 1941.

....

G. COUCHET	Les mouvements plans non stationnaires à circulation constante et les mouvements infiniment voisins. (aile d'allongement infini) Paris. Publ. ONERA n° 31 1949.
CHI-TEH-WANG	Variational method in the theory of Compressible Fluid. Journal of the Aeronautical Sciences, Nov. 1948.
R. COURANT et HILBERT	Methoden der mathematischen Physik. Berlin Julius Springer, 1931
F. DIETZE	Forces aérodynamiques d'une aile soumise à des oscillations harmoniques dans un fluide compressible à vitesse subsonique. lère partie. Traduit du rapport allemand F.B. n° 1733 du 20.1.1943.
J.M. GREIDANUS	De arbeid, die de luchtkrachten per tijdseenheid op een trillenden vleugel verrichten en de kritische trillingsvormen van een vleugel. Rapport V. 1237. National Luchtvaartlaboratorium - Amsterdam 1.1.49.
J.M. GREIDANUS et A.V. v. d. VOOREN	Mathematical principles of Flutter Analysus. Rapport F. 43 National Luchtvaartlaboratorium. Amsterdam 1.1.49.
H.G. KUSSNER	Allgemeine Tragflächentheorie. Luftfahrt-Forschung. Band. 17 - Munich 10.12.1940, p. 370.

LAMBOURNE — On the conditions under which energy can be extracted from an Airstream by an oscillating aerofoil. Oscillation sub-Committee Aeronautical Research Council.A.2. Report 5.3.49.

J. LEGRAS — Contribution à l'étude de l'aile portante- PARIS - Publ. S.D.I.T. n° 222

E. REISSNER — On the theory of oscillating airfoils of finite span in subsonic compressible flow. WASHINGTON - NACA Rep.1002

E. REISSNER — On the general theory of thin airfoils for non uniforme motion (sur la théorie générale des profils minces dans un mouvement non uniforme). N.A.C.A. T.N. n° 946.

E. REISSNER — Effect of finite span on thin airboard distribution for oscillating wings. N.A.C.A. 2194

Ch. ROUMIEU — Théorie linéaire des mouvements variés d'une aile mince. PARIS- Rapport interne ONERA 2/58 A. 1948

A.H. TAUB — On Hamilton's principle for perfect compressible fluids, Proceding of symposia in applied mathematics. American Mathematical Society 1949. Vol. I p. 148.

Dr. TIMMAN et A.I.v.d.VOOREN — Theory of the oscillating wing with aerodynamically balanced control surface in a two-dimensional, subsonic, compressible flow. National Luchtvaartlaboratorium. Amsterdam. Report F. 54 - 15.6. 1949.

../...

TURNER et RABONOWITZ — Aerodynamic coefficients for an oscillating airfoil with hinged flap, with tables for a mach number of 0,7. NACA. Technical note 2213. October 1950.

H. VILLAT — Leçons sur la théorie des tourbillons. PARIS. Gauthier-Villars et Cie, Editeurs 1930.

H. WAGNER — Uber die Entstehung des dynamischen Auftriebes von Tragflügeln - Z.A.M.M. 1925, vol. 5 n° 1 p. 17-35.

G.N. WATSON — A treatise on the theory of Bessel functions. Cambridge. At the University Press. 1944.

G. ZEMPLEN — Hydrodynamische Bewegungsgleichungen - Math. Annalen 61, 1905.

H. LOMAX, M.A. HEASLET et F.B. FULLER. — Three-Dimensional, Unsteady-lift Problems in high speed flight. Basic concepts. N.A.C.A. T.N. n° 2256 1950.
