

PUBLICATIONS SCIENTIFIQUES DE L'UNIVERSITÉ D'ALGER

COMITÉ DE RÉDACTION

SÉRIE A

Sciences Mathématiques.

A. BLANC-LAPIERRE
G. BOURION
G. MEYER
B. D'ORGEVAL
R. DE POSSEL

SÉRIE B

Sciences Physiques.

A. BLANC-LAPIERRE
E. CRAUSSE
A. A. GUNTZ
M. PERROT
P. A. ROLLET
L. ROYER
J. SAVORNIN
F. WOLFERS

SECRÉTARIAT

B. D'ORGEVAL

Secrétaires adjoints :

P. JAFFARD

M. PERROT

Les "PUBLICATIONS SCIENTIFIQUES DE L'UNIVERSITÉ D'ALGER" comprennent deux séries :

SÉRIE A : Alger-Mathématiques, consacrée à des notes et mémoires originaux de Mathématiques pures et de Physique Mathématique.

SÉRIE B : Alger-Sciences Physiques, consacrée à des notes et mémoires originaux de Physique et de Chimie.

Chaque fascicule est au minimum d'une centaine de pages. Plusieurs fascicules d'une même série forment un tome.

Publications Scientifiques de l'Université d'Alger,
Série A, Vol. I, fasc. 2, 1954.

Jean-Marie SOURIAU (Tunis).

EQUATIONS CANONIQUES ET GÉOMÉTRIE SYMPLECTIQUE

Sommaire. — La géométrie symplectique ⁽¹⁾ — proche parente de la géométrie euclidienne —, est un cadre qui se prête particulièrement à l'étude du calcul des variations et des équations aux dérivées partielles du premier ordre.

Nous définissons d'abord (1.1, 1.2) une géométrie vectorielle assez générale, qui contient entre autres la géométrie euclidienne.

Puis nous étudions (1.3) un cas particulier, la géométrie symplectique, caractérisée par le fait que tout vecteur est perpendiculaire à lui-même. Les notions de sous-espace isotrope saturé, de projecteur canonique, permettent d'en préciser les propriétés essentielles : la dimension de l'espace est paire, tous les vecteurs sont « égaux », etc. Nous montrons aussi (1.4) qu'on peut associer à chaque espace vectoriel un espace de dimension double, qui est le modèle de tout espace symplectique. Ses éléments, les « phases », peuvent remplacer systématiquement les « éléments de contact ».

Nous définissons ensuite (§ 2) les variétés isotropes saturées (V. I. S.), et en indiquons la génération (dans le cas d'un espace de phase, elles correspondent aux *multiplicités* de l'espace originel). Nous étudions ensuite les *surfaces* symplectiques : elles sont composées de courbes particulières, les *caractéristiques*; toute V. I. S. tracée sur une surface s'obtient en les groupant judicieusement.

Les *transformations canoniques* de l'espace (celles qui conservent le produit scalaire) jouent le rôle des transformations de contact classiques. Nous les faisons correspondre aux V. I. S. d'un espace symplectique auxiliaire, ce qui en fournit immédiatement la génération, et permet de démontrer que toutes les surfaces symplectiques sont applicables les unes sur les autres.

Il reste à passer en revue les applications : au § 3, nous montrons que la résolution d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre revient à tracer une V. I. S. sur une certaine surface symplectique J : le problème est donc résolu; nous donnons comme application la discussion correcte du problème de Cauchy dans le cas général.

Une *intégrale complète*, c'est une V. I. S. mobile qui parcourt J; on peut lui faire

(1) Le nom de « groupe symplectique » a été proposé par H. WEYL, pour remplacer celui de « groupe complexe », qui prêtait à confusion. DICKSON l'avait appelé « groupe linéaire abélien ».

correspondre une application de J sur un plan, dans laquelle les caractéristiques deviendront des droites : telle est l'interprétation du théorème de Jacobi, dont nous donnons par ailleurs une démonstration valable dans un cas plus général.

Nous montrons ensuite (§ 4) qu'à tout problème de variations correspond aussi une surface symplectique dont il faut trouver les caractéristiques⁽¹⁾ : on en tire une méthode de résolution des problèmes de variations, qui est plus générale que celle des équations canoniques d'Hamilton-Jacobi, et surtout plus pratique; nous en indiquons quelques applications à la mécanique.

Ce travail a déjà été l'objet d'une communication au Colloque de Géométrie Différentielle de Strasbourg (C. N. R. S., mai 1953); comme il s'agit surtout d'un effort de synthèse, il est difficile même à l'auteur d'apprécier la nouveauté de ses différentes parties. Indiquons simplement les références suivantes :

— « Sur les groupes classiques », par J. DIEUDONNÉ, (*Act. Sc. Ind.* Hermann, 1948) et *The Classical groups* (Princeton Mathematical series, vol. I), par H. WEYL pour ce qui concerne la géométrie symplectique (non différentielle), *Methoden der Mathematischen Physik* (Tome II), de COURANT et HILBERT, et, bien entendu, les *Leçons sur les invariants intégraux* d'Elie CARTAN. Je remercie les professeurs R. de Possel et G. Poitou pour l'aide qu'ils ont apportée à la rédaction de ce travail.

§ 1. — Introduction à la géométrie symplectique.

1. 1. Géométrie affine à n dimensions.

1. 1. 1. Vecteurs, covecteurs, affineurs.

Soit E un espace vectoriel réel à n dimensions, dont les éléments seront appelés *vecteurs*

Les opérateurs linéaires transformant les vecteurs en nombres (formes linéaires) seront appelés *covecteurs*; ils forment un autre espace vectoriel à n dimensions, le *dual* E^* de E .

Appelons *contravecteurs* les opérateurs linéaires transformant les nombres en vecteurs; il est immédiat que les vecteurs et les contravecteurs se correspondent biunivoquement, de sorte que l'on peut les identifier; nous serons amenés ainsi à poser

$$V(x) = xV$$

V étant un vecteur et x un nombre.

Nous appellerons *affineurs* les opérateurs linéaires appliquant E dans E .

D'une façon générale, nous appellerons produit des opérateurs A et B , et nous désignerons par $A.B$, l'opérateur obtenu en appliquant d'abord B et ensuite A , de sorte que l'on pourra poser :

$$[A.B](X) = A(B(X)).$$

⁽¹⁾ Le rapport avec l'équation aux dérivées partielles de Jacobi saute aux yeux : les deux problèmes correspondent à la même surface.

La multiplication des opérateurs n'est bien entendu pas commutative, mais elle est associative dans tous les cas :

$$[A.B].C = A.[B.C].$$

Comme application, considérons un vecteur V et un covecteur Γ .

Le nombre obtenu en appliquant Γ à V , $\Gamma(V)$, peut aussi s'écrire $\Gamma.V$, si on considère V comme un opérateur (contravecteur).

Par contre l'opérateur $V.L$ est un *affineur*; car si X est un vecteur arbitraire, $[V.L](X) = V(\Gamma(X))$ est égal au produit du vecteur V par le nombre $\Gamma(X)$.

Le rang r d'un opérateur linéaire A est le nombre de dimensions de son domaine de valeurs [*domaine que nous désignerons par* $\text{val}(A)$].

Prenant une base V_i dans $\text{val}(A)$, nous pouvons mettre A sous la forme $\sum_{i=1}^r V_i \cdot \Gamma_i$, les Γ_i étant des covecteurs du domaine de définition de A .

Si A est un affineur, la somme $\sum \Gamma_i \cdot V_i$ a un sens; c'est un nombre, et on peut montrer qu'il est indépendant du choix des V_i ; c'est donc une fonction de A seul, sa *trace*, que nous désignerons par $\text{Tr}(A)$. Tr est un opérateur linéaire.

1. 1. 2. Projecteurs.

Soit E_1 un sous-espace vectoriel de E ; on peut trouver un sous-espace E_2 *supplémentaire*, c'est-à-dire tel que tout vecteur V de E se mette d'une seule façon sous la forme $V_1 + V_2$, V_1 appartenant à E_1 et V_2 à E_2 . L'opérateur P qui fait correspondre V_1 à V , c'est à dire qui projette sur E_1 parallèlement à E_2 , s'appelle un *projecteur*; il est linéaire.

L'opérateur qui projette sur E_2 parallèlement à E_1 est égal à $1 - P$; c'est le *projecteur complémentaire*.

On a évidemment $P.[1 - P] = 0$, d'où $P = P^2$.

On établit sans peine la réciproque, de sorte que

Les projecteurs sont les opérateurs linéaires égaux à leur carré.

En donnant d'un projecteur P une représentation $\sum_{i=1}^r V_i \Gamma_i$, la relation $P = P^2$, compte tenu de l'indépendance des V_i , entraîne $\Gamma_i V_j = \delta_{ij}$, et par suite $\sum \Gamma_i V_i = r$:

La trace d'un projecteur est égale à son rang.

Si deux affineurs P et P' vérifient

$$P.P' = P' \quad P'.P = P$$

il vient $P^2 = P'.P.P'.P = P'.P'.P = P'.P = P$.

P est un projecteur; il en est de même de P'.

On constate de plus que $\text{val}(P) = \text{val}(P')$, et inversement que deux projecteurs sur un même sous-espace vérifient les égalités ci-dessus :

Les équations $P.P' = P'$, $P'.P = P$ caractérisent deux projecteurs sur un même sous-espace.

1. 2. g-Espaces.

1. 2. 1. Produit scalaire.

Un espace vectoriel E à n dimensions sera dit un g-espace lorsqu'on aura choisi, une fois pour toutes, une correspondance linéaire biunivoque entre E et son dual.

Nous conviendrons de la représenter, dans tous les cas, par le symbole g.

Ainsi, V étant un vecteur de E, $g(V)$ est un élément de E^* , c'est-à-dire un covecteur; si on applique ce dernier à un autre vecteur W, on obtiendra le nombre $[g(V)](W)$, qui sera par définition le *produit scalaire* de V et de W. Cette définition généralise le produit ordinaire en n'exigeant ni la symétrie de g [les produits scalaires $g(V)(W)$ et $g(W)(V)$ peuvent être différents] ni la propriété $g(V)(V) \geq 0$.

1. 2. 2 Transposition

Soit A un opérateur quelconque appliquant un g-espace, E dans un g-espace, F ⁽¹⁾.

S'il existe un opérateur B, appliquant F dans E, tel que l'on ait identiquement en V et W

$$g(A(V))(W) = g(V)(B(W))$$

il n'en existe qu'un. On l'appelle *transposé* de A, et on le note $\bar{A}$. On peut montrer que la condition nécessaire et suffisante d'existence de A est que A soit linéaire; $\bar{A}$ est alors également linéaire.

Par exemple, les nombres réels, considérés comme opérateurs sur les vecteurs, ont un transposé qui leur est égal.

On établit immédiatement les formules

$$\begin{aligned}\overline{A+B} &= \bar{A} + \bar{B} \\ \overline{A.B} &= \bar{B}.\bar{A}\end{aligned}$$

⁽¹⁾ Les espaces E et F peuvent être égaux ou différents.

et, si A est un affineur

$$\begin{aligned}\text{Tr}(\bar{A}) &= \text{Tr}(A) \\ \text{dét}(\bar{A}) &= \text{Dét}(A)\end{aligned}$$

[dét(A) désignant le déterminant de A].

Enfin, en identifiant les vecteurs avec les contravecteurs, et choisissant comme produit scalaire de deux nombres leur produit ordinaire, on arrive à la formule

$$g(V) = \bar{V}$$

qui permet d'écrire le produit scalaire $g(V)(W)$ sous la forme $\bar{V}.W$.

1. 2. 3 g-Groupe.

Les affineurs A conservant le produit scalaire, c'est-à-dire les solutions de $\bar{A}.A = 1$, seront appelés *affineurs unitaires*; ils forment un groupe, auquel correspond la géométrie de l'espace E.

Leur déterminant vaut évidemment ± 1 . Ceux dont le déterminant est égal à + 1 sont appelés *rotations*; ils forment un sous-groupe, auquel correspond la géométrie *orientée* de E.

V étant un vecteur quelconque, $\bar{V}$ est un vecteur qui dépend linéairement de V; il existe donc un affineur U tel que l'on ait identiquement

$$\bar{V} = U.V$$

Par exemple, si le produit scalaire est symétrique soit,

$$g(V)(W) = g(W)(V)$$

on peut écrire $\bar{V}.W = \bar{W}.V$.

En remarquant que $W.V$, qui est un nombre, est égal à son transposé, il vient :

$$\bar{V}.W = \overline{\bar{W}.V} = \bar{V}.\bar{W}$$

d'où

$$\bar{V}[W - \bar{W}] = 0$$

Cette relation étant vraie quel que soit le vecteur V, entraîne

$$\bar{W} = W$$

U est donc ici l'opérateur identique, que nous désignerons par 1. Dans le cas général, on peut établir que U est une *rotation*; nous l'appellerons *rotation fondamentale*. A étant un (affineur) quelconque, on a quel que soit V

$$\overline{A.V} = \bar{V}.\bar{A} = \bar{A}.\bar{V}, \quad \text{d'où} \quad U_F.A.V = \bar{A}.U_E.V,$$

et finalement

$$\bar{\bar{A}} = U_F \cdot A \cdot U_F^{-1}$$

En particulier, si A est un affineur unitaire l'égalité $\bar{A} \cdot A = I$, donnant $\bar{A} \cdot \bar{\bar{A}} = I$, montre que A et $\bar{\bar{A}}$ sont deux inverses de $\bar{A}$, donc égaux. On a par suite ($A = U \cdot A \cdot U^{-1}$) :

La rotation fondamentale commute avec tous les affineurs unitaires

1. 3 L'espace symplectique.

1. 3. 1 Définitions.

Un espace *symplectique* est un *g*-espace où le produit scalaire est antisymétrique, soit

$$g(V)(W) = -g(W)(V);$$

une démonstration analogue à celle qui a été donnée dans le cas symétrique donne alors :

$$U = -I.$$

Tout vecteur V vérifie $\bar{\bar{V}} = U \cdot V = -V$; au contraire un affineur A suit la règle $\bar{\bar{A}} = U \cdot A \cdot U^{-1} = A$.

Nous exprimerons les relations équivalentes $\bar{V} \cdot W = 0$ et $\bar{W} \cdot V = 0$ en disant que les vecteurs V et W sont orthogonaux; le produit scalaire d'un vecteur par lui-même étant évidemment nul, *tout vecteur est orthogonal à lui-même*;

1. 3. 2. Sous-espaces isotropes saturés.

Soit V_1 un vecteur quelconque non nul. Il peut exister un vecteur V_2 indépendant de V_1 et orthogonal à V_1 ; puis un vecteur V_3 , indépendant de V_1 et V_2 , orthogonal à V_1 et V_2 .

Formons ainsi une suite V_i de vecteurs indépendants et orthogonaux deux à deux.

L'espace ayant une dimension finie, on sera arrêté au vecteur V_N ; tout vecteur orthogonal à $V_1, V_2, \dots, V_N$ en sera une combinaison linéaire.

L'espace vectoriel E_i sous-tendu par ces N vecteurs possède les propriétés suivantes :

a) Tous les vecteurs de E_i sont orthogonaux entre eux (on dira que E_i est *isotrope*) ⁽¹⁾

⁽¹⁾ Il serait plus correct de dire « complètement isotrope », le terme « isotrope » signifiant l'existence d'un vecteur non nul orthogonal à tous les autres.

b) Tout vecteur orthogonal à E_i en fait partie (on dira que E_i est saturé). Ainsi

On peut faire passer un espace isotrope saturé par un vecteur arbitraire.

1. 3. 3. Projecteurs canoniques.

Soit E_i un sous-espace isotrope saturé quelconque, P un projecteur sur E_i . Quels que soient les vecteurs X et Y, leurs projections sur E_i , $P \cdot X$ et $P \cdot Y$, sont orthogonales.

On a donc identiquement $\bar{P} \cdot \bar{X} \cdot P \cdot Y = \bar{X} \cdot \bar{P} \cdot P \cdot Y = 0$; par suite le covecteur $\bar{X} \cdot \bar{P} \cdot P$ est nul; son transposé $-P \cdot P \cdot X$ l'est également; on arrive à l'égalité

$$\bar{P} \cdot P = 0$$

Par ailleurs, quels que soient X et Y, on a

$$[I - P] \cdot X \cdot P \cdot Y = \bar{X} \cdot [I - P] \cdot P \cdot Y = 0 \text{ puisque } P = P^2.$$

Le vecteur $[I - P]X$ est orthogonal à tout vecteur $P \cdot Y$ de E_i ; E_i étant saturé, il en fait partie; il est donc *invariant par P*.

On arrive ainsi à la formule

$$P \cdot [I - P] \cdot X = [I - P] \cdot X$$

valable quel que soit X, d'où

$$P + \bar{P} = I + P \cdot \bar{P}.$$

En posant $\Pi = P - \frac{I}{2} \cdot P \cdot \bar{P}$, cette relation s'écrit $\Pi + \bar{\Pi} = I$;

comme par ailleurs $P \cdot \Pi = \Pi$, $\Pi \cdot P = P$.

Π est aussi un projecteur sur E_i .

Nous appellerons *projecteur canonique* un tel projecteur complémentaire de son transposé, c'est-à-dire une solution quelconque de

$$\bar{\Pi} \cdot \Pi = 0, \quad \bar{\Pi} + \Pi = I.$$

Donc

Tout espace isotrope saturé est le domaine de valeurs d'un projecteur canonique.

On constate immédiatement que si Π est un projecteur canonique, val (Π) est un espace isotrope saturé. Comme $I - \Pi = \bar{\Pi}$ est aussi un projecteur canonique, Π projette sur un sous-espace isotrope saturé parallèlement à un autre sous-espace isotrope saturé.

Remarquons enfin que la relation $\Pi + \bar{\Pi} = I$ donne

$$2 \operatorname{Tr} (\Pi) = \operatorname{Tr} (I) = n.$$

Π étant un projecteur, sa trace est égale à son rang N.

Ainsi

Le nombre de dimensions d'un sous-espace isotrope saturé est constant et égal à la moitié du nombre de dimensions de l'espace.

Par suite tout sous-espace isotrope à N dimensions est saturé, sinon, en le saturant, on obtiendrait un sous-espace isotrope saturé à plus de N dimensions.

Nous avons enfin établi qu'il n'existe pas d'espace symplectique de dimension impaire.

1. 3. 4. Bases canoniques.

Soit Π un projecteur canonique, $X_1, X_2, \dots, X_N$ une base de $\text{val}(\Pi)$.

Π se met évidemment sous la forme, $\sum_{i=1}^N X_i \Gamma_i$, les Γ_i étant des covecteurs, soit

$$\Pi = \sum_{i=1}^N X_i \cdot \bar{Y}_i.$$

La relation $\Pi + \bar{\Pi} = 1$ donne, Z étant un vecteur quelconque,

$$Z = \sum_{i=1}^N X_i \cdot q_i + Y_i \cdot p_i$$

avec

$$q_i = \bar{Y}_i \cdot Z, \quad p_i = -p_i \bar{X}_i \cdot Z.$$

Les vecteurs X_i et Y_i forment donc une base de l'espace, dans laquelle le produit scalaire est donné par la formule

$$\bar{Z} \cdot Z' = \bar{Z} \cdot \Pi Z' + \bar{Z} \bar{\Pi} Z' = \sum_{i=1}^N p_i q'_i - p'_i q_i.$$

Une telle base s'appellera *base canonique*.

Il est clair que tout opérateur unitaire transformera une base canonique, en base canonique et inversement. Cette remarque conduit immédiatement à de nombreux résultats, dont les suivants :

Tous les espaces symplectiques à $2N$ dimensions sont isomorphes.

Deux figures formées par N vecteurs indépendants et orthogonaux sont égales en géométrie symplectique; en particulier le groupe symplectique est transitif sur les vecteurs non nuls.

1. 4. Espace de phase.

Soit E_0 un espace vectoriel à N dimensions, P et Q un covecteur et un vecteur de E_0 .

Appelons *phase* les symboles $Z = \{P, Q\}$ avec les conventions

$$\begin{aligned} Z + Z' &= \{P + P', Q + Q'\} \\ g(Z)(Z') &= P \cdot Q' - P' \cdot Q \end{aligned}$$

Nous formons ainsi un espace symplectique à $2N$ dimensions, appelé *l'espace de phase* associé à E_0 .

Par opposition E_0 sera appelé *espace de configuration*.

Avec les conventions de (1. 2), le produit scalaire $g(z)(z')$ pourra s'écrire $\bar{Z} \cdot Z'$.

Il est clair que l'opérateur Π défini par $\Pi(\{P, Q\}) = \{0, Q\}$ est un projecteur canonique; on dira par abus de langage qu'il projette l'espace de phase sur l'espace de configuration.

Si on appelle p_i et q^i les coordonnées covariantes de P et contravariantes de Q dans une base quelconque de E_0 , il vient

$$Z \cdot Z' = \sum p_i q'^i - p'^i q_i :$$

à toute base de E_0 correspond donc une base canonique de son espace de phase. Cet exemple d'espace symplectique nous montre d'abord l'existence d'espaces symplectiques à un nombre pair arbitraire de dimensions; nous verrons plus loin l'utilisation de la notion de phase, qui pourra remplacer systématiquement celle d'*élément de contact*.

§ 2. — Géométrie symplectique différentielle.

INTRODUCTION.

Dans ce paragraphe, nous allons considérer des fonctions de variable vectorielle; nous leur appliquerons les notions classiques de dérivée et de différentielle, avec les conventions suivantes

Dérivée d'une fonction.

Le vecteur Y étant fonction du vecteur X :

$$Y = F(X)$$

nous dirons que F est dérivable si la quantité

$$\frac{F(X + H\lambda) - F(X)}{\lambda}$$

admet une limite quand λ tend vers 0, quel que soit H . Le résultat, qui dépend évidemment de F , de X et de H , sera noté

$$F'(X)(H),$$

et nous dirons que F' est la *dérivée* de F .

Dans le cas où X est une variable scalaire x , H est également un scalaire h , et on vérifie immédiatement que $F'(x)(h)$ est égal au produit

du « vecteur dérivé » classique $F'(x)$ par le nombre h ; avec notre convention relative aux contravecteurs, il s'écrit bien $F'(x)(h)$.

Si la convergence du rapport $\frac{F(X + H\lambda) - F(X)}{\lambda}$ est uniforme en X pour chaque valeur de H , on dit que F est différentiable⁽¹⁾; dans ces conditions on peut montrer que $F'(X)$ est un opérateur linéaire, et que F' est continu.

Différentielles.

X étant prise comme variable indépendante, fixons-nous arbitrairement la valeur de H (en fonction de X); comme dans le cas classique, nous désignerons par dY l'expression $F'(X)(H)$; on établira sans peine la règle $dY = F'(X)(dX)$, valable que X soit ou non la variable indépendante.

C'est pourquoi nous désignons également par $\frac{\partial Y}{\partial X}$ l'opérateur linéaire $F'(X)$, qui fait correspondre dY à dX .

Si on fixe autrement H en fonction de X , on dira qu'il s'agit d'une autre différentielle, et on la représentera par un autre symbole (∂ par exemple).

On peut donc remarquer que la règle $dY = \frac{\partial Y}{\partial X} \cdot dX$ doit s'énoncer « $dY = \frac{\partial Y}{\partial X} dX$ quelle que soit la différentielle d ».

Dérivée seconde.

La fonction F' fait correspondre au vecteur X l'opérateur linéaire $F'(X)$; si elle est différentiable à son tour, on aura

$$F''(X)(H) = \lim_{\lambda} \frac{F'(X + H\lambda) - F'(X)}{\lambda},$$

c'est-à-dire

$$F''(X)(H)(K) = \lim_{\lambda} \frac{F'(X + H\lambda)(K) - F'(X)(K)}{\lambda}.$$

Si F est deux fois différentiable, on montre que F'' est un opérateur bilinéaire et symétrique, cette dernière propriété correspondant à la commutativité des dérivations partielles.

Crochet de deux différentielles.

Considérons deux différentielles d et ∂ (nous nous donnons arbitrairement dX et ∂X en fonction de X ; nous les supposons seulement

⁽¹⁾ Dans le cas où X décrit un espace de dimension finie, cette définition est équivalente à la définition classique des fonctions « continûment différentiables ».

différentiables). Y étant une fonction deux fois différentiable de X , il vient :

$$\begin{aligned} dY &= F'(X)(dX) \\ \text{puis} \quad \partial \cdot dY &= \partial(F'(X)) \cdot (dX) + F'(X)(\partial dX) \\ &= F''(X)(\partial X)(dX) + F'(X)(\partial dX). \end{aligned}$$

On voit que $\partial \cdot d$ n'est pas une différentielle, sinon on devrait avoir

$$\partial \cdot dY = F'(X)(\partial dX)$$

mais par contre, la relation

$$d\partial Y = F''(X)(dX)(\partial X) + F'(X)(d\partial X)$$

donne par différence, compte tenu de la symétrie de $F''(X)$:

$$[d \cdot \partial - \partial \cdot d]Y = F'(X)([d \cdot \partial - \partial \cdot d]X),$$

Ce qui prouve que $d \cdot \partial - \partial \cdot d$ est une différentielle; on l'appellera *crochet* des différentielles d et ∂ .

En particulier, si $d \cdot \partial X = \partial \cdot dX$, le crochet de d et ∂ sera nul, on aura donc

$$d \cdot \partial Y = \partial \cdot dY$$

quelle que soit la variable Y ; on dira que les différentielles d et ∂ commutent.

2. 1. Variétés isotropes saturées.

Considérons un espace vectoriel E_0 à N dimensions, de point courant Q ; une variété différentiable I_0 à k dimensions ($0 \leq k \leq N$), plongée dans E_0 ; et une fonction scalaire u , définie sur I_0 .

En un point Q de I_0 , l'opérateur $\frac{\partial u}{\partial Q}$ est un covecteur de l'espace vectoriel tangent (de dimension k). Ses prolongements à l'espace tout entier, c'est à dire les covecteurs P de E_0 vérifiant

$$du = P \cdot dQ$$

dépendent de $N - k$ paramètres.

Par suite la phase $Z = \{P, Q\}$, liée par les relations

$$Q \in I_0, \quad du = P \cdot dQ,$$

engendre une variété I à $N - k + k = N$ dimensions.

d et ∂ étant deux différentielles sur cette variété, leur crochet $d\partial - \partial d$ en est une également. On a donc

$$\begin{aligned} P \cdot [d\partial - \partial d]Q &= [d\partial - \partial d]u = d(P \cdot \partial Q) - \partial(P \cdot dQ) \\ &= dP \cdot \partial Q - \partial P \cdot dQ + P \cdot (d\partial Q - \partial \cdot dQ) = dZ \cdot \partial Z + P \cdot [d\partial - \partial d]Q \end{aligned}$$

On a donc $\overline{dZ}\delta Z = 0$ en tout point de I ; les vecteurs tangents forment un espace vectoriel isotrope, qui est saturé puisque sa dimension est N : tout vecteur tangent à I lui est perpendiculaire, et inversement. On dira que I est une *variété isotrope saturée*, en abrégé une *V. I. S.*

Soit inversement I une *V. I. S.* quelconque de l'espace de phase, I_0 sa projection sur l'espace de configuration.

La relation $dP.\delta Q - \delta P.dQ = 0$, valable sur I , montre que l'intégrale curviligne $u = \int_C P.dQ$ ne dépend que des extrémités de la courbe d'intégration C . L'intégrale u , prise entre un point fixe Z_0 et le point variable Z , vérifie $du = P.dQ$; comme du s'annule avec dQ , u est fonction seulement de la projection Q de Z sur E_0 . Ainsi, les relations $Q \in I_0$, $du = PdQ$ sont vérifiées sur I ; elles définissent une *V. I. S.* qui ne peut être que I (ou un prolongement, ce qui revient au même du point de vue local où nous nous plaçons).

En résumé,

On appelle *V. I. S.* d'un espace symplectique une variété différentiable dont l'espace vectoriel tangent est en tout point isotrope saturé.

Toutes les *V. I. S.* de l'espace de phase $\{P, Q\}$ s'obtiennent en définissant une variété quelconque I_0 de l'espace Q (qui peut se réduire à un point ou à tout l'espace), une fonction scalaire quelconque sur I_0 , u , et en écrivant les équations $Q \in I_0$ $du = P.dQ$.

2. 2. Caractéristiques des surfaces. Crochets de Poisson.

Nous appellerons *surface* d'un espace symplectique E à $2N$ dimensions la variété J à $2N - 1$ dimensions, définie par une équation

$$\varphi = 0$$

φ étant une fonction que nous supposons différentiable autant de fois qu'il sera nécessaire.

En un point Z de J où $\frac{\partial \varphi}{\partial Z}$ n'est pas nul, les vecteurs tangents sont liés par l'équation $\frac{\partial \varphi}{\partial Z}.dZ = 0$; ce sont donc les vecteurs orthogonaux au vecteur $\frac{\partial \varphi}{\partial Z}$, que nous appellerons $\text{grad}(\varphi)$ par analogie avec l'espace euclidien ordinaire.

$\text{Grad}(\varphi)$ définit donc la normale à la surface; comme tout vecteur de l'espace symplectique, il est orthogonal à lui-même, donc également tangent.

Les lignes de force de ce vecteur, que nous appellerons *caractéristiques* de J , sont donc les trajectoires orthogonales de J , et elles sont

tracées sur J . En d'autres termes, ce sont les solutions du système différentiel caractéristique

$$\frac{dZ}{ds} = \text{grad}(\varphi)$$

pour lesquelles l'intégrale première φ prend la valeur 0.

En prenant une base canonique, ce système se détaille sous la forme

$$\frac{dq_i}{\frac{\partial \varphi}{\partial p_i}} = \dots = \frac{dq_N}{\frac{\partial \varphi}{\partial p_N}} = -\frac{dp_i}{\frac{\partial \varphi}{\partial q_i}} = \dots = -\frac{dp_N}{\frac{\partial \varphi}{\partial q_N}} = ds$$

Les intégrales premières de ce système sont les fonctions u vérifiant $\frac{\partial u}{\partial Z} \cdot \text{grad}(\varphi) = 0$.

On appelle crochet de Poisson de deux fonctions u et v , et on note $[u, v]$, le produit scalaire de leurs gradients, soit

$$[u, v] = \overline{\text{grad}(u)} \cdot \text{grad}(v) = \frac{\partial v}{\partial Z} \cdot \frac{\partial u}{\partial Z} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q_i} - \frac{\partial v}{\partial p_i} \frac{\partial u}{\partial q_i}.$$

Les intégrales premières du système caractéristique sont donc les fonctions u vérifiant $[u, \varphi] = 0$.

Le lecteur établira immédiatement la relation

$$\frac{\partial}{\partial Z}[u, v] = \frac{\partial^2 u}{\partial Z^2} \left(\frac{\partial v}{\partial Z} \right) - \frac{\partial^2 v}{\partial Z^2} \left(\frac{\partial u}{\partial Z} \right)$$

d'où découle, compte tenu de la symétrie de l'opérateur bilinéaire $\frac{\partial^2 u}{\partial Z^2}$, l'identité de Poisson :

$$|[u, v], w] + |[v, w], u] + |[w, u], v] = 0,$$

Cette identité a la conséquence suivante : si u et v sont intégrales premières du système caractéristique, leur crochet de Poisson en est aussi une, qui peut très bien être indépendante. Il suffit en effet de remplacer w par φ et d'écrire $[v, \varphi] = 0$, $[\varphi, u] = 0$.

2. 3. Les *V. I. S.* tracées sur une surface.

Soit J une surface d'équation $\varphi = 0$, K une variété isotrope à k dimensions tracée sur J .

Les caractéristiques de J qui rencontrent K forment une variété L à $k + 1$ dimensions, à moins que K ne soit déjà un lieu de caractéristiques.

Pour repérer un point de L , on peut prendre k paramètres $x_1, \dots, x_k$ constants sur les caractéristiques, et un paramètre supplémentaire s défini par $s = 0$ sur K , $\frac{\partial Z}{\partial s} = \text{grad } (\varphi)$.

Les vecteurs tangents à L en un de ses points seront donc sous-tendus par les vecteurs $\partial Z = \frac{\partial Z}{\partial s} = \text{grad } (\varphi)$, $d_i Z = \frac{\partial Z}{\partial x_i}$, $\dots$, $d_k Z = \frac{\partial Z}{\partial x_k}$; les différentielles $\partial, d_1, \dots, d_k$ ainsi définies commutent évidemment.

Les produits scalaires $\overline{d_i Z} \cdot \partial Z$ sont nuls, puisque $\partial Z = \text{grad } (\varphi)$ est orthogonal à tous les vecteurs tangents à J .

Les produits scalaires $\overline{d_i Z} \cdot d_j Z$ sont nuls pour $s = 0$, puisque dans ce cas $d_i Z$ et $d_j Z$ sont des vecteurs tangents à K , qui est isotrope. Calculons leur dérivée par rapport à s :

$$\begin{aligned} \partial(\overline{d_i Z} \cdot d_j Z) &= \overline{d_i Z} \cdot d_j(\text{grad } \varphi) - \overline{d_j Z} \cdot d_i(\text{grad } \varphi) \\ &= d_j(\overline{d_i Z} \cdot \text{grad } \varphi) - d_i(\overline{d_j Z} \cdot \text{grad } \varphi) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi les $k + 1$ vecteurs qui sous-tendent l'espace vectoriel tangent à L sont en tout point orthogonaux deux à deux; cet espace est isotrope.

Si K est une variété isotrope tracée sur une surface J , les caractéristiques de J qui rencontrent K forment une variété isotrope à $k + 1$ dimensions, à moins que K ne soit déjà un lieu de caractéristiques.

De ce théorème fondamental, on peut tirer les conséquences suivantes.

1°) Si une V. I. S., I est tracée sur J , les caractéristiques de J qui rencontrent I ne pouvant engendrer une variété isotrope à $N + 1$ dimensions, font donc partie de I : Toute V. I. S. tracée sur J est donc un lieu de caractéristiques.

Ce résultat peut d'ailleurs s'établir simplement en remarquant que le vecteur $\text{grad } \varphi$, normal à la surface J , donc à I qui est tracée sur elle, lui est nécessairement tangent.

2°) Coupons J par une V. I. S. I' non tangente (c'est-à-dire non tangente au vecteur $\text{grad } \varphi$). L'intersection est une variété K à $N - 1$ dimensions, tracée sur J , et isotrope. Elle n'est pas un lieu de caractéristiques, puisque le vecteur $\text{grad } \varphi$ ne lui est pas tangent. Les caractéristiques de J qui rencontrent I' engendrent donc une V. I. S., I , tracée sur J .

3°) Soit inversement I une V. I. S. tracée sur J . Sur chacune des caractéristiques qui la composent, déterminons un point au moyen

d'une équation $\psi = 0$. On construit ainsi une variété isotrope à $N - 1$ dimensions, K , qui est l'intersection de I et de la surface J' d'équation $\psi = 0$.

Les caractéristiques de J' qui rencontrent K forment une V. I. S. I' , qui coupe J suivant K (ou peut-être un prolongement de K); I est donc composée des caractéristiques de J qui rencontrent I' . Nous arrivons donc au théorème suivant:

Toutes les V. I. S. tracées sur une surface J s'obtiennent en groupant les caractéristiques de J qui rencontrent une V. I. S. arbitraire I' .

2. 4. Les transformations canoniques.

On appellera *g-application* toute transformation différentiable $Y = F(X)$ qui conserve le produit scalaire des différentielles:

$$\overline{dY} \cdot \partial Y = \overline{dX} \cdot \partial X;$$

$\frac{\partial Y}{\partial X}$ est alors un opérateur unitaire.

Les « déplacements » $T = A \cdot X + Y_0$, où A est un affineur unitaire et Y_0 un vecteur fixe, sont des *g-applications* de l'espace sur lui-même. On montre qu'il n'y en a pas d'autres dans le cas d'un produit scalaire symétrique (en utilisant le fait que les symboles de Christoffel sont nuls).

Au contraire, si E est un espace symplectique à $2N$ dimensions, il possède une large famille de *g-applications* sur lui-même que l'on appelle *transformations canoniques*.

Nous les obtiendrons toutes en considérant le carré de l'espace E , c'est-à-dire l'espace E^2 des symboles $\zeta = \begin{bmatrix} Z \\ Z' \end{bmatrix}$, Z et Z' appartenant à E ; on munira E du produit scalaire symplectique défini par

$$g\left(\begin{bmatrix} dZ \\ dZ' \end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix} \partial Z \\ \partial Z' \end{bmatrix}\right) = \overline{dZ} \cdot \partial Z - \overline{dZ'} \cdot \partial Z'.$$

Si la transformation $Z' = F(Z)$ est canonique, le vecteur $\zeta = \begin{bmatrix} Z \\ F(Z) \end{bmatrix}$ décrit une variété à $2N$ dimensions, plongée dans l'espace symplectique E^2 à $4N$ dimensions, et sur laquelle le produit scalaire $\overline{d\zeta} \cdot \partial \zeta = \overline{dZ} \cdot \partial Z - \overline{dZ'} \cdot \partial Z'$ est nul; c'est donc une V. I. S. En appliquant les résultats (2. 1). On voit que:

Toutes les transformations canoniques F d'un espace de phase:

$$F(\{P, Q\}) = \{P', Q'\}$$

s'obtiennent en liant Q et Q' par un nombre arbitraire de relations, et en joignant la relation

$$du = P.dQ - P'.dQ',$$

u étant une fonction arbitraire de Q et de Q' .

Mais toutes les V. I. S. de l'espace E^2 ne correspondent pas à une transformation canonique; si par exemple Z et Z' décrivent chacun une V. I. S. de E , $\zeta = \begin{bmatrix} Z \\ Z' \end{bmatrix}$ décrit bien une V. I. S. de E^2 , mais il est impossible d'exprimer Z' en fonction de Z .

Pour qu'une V. I. S. de E^2 , I , corresponde à une transformation canonique, il est donc nécessaire (et suffisant) que Z (ou Z') soit libre quand ζ décrit I .

Nous sommes maintenant en mesure d'établir le théorème suivant :

Etant données deux surfaces J et J' , Z_0 et Z'_0 un point ordinaire de chacune d'elles, il existe une transformation canonique qui fait correspondre Z'_0 à Z_0 et qui applique J sur J' .

Nous allons même montrer que si J et J' ont pour équation respectives $\varphi(Z) = 0$, $\psi(Z') = 0$, on peut imposer à la transformation cherchée la condition $\varphi(Z) = \psi(Z')$ en tout point.

Soit A un affineur unitaire quelconque. La transformation

$$(a) \quad Z' - Z'_0 = A.[Z - Z_0]$$

est un déplacement qui amène Z_0 sur Z'_0 .

(a) peut donc être considérée comme l'équation d'une V. I. S. I_0 de l'espace E^2 .

Le point $\zeta_0 = \begin{bmatrix} Z_0 \\ Z'_0 \end{bmatrix}$ est situé à la fois sur I_0 et sur la surface Υ d'équation

$$(b) \quad \theta(\zeta) \equiv \varphi(Z) - \psi(Z') = 0.$$

Les caractéristiques de Υ rencontrant I_0 forment une V. I. S. I ; nous allons montrer que l'on peut choisir A de façon que Z soit libre sur I .

En effet les équations (a) et (b) de I_0 et de Υ montrent que sur l'intersection de ces variétés, Z est astreint à la seule condition

$$(c) \quad \varphi(Z) - \psi(Z'_0 + A.[Z - Z_0]) = 0.$$

Sur les caractéristiques de Υ , on a $\frac{dZ}{ds} = \text{grad}(\varphi)$. Il suffit donc, pour que dZ soit libre, que $\text{grad}(\varphi)$ ne soit pas tangent à la surface d'équation (c), donc que

$$[\varphi'(Z) - \psi'(Z'_0 + A.[Z - Z_0]).A].\text{grad}(\varphi) = 0$$

ou encore que $\text{grad}(\psi)$ et $A.\text{grad}(\varphi)$ ne soient pas perpendiculaires; or nous savons choisir l'affleureur unitaire A de façon à donner n'importe quelle valeur non nulle au vecteur $A.\text{grad}(\varphi)$, en particulier une valeur non orthogonale à $\text{grad}(\psi)$.

Remarquons en passant que cette condition implique, dans l'espace E^2 , que le vecteur $\text{grad}(\theta)$ n'est pas tangent à I_0 : en effet, ceci entraînerait le parallélisme (donc l'orthogonalité) de $\text{grad}(\psi)$ et de $A.\text{grad}(\varphi)$; par suite cette condition assure l'existence de I en tant que V. I. S.

A étant choisi ainsi, Z sera libre quand ζ décrira I ; Z' sera fonction canonique de Z .

Puisque I contient ζ_0 , cette fonction fera correspondre Z'_0 à Z_0 ; et enfin, I étant tracée sur Υ , d'équation (b), cette transformation vérifiera

$$\varphi(Z) = \psi(Z') \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Il n'existe donc pas, pour les surfaces de l'espace symplectique, de tenseur de courbure analogue au tenseur de Riemann-Christoffel, puisque elles sont toutes applicables les unes sur les autres.

On peut se poser entre autres les problèmes topologiques que nous n'aborderons pas ici; celui des conditions d'applicabilité globale d'une surface sur une autre, et de la détermination du groupe des auto-applications d'une surface donnée.

§ 3. — Équations aux dérivées partielles du premier ordre.

3.1. Solution générale.

Considérons une équation du premier ordre à p variables

$$F(x_1, \dots, x_p, z; \frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_p}) = 0.$$

On peut toujours se ramener, en cherchant z sous forme implicite

$$u(x_1, \dots, x_p, z) = 0$$

et en posant $x_i = q_i$, $z = q_{p+1}$, $p+1 = N$

à une équation ne renfermant pas la fonction inconnue u :

$$\varphi(q_1, \dots, q_N; \frac{\partial u}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial q_N}) = 0.$$

Si nous posons $p_i = \frac{\partial q_i}{\partial u}$,

et si nous considérons les p_i et les q_i comme coordonnées canoniques d'un espace symplectique (espace de phase), nous sommes ramenées à la recherche d'une V. I. S.

$$du = \sum p_i \cdot dq_i$$

tracée sur la surface J d'équation

$$\varphi(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N) = 0.$$

Le problème est donc résolu. Il faudra seulement prendre garde à éliminer les V. I. S. sur lesquelles il existe une ou plusieurs relations entre les q_i ; ou se résoudre, avec Sophus Lie, à les considérer comme des « solutions généralisées » de l'équation.

3. 2. Résolution du problème de Cauchy.

Cherchons par exemple les solutions de l'équation

$$\varphi\left(q_1, \dots, q_N, \frac{\partial u}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial q_N}\right) = 0$$

prenant sur une surface arbitraire S, d'équation

$$g(q_1, \dots, q_N) = 0$$

la même valeur qu'une fonction arbitraire

$$\alpha(q_1, \dots, q_N).$$

On devra avoir en tout point de S

$$d(u - \alpha) = 0 \quad \text{pour} \quad dg = 0$$

soit, en introduisant le multiplicateur de Lagrange λ :

$$P_i = \frac{\partial \alpha}{\partial q_i} + \lambda \frac{\partial g}{\partial q_i}.$$

Remarquons que les équations que nous venons d'écrire

$$\begin{cases} g = 0, \\ \sum p_i dq_i = d\alpha \end{cases}$$

définissent une V. I. S., I, de l'espace de phase. La solution s'obtiendra donc en cherchant l'intersection de J et de I, c'est à dire en résolvant sur S l'équation en λ :

$$\varphi\left(q_1, \dots, q_N, \frac{\partial \alpha}{\partial q_1} + \lambda \frac{\partial g}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial \alpha}{\partial q_N} + \lambda \frac{\partial g}{\partial q_N}\right) = 0$$

et en groupant les caractéristiques, c'est à dire les solutions du système différentiel

$$\frac{dq_1}{\frac{\partial \varphi}{\partial p_1}} = \dots = \frac{dq_N}{\frac{\partial \varphi}{\partial p_N}} = \frac{-dp_1}{\frac{\partial \varphi}{\partial q_1}} = \dots = \frac{-dp_N}{\frac{\partial \varphi}{\partial q_N}} = ds$$

correspondant aux valeurs initiales p_i et q_i ainsi obtenues.

u s'obtiendra ensuite par une quadrature; il suffira par exemple d'intégrer sur une caractéristique, puisque on peut sur chacune d'elles partir d'un point de S, où la valeur de u est connue :

$$u = \alpha + \int p_1 dq_1 + \dots + p_N dq_N.$$

Cherchons, pour savoir si nous avons de « vraies » solutions, si les q_i ainsi déterminés sont indépendants.

Sur S, ils sont astreints à la seule condition $g = 0$, soit

$$\frac{\partial g}{\partial q_1} dq_1 + \dots + \frac{\partial g}{\partial q_N} dq_N = 0.$$

Les dq_i seront donc libres si, sur les caractéristiques, la quantité

$$\omega = \frac{\partial g}{\partial q_1} \frac{dq_1}{ds} + \dots + \frac{\partial g}{\partial q_N} \frac{dq_N}{ds}$$

est différente de 0.

Le système caractéristique indique que

$$\frac{dq_i}{ds} = \frac{\partial \varphi}{\partial p_i}$$

par suite

$$\begin{aligned} \omega &= \sum \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \\ &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \cdot \varphi(q_1, \dots, q_N, \frac{\partial \alpha}{\partial q_1} + \lambda \frac{\partial g}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial \alpha}{\partial q_N} + \lambda \frac{\partial g}{\partial q_N}). \end{aligned}$$

Par conséquent

Le problème de Cauchy admet autant de solutions distinctes (obtenues comme il est indiqué ci-dessus) qu'il y a sur S de racines simples à l'équation en λ :

$$\varphi\left(q_1, \dots, q_N, \frac{\partial \alpha}{\partial q_1} + \lambda \frac{\partial g}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial \alpha}{\partial q_N} + \lambda \frac{\partial g}{\partial q_N}\right) = 0$$

les éventuelles racines multiples exigeant une étude particulière.

3. 3. Intégrales complètes.

Nous dirons qu'une fonction $u(q_1, \dots, q_N)$, dépendant d'un certain nombre de paramètres $k_1, k_2, \dots$ est une intégrale complète de l'équation $\varphi = 0$ si

1°) Elle est solution de l'équation quelle que soit la valeur attribuée à ces paramètres.

2°) Le point Z , de coordonnées $q_i, \frac{\partial u}{\partial q_i}$ décrit toute la surface J , d'équation $\varphi = 0$, lorsque les q_i et les k_i varient ⁽¹⁾.

Étant donné un point quelconque de J , atteint pour une certaine valeur des q_i et des k_i , la variété que l'on obtient en faisant varier les q_i seuls est une V. I. S. tracée sur J ; elle contient donc la caractéristique passant par le point.

Si l'on représente par d une différentielle prise sur cette caractéristique, les k_i étant constants on a évidemment

$$\begin{cases} dZ \cdot \partial Z = 0 & \text{quels que soient } \partial q_i, \partial k_i \\ dk_i = 0 \end{cases}$$

Par ailleurs quelles que soient les différentielles d et ∂ , on a identiquement

$$\overline{dZ} \cdot \partial Z = \sum db_i \cdot \partial k_i - \partial b_i \cdot dk_i$$

si l'on pose

$$b_i = -\frac{\partial u}{\partial k_i}$$

Par suite, sur la caractéristique, il vient $\sum db_i \cdot \partial k_i = 0$ quels que soient les ∂k_i , donc $db_i = 0$.

Inversement, si $db_i = 0$, $dk_i = 0$, on aura $\overline{dZ} \cdot \partial Z = 0$ quels que soient $\partial q_i, \partial k_i$, c'est-à-dire quel que soit ∂Z sur J : dZ sera soit nul, soit tangent à une caractéristique. Nous avons donc démontré le théorème de Jacobi, sous la forme précise suivante:

Si u est une intégrale complète de l'équation $\varphi = 0$, dépendant des paramètres k_i , les équations

$$k_i = C^{ie}, \quad \frac{\partial u}{\partial k_i} = C^{ie}$$

représentent soit un point, soit une caractéristique; toute caractéristique est obtenue de cette façon. ⁽²⁾

Par ailleurs, l'intégrale complète nous permet d'obtenir l'intégrale générale.

En effet si une V. I. S. est tracée sur J , la relation

$$\overline{dZ} \cdot \partial Z = \sum db_i \partial k_i - \partial b_i dk_i$$

⁽¹⁾ Bien entendu, du point de vue local, il suffit que Z décrive un ensemble ouvert de J .

⁽²⁾ Compte tenu du caractère local, on peut n'obtenir les caractéristiques que par arcs.

montre que l'on a

$$\sum db_i \partial k_i - \partial b_i dk_i = 0$$

donc qu'il existe une fonction $v = f(k_1, k_2, \dots)$ telle que $dv = \sum b_i \cdot dk_i$, les k_i étant liés par un nombre arbitraire de relations.

La solution de l'équation correspondant à cette V. I. S. sera la fonction w définie par

$$dw = \sum p_i dq_i = \sum \frac{\partial u}{\partial q_i} dq_i = dq_i = du + \sum b_i dk_i = d(u + v)$$

soit $w = u + v$, la constante d'intégration pouvant être insérée dans la fonction f .

Ainsi:

L'intégrale générale ^w de l'équation est obtenue en écrivant

1°) $w = u + f(k_1, k_2, \dots)$, f étant une fonction arbitraire.

2°) Un nombre quelconque de relations entre les k_i

3°) $\sum \left[\frac{\partial u}{\partial k_i} + \frac{\partial f}{\partial k_i} \right] dk_i = 0$ pour ces relations.

On reconnaît la méthode de Charpit-Lagrange; les calculs que nous indiquons peuvent être interprétés comme une recherche d'enveloppe.

Remarques.

Nous n'avons pas fixé le nombre des paramètres k_i . Puisque les k_i et les q_i doivent fournir une représentation paramétrique de J , il doit donc y en avoir au moins $N-1$.

On précise souvent, dans la définition de l'intégrale complète, qu'elle dépend exactement de $N-1$ paramètres. (Mais nous constatons que cette condition est inutile pour l'énoncé du théorème de Jacobi et la recherche de l'intégrale générale.) Dans ce cas, la relation

$$\sum_{i=1}^N dp_i \partial q_i - \partial p_i dq_i = \sum_{i=1}^{N-1} db_i \partial k_i - \partial b_i dk_i$$

peut être interprétée comme fournissant une application de la surface J sur le « plan » $k_N = 0$ de l'espace de coordonnées canoniques (b_i, k_i) , b_N étant un paramètre quelconque complétant la représentation de J par les b_i et les k_i . L'application conservant les caractéristiques et les V. I. S. on retrouve immédiatement les résultats précédents.

Pour faire de la méthode de Charpit-Lagrange une méthode d'intégration des équations aux dérivées partielles, il faut indiquer le moyen de construire une intégrale complète. Ce problème a été étudié par Jacobi. Sa solution repose sur le fait que $k_1, k_2, \dots, k_{N-1}$ sont,

d'après l'identité précédente, des intégrales premières, orthogonales entre elles du système caractéristique. Mais cette méthode n'est pratique que dans le cas classique $N = 2$.

§ 4. — Calcul canonique des variations.

4. 1. Méthode de résolution.

Considérons un problème de variations

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} F\left(X, t, \frac{dX}{dt}\right) dt = 0$$

où X désigne un élément d'espace vectoriel à n dimensions, dont les valeurs extrêmes X_0 et X_1 sont supposées fixes.

L'inconnue est une courbe, l'extrémale, tracée dans l'espace à $N = n + 1$ dimensions des $Q = \begin{bmatrix} X \\ t \end{bmatrix}$; on peut avec Weierstrass la rechercher sous forme paramétrique.

Le problème devient alors

$$\delta \int_{Q_0}^{Q_1} L \cdot ds = 0$$

Q_0 et Q_1 sont les points fixes $\begin{bmatrix} X_0 \\ t_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} X_1 \\ t_1 \end{bmatrix}$; L est la quantité

$$F\left(X, t, \frac{dX}{ds}\right) \cdot \frac{dt}{ds};$$

elle est fonction de Q et de $\dot{Q} = \frac{dQ}{ds}$; elle est homogène du premier degré en $\dot{Q}$.

En différentiant, il vient

$$\int_{Q_0}^{Q_1} \left[\frac{\partial L}{\partial Q} (\delta Q) + \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} (\delta \dot{Q}) \right] ds = 0$$

soit

$$\int_{Q_0}^{Q_1} \left[\frac{\partial L}{\partial Q} - \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} \right) \right] (\delta Q) \cdot ds = 0$$

d'où, grâce au lemme fondamental du calcul des variations, l'équation d'Euler-Lagrange.

Nous considérons désormais Q et $\dot{Q}$ comme des variables indépendantes, et nous écrirons donc cette équation sous la forme

$$(I) \quad \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial Q} - \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} \right) = 0 \\ \dot{Q} - \frac{dQ}{ds} = 0. \end{cases}$$

L étant homogène du premier degré en $\dot{Q}$, vérifie l'identité d'Euler

$$L = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} (\dot{Q}).$$

On en tire

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial Q} (\delta Q) + \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} (\delta \dot{Q}) = \delta \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} \right) (\dot{Q}) + \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} (\delta \dot{Q})$$

d'où $\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} (\delta \dot{Q}) = \delta \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} \right) (\dot{Q})$ quels que soient δQ et $\delta \dot{Q}$; par suite le système (I) peut prendre la forme

$$(II) \quad \begin{cases} \delta \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} \right) (\dot{Q}) - \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} \right) (\delta Q) = 0 \text{ quels que soient } \delta Q \text{ et } \delta \dot{Q} \\ \dot{Q} - \frac{dQ}{ds} = 0. \end{cases}$$

Désignons maintenant par P le covecteur $\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}}$.
(II) devient

$$(III) \quad \begin{cases} \delta P \cdot \dot{Q} - \frac{dP}{ds} \delta Q = 0 \text{ quels que soient } \delta Q \text{ et } \delta \dot{Q} \\ \dot{Q} - \frac{dQ}{ds} = 0. \end{cases}$$

Nous voyons que P et Q ne sont certainement pas des variables indépendantes, sinon les coefficients de δP et de δQ seraient nuls, et on aurait $\dot{Q} = 0$, $\frac{dP}{ds} = 0$.

En effet $P = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}}$ est une fonction de $\dot{Q}$ homogène de degré 0.

Q étant donné, P ne dépend que de $N - 1$ paramètres : il existe donc en général une relation

$$\varphi(P, Q) = 0$$

résultant de l'élimination de $\dot{Q}$

$$P = \frac{\delta L}{\delta \dot{Q}},$$

relation que nous appellerons *relation de Jacobi* ⁽¹⁾.

Nous supposons désormais que cette circonstance a bien lieu, que la fonction φ est différentiable en P et Q , et que $\frac{\partial \varphi}{\partial P}$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial Q}$ ne sont pas nuls tous les deux; nous dirons dans ce cas que le problème est *normal* ⁽²⁾.

Finalement (1) prend la forme

$$(IV) \quad \begin{cases} \varepsilon P \cdot \dot{Q} - \frac{dP}{ds} \varepsilon Q = 0 \\ \dot{Q} - \frac{dQ}{ds} = 0 \end{cases}$$

quels que soient εP et εQ liés par $\varphi(P, Q) = 0$ ou encore

$$(V) \quad \varepsilon P \cdot \frac{dQ}{ds} - \frac{dP}{ds} \cdot \varepsilon Q = 0$$

quels que soient εP et εQ liés par $\varphi(P, Q) = 0$.

Introduisons désormais l'espace de phase parcouru par $Z = \{P, Q\}$, dans lequel $\varphi(P, Q) = 0$ est l'équation d'une surface J , que nous appellerons *surface de Jacobi* du problème.

Dire que le problème est normal c'est dire que $\frac{\partial \varphi}{\partial Z}$ n'est pas nul, donc que nous nous plaçons en un point *ordinaire* de J . (V) devient

$$\overline{\varepsilon Z} \cdot \frac{dZ}{ds} = 0 \quad \text{pour} \quad \varepsilon Z \text{ tangent à } J.$$

$\frac{dZ}{ds}$ doit être orthogonal à J , par suite Z décrit une *caractéristique* de J . La projection (canonique) des caractéristiques sur l'espace des Q fournira les courbes *extrémales*.

⁽¹⁾ M. Hadamard écrit « relation caractéristique ».

⁽²⁾ Le problème est dit *régulier* si de plus $\frac{\partial \varphi}{\partial P} \neq 0$; la condition de normalité est donc moins restrictive.

Nous arrivons donc à la méthode suivante, qui est en fait une méthode pratique pour les applications :

Pour résoudre le problème de variations

$$\varepsilon \int_{t_0}^{t_1} F(q_1, \dots, q_n, t; \frac{dq_1}{dt}, \dots, \frac{dq_n}{dt}) dt = 0$$

1°) On pose

$$\begin{cases} L = F(q_1, \dots, q_n, t; \frac{\dot{q}_1}{t}, \dots, \frac{\dot{q}_n}{t}) \cdot t \\ t = q_{n+1} \end{cases}$$

2°) On élimine les $\dot{q}_i$ entre les relations

$$p_i = \frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i}$$

ce qui conduit à la relation de Jacobi $\varphi(p_i, q_i) = 0$.

3°) On intègre le système caractéristique

$$\frac{\frac{\partial q_1}{\partial \varphi}}{\frac{\partial p_1}{\partial \varphi}} = \dots = \frac{\frac{\partial q_{n+1}}{\partial \varphi}}{\frac{\partial p_{n+1}}{\partial \varphi}} = - \frac{\frac{\partial p_1}{\partial \varphi}}{\frac{\partial q_1}{\partial \varphi}} = \dots = - \frac{\frac{\partial p_{n+1}}{\partial \varphi}}{\frac{\partial q_{n+1}}{\partial \varphi}}$$

qui admet φ pour intégrale première, en prenant $\varphi = 0$.

4. 2. Rapports entre les équations précédentes et les équations canoniques classiques

Si on explicite les calculs, on trouve, en posant $q'_i = \frac{dq_i}{dt}$

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial F}{\partial q'_i} \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \dots, n \\ p_{n+1} &= F - \sum q'_i \frac{\partial F}{\partial q'_i} \end{aligned}$$

Par suite, si la relation de Jacobi est résoluble en p_{n+1} , et peut donc s'écrire sous la forme

$$p_{n+1} + H(q_i, p_i, t) = 0,$$

H est la fonction d'Hamilton, et les équations caractéristiques s'écrivent :

$$\frac{\frac{dq_1}{\partial H}}{\frac{\partial p_1}} = \dots = \frac{\frac{dq_n}{\partial H}}{\frac{\partial p_n}} = dt = \frac{-\frac{dp_1}{\partial H}}{\frac{\partial q_1}} = \dots = \frac{-\frac{dp_n}{\partial H}}{\frac{\partial q_n}} = \frac{-\frac{dp_{n+1}}{\partial H}}{\frac{\partial t}}$$

On trouve les équations canoniques

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_i},$$

et une dernière équation qui peut-être remplacée par la relation de Jacobi. On constate donc que la variante proposée pour les équations canoniques est à la fois plus générale et plus pratique que la méthode classique puisqu'elle n'exige pas cette résolution.

4. 3. Equation et théorème de Jacobi. Applications.

Etant donné un problème de variations, il lui correspond une surface J , donc une équation aux dérivées partielles, l'équation de Jacobi du problème.

On l'obtient donc en considérant, dans la relation de Jacobi

$$\varphi(q_1, \dots, q_N; p_1, \dots, p_N) = 0$$

les p_i comme les dérivées partielles d'une fonction u par rapport aux q_i .

Si nous en connaissons une intégrale complète, dépendant des paramètres k_i , nous aurons immédiatement les équations des caractéristiques, c'est à dire la solution du problème de variations, par le théorème de Jacobi (Ci-dessus 3. 3).

$$k_i = \text{Cte} \quad \frac{\partial u}{\partial k_i} = \text{Cte.}$$

On peut même remarquer que les p_i n'intervenant pas dans ces équations, elles fournissent directement les extrémales, sans passer par l'intermédiaire des caractéristiques dont elles sont les projections.

C'est là l'utilisation essentielle du théorème de Jacobi; il servira à trouver les cas d'intégration des problèmes de variations, en particulier des problèmes de mécanique.

Signalons seulement le cas du *paramètre principal*, qui est le plus important dans la pratique.

Lorsque le « lagrangien » L ne dépend explicitement que d'un seul des q_i , soit q_1 pour fixer les idées, et des q'_i , la relation de Jacobi lie q_1 avec les p_i ;

$$\varphi(q_1, p_1, p_2, \dots, p_N) = 0.$$

Elle admet alors une intégrale complète de la forme

$$u = f(q_1, k_2, \dots, k_N) + k_2 \cdot q_2 + \dots + k_N \cdot q_N$$

la fonction f s'obtient par une quadrature, et le théorème de Jacobi donnera les extrémales par des dérivations.

On peut remarquer cependant que le système caractéristique, sous la forme indiquée, s'intègre de lui-même, sans avoir recours à l'équation aux dérivées partielles.

Il s'écrit en effet

$$\frac{dq_1}{\frac{\partial \varphi}{\partial p_1}} = \frac{dq_2}{\frac{\partial \varphi}{\partial p_2}} = \dots = \frac{dq_N}{\frac{\partial \varphi}{\partial p_N}} = \frac{-dp_1}{\frac{\partial \varphi}{\partial q_1}} = \frac{-dp_2}{0} = \dots = \frac{-dp_N}{0}$$

$p_2, \dots, p_N$ sont visiblement des intégrales premières; p_1 s'exprime en fonction de q_1 et de ces constantes au moyen de la relation $\varphi = 0$.

On a ensuite les q_i ($i = 2, 3, \dots, N$) en fonction de q_1 grâce aux relations

$$\frac{dq_i}{\frac{\partial \varphi}{\partial p_i}} = \frac{dq_1}{\frac{\partial \varphi}{\partial p_1}}$$

d'où

$$q_i = \int \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial p_i}}{\frac{\partial \varphi}{\partial p_1}} dq_1 + C^i.$$

Si la relation de Jacobi est *algébrique*, le problème est donc ramené à des intégrales abéliennes, q_1 et p_1 étant liées par la relation $\varphi = 0$.

Cette équation peut être considérée comme l'équation d'une courbe algébrique dans le plan p_1, q_1 . Si cette courbe est *unicursale*, on en prendra une représentation paramétrique rationnelle, et le problème sera ramené à l'intégration de fractions rationnelles; si son genre est 1, on sera ramené à des intégrales elliptiques.

Comme exemples de ces deux cas, citons respectivement :

a) Les isopérimètres, les brachistochrones, le mouvement des planètes.

b) Le mouvement à la Poincaré, le pendule sphérique, le mouvement de Lagrange, la figure d'équilibre d'un liquide pesant incompressible doué de capillarité (cas cylindrique et cas de révolution).

Manuscrit reçu le 1^{er} juillet 1954.

(Carthage, mai 1954).

J.-M. SOURIAU. Tunis.