Alger, Mathématiques.
Tome V, n° 2, 1958.

Jean-Marie SOURIAU

LA RELATIVITÉ VARIATIONNELLE

Sommaire. — Nous proposons une théorie unitaire, compatible avec la Relativité Générale, fondée sur un principe variationnel qui généralise celui d'Hamilton.

Après des préliminaires mathématiques (§ 1), l'énoncé des principes de la théorie (§ 2), et la démonstration des « théorèmes généraux » (§ 3), nous étudions divers phénomènes : la gravitation (§ 4), la matière parfaite, qui généralise la théorie des fluides parfaits relativistes de LICHNEROWICZ (§ 5), la lumière et la matière électrisée (§ 6).

Diverses applications sont données en cours de route : interprétation du tenseur d'impulsion-énergie, solide relativiste, antimatière et dématérialisation, équations non linéaires de la lumière et des particules de spin 1, notion d'interaction, etc.

La valeur explicative de la théorie est discutée dans le § 7.

RÉFÉRENCES DU TEXTE

L. DE BROGLIE. *Une nouvelle théorie de la lumière*, T. 1 (Hermann, 1940); I, p. 158; II, p. 189.

A. EINSTEIN. I. *The meaning of Relativity* (Methuen, London, 1950), p. 45.

A. LICHNEROWICZ. I. *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie*, (Cremonese, Rome, 1955), p. 17; II. *Sur l'invariant intégral de l'hydrodynamique relativiste* (*Ann. Ec. Norm.* (3), LVIII, fasc. 4, 1941); III. *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme* (Masson, 1955), p. 71.

J. M. SOURIAU. I. *Un schéma général pour la physique relativiste* (*C.R.A.S.*, **244**, p. 2779-2781, 1957); II. *Équations de Dirac en schéma relativiste général* (*C.R.A.S.*, **245**, p. 496-497, 1957); III. *Le tenseur impulsion-énergie en Relativité Variationnelle* (*C.R.A.S.*, **245**, p. 958-960, 1957).

TABLE DES MATIÈRES

§ 1. — Notations et définitions préliminaires.

1.A Opérateurs.

Nous appellerons *opérateur* toute application A d'un ensemble dans un ensemble; son domaine de définition et son domaine de valeurs seront notés respectivement déf(A) et val(A).

Nous dirons que A est *régulier* s'il établit une correspondance biunivoque entre déf(A) et val(A); l'opérateur inverse sera noté A^{-1}.

A étant quelconque, nous noterons $A^{-}(x)$ l'ensemble de tous les y tels que $A(y) = x$; $A^{+}(E)$ l'ensemble des images par A des éléments de E.

$\underline{1}_E$ désignera l'opérateur identique sur l'ensemble E (on écrira seulement $\underline{1}$ si E est clairement sous-entendu).

A.B sera le produit (de composition) des opérateurs A et B :

$$[A.B](x) = A[B(x)]. \tag{1,1}$$

A étant régulier, B quelconque, $A.B.A^{-1}$ sera dit *transmuté* de B par A.

Nous supprimerons les crochets dans une expression telle que

$$[[A(X)](Y)](Z) \tag{1,2}$$

et nous dirons que A est un *opérateur multiple* (ici d'ordre 3); si de plus A(X)(Y)(Z) dépend linéairement de chaque variable X, Y, Z, A sera dit *multilinéaire*.

Soit E un espace vectoriel sur le corps R des réels. Les opérateurs linéaires appliquant

R dans E seront dits *contravecteurs* (on peut les identifier aux vecteurs);
E dans R — — *covecteurs* (ils forment le *dual* E^* de E);
E dans E — — *affineurs*.

s étant réel, nous désignerons par $\underline{s}_E$ l'affineur qui transforme X en sX.

L'opérateur multilinéaire A sera dit un *alterneur* si A(X)(Y) . . . (Z) est nul dès que deux des variables X, Y, . . . Z sont égales.

Dans un espace E de dimension n, les alterneurs d'ordre supérieur à n sont nuls; les alterneurs d'ordre n (à valeurs réelles) forment un espace de dimension 1; nous dirons que E est *jaugé* si nous avons choisi un alterneur non nul d'ordre n, que l'on appellera *jauge* de E et qui sera désigné par vol.

L'opérateur linéaire A appliquant un espace jaugé de dimension n, E, dans un espace E′ de même dimension, on définit son déterminant dét(A) par l'identité :

$$(1,3)\quad \mathrm{vol}(A.X_1)\,(A.X_2)\,\ldots\,(A.X_n) = \mathrm{dét}(A)\,\mathrm{vol}(X_1)\,(X_2)\,\ldots\,(X_n),$$

l'opérateur adjoint par

$$\mathrm{vol}(X_1)\,(AX_2)\,\ldots\,(AX_n) = \mathrm{vol}(Adj(A).X_1)\,(X_2)\,\ldots\,(X_n).$$

1.B NOTATIONS TENSORIELLES ET MATRICIELLES.

Les éléments du produit direct de n ensembles E^j seront notés

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ \ldots \\ Z \end{pmatrix} \quad (X \in E^1,\ Y \in E^2,\ \ldots\ Z \in E^n)$$

et appelés *échelles*; en particulier les éléments de R^n seront les échelles de n nombres réels.

E étant un produit d'espaces vectoriels, X un élément de E, nous noterons ${}^j|(X)$, ou encore ${}^jX$, son élément N° j; $|_j(x)$ sera l'échelle dont l'élément N° j a la valeur x, les autres étant nuls. Les *clefs* $|_j$ et ${}^j|$ sont, par définition de la somme de deux échelles, des opérateurs linéaires.

Le produit ${}^j|.|_k$, que nous noterons ${}^j|_k$, est nul si $j \neq k$, égal à 1 si $j = k$; on a évidemment

$$|_j.{}^j| = \underline{1}_E \quad \text{(on adopte la convention d'Einstein).}$$

Tout opérateur linéaire L défini sur E sera dit une *ligne*; ses *éléments* seront les opérateurs $L.|_j$, notés L_j; ils sont linéaires. On a $L = L_j.{}^j|$, et on note :

$$L = [L_1\, L_2\, \ldots\, L_n].$$

Tout opérateur linéaire C prenant ses valeurs dans E sera dit une *colonne*; ses éléments sont les opérateurs linéaires ${}^j|.C$, notés ${}^jC$; on a $C = |_j.{}^jC$, et on note :

$$C = \begin{bmatrix} {}^1C \\ {}^2C \\ \ldots \\ {}^nC \end{bmatrix}.$$

Ces définitions induisent le calcul matriciel; les *matrices* M, opérateurs linéaires appliquant un produit direct dans un produit direct, étant considérées à volonté comme lignes de colonnes ou colonnes de lignes; leurs éléments, donnés par la formule $^j|.\mathrm{M}.|_k$, seront notés $^j\mathrm{M}_k$; une matrice s'exprime en fonction de ses éléments par la formule $|_j.{}^j\mathrm{M}_k.{}^k|$.

Nous appellerons *base* d'un espace vectoriel E tout opérateur linéaire régulier S appliquant R^n sur E; on a donc

$$(1{,}4) \qquad \mathrm{S} = [\mathrm{S}_1\, \mathrm{S}_2 \ldots \mathrm{S}_n]$$

les $\mathrm{S}_j = \mathrm{S}.|_j$ étant les (contra-)*vecteurs de base*, indépendants par hypothèse; S^{-1} est une *colonne de covecteurs.*

E étant un espace vectoriel de dimension n, E* son dual, nous appellerons *tenseurs* (p fois contrevariants, q fois covariants) les opérateurs multilinéaires, définis p fois sur E*, puis q fois sur E; A étant par exemple un tenseur 1 fois contravariant, 2 fois covariant, S une base de E, les composantes de A dans S seront les nombres

$$(1{,}5) \qquad \mathrm{A}^j_{kl} = \mathrm{A}({}^j\mathrm{S}^{-1})\,(\mathrm{S}_k)\,(\mathrm{S}_l)$$

A s'exprime en fonction de ses composantes par la formule inverse

$$(1{,}6) \qquad \mathrm{A}(\Gamma)\,(\mathrm{V})\,(\mathrm{W}) = \mathrm{A}^j_{kl}\,.\Gamma_j.{}^k\mathrm{V}.{}^l\mathrm{W}$$

avec $\quad \Gamma_j = \Gamma.\mathrm{S}_j, \qquad {}^k\mathrm{V} = {}^k\mathrm{S}^{-1}.\mathrm{V}, \qquad {}^l\mathrm{W} = {}^l\mathrm{S}^{-1}.\mathrm{W}.$

Ainsi, si E est jaugé, S étant une base de E :

$$(1{,}7) \qquad \mathrm{vol}_{12\ldots n} = \mathrm{vol}\,(\mathrm{S}_1)\,(\mathrm{S}_2)\ldots(\mathrm{S}_n)$$

$$(1{,}8) \qquad = \mathrm{d\acute{e}t}\,(\mathrm{S})$$

(si on jauge R^n en posant $\mathrm{vol}(|_1)\,(|_2)\ldots(|_n) = 1$).

Les propriétés de symétrie et d'antisymétrie des tenseurs se vérifient immédiatement sur leurs composantes dans une base quelconque; par exemple, l'identité

$$\mathrm{A}(\mathrm{X})(\mathrm{Y}) \equiv \mathrm{A}(\mathrm{Y})(\mathrm{X})$$

définissant la symétrie du tenseur A, peut aussi s'écrire

$$\mathrm{A}_{jk} \equiv \mathrm{A}_{kj}.$$

1.C Espaces euclidiens.

Nous dirons qu'un espace vectoriel E, de dimension n, est *euclidien* lorsque nous aurons choisi un tenseur de E, deux fois covariant, symétrique et régulier, noté g; g sera donc une application de E sur son dual; X et Y appartenant à E, $g(\mathrm{X})$ est un covecteur, $g(\mathrm{X})(\mathrm{Y})$ un nombre, appelé *produit scalaire* de X et Y, égal aussi à $g(\mathrm{Y})(\mathrm{X})$, On convient de poser

(1,9)	$g(x)(y) = xy$	si x et y sont des nombres
(1,10)	$g(X)(Y) = \Sigma {}^jX.{}^jY$	si X et Y appartiennent à R^p,

ce qui fait de R et R^p des espaces euclidiens.

L'espace E est dit *positif* si $g(X)(X) > 0$ pour $X \neq 0$; l'*indice d'inertie* est la dimension maximum p d'un sous-espace positif; E sera dit *hyperbolique normal* si $p = 1$. Dans ce cas, un vecteur X est appelé *vecteur de temps*, *vecteur isotrope* ou *vecteur d'espace* suivant que $g(X)(X)$ est positif, nul ou négatif; on montre que les vecteurs de temps se partagent en deux classes opposées, le produit scalaire étant positif à l'intérieur d'une même classe; on peut désigner arbitrairement les classes en appelant l'une *avenir* et l'autre *passé*.

L'opérateur A appliquant un espace euclidien E dans un espace euclidien E', on appelle *transposé* de A l'opérateur $\overline{A}$ défini par

$$g(A(X))(Y) \equiv g(X)(\overline{A}(Y));$$

$\overline{A}$ existe seulement si A est linéaire; c'est aussi un opérateur linéaire, qui applique E' dans E.

On vérifie immédiatement que

$$(1,11) \quad \overline{\overline{A}} = A, \qquad \overline{A + B} = \overline{A} + \overline{B}, \qquad \overline{A.B} = \overline{B}.\overline{A}$$

et que la transposition conserve le rang (dimension du domaine de valeurs); que

$$(1,12) \quad [\overline{A}]^{-1} = \overline{A^{-1}} \quad \text{si les deux membres existent.}$$

Le transposé d'un (contra)vecteur X est $g(X)$, ce qui permet de noter le produit scalaire

$$(1,13) \qquad \overline{X}.Y$$

A est dit *hermitien* ou *antihermitien* selon que $\overline{A} = A$ ou $\overline{A} = -A$.

Les clefs de R^n vérifient $\overline{|_j} = {}^j|$, $\overline{{}^j|} = |_j$, ce qui permet de transposer les lignes, colonnes et matrices; en particulier, si S est une base d'un espace euclidien, $G = \overline{S}.S$ est une matrice hermitienne, dite *matrice de Gram* de S; elle vérifie

$$(1,14) \qquad {}^jG_k = g_{jk}$$

les composantes de l'opérateur g^{-1}, définies par

$$^{j}S^{-1}.g^{-1}\,(^{k}S^{-1})$$

et que l'on note g^{jk}, vérifient

$$(1,15) \qquad g^{jk} = {}^{j}[G^{-1}]_{k}.$$

Le nombre de valeurs propres positives de la matrice de Gram d'une base est égal à l'indice d'inertie de l'espace; le signe de son déterminant est donc $[-1]^{n-p}$.

On peut définir dans tout espace euclidien une jauge par la condition

$$(1,16) \qquad |\text{dét}(\bar{S})| = |\text{dét}(S)|$$

quelle que soit la base S de E;

On a alors

$$(1,17) \qquad \frac{\text{dét}(\bar{S})}{\text{dét}(S)} = [-1]^{n-p};$$

il faut prendre pour cela, S_0 étant une base donnée

$$(1,18) \qquad \text{dét}(S_0) = \pm\sqrt{|\text{dét}(\bar{S}_0.S_0)|};$$

le choix du signe du radical est l'*orientation* de l'espace euclidien.

1.D VARIÉTÉS.

Soit E un espace topologique; E′ un ensemble; B l'ensemble des opérateurs réguliers appliquant un ouvert de E dans E′; A une partie de B.

Nous dirons que A possède le *caractère local* si tout élément F de B, qui coïncide, au voisinage de tout point de déf(F), avec un élément de (A), est aussi un élément de A.

Nous définirons les *variétés de dimension n* comme les ensembles non vides, munis d'un *atlas complet* A, vérifiant les axiomes suivants :

(1,19)
- *a*) Les éléments de A sont des opérateurs réguliers appliquant un ouvert de R^n dans V; on les appellera *cartes* de V.
- *b*) A possède le caractère local;
- *c*) F, G, H étant des cartes, $F.G^{-1}.H$ est une carte;
- *d*) F étant une carte, T une translation de R^n, F.T est une carte;
- *e*) Les domaines de valeur des cartes recouvrent V.

Il existe sur toute variété une *topologie naturelle*, dont les ouverts sont les réunions de domaines de valeurs de cartes; pour cette topologie, les cartes sont bicontinues.

Inversement, soit E un espace topologique, A_0 un ensemble d'opérateurs réguliers bicontinus appliquant des ouverts de R^n sur des ouverts de E, et dont les domaines de valeurs recouvrent E. Il existe alors un plus petit ensemble A, contenant A_0, et vérifiant les axiomes (1,19); il définit sur E une structure de variété, dite *structure induite par* A_0, et dont la topologie naturelle coïncide avec la topologie donnée.

Par exemple, on définit sur tout espace vectoriel de dimension n une structure de variété de dimension n, induite par les bases; on définit de même le produit direct de deux variétés V_1 et V_2, de dimension n_1 et n_2, une structure de variété de dimension $n_1 + n_2$, induite par les F tels que

$$F\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} F_1(X) \\ F_2(Y) \end{pmatrix}$$

F_1 et F_2 étant des cartes de E_1 et E_2 respectivement.

(1,20) Soit V une variété de dimension n; un opérateur H appliquant une partie de R^n dans R^n s'appellera *changeur de carte* de V si, F étant une carte quelconque, F.H est encore une carte.

Ainsi, F_1 et F_2 étant des cartes, $[F_1]^{-1}.F_2$ est un changeur de carte (axiome 1,19, *c*).

L'ensemble A' des changeurs de cartes possède les propriétés suivantes :

(1,21)
- *a*) Les changeurs de carte sont des opérateurs bicontinus, appliquant un ouvert de R^n sur un ouvert de R^n;
- *b*) A' possède le caractère local;
- *c*) H et K étant des changeurs de carte, H^{-1} et H.K en sont aussi;
- *d*) Les translations sont des changeurs de carte.

(1,22) Nous appellerons *glissements* d'une variété V tout opérateur régulier G appliquant une partie de V dans V tel que, si F est une carte, G.F est une carte de V.

Ainsi, F_1 et F_2 étant des cartes, $F_2.[F_1]^{-1}$ est un glissement (1,19, *c*). On vérifie que :

(1,23)
a) Tout glissement est un opérateur bicontinu, appliquant un ouvert de V sur un ouvert de V;
b) L'ensemble des glissements possède le caractère local;
c) L'inverse d'un glissement, le produit de deux glissements, sont encore des glissements;
d) Quels que soient les points M et M′ de V, il existe un glissement appliquant M sur M′;
e) Ω étant un ouvert de V, $\underline{1}_\Omega$ est un glissement.

L'ensemble des glissements définit sur V une structure géométrique, induite par la structure de variété, mais qui n'implique pas cette dernière : deux variétés peuvent avoir mêmes glissements sans avoir mêmes cartes.

1.E Espaces fibrés.

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble, V une variété.

(1,24)
Nous dirons que $\mathcal{E}$ est un *espace fibré* [1] de base V, si nous avons défini un opérateur Π (appelé *projection*) appliquant $\mathcal{E}$ sur V, et un opérateur φ, tels que :
a) G étant un glissement de V, $\varphi(G)$ est un opérateur régulier appliquant *une partie de* $\mathcal{E}$ *dans* $\mathcal{E}$.
b) Quel que soit le glissement G,
$$G.\Pi = \Pi.\varphi(G).$$
c) G_1 et G_2 étant des glissements
$$\varphi(G_1.G_2) = \varphi(G_1).\varphi(G_2).$$

M étant un point de la base V, l'ensemble $\Pi^-(M)$ s'appellera *fibre* au point M; les fibres de deux points distincts sont disjointes; la réunion des fibres forme l'espace fibré $\mathcal{E}$.

Nous désignerons aussi par φ l'opérateur Π^-, et nous dirons alors que φ est un *fibreur* de base V.

On peut alors désigner la fibre au point M par $\varphi(M)$; l'espace fibré par $\varphi(V)$.

---

[1] Définition non classique.

On vérifie immédiatement que :

$$(1,25)\quad \begin{cases} \Omega \text{ étant un ouvert de V, } \varphi(\underline{1}_\Omega) = \underline{1}_{\varphi(\Omega)} \\ \text{G étant un glissement,} \\ \qquad \varphi(G^{-1}) = [\varphi(G)]^{-1} \\ \text{déf}(\varphi(G)) = \varphi(\text{déf}(G)) \qquad \text{val}(\varphi(G)) = \varphi(\text{val}(G)). \end{cases}$$

Si le glissement G vérifie $G(M) = M$, $\varphi(G)$ est une permutation de la fibre $\varphi(M)$; l'ensemble de ces permutations est un groupe, appelé *groupe structural* de la fibre.

Si le glissement G vérifie $G(M) = M'$, le groupe structural de $\varphi(M')$ est transmuté par $\varphi(G)$ du groupe structural de $\varphi(M)$.

Une partie de la fibre $\varphi(M)$ (qui peut en particulier se réduire à un point) sera dite *invariante* si elle est invariante par le groupe structural de $\varphi(M)$.

(1,26) Nous appellerons *φ-champ* tout opérateur f, défini sur un ouvert Ω de V, faisant correspondre à chaque point M de Ω un point de la fibre correspondante $\varphi(M)$.

G étant un glissement, $\varphi(G).f.G^{-1}$ est encore un champ, défini sur l'ouvert $G^+(\Omega)$; on le désignera par $\varphi(G)(f)$; ce nouveau prolongement de l'opérateur φ possède encore la propriété

$$(1,27)\qquad \varphi(G_1.G_2) = \varphi(G_1).\varphi(G_2).$$

Un champ est dit *invariant* si, quel que soit le glissement G, $\varphi(G)(f)$ coïncide avec f partout où ces deux champs sont définis; quel que soit le point M, $f(M)$ est alors un élément invariant de la fibre $\varphi(M)$.

(1,28)

Soit φ un fibreur de base V, E un ensemble.

Nous dirons que R est un *repéreur* de φ, et que E est sa *fibre-type*, si :

a) F étant une carte de V, X un élément de déf(F), R(F)(X) est un opérateur régulier, appelé *repère*, qui applique E sur la fibre $\varphi(F(X))$;

b) T étant une translation de R^n,

$$R(F.T)(X) = R(F)(T(X)).$$

c) G étant un glissement de V,

$$R(G.F)(X) = [\varphi(G)].[R(F)(X)].$$

On peut toujours construire un repéreur d'un fibreur donné; il suffit par exemple de choisir un point M_0 de V, une carte F_0 telle que $F_0(o) = M_0$, de poser $E = \varphi(M_0)$ et $R(F)(X) = \varphi(F.T_X.F_0^{-1}).\underline{1}_E$, T_X désignant la translation de R^n qui envoie o en X.

(1,29) Nous prolongerons canoniquement tout repéreur R en sorte que :
a) $R(F)(X)$ existe si F est une *carte, l'inverse d'une carte*, un *changeur de carte* ou un *glissement* et si $X \in \text{déf}(F)$;
b) $R(F.G)(X) \equiv [R(F)(G(X))].[R(G)(X)]$ si $X \in \text{déf}(F.G)$.

On constate qu'il est nécessaire et suffisant, pour cela, de poser :

(1,30) $R(F)(X) = \varphi(F).\underline{1}_{\varphi(X)}$ si F est un glissement;
$R(F)(X) = [R(F^{-1})(F(X))]^{-1}$ si F est l'inverse d'une carte;
$R(F)(X) = [R(G)(F(X))]^{-1}.[R(G.F)(X)]$ si F est un changeur de carte, cette dernière définition étant indépendante du choix de la carte G telle que $[G.F](X)$ existe.

$R(F)(X)$ désigne respectivement dans ces trois cas :

— une application régulière de la fibre $\varphi(X)$ sur la fibre $\varphi(F(X))$;
— l'inverse d'un repère (ou *corepère*);
— une permutation de la fibre-type.

L'ensemble des permutations de la fibre-type ainsi définies ($R(H)(X)$, H étant un changeur de carte) est un groupe, que l'on appellera *groupe structural* de la fibre-type E; S étant un repère au point M, les autres sont de la forme S.A, A appartenant au groupe structural de E; inversement, S et S′ étant deux repères en M, $S^{-1}.S'$ appartient à ce groupe structural, $S'.S^{-1}$ au groupe structural de la fibre $\varphi(M)$; on obtient donc le groupe structural d'une fibre en transmutant par un repère celui de la fibre-type; les repères transforment une partie invariante de la fibre-type en partie invariante d'une fibre.

(1,31) Soit V une variété, E un ensemble; nous dirons que R_0 est un *prérepéreur* (de base V, de fibre-type E), si :
a) Lorsque H est un changeur de carte de V, et que $X \in \text{déf}(H)$
$R_0(H)(X)$ est une application de E dans E;
b) $R_0(H.H')(X) = [R_0(H)(H'(X))].[R_0(H')(X)]$ si $X \in \text{déf}(H.H')$.
c) $R_0(H)(X) = \underline{1}_E$ si H est une translation, ou l'opérateur identique sur un ouvert de R^n.

Il est clair que la restriction aux changeurs de carte d'un repéreur est un prérepéreur.

Soit inversement R_0 un prérepéreur de fibre E.

La relation $\sim$, définie sur les échelles $\begin{pmatrix} F \\ X \\ Z \end{pmatrix}$ (F étant une carte, X un élément de déf(F), Z un élément de E) par

$$\left[\begin{pmatrix} F \\ X \\ Z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} F' \\ X' \\ Z' \end{pmatrix}\right] \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{r} F(X) = F'(X') \\ Z = R_0(F^{-1}.F')\,(X')\,(Z') \end{array}\right]$$

est alors une équivalence; les classes, notées R(F)(X)(Z) forment un espace fibré de base V si on prend F(X) comme projection de

$$R(F)(X)(Z),$$

et si on définit le fibreur φ par

$$\varphi(G)\,\big(R(F)(X)(Z)\big) = R(G.F)\,(X)\,(Z)$$

cette définition étant cohérente avec la définition des classes R(F) (X); on constate ensuite que R est un *repéreur* de φ, et que son prolongement canonique aux changeurs de carte coïncide avec R_0; donc

(1.32) Tout prérepéreur peut être prolongé par un repéreur.

Soit φ un fibreur, *f* un φ-champ, R un repéreur de φ, F une carte de la base V de φ.

La valeur du champ au point F(X), soit *f* (F(X)), peut être repérée dans le repère R(F)(X); on obtient alors un élément Z de E, fonction de X, qui *repère le champ f dans la carte* F.

On vérifie immédiatement que, pour qu'un champ soit invariant, il faut et il suffit qu'il soit repéré par un élément constant Z_0 de E dans toutes les cartes, en tout point. Cet élément Z_0 est alors invariant par le groupe structural de E.

1.F Construction d'espaces fibrés.

— On obtient un espace fibré *trivial* en faisant le produit direct de V par un ensemble E; la projection de

$$\begin{pmatrix} M \\ Z \end{pmatrix}$$

étant M, le fibreur étant défini par $\varphi(G)\begin{pmatrix} M \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G(M) \\ Z \end{pmatrix}$.

Le groupe structural d'un espace fibré trivial se réduit à l'élément neutre; on obtient un repéreur, de fibre-type E, en posant

$$R(F)(X)(Z) = \begin{pmatrix} F(X) \\ Z \end{pmatrix}$$

— $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_k$ étant des fibreurs de base V, on définira l'*espace fibré produit* en posant

$$\varphi(M) = \varphi_1(M) \times \varphi_2(M) \times \ldots \varphi_k(M)$$

et, $P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \ldots \\ P_k \end{pmatrix}$ étant un élément de $\varphi(M)$, G un glissement de V,

$$\varphi(G)(P) = \begin{pmatrix} \varphi_1(G)(P_1) \\ \varphi_2(G)(P_2) \\ \ldots\ldots\ldots \\ \varphi_k(G)(P_k) \end{pmatrix}$$

Les R_j étant des repéreurs des φ_j, de fibres-types respectives E_j, on construira un repéreur de φ, de fibre-type $E_1 x E_2 x \ldots E_k$, en posant

$$R(F)(X) \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \ldots \\ Z_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1(F)(X)(Z_1) \\ R_2(F)(X)(Z_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ R_k(F)(X)(Z_k) \end{pmatrix}.$$

— On appellera *sous-espace fibré* $\mathcal{E}'$ toute partie d'un espace fibré $\mathcal{E}$ qui est encore un espace fibré de même base; R étant un repéreur du fibreur φ, de fibre-type E, on obtient tous les sous-espaces fibrés de $\varphi(V)$ en considérant chacune des parties invariantes de E, et en la transformant par les repères.

Le fibreur φ et le repéreur R induisent le fibreur et un repéreur du sous-espace fibré.

Une intersection de sous-espaces fibrés est évidemment un sous-espace fibré.

— On peut faire le *quotient d'un espace fibré* (V) *par une équivalence* si deux éléments équivalents appartiennent à une même fibre et sont transformés par les opérateurs $\varphi(G)$ en éléments équivalents; la projection et le fibreur passent alors au quotient, en définissant un nouvel espace fibré de même base.

R étant un repéreur de fibre-type E, l'équivalence induit sur E une équivalence indépendante du choix du repère; le quotient de E par cette relation est la fibre-type d'un repéreur quotient de formation immédiate.

— Soient φ_1 et φ_2 deux fibreurs de base V; on obtient un nouveau fibreur en posant

a) si M est un point de V, $\varphi(M)$ = ensemble des opérateurs appliquant

$$\varphi_1(M) \quad \text{dans} \quad \varphi_2(M)$$

b) si G est un glissement de V, $\varphi(G)\,(f) = \varphi_2(G).f.[\varphi_1(G)]^{-1}$.

L'espace fibré ainsi obtenu est appelé *espace fibré d'opérateurs*; R_1 et R_2 étant des repéreurs de φ_1 et φ_2, ayant E_1 et E_2 pour fibres-type respectives, on obtient un repéreur R de φ en posant :

$$R(F)\,(X)\,(g) = [R_2(F)\,(X)].g.[R_1(F)\,(X)]^{-1};$$

la fibre-type de R est l'ensemble des applications de E_1 dans E_2.

Par itération de ce procédé, on obtient les espaces fibrés d'opérateurs multiples, avec les repéreurs correspondants.

— On appelle *espace fibré principal* associé à un fibreur φ (muni d'un repéreur R, de fibre-type E), le fibreur ψ défini par :

$$\psi(M) = \text{ensemble des repères au point } M;$$
$$\psi(G)\big(R(F)(X)\big) = R(G.F)\,(X).$$

On obtient un repéreur S de φ, ayant pour fibre-type *le groupe structural de* E, en posant

$$S(F)(X)(A) = [R(F)(X)].A.$$

L'espace fibré principal peut être considéré comme sous-espace fibré d'un espace fibré d'opérateurs.

— Soit φ un fibreur, R un repéreur de φ ayant E pour fibre type, Γ le groupe structural de E.

Si A est une *représentation de* Γ *dans un groupe de permutations* d'un ensemble E′, l'opérateur S défini par

$$S(F)(X) = A\big(R(F)(X)\big)$$

est un prérepéreur; on peut donc le prolonger par un repéreur (1,32); on construit ainsi un espace fibré ayant même base que φ, déduit de la représentation A.

1.G Opérateurs et variétés différentiables.

Soient E et E′ deux espaces vectoriels de dimension finie, F un opérateur appliquant un ouvert de E dans E′.

On notera $D(F)(X)(Y)$ la limite, si elle existe, de

$$(1,33) \qquad \frac{F(X+sY)-F(X)}{s}$$

lorsque s tend vers o.

$D(F)(X)$ est un opérateur homogène de degré 1 ; s'il dépend continuement de X dans déf(F), nous dirons que F est *différentiable* [1]; on montre alors que $D(F)(X)$ est linéaire; $D(F)$ s'appellera *opérateur dérivé* de F.

La formule de dérivation des fonctions de fonctions s'écrit :

$$(1,34) \qquad D(F.G)(X) = [D(F)(G(X))].[D(G)(X)]$$

elle est valable si F et G sont différentiables.

Nous définirons une *différentielle* d en choisissant une « variable indépendante » X parcourant un ouvert d'un espace vectoriel de dimension finie, un vecteur H de cet espace, fonction de X, et en posant

$$(1,35) \qquad dY = D(G)(X)(H)$$

si la variable Y vérifie identiquement

$$Y = G(X);$$

la formule (1,34) montre que l'on a :

$$(1,36) \qquad d[F(Y)] = D(F)(Y)(dY)$$

quelles que soient la différentielle d, la variable Y; on a en particulier $H = dX$.

Z désignant la variable $F(Y)$, nous poserons

$$(1,37) \qquad \frac{\partial Z}{\partial Y} = D(F)(Y).$$

$D(F)(Y)$ est en effet l'opérateur (linéaire) qui transforme dY en dZ quelle que soit la différentielle d.

Il sera commode de poser, X appartenant à R^n

$$(1,38) \qquad \partial_j X = |_j$$

définissant ainsi n différentielles ∂_j; $\partial_j Y$ désignera alors la dérivée partielle de la variable Y par rapport à la $j^{\text{ème}}$ composante de X.

On établit immédiatement les formules

$$(1,39) \qquad d(A(Y)) = [dA](Y) + A(dY) \quad \text{si A est linéaire,}$$

$$(1,40) \qquad d[A(Y_1)(Y_2)\ldots(Y_p)] = [dA](Y_1)\ldots(Y_p) + A(dY_1)(Y_2)\ldots(Y_p) + \cdots + A(Y_1)\ldots(Y_{p-1})(dY_p)$$

si A est multilinéaire; en l'appliquant à une jauge, on en déduit

---

(1) Nous sous-entendrons le mot « continuement ».

aisément la formule

$$(1{,}41) \qquad \frac{d[\text{dét}(A)]}{\text{dét}(A)} = \mathrm{Tr}(A^{-1}.dA)$$

ainsi que

$$(1{,}42) \qquad d[A^{-1}] = -A^{-1}.dA.A^{-1}.$$

F étant un opérateur différentiable, l'opérateur dérivé D(F), ayant même domaine de définition que F, prend ses valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie; on peut lui appliquer les résultats précédents. On définit ainsi, par récurrence, les opérateurs *p fois différentiables*, qu'on appellera aussi opérateurs *de classe* C^p (les opérateurs de classe C^0 étant par définition les opérateurs continus) : un opérateur de classe C^p quel que soit p sera dit de classe C^∞.

F étant de classe C^p, $D^p(F)(X)$ est un opérateur p-linéaire; on montre aisément qu'il est *symétrique*.

X étant la variable indépendante, dX et δX étant supposées fonctions différentiables de X, G étant de classe C^2, on déduit immédiatement de la symétrie de $D^2(G)(X)$ la formule

$$(1{,}43) \qquad d\delta G(X) - \delta d G(X) = D(G)(X)(d\delta X - \delta d X)$$

que l'on interprète en disant que $d\delta - \delta d$ est une différentielle; on l'appellera *crochet* des différentielles d et δ. On dira que d et δ *commutent* si leur crochet est nul; c'est notamment le cas pour les différentielles ∂_j définies plus haut (1,38).

On démontre que le produit de deux opérateurs de classe C^p est de classe C^p; que l'inverse d'un opérateur de classe C^p, s'il est différentiable, est de classe C^p.

Une *variété* V sera dite *de classe* C^p si ses changeurs de carte sont de classe C^p; les variétés de classe C^1 seront dites *différentiables*.

Toute variété de classe C^p est de classe C^q si $q \leqslant p$; toutes les variétés sont de classe C^0 (1,21, *a*).

En particulier, les espaces vectoriels de dimension finie, qui ont reçu (1,D) une structure canonique de variété, sont de classe C^∞.

Soient V et V′ deux variétés de classe C^p, de dimensions respectives n et n'; Φ une application d'un ouvert de V dans V′.

F et F′ étant des cartes respectives de V et V′, $F'^{-1}.\Phi.F$ est une application d'un ouvert de R^n dans $R^{n'}$; si elle est de classe C^p quelles que soient les cartes F et F′, Φ sera dit de classe C^p. (Si V et V′ sont des espaces vectoriels, on retrouve la définition précédente).

Avec cette définition plus générale, on montre encore que le produit de deux opérateurs de classe C^p est de classe C^p; que si V est une variété de classe C^p, ses cartes, inverses de cartes et glissement sont (comme les changeurs de carte) de classe C^p.

Soient Φ_1 et Φ_2 deux applications de classe C^p, appliquant un ouvert de V dans la variété V′; V et V′ sont donc supposés de classe C^p.

(1,44) Nous dirons que Φ_1 et Φ_2 ont un *contact d'ordre p* au point M de V si
a) $\Phi_1(M) = \Phi_2(M)$.
b) F et F′ étant des cartes de V et V′ telles que

$$F(X) = M, \qquad F'(X') = \Phi_1(M) = \Phi_2(M).$$

les dérivées de $F'^{-1}.\Phi_1.F$ et $F'^{-1}.\Phi_2.F$ coïncident, jusqu'à l'ordre *p*, au point X.

On constate immédiatement que cette définition est bien indépendante du choix des cartes F et F′.

Le contact en un point M définit évidemment une équivalence; les classes s'appellent « éléments de contact d'ordre *p*, au point M ».

1.H. Espaces fibrés d'ordre fini.

Soit V une variété de classe C^p.

Les glissements de V étant des opérateurs de classe C^p, nous savons définir le contact d'ordre *p* de deux glissements en un point M de V.

(1,45) Un espace fibré de base V, de fibreur φ, sera dit *d'ordre p* si la restriction à la fibre $\varphi(M)$ de l'opérateur $\varphi(G)$ ne dépend que de l'élément de contact d'ordre *p* de G au point M.

En utilisant un repéreur R, on constate que cette définition est équivalente à la suivante :

(1,46) H étant un changeur de carte de V, l'opérateur R(H)(X) ne dépend que de

$$D(H)(X), D^2(H)(X), \ldots D^p(H)(X)$$

(qui ne fait intervenir que le prérepéreur).

Espaces fibrés d'ordre 0.

Soit R un repéreur d'un tel espace fibré, E sa fibre type. L'expression R(H)(X) est constante, d'après (1,46); le groupe structural se réduit à I_E; l'espace fibré est *isomorphe à l'espace fibré trivial* V × E.

Espaces fibrés d'ordre 1.

L'opérateur D, appliqué aux changeurs de carte d'une variété V de classe C^1, de dimension n, vérifie les identités :

$$D(H.K)(X) = D(H)(K(X)).D(K)(X), \qquad (1.34)$$

$D(H)(X) = 1_{R^n}$ si H est une translation ou l'opérateur identique sur un ouvert de R^n.

C'est donc un prérepéreur (1,31); on peut le prolonger par un repéreur (th. 1,32), que nous désignerons encore par D, définissant ainsi un espace fibré de base V; la fibre type est R^n; le groupe structural est composé des matrices $D(H)(X)$; on peut définir sur les fibres une structure d'espace vectoriel à n dimensions, en postulant la linéarité des repères : on définit ainsi l'*espace vectoriel tangent à* V *en un point* M.

F étant une carte, le repère $S = D(F)(X)$ est alors une *base*; les vecteurs de base sont les $S_j = D(F)(X)(|_j)$; on posera encore (avec $M = F(X)$, $\partial_j(X) = |_j$) :

$$(1,47) \qquad S = \frac{\partial M}{\partial X}; \qquad S_j = \partial_j M.$$

Plus généralement, d étant une différentielle quelconque, dM désignera un *vecteur tangent*.

d et δ étant deux différentielles, les notations $d\delta$ M et δdM n'ont aucune signification en général; mais la notation $[d\delta - \delta d]$M désignera le vecteur tangent repéré dans la carte

$$F \ (M = F(X)) \qquad \text{par} \qquad d\delta X - \delta d X.$$

Soit maintenant R un repéreur d'un espace fibré de base V, d'ordre 1; il existe par définition un opérateur Φ tel que

$$R(H)(X) = \Phi[D(H)(X)] \qquad (1,46)$$

si H est un changeur de carte de V.

L'identité

$$R(H.K)(X) = R(H)(K(X)).R(K)(X) \qquad (1,29\ b)$$

montre que Φ est une *représentation* du groupe des matrices $D(H)(X)$.

Des exemples importants d'espaces fibrés d'ordre 1 sont fournis par les *covecteurs*, *affineurs* et *tenseurs* de l'espace vectoriel tangent;

ces espaces fibrés se construisent et se repèrent en utilisant les procédés (1.F).

Nous appellerons *forme d'ordre p* tout champ d'alterneurs d'ordre p (à valeurs réelles); A étant la valeur de la forme au point M, la formule

$$(1,48)\quad B(dM)\,(d_1M)\,\ldots\,(d_pM) = d[A(d_1M)\,\ldots\,(d_pM)] \\ - d_1[A(dM)\,(d_2M)\ldots(d_pM)] - \cdots - d_p[A(d_1M)\ldots(d_{p-1}M)\,(dM)]$$

où les différentielles $d, d_1, \ldots d_p$ sont supposées commuter deux à deux, définit une forme d'ordre $p+1$, que nous appellerons *dérivée extérieure* de A; nous poserons

$$(1,49)\qquad B = \nabla A.$$

Nous appellerons *chaîne de dimension p* tout opérateur linéaire C, à valeurs réelles, défini sur les formes continues; la chaîne D sera appelée *bord* de la chaîne C si $A = \nabla B$ entraîne $D(B) = C(A)$, ce que nous noterons $D = C.\nabla$.

Nous employerons la notation

$$(1,50)\qquad \int_C A$$

pour désigner le nombre résultant de l'application de la chaîne C à la forme A; avec cette notation, la définition du bord prend la forme

$$(1,51)\qquad \int_C \nabla.B = \int_{C\nabla} B \qquad \text{(formule de Stokes).}$$

Un exemple important de chaîne est le *pavé de dimension p*, défini au moyen d'une application différentiable et régulière F d'un ouvert de R^p dans une variété (on pose $M = F(X)$) par

$$(1,52)\qquad \int_C A = \int_{{}^1a}^{{}^1b} d^1X \int_{{}^2a}^{{}^2b} d^2X \ldots \int_{{}^pa}^{{}^pb} d^pX\, A(\partial_1 M)(\partial_2 M)\,\ldots\,(\partial_p M)$$

Le *support* du pavé est l'image par F du produit d'intervalles $[{}^1a, {}^1b] \times [{}^1a, {}^2b] \times \ldots \times [{}^pa, {}^pb]$; les formes nulles sur ce support ont une image nulle par C.

Le bord du pavé existe, et est la somme de $2p$ pavés de dimension $p - 1$. Nous supposons connues les applications essentielles de ces définitions.

1.I. CONNEXIONS LINÉAIRES.

Soit V une variété de dimension n, de classe C^2. Nous appellerons *connexion linéaire* au point M de V une opération $\hat{}$ telle que :

(1,53)
a) si la différentielle δ définit au voisinage de M, un champ de vecteurs tangents à V, et si dM est un vecteur tangent à V en M

$$\hat{d}\delta M$$

désigne un vecteur tangent à V en M.

b) F étant une carte de V telle que F(X) = M, il existe un opérateur bilinéaire Γ tel que

$$\hat{d}\delta M = D(F)(X)(d\delta X + \Gamma(dX)(\delta X)).$$

Si l'on pose $\hat{} = K(F)(X)(\Gamma)$, on constate immédiatement que l'on a défini un repéreur K; les connexions forment un espace fibré de base V, dont la fibre-type est l'espace à n^3 dimensions des opérateurs bilinéaires Γ définis dans R^n, prenant leurs valeurs dans R^n; on vérifie également que c'est un *espace fibré d'ordre* 2.

On appelle *géodésiques* de la connexion les courbes définies par l'équation différentielle

$$\hat{d}dM = 0 \tag{1,54}$$

qui peut s'écrire, en prenant une carte

$$\frac{d^2X}{ds^2} + \Gamma\left(\frac{dX}{ds}\right)\left(\frac{dX}{ds}\right) = 0. \tag{1,55}$$

On suppose donc donné un *champ de connexions*.

La *torsion* de la connexion au point M est l'opérateur bilinéaire T défini par

$$\hat{d}\delta M - \hat{\delta}dM = [d\delta - \delta d]\, M + T(dM)(\delta M). \tag{1,56}$$

En utilisant une carte F, on constate que :

$$T(dM)(\delta M) = D(F)(X)(\Gamma(dX)(\delta X) - \Gamma(\delta X)(dX)). \tag{1,57}$$

On dit que la connexion est *symétrique* si sa torsion est nulle; cette propriété s'exprime donc dans toute carte F par la symétrie de l'opérateur Γ.

$\hat{}$ et $\tilde{}$ désignant deux connexions, on vérifie l'existence d'un opérateur bilinéaire A tel que

$$\hat{d}\delta M - \tilde{d}\delta M = A(dM)(\delta M). \tag{1,58}$$

A s'appelle la *différence des deux connexions*. Il est symétrique si les deux connexions sont symétriques. Inversement, d'une connexion linéaire $\sim$, on déduit toutes les autres par la formule (1,58), A étant un opérateur bilinéaire.

Nous désignerons par $\frac{\hat{\partial}}{\partial M}(\delta M)$ l'opérateur linéaire qui fait correspondre $\hat{d}\delta M$ à dM; il est repéré dans la base $S = D(F)(X)$ par la matrice

$$\frac{\partial[\delta X]}{\partial X} + \Gamma'(\delta X)$$

Γ' désignant l'opérateur symétrique de Γ (donc confondu avec Γ si la connexion est symétrique).

Nous prolongerons la *dérivation covariante* $\hat{d}$ à d'autres champs que les champs de vecteurs, en convenant que :

$$(1{,}59)\qquad \begin{cases} \hat{d}Z = dZ \text{ si } Z \text{ appartient à un espace vectoriel fixe;} \\ [\hat{d}A]\,(Z) = \hat{d}[A(Z)] - A(\hat{d}Z) \text{ si } A \text{ est linéaire.} \end{cases}$$

On aura alors :

$$(1{,}60)\qquad \hat{d}[A(Z_1)(Z_2)\ \ldots\ (Z_p)] = [\hat{d}A]\,(Z_1)\ \ldots\ (Z_p) + A(\hat{d}Z_1)(Z_2)\ \ldots\ (Z_p) + \cdots + A(Z_1)\ \ldots\ (Z_{p-1})(\hat{d}Z_p)$$

si A est p-linéaire.

Par exemple, en introduisant la base $S = D(F)(X)$, d'où

$$\delta M = S.\delta X,$$

il vient la formule

$$(1{,}61)\qquad \hat{d}S = S.\Gamma(dX)$$

qui est une définition commode de l'opérateur Γ.

Il sera utile aussi d'introduire la matrice

$$(1{,}62)\qquad \Gamma_j = \Gamma(|_j)$$

$$(1{,}63)\quad \text{la ligne}\qquad {}^j\Gamma_k = {}^j|.\Gamma(|_k)$$

et les nombres

$$(1{,}64)\qquad {}^j\Gamma_{kl} = {}^j\Gamma(|_k)\,(|_l)\qquad \text{(symboles de Christoffel);}$$

par exemple, la dérivation covariante d'un tenseur deux fois covariant sera donnée par la formule

$$(1{,}65)\qquad [\hat{\partial}_j A]_{kl} = \partial_j[A_{kl}] - {}^r\Gamma_{jk}A_{rl} - {}^r\Gamma_{jl}A_{kr}.$$

Courbures d'un champ de connexions linéaires.

Nous définirons cette courbure comme l'*opérateur trilinéaire* R tel que :

$$(1,66) \qquad [\hat{d}_1\hat{d}_2 - \hat{d}_2\hat{d}_1]\,\delta M = [\widehat{d_1 d_2 - d_2 d_1}]\,\delta M + R(d_1M)(d_2M)(\delta M)$$

quelles que soient les différentielles d_1, d_2, δ.

En utilisant la carte F et la base $S = \dfrac{\partial M}{\partial X}$, il vient

$$(1,67) \qquad R(d_1M)(d_2M)(\delta M) = S[\Gamma(d_1X).\Gamma(d_2X) - \Gamma(d_2X)\,\Gamma(d_1X) + d_1[\Gamma]\,(d_2X) - d_2\Gamma(d_1X)]\,(\delta X)$$

d'où les composantes de R dans la base S :

$$(1,68) \qquad {}^jR_{klm} = {}^j\Gamma_{kr}\,{}^r\Gamma_{lm} - {}^j\Gamma_{lr}\,{}^r\Gamma_{km} + \partial_k\,{}^j\Gamma_{lm} - \partial_l\,{}^j\Gamma_{km}.$$

§ 2. — Les principes de la relativité variationnelle.

2.A Énoncé des principes (1).

(2,1)

a) L'*univers* est une variété (U) de dimension 4.

b) Les changeurs de carte de (U) sont des fonctions de classe C^2, à jacobien positif.

c) Les fonctions régulières de R^4, de classe C^∞, à jacobien positif, sont des changeurs de carte de (U).

(2,2)

a) En chaque point M de (U) est défini un tenseur g, appelé *tenseur fondamental*, qui définit sur l'espace vectoriel tangent une structure d'espace euclidien hyperbolique normal.

b) Les composantes g_{kl} de g dans une carte arbitraire sont différentiables.

(1) J. M. Souriau, I.

(2,3) *a*) Chaque phénomène physique est un champ défini dans (U) ; on peut choisir pour ce champ un repéreur R tel que :

La fibre-type de R soit une variété de classe C^2.
H étant un changeur de carte, Z un point de la fibre-type, l'expression R(H)(X)(Z) soit une fonction de classe C^2 de Z et des dérivées partielles (jusqu'à un ordre fini p) de H au point X.

b) F étant une carte quelconque de (U), R(F)(X)(Z) la valeur du champ au point F(X), Z est fonction de classe C^2 de X.

(2,4) *a*) A chaque phénomène est associé une fonction caractéristique f, telle que le scalaire

$$p = f(Z, \partial_j Z, g_{kl})$$

ne dépende que du point M = F(X), et non du choix de la carte F ; on l'appellera ***présence*** du phénomène au point M.

b) La fonction f est de classe C^2, en ce sens que si Z est repéré par Q dans une carte de la fibre, et si on pose

$$\delta[f(Z, \partial_j Z, g_{kl})] = \Pi \delta Q + P^j \delta[\partial_j Q] + A^{kl} \delta g_{kl} \qquad (A^{kl} = A^{lk})$$

les lignes Π et P^j, les nombres A^{kl} sont des fonctions de classe C^1 des quantités Q, $\partial_j Q$, g_{kl}.

(2,5) Quelle que soit la chaîne C, de dimension 4, l'intégrale

$$\mathcal{A} = \int_C \Big[\sum_\alpha p^{(\alpha)}\Big] \mathrm{vol}$$

où les $p^{(\alpha)}$ désignent les présences des différents phénomènes concomitantes et vol la *jauge euclidienne*, est stationnaire pour toute variation, nulle au bord de C, de ces phénomènes et du tenseur fondamental.

2.B Remarques diverses.

D'après l'axiome (2,1), les changeurs de carte de (U) ont tous un jacobien positif; cette hypothèse fait de (U) une variété *orientée*, en permettant de définir sans ambiguité le signe de la jauge euclidienne vol.

Nous n'avons pas précisé complètement l'ensemble des changeurs de carte de (U); les hypothèses énoncées sont suffisantes pour les besoins de cet exposé.

De même, la structure globale de (U) reste indéterminée; rien n'empêche, par exemple, de considérer un univers *non connexe*, bien que l'utilité de cette notion n'apparaisse guère [1].

On a supposé que U est *orientable*; le théorème de Whitney (Cf. Lichnerowicz I) permet d'affirmer l'existence globale sur U d'un champ de vecteurs non nuls du genre temps, ce qui montre que la caractéristique d'Euler-Poincaré de (U) est nulle; ce résultat permet également, sur chaque composante connexe de (U), de distinguer par continuité les vecteurs d'avenir et les vecteurs de passé, ce qui est probablement essentiel pour l'interprétation de la thermodynamique.

Compte tenu de l'orientation de (U), on en déduit aussi une orientation pour les sous-espaces vectoriels tangents de dimension 3, du genre espace; ce résultat est à rapprocher des expériences rendant vraisemblable la non-conservation de la parité en mécanique quantique.

Les axiomes (2,3) indiquent que tout phénomène est un champ prenant ses valeurs dans un espace fibré de base (U), *d'ordre fini p*, et que le point Q qui repère le champ dans une carte F au point F(X) est fonction deux fois différentiable de X, quelle que soit la carte F.

Ce résultat suppose essentiellement que (U) est une variété de classe C^{p+2}; l'existence de phénomène non triviaux ($p \geqslant 1$) conduira donc à préciser l'axiome (2,1); en particulier la gravitation, qui est un phénomène d'ordre 2, fait de (U) une variété de classe C^4; les équations de la gravitation montreront également (moyennant cependant une approximation) que les g_{kl} devront être de classe C^3 (ci-dessous, 4.B).

---

[1] Chacune des composantes connexes se comporterait comme un univers indépendant, n'ayant aucun rapport passé, présent ou futur avec les autres.

§ 3. — Théorèmes généraux.

3.A JAUGE ET TENSION.

F étant une carte, désignons par S la base D(F)(X). On rappelle les formules (1,47)

$$S_j = \partial_j M \qquad \text{avec} \qquad \partial_j X = |_j \quad (j = 1, 2, 3, 4)$$

La matrice de Gram correspondante (1,C)

$$G = \bar{S}.S$$

a pour composantes

$$(2,6) \qquad {}^jG_k = {}^j|.[.\bar{S}.S.].|_k = \bar{S}_j.S_k = g(S_j)\,(S_k) = g_{jk}.$$

Par hypothèse, la dimension de l'espace vectoriel tangent est 4, son indice d'inertie 1; les formules (1, 16, 17, 18) nous montrent que si l'on choisit la jauge de cet espace par la condition

$$|\text{dét}\,(\bar{S})| = |\text{dét}\,(S)|$$

on aura en fait $\text{dét}(\bar{S}) = (-1)^{4-3}\,\text{dét}\,(S) = -\text{dét}\,(S)$

d'où $\text{dét}\,(G) = \text{dét}\,(\bar{S})\,\text{dét}\,(S) = -[\text{dét}\,(S)]^2,$

et par suite $\text{dét}\,(S) = \pm\sqrt{-\text{dét}\,(G)}.$

Dans un changement de carte $F = F_1.H$, $X_1 = H(X)$, on est conduit à introduire une nouvelle base $S_1 = D(F_1)(X_1)$; la relation (1,34)

$$D(F_1.H)(X) = D(F_1)(H(X)).D(H)(X)$$

montre que $\text{dét}\,(S) = \text{dét}\,(S_1).\text{dét}\,(D(H)(X))$, donc que dét (S) et dét (S_1) ont même signe, puisque le jacobien dét $(D(H)(X))$ est positif (2,1, *b*).

Nous pourrons donc choisir le signe + devant le radical sans préciser le choix de la carte; en utilisant la formule (1,8), on a le théorème :

(3,1)

Dans toute carte, F la matrice de Gram $G = \bar{S}.S$ de la base $S = D(F)\,(X)$, qui vérifie ${}^jG_k = g_{jk}$, a un déterminant négatif.

On définit globalement sur (U) la jauge euclidienne vol par la relation

$$\text{vol}_{1234} = \sqrt{-\text{dét}\,(G)}$$

valable dans toute carte.

Nous poserons

$$u = \text{vol}_{1234}.$$

Soit δ une variation affectant seulement le tenseur g; S une base, $G = \bar{S}.S$ sa matrice de Gram.

En différentiant les formules

$$g(S.X)\,(S.Y) = X.\bar{G}.Y, \qquad \text{vol}_{1234} = \sqrt{-\,\text{dét}(G)},$$

et en utilisant (1,41), on établit aisément

$$(3{,}2)\quad \left\{\begin{array}{l} g^{-1}.\delta g \text{ est un } \textit{affineur hermitien}\text{; ses composantes sont} \\ {}^{j}[g^{-1}.\delta g]_{k} = {}^{j}[G^{-1}.\delta G]_{k} = -\,{}^{j}[\delta G^{-1}.G]_{k} = g^{jl}\delta g_{lk}; \\ \text{on a} \\ \qquad \delta[\text{vol}] = 1/2\ \text{Tr}(g^{-1}.\delta g)\ \text{vol} = 1/2\ g^{jk}\delta g_{kj}\ \text{vol}. \end{array}\right.$$

Soit maintenant p la présence d'un phénomène quelconque. Si la variation δ affecte le tenseur g, mais non le phénomène, l'expression $\delta(p\ \text{vol})$ est une forme d'ordre 4, que l'on peut mettre sous la forme $\Phi(\delta g)$ vol, Φ étant linéaire, puisque les formes d'ordre 4 forment un espace de dimension 1. Il existe donc un affineur E tel que

$$\Phi(\delta g) = 1/2\ \text{Tr}(E.g^{-1}.\delta g);$$

on peut supposer E hermitien (car $g^{-1}.\delta g$ est hermitien, et le produit d'un affineur hermitien par un affineur antihermitien a une trace nulle), ce qui achève de le définir. En appliquant les formules précédentes, on établit sans peine l'énoncé suivant :

(3,3)

> A chaque phénomène est associé un affineur hermitien E, que l'on appellera *tension* du phénomène.
>
> Il est défini à partir de la présence p du phénomène par l'une des formules équivalentes suivantes :
>
> *a*) $\delta(p\ \text{vol}) = 1/2\ \text{Tr}(E.g^{-1}.\delta g)\ \text{vol}, \qquad E = \bar{E}$
>
> *b*) $\delta p = 1/2\ \text{Tr}([E - p]g^{-1}.\delta g), \qquad E = \bar{E}$
>
> *c*) ${}^{k}E_{l} = 2A^{kj}\,g_{jl} + p\,{}^{k}|_{l}$ (voir 1.B, 2,4 *b*)
>
> *d*) $E^{kl} = 2A^{kl} + pg^{kl}$
>
> *e*) $E_{kl} = 2A^{qr}\,g_{kq}\,g_{rl} + pg_{kl}$.

Il sera commode d'utiliser aussi les expressions A_{kj}, définies par

$$(3{,}4)\qquad A_{kj} = A^{rs}g_{rk}g_{sj}$$

et qui apparaissent dans la différentiation de la présence, lorsque celle-ci est exprimée en fonction des g^{jk}; on montre en effet immédiatement, par application de (1,42) que

$$(3{,}5)\qquad \delta p = -\,A_{kj}\,\delta g^{kj}\quad (\text{avec } A_{kj} = A_{jk})$$

dans une variation de g seul; on a alors :

(3,5) $$^{k}E_l = 2g^{kr}A_{rl} + p^{k}|_l.$$

Nous verrons plus loin comment identifier E avec le « tenseur impulsion-énergie » classique [1].

Les principes (2,1; 2,3; 2,4) indiquent que les composantes de E, comme les A^{jk}, sont des fonctions différentiables.

3.B. Connexion Riemannienne.

(3,6) Nous définirons la *connexion riemannienne* $\hat{}$ de (U) par les propriétés suivantes :
a) sa torsion est nulle;
b) $\hat{d}g = 0$ quel que soit le vecteur tangent dM.

Le lecteur vérifiera la validité, avec les principes (2,A), des théorèmes classiques suivants :

(3,7) La connexion est déterminée de façon unique par (3,6); les symboles de Christoffel correspondants étant donnés par la formule

$$^{j}\Gamma_{kl} = 1/2\, g^{jr}[\partial_l g_{rk} + \partial_k g_{rl} - \partial_r g_{kl}]$$

Étant donné un point M de (U), on peut construire une carte F telle que, *en ce point*, les symboles de Christoffel soient nuls.

On vérifie immédiatement que si M décrit une géosédique de la connexion riemannienne, soit

$$\frac{\hat{d}}{ds}\left[\frac{dM}{ds}\right] = 0$$

on a

(3,8) $$\frac{d}{ds}\left[g\left(\frac{dM}{ds}\right)\left(\frac{dM}{ds}\right)\right] = 0$$

les géodésiques se partagent donc en trois classes (de temps, isotropes et d'espace) suivant la valeur de $g\left(\frac{dM}{ds}\right)\left(\frac{dM}{ds}\right)$. On démontre aisément que celles qui ne sont pas isotropes sont extrêmales de l'intégrale $\int_{M_0}^{M_1} \sqrt{\left|g\left(\frac{dM}{ds}\right)\left(\frac{dM}{ds}\right)\right|}\, ds.$

---

[1] En fait, ce tenseur décrit les contraintes dynamiques et les densités tridimensionnelles d'impulsion et d'énergie (voir ci-dessous 5.E).

Remarque. — Le principe (2,2 *b*) et les formules (3,7) entraînent seulement la continuité des symboles de Christoffel; nous ne savons pas, en particulier, si la connexion riemanienne admet une courbure.

Par contraction de la formule (3,7), on trouve aisément

$$^{j}\Gamma_{jl} = 1/2 g^{jr} \partial_l g_{jr} = 1/2 \operatorname{Tr}(G^{-1}.\partial_l G) = \frac{\partial_l \sqrt{-\text{dét}(G)}}{\sqrt{-\text{dét}(G)}}$$

d'où, avec les notations (3,1)

$$(3,9) \qquad \frac{\partial_l u}{u} = {}^{j}\Gamma_{jl}.$$

En supposant (3,7) que les $^{j}\Gamma_{kl}$ sont nuls au point considéré, on a donc $\partial_l u = 0$; et comme $\partial_l u = \partial_l[\text{vol}_{1234}] = [\hat{\partial}_l \text{vol}]_{1234}$, il vient

$$(3,10) \qquad \hat{d}\,\text{vol} = 0 \quad \text{quelle que soit la différentielle } d.$$

On vérifiera aussi que si l'on pose, V étant un champ de vecteurs

$$(3,11) \qquad \widehat{\text{div}}\, V = \operatorname{Tr}\left(\frac{\hat{\delta} V}{\partial M}\right)$$

on a

$$(3,12) \qquad \nabla[\text{vol}(V)] = \widehat{\text{div}}[V]\,\text{vol}$$

et que, s étant un scalaire

$$(3,13) \qquad \widehat{\text{div}}[sV] = s\,\widehat{\text{div}}\,V + \frac{\partial s}{\partial M}.V.$$

Enfin, A étant un affineur, on aura la formule

$$(3,14) \qquad \widehat{\text{div}}[A.V] = \widehat{\text{div}}[A].V + \operatorname{Tr}\left(A.\frac{\hat{\delta} V}{\partial M}\right)$$

si on désigne par $\widehat{\text{div}}\,A$ le *covecteur* de composantes :

$$(3,15) \qquad [\widehat{\text{div}}\,A]_r = {}^{k}[\hat{\partial}_k A]_r = \partial_k {}^{k}A_r + {}^{l}\Gamma_{lk}.{}^{k}A_r - {}^{j}\Gamma_{kj}.{}^{k}A_r.$$

3.C Équations aux variations.

Dans le principe variationnel (2,5)

$$\delta \int_C \Big[\sum_\alpha p^{(\alpha)}\Big]\text{vol} = 0$$

considérons une variation δ qui affecte le phénomène α_0 à l'exclusion des autres et du tenseur g; les présences des autres phénomènes ont une variation nulle; ainsi que la jauge, si bien que l'on a

$$\delta \int_C p^{(\alpha_0)} \, \mathrm{vol} = 0$$

ou, en utilisant une carte et en n'écrivant plus l'indice α_0 :

$$\iiiint u[\Pi \delta Q + P^j \delta \partial_j Q] . d^1x . d^2x . d^3x . d^4x = 0$$

l'intégrale de $\partial_j[uP^j \delta Q]$ est égale au flux sur le bord de C du vecteur de composantes $uP^j \delta Q$ (1), qui est nul, par hypothèse, sur le support de ce bord.

On peut donc écrire

$$\iiiint \{u\Pi - \partial_j[uP_j]\} \delta Q . d^1x . d^2x . d^3x . d^4x = 0$$

d'où, $u\Pi - \partial_j[uP^j]$ étant continu, $u\Pi - \partial_j[uP^j] = 0$.

Les équations correspondantes étant écrites pour les autres phénomènes, reste à écrire l'équation correspondant à une variation de g seul. La formule (3,3a) donne alors

$$\delta \int_C \Big[\sum_\alpha p^{(\alpha)}\Big] \mathrm{vol} = \int_C \Big[\mathrm{Tr} \sum_\alpha [E^{(\alpha)}] . g^{-1} . \delta g \Big] \mathrm{vol} = 0;$$

$\sum_\alpha E^{(\alpha)}$ étant hermitien et continu, $g^{-1} . \delta g$ hermitien et arbitraire, on en déduit l'équation

$$\sum_\alpha E^{(\alpha)} = 0 :$$

(3,16) Les équations aux variations impliquées par le principe (2,5) sont :

a) les équations $u\Pi - \partial_j[uP^j] = 0$ (notations 2,4) valables pour chacun des phénomènes concomitants;

b) l'équation $\sum_\alpha E^{(\alpha)} = 0$, qui exprime qu'en tout point, la somme des tensions des phénomènes concomitants est nulle.

Ce dernier résultat peut paraître contradictoire avec la théorie classique de la Relativité; ce paradoxe disparaîtra lorsque nous tiendrons compte de la tension du phénomène de gravitation.

Il est clair que l'invariance de la présence des phénomènes par

(1) Le flux d'un vecteur V sur une chaîne de dimension 3 estpar définition l'intégrale sur cette chaîne de la forme vol (V), vol désignant ici la jauge de R^4.

changement de carte entraîne l'invariance des équations aux variations. Celle-ci entraîne à son tour l'énoncé suivant :

(3,17) Si un système de champs (constituant le tenseur fondamental et les divers phénomènes) est solution des équations aux variations, tout glissement de (U) les transforme en une nouvelle solution de ces équations.

Ce résultat se déduit du fait que si F est une carte, G un glissement, les champs déduits par le glissement G sont repérés de la même façon dans la carte G.F que les champs initiaux dans la carte F, et vérifient donc les mêmes équations.

Cet énoncé (3,17) du « principe de relativité générale », est à rapprocher du théorème de conservation qui est établi dans le n° suivant.

3.D Équations de conservation (1).

Soit Φ une application de R^4 dans R^4, de classe C^∞, nulle en dehors d'une certaine boule B.

La variable X_0 appartenant à R^4, posons

$$Y \equiv \Phi(X_0)$$

et

$$X \equiv H_\varepsilon(X_0) = X_0 + \varepsilon\Phi(X_0),$$

ε étant un nombre réel; il vient

$$\frac{\partial X}{\partial X_0} = D(H_\varepsilon)(X_0) = \underline{1} + \varepsilon D(\Phi)(X_0).$$

Pour $|\varepsilon|$ suffisamment petit, H_ε est une fonction à jacobien positif, régulière, de classe C^∞, donc un changeur de carte de l'univers (principe 2,1,c); F_0 étant une carte donnée de (U), $F = F_0.H_\varepsilon^{-1}$ est donc une carte; posons

$$M \equiv F_0(X_0) \equiv F(X)$$

et introduisons les 9 différentielles suivantes :

δ, désignant la dérivation par rapport à ε, X_0 étant constant :

$$\delta X_0 = 0 \qquad \delta\varepsilon = 1$$

d_j, désignant la dérivation partielle par rapport à ${}^jX_0$, ε étant constant:

$$d_j X_0 = |_j \qquad d_j\varepsilon = 0$$

(1) J. M. Souriau, III.

∂_j désignant la dérivation partielle par rapport à ${}^jX$, ε étant constant :

$$\partial_j X = |_j \qquad \delta_j \varepsilon = 0.$$

On constate que $\delta M = 0$, $\delta X = Y$, $\delta d_j - d_j \delta = 0$,

$$[\delta\partial_j - \partial_j\delta]X = -\partial_j Y, \qquad [\delta\partial_j - \partial_j\delta]\varepsilon = 0.$$

Soit maintenant G la matrice de Gram de la base $D(F)(X) = \dfrac{\partial M}{\partial X}$.

On a identiquement $g(d_k M)(d_l M) = \overline{d_k X}.G.d_l X$; le premier membre étant indépendant de ε, il vient

$$0 = \delta[\overline{d_k X}.G.d_l X] = \overline{\delta d_k X}.G.d_l X + \overline{d_k X}.\delta G.d_l X + \overline{d_k X}.G.\delta d_l X.$$

Utilisant la formule $\delta d_r X = d_r \delta X = d_r X = \dfrac{\partial Y}{\partial X} d_r X$

il vient $$\overline{d_k X}\left[\overline{\frac{\partial Y}{\partial X}} \cdot G + \delta G + G \cdot \frac{\partial Y}{\partial X}\right] d_l X = 0$$

d'où, k et l étant arbitraires

$$\delta G = -G \cdot \frac{\partial Y}{\partial X} - \overline{\frac{\partial Y}{\partial X}} \cdot G$$

et, en multipliant par ${}^k|$ à gauche, $|_l$ à droite :

(3,18) $$\delta g_{kl} = -g_{rk}\partial_l {}^r Y - g_{lr}\partial_k {}^r Y.$$

Considérons par ailleurs un phénomène quelconque, muni du repéreur R. Désignons sa valeur au point M par

$$R(F)(X)(Z) \equiv R(F_0)(X_0)(Z_0)$$

Z et Z_0 étant deux éléments de la fibre-type.

Les formules des repéreurs (1,29) donnent immédiatement

$$Z = R(H_\varepsilon)(X_0)(Z_0).$$

Par hypothèse, Z_0 est une fonction deux fois différentiable de X_0 (2,3*b*); $Z = R(H_\varepsilon)(X_0)(Z_0)$ est une fonction deux fois différentiable des dérivées $D^p(H_\varepsilon)(X_0)$ et de Z_0 (2,3 *a*), donc de ε et de X_0; il en est de même de l'échelle Q qui repère Z dans une carte arbitraire de la fibre. On a donc

$$\delta\partial_j Q - \partial_j \delta Q = \frac{\partial Q}{\partial X}[\delta\partial_j X - \partial_j \delta X] = -\frac{\partial Q}{\partial X}\partial_j Y = -\partial_r Q\, \partial_j {}^r Y,$$

soit

(3,18) $$\delta[\partial_j Q] = \partial_j[\delta Q] - \partial_r Q . \partial_j {}^r Y.$$

Enfin la présence p du phénomène au point M étant indépendante de ε, on a, avec les notations de (2,4 *b*) :

$$0 = \delta p = \Pi . \delta Q + P^j \delta[\partial_j Q] + A^{kl} \delta g_{kl};$$

en multipliant par u, et en tenant compte de (3,18), (3,19) et de l'équation aux variations (3,16), on a :

$$0 = \partial_j [u P^j] . \delta Q + u P^j . \partial_j [\delta Q] - u . P^j . \partial_r Q . \partial_j [{}^r Y] - u A^{kl} [g_{kr} \partial_l [{}^r Y] + g_{lr} \partial_k [{}^r Y]].$$

En posant

$$(3,20) \qquad \begin{cases} {}^j B_r = u [P^j . \partial_r Q + 2 A^{kj} g_{kr}] \\ C^j = u P^j \delta Q \end{cases}$$

on constate, compte tenu de $A^{kl} = A^{lk}$, que cette équation s'écrit :

$${}^j B_r \partial_j {}^r Y = \partial_j C^j$$

soit, puisque ${}^j B_r$ est différentiable,

$$(3,21) \qquad \partial_j [{}^j B_r] . {}^r Y = \partial_j [C^j - {}^j B_r . {}^r Y].$$

En dehors de la boule B, on a identiquement $Y = 0$, $X = X_0$, d'où $H_\varepsilon(X_0) \equiv X_0$; d'après lex axiomes des prérepéreurs (1,31), on a

$$R(H_\varepsilon)(X_0) = 1$$

d'où $\qquad Z \equiv R(H_\varepsilon)(X_0)(Z_0) \equiv Z_0$

et par suite $\qquad \delta Z = \dfrac{\partial Z}{\partial \varepsilon} = 0, \qquad \delta Q = 0.$

La quantité $C^j - {}^j B_r {}^r Y$ est donc nulle en dehors de B; en intégrant (3,21) sur un pavé C contenant la boule B à l'intérieur, et en transformant le second membre par la formule de Stokes-Ostrogradsky, il vient

$$\int_C [\partial_j {}^j B_r] . {}^r Y . d^1 x . d^2 x . d^3 x . d^4 x = 0.$$

La quantité ${}^j B_r$ est indépendante de $Y = \Phi(X_0)$, qui est astreint à la seule condition d'être C^∞ et nul hors d'une boule intérieure à C; le lemme fondamental du calcul des variations donne donc l'équation

$$(3,22) \qquad \partial_j [{}^j B_r] = 0.$$

En remplaçant d'autre part δ par ∂_r dans l'identité (2,4 *b*), il vient :

$$(3,23) \qquad \partial_r p = \Pi \partial_r Q + P^j . \partial_r \partial_j Q + A^{kl} \partial_k g_{rl}.$$

Développant (3,22), tenant compte de (3,23), et à nouveau, de l'équation aux variations

$$u\Pi = \partial_j[uP^j]$$

on trouve finalement

$$u[\partial_r p - A^{kl}\partial_r g_{kl}] + 2\partial_j[uA^{kj}g_{kr}] = 0. \tag{3,24}$$

Nous sommes libres maintenant de donner à ε la valeur 0; la carte F se confond avec la carte arbitraire F_0; on peut choisir celle-ci de façon que les symboles de Christoffel de la connexion euclidienne soient nuls en un point arbitraire M (3,7); les dérivées partielles des g_{kl} et de u sont alors nulles en ce point; (3,24) peut s'écrire :

$$\partial_r p + 2\partial_j[A^{kj}g_{kr}] = 0 \tag{3,25}$$

ou

$$\partial_j[2A^{kj}g_{jr} + {}^j|_r p] = 0$$

soit, compte tenu de (3,3 *c*) et de la nullité des symboles de Christoffel

$${}^j[\hat{\partial}_j \mathrm{E}]_r = 0$$

ou, d'après (3,15), $\widehat{\mathrm{div}}[\mathrm{E}] = 0$ (1); nous arrivons donc au théorème de conservation :

(3,26) $\left\{\begin{array}{l}\text{Compte tenu des équations aux variations, la tension} \\ \text{E d'un phénomène quelconque vérifie l'équation} \\ \qquad\qquad \widehat{\mathrm{div}}[\mathrm{E}] = 0.\end{array}\right.$

On sait qu'Einstein avait supposé à priori :

a) qu'à tout phénomène physique pouvait s'attacher un affineur hermitien E (l'impulsion-énergie);

b) que les équations de la mécanique prennent la forme

$$\widehat{\mathrm{div}}[\mathrm{E}] = 0 \text{ (2)}.$$

Le théorème (3,26) permet de raccorder la théorie avec la Relativité classique; nous voyons de plus que les 4 équations scalaires,

(1) On peut aussi, sans rien supposer sur les symboles de CHRISTOFFEL, transformer directement le premier membre de (3,24) en u div E_r.

(2) C'est de cette hypothèse qu'il a déduit, en particulier, l'équivalence de la masse et de l'énergie (EINSTEIN, I).

représentées par l'équation $\widehat{\mathrm{div}}\, E = 0$, ne sont qu'une conséquence des équations aux variations qui sont, en général, plus riches de contenu.

3.E. Constantes additives.

La présence des phénomènes physiques se détermine inductivement, à partir de l'observation de leur comportement. Il peut arriver que plusieurs expressions de la présence conduisent aux mêmes équations aux variations. En particulier, on vérifie immédiatement que :

(3,27) Le système des équations aux variations reste inchangé si l'on ajoute à l'expression de la présence du phénomène n° α une constante C_α, la somme des C_α étant nulle; la tension de chaque phénomène est alors augmentée de l'affineur scalaire $\underline{C_\alpha}$.

3.F. Discontinuités macroscopiques.

Il résulte des principes (2,A) que la tension E d'un phénomène est de classe C^1. Il peut arriver cependant que, au voisinage d'une hypersurface S, d'équation $f(M) = 0$, E varie très rapidement (ce sera le cas notamment, pour la surface de séparation de deux phases d'un même corps, lorsque les forces capillaires et les dimensions moléculaires seront considérées comme très petites). Nous dirons alors que cette surface représente une *discontinuité macroscopique* de E;

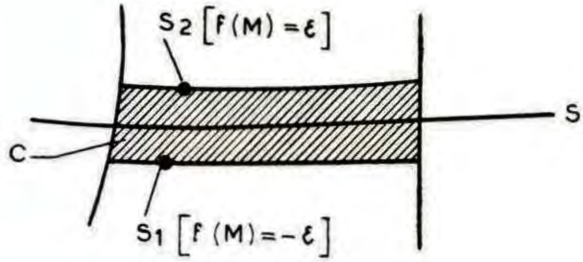

Fig. 1.

il sera commode d'approcher la valeur de la tension par une expression discontinue E, ayant une limite de part et d'autre de S (notées E^+ et E^-) et telle que, quel que soit ε, on puisse trouver une fonction E_ε, bornée indépendamment de ε, ayant (selon 3,26) une divergence nulle, et coïncidant avec E pour $|f(M)| \geqslant \varepsilon$ (la véritable valeur de la tension étant l'une de ces fonctions E_ι).

V étant un vecteur différentiable quelconque, C le pavé indiqué sur la figure, il vient, par application de (3,14; 3,12; 1,51) :

$$O(\varepsilon) = \int_C \mathrm{Tr}\left(E_\iota . \frac{\delta V}{\delta M}\right) \mathrm{vol} = \int_C \widehat{\mathrm{div}}\,(E_\iota . V)\ \mathrm{vol}$$
$$= \int_{C\nabla} \mathrm{vol}\,(E_\iota . V) = O(\varepsilon) + \int_{S_2 - S_1} \mathrm{vol}\,(E_\iota . V).$$

E et E_ι coïncidant sur S_2 et S_1, il vient

$$O(\varepsilon) = \int_{S_2 - S_1} \mathrm{vol}\,(E . V) = O(\varepsilon) + \int_S \mathrm{vol}\,([E^+ - E^-]\,V);$$

puisque cette intégrale ne dépend pas de ε, elle est nulle, et par conséquent le vecteur $[E^+ - E^-].V$ est tangent à S; en d'autres termes, si le vecteur N est normal à S, il vérifie

$$\bar{N}[E^+ - E^-] = 0.$$

Compte tenu du fait que E^+ et E^- sont hermitiens, on voit que :

(3,28) Dans une discontinuité macroscopique de la tension E d'un phénomène à la traversée d'une hypersurface S, le vecteur E.N est continu si N est normal à S.

Appliqué au cas statique, cet énoncé fournit un résultat, formellement analogue, tridimensionnel, dont l'application est classique en élasticité.

§ 4. — La gravitation.

4.A. Déduction des équations de la gravitation.

(4,1) Nous ferons l'hypothèse suivante : le phénomène « gravitation » est une connexion linéaire symétrique.

Ainsi que nous l'avons dit plus haut, cette hypothèse implique que les changeurs de carte de (U) sont de classe C^4.

Représentons cette connexion par le signe $\sim$ (il ne faut pas la confondre avec la connexion riemanienne que nous avons représentée par le signe $\frown$); nous désignerons encore les symboles de Christoffel de $\sim$ par la notation ${}^j\Gamma_{kl}$; ces 40 nombres (compte tenu de la symétrie de Γ, qui s'écrit ${}^j\Gamma_{kl} = {}^j\Gamma_{lk}$) repèrent l'espace vectoriel à 40 dimensions qui constitue la fibre-type du phénomène; nous supposerons naturellement que la structure de variété de classe C^2 prévue, sur cette fibre type, par (2,3 *a*), est la structure qui se déduit de la structure d'espace vectoriel.

Avant de rechercher les formes possibles pour la fonction caractéristique de la gravitation, établissons le lemme suivant :

(4,2)
F étant une carte de (U), $\sim$ une connexion linéaire symétrique, on peut construire une carte F* telle que, en un point donné X de déf(F) :

a) F et F* aient un contact d'ordre 1;

b) Les symboles de Christoffel représentant $\sim$ dans la carte F* soient nuls;

c) $$\partial_m {}^j\Gamma^*_{kl} + \partial_k {}^j\Gamma^*_{lm} + \partial_l {}^j\Gamma^*_{km} = 0.$$

Supposons pour simplifier $X = 0$; H étant un changeur de carte, posons

$$X^* \equiv H(X), \qquad F^* = F.H, \qquad S = D(F)(X), \qquad S^* = D(F^*)(X^*).$$

d étant une différentielle arbitraire, on trouve :

$$S^*.\Gamma^*(dX^*) = \tilde{d}S^* = \tilde{d}[S.D(H)(X)] = d\tilde{S}.D(H)(X)$$
$$+ S.D^2(H)(X)(dX) = S[\Gamma(dX).D(H)(X) + D^2(H)(X)(dX)]$$

d'où

$$(4,3) \qquad D(H)(X).\Gamma^*(dX^*) = \Gamma(dX).D(H)(X) + D^2(H)(X)(dX).$$

Les conditions (4,2 *a* et *b*) sont réalisées pour $X = 0$ si l'on prend

$$X^* \equiv H(X) = X - 1/2\, \Gamma_0(X)(X)$$

Γ_0 désignant la valeur de Γ pour $X = 0$.

H est bien un changeur de carte de (U) au voisinage de l'origine.

Supposons donc maintenant que, par un premier changement de carte, on ait réalisé $\Gamma_0 = 0$; désignons par dX et δX des constantes; en posant

$$X^* \equiv X + B(X)(X)(X).$$

B étant trilinéaire symétrique (ce qui assure la condition (*a*)), il vient en différentiant (4,3) et en faisant $X = 0$

$$\delta\Gamma^*(dX^*) = \delta\Gamma(dX) + 6B(\delta X)(dX)$$

d'où (c) si on définit B par :

$$ {}^jB_{klm} = -1/6\,[\partial_m{}^j\Gamma_{kl} + \partial_k{}^j\Gamma_{lm} + \partial_l{}^j\Gamma_{km}], $$

les valeurs des dérivées étant prises à l'origine.

C.Q.F.D.

LEMME :

(4,4) *Dans les conditions* (4,2), *on a pour* $X = 0$

$$ \partial_m{}^j\Gamma^*_{kl} = 1/3\,[{}^jR_{mkl} + {}^jR_{mlk}] $$

R *désignant l'opérateur de courbure de la connexion* $\sim$.

En effet, la formule (1,68) donne ici, puisque $\Gamma^* = 0$ à l'origine :

$$ {}^jR^*_{mkl} = \partial_m{}^j\Gamma^*_{kl} - \partial_k{}^j\Gamma^*_{ml} $$
$$ {}^jR^*_{mlk} = \partial_m{}^j\Gamma^*_{lk} - \partial_l{}^j\Gamma^*_{mk} $$

d'où, par addition de ces deux formules avec (4,2, c) :

$$ {}^jR^*_{mkl} + {}^jR^*_{mlk} = 3\partial_m{}^j\Gamma^*_{kl} $$

soit (4,4), puisque l'opérateur R a les mêmes composantes dans les deux cartes à l'origine.

COROLLAIRE :

(4,5) *La* présence de la gravitation *est une fonction de classe* C^2 *des composantes du tenseur* g *et de celles du tenseur de courbure de la gravitation.*

Selon le principe (2,4), on a en effet une relation

$$ p = f({}^j\Gamma_{kl},\ \partial_m{}^j\Gamma_{kl},\ g_{rs}). $$

valable dans toutes les cartes; f étant de classe C^2.

En remplaçant F par F*, il vient, au point arbitraire X considéré, compte tenu de (4,2) et (4,4) :

$$ (4,6) \qquad p = f(0,\ 1/3\,[{}^jR_{mlk} + {}^jR_{mkl}],\ g_{rs}) $$

puisque les composantes de g sont les mêmes, en X, dans les cartes F et F*.

C.Q.F.D.

Par ailleurs, la fonction f étant de classe C^2, on peut faire un développement limité de (4,6) au voisinage de $R = 0$:

$$ p = c + A_j^{mkl}[{}^jR_{mkl} + {}^jR_{mlk}] + o(|R|^2). $$

$|R|$ désignant par exemple la plus grande valeur absolue des composantes de R, la valeur initiale c et les coefficients A_j^{mkl} étant des fonctions des g_{rs}.

L'expression des deux termes de ce développement étant indépendante du choix de la carte, on en déduit que c est indépendant de g; de même, une vérification élémentaire mais fastidieuse (¹) montre que le terme $A_j^{mkl}[{}^j R_{mkl} + {}^j R_{mlk}]$ s'écrit $a\,{}^m|_j g^{kl}\,{}^j R_{mkl}$, a étant une constante. D'où le théorème :

$$(4{,}7)\quad \left\{\begin{array}{l}\text{Il existe deux constantes } c \text{ et } a \text{ telles que la présence de}\\ \text{la gravitation s'écrive}\\ \qquad c + a g^{kl}\,{}^j R_{jkl} + o(|R|^2).\end{array}\right.$$

Nous appellerons « approximation du premier ordre » l'hypothèse

$$(4{,}8)\qquad \{p = c + a g^{kl}\,{}^j R_{jkl}$$

qui suppose donc implicitement que le tenseur R est « petit », et qui est compatible avec le principe (2,4).

En remplaçant R par sa valeur, il vient alors :

$$(4{,}9)\qquad \delta p = A^{kl}\delta g_{kl} + \Pi_j^{kl}\delta[{}^j\Gamma_{kl}] + P_j^{klm}\delta[\partial_m{}^j\Gamma_{kl}]$$

avec

$$(4{,}10)\qquad A^{kl} = A^{lk} = -[a/2]\,{}^j R_{jpq}[g^{pk}g^{ql} + g^{pl}g^{qk}]$$

$$(4{,}11)\qquad P_j^{klm} = a[{}^m|_j g^{kl} - {}^k|_j g^{lm}]$$

les Π_j^{kl} étant des fonctions linéaires des ${}^r\Gamma_{st}$.

L'équation aux variations (3,16) s'écrit donc :

$$\{u\Pi_j^{kl} - \partial_m[uP_j^{klm}]\}\ \delta^j\Gamma_{kl} = 0$$

soit, en supposant qu'au point considéré les Γ, donc les Π, soient nuls, et compte tenu de la symétrie de Γ :

$$\partial_m[u[P_j^{klm} + P_j^{lkm}]] = 0$$

ou

$$(4{,}12)\qquad 2\,\partial_j[ug^{kl}] - {}^k|_j\partial_m[ug^{lm}] - {}^l|_j\partial_m[ug^{km}] = 0.$$

Par contraction sur les indices j et k, il vient

$$(4{,}13)\qquad -3\partial_m[ug^{rm}] = 0$$

(¹) On commence par montrer que les A_j^{mkl}, supposés symétriques en k et l sont les composantes d'un tenseur, qui doit être invariant par rotation; on vérifie ensuite, par la méthode des rotations infinitésimales, que les seuls tenseurs 4 fois covariants ayant cette propriété s'écrivent $ag^{jk}g^{lm} + bg^{jl}g^{km} + cg^{jm}g^{kl} + e\,\mathrm{vol}^{jklm}$.

et, en reportant dans (4,12) :

$$(4,14) \qquad \partial_j[ug^{kl}] = 0.$$

Cette équation exprime que la matrice $H = \sqrt{-\text{dét}(G)}.G^{-1}$ vérifie

$$\partial_j H = 0$$

quel que soit j; il en est donc de même de la matrice

$$\sqrt{-\text{dét}(H)}.H^{-1} = G;$$

on a donc :

$$\partial_j G = 0$$

soit, puisqu'au point considéré, les ${}^j\Gamma_{kl}$ sont nuls

$$(4,15) \qquad \tilde{\partial}_j g = 0,$$

résultat indépendant de la carte.

En comparant avec (3,6) on voit que la connexion symétrique $\sim$ est égale à la connexion riemanienne $\hat{}$.

En carte quelconque, (4,15) s'écrit (cf. 1,65)

$$(4,16) \qquad \partial_j g_{kl} = {}^r\Gamma_{jk} g_{rl} + {}^r\Gamma_{jl} g_{kr};$$

les ${}^r\Gamma_{jk}$ étant par hypothèse de classe C^2, et les g_{rs} de classe C^1, on en déduit que les g_{rs} sont en fait de classe C^3.

La formule (3,9) donne alors

$$\partial_l{}^j\Gamma_{jm} - \partial_m{}^j\Gamma_{jl} = [\partial_l\partial_m - \partial_m\partial_l]\operatorname{Log} u = 0$$

d'où, en portant dans l'expression de R,

$$(4,17) \qquad {}^jR_{jlm} = {}^jR_{jml}$$

ce qui simplifie (4,10) en :

$$A^{kl} = -a.{}^jR_{jpq}.g^{pk}.g^{ql};$$

L'expression (3, 3e) des composantes covariantes de la tension devient alors :

$$E_{kl} = -2a[{}^jR_{jkl} - \frac{1}{2} g_{kl}{}^jR_{jpq}g^{pq}] + cg_{kl};$$

on sait, d'après le théorème général, que la divergence de E est nulle.

(En portant cette valeur dans (3,16 b), qui exprime la nullité de la somme des tensions, on obtiendra la formule (4,19) ci-après.)

Ainsi,

> En Relativité variationnelle, l'hypothèse suivant laquelle la gravitation est une *connexion symétrique* conduit aux résultats suivants :
>
> *a*) La présence p de la gravitation est une fonction de classe C^2 des composantes du tenseur fondamental g et du tenseur de courbure de cette connexion, qui admet un développement limité au voisinage de $R = 0$.
>
> (4,18) *b*) Dans l'*approximation du premier ordre*, qui consistera à réduire ce développement à ses termes de degré 0 et 1, on a :
>
> 1° $$p = p_0 + a g^{kl}\,{}^{j}R_{jkl}$$
>
> p_0 et a étant des constantes;
>
> 2° les équations aux variations des ${}^{j}\Gamma_{kl}$ expriment que la connexion de gravitation est égale à la connexion riemanienne;
>
> 3° les g_{jk} sont de classe C^3;
>
> (4,19) 4° l'équation aux variations des g_{jk} s'identifie à l'*équation d'Einstein avec constante cosmologique* λ :
>
> $${}^{j}R_{jkl} - \frac{1}{2} g_{kl}\,.\,{}^{j}R_{jpq}\,.\,g^{pq} + \lambda\,.\,g_{kl} = \chi \sum_{\alpha} E^{(\alpha)}_{kl}$$
>
> où le second membre désigne la somme des tensions des phénomènes autres que la gravitation, si l'on prend
>
> $$a = \frac{1}{2\chi} \qquad p_0 = -\frac{\lambda}{\chi}$$

4.B. Le passage a la Relativité restreinte.

L'approximation du premier ordre consistait à supposer petit l'opérateur de courbure; l'approximation de la relativité restreinte consistera à le supposer nul. On démontre alors classiquement qu'il existe, au voisinage de chaque point de (U), une carte où les symboles de Christoffel sont identiquement nuls; les équations obtenus par l'approximation du premier ordre, rigoureusement valables dans ce cas, montrent que les g_{rs} sont constants dans cette carte (4,16); un changeur de carte linéaire permet alors de donner à la matrice de Gram une forme canonique, par exemple :

$$G = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1/c^2 & & \\ & & -1/c^2 & \\ & & & -1/c^2 \end{bmatrix}$$

c étant une constante arbitraire qui s'interprètera ultérieurement.

Bien entendu, cette hypothèse n'est valable, compte tenu de (4,19), qu'en supposant les constantes χ et λ pratiquement négligeables [1]; elle revient à « négliger la pesanteur », comme on le fait usuellement en mécanique des fluides. On sait que des approximations plus fines sont possibles, mais nous ne les utiliserons pas ici.

Les variations du tenseur g étant négligées, ainsi que l'équation corrélative (3,16 b), nous aurons pour déterminer les phénomènes autres que la pesanteur les équations aux variations (3,16, a); le théorème (3,26) s'appliquera encore, et prendra, dans la carte considérée, la forme simple :

$$\partial_k[{}^k E_j] = 0.$$

On pourra l'interpréter comme entraînant la conservation d'intégrales tridimensionnelles, définissant l'énergie et l'impulsion.

§ 5. — La matière parfaite.

5.A. Définitions préliminaires.

(5,1) Nous appellerons *matière parfaite* tout phénomène trivial dont la dimension de la fibre est 3.

Il sera commode — puisque nous nous limitons à une étude locale — de repérer le phénomène par un élément Q de R^3, invariant par tout changement de carte de (U), par définition d'un espace fibré trivial (1.F).

Les équations $Q = C^{te}$ définissent en général des courbes de (U), que nous appellerons *lignes de courant*; Q sera donc considéré comme repérant une « molécule » de matière.

---

[1] On sait que $\chi = 1{,}86\ 10^{-27}\ \mathrm{gr}^{-1}\ \mathrm{cm}$, et qu'on ne peut distinguer expérimentalement λ de 0.

Nous choisirons arbitrairement dans R^3 une fonction de classe C^2, de signe constant

$$\lambda = f(Q)$$

et nous définirons le vecteur J de (U) par l'identité

$$(5,2) \quad \text{vol}(J)\,(d_1M)\,(d_2M)\,(d_3M) \equiv \lambda\,\text{vol}\,(d_1Q)\,(d_2Q)\,(d_3Q)$$

vol désignant à gauche la jauge de (U), à droite celle de R^3.

vol (J) est l'image réciproque par le champ de la forme de R^3 λ vol (qui peut si l'on veut être considérée comme la jauge de la fibre-type du phénomène); sa dérivée extérieure est donc l'image réciproque de la dérivée extérieure de cette jauge, qui est nulle, puisque la dimension de la fibre-type est 3; on a donc, compte tenu de (3,12)

$$(5,3) \qquad \widehat{\text{div}}\, J = 0;$$

λ n'étant pas nul, (5,2) montre que J ne s'annule que si le rang de l'opérateur $\frac{\partial Q}{\partial M}$ est plus petit que 3; en y faisant $d_1M = J$, on voit que l'on a $d_1Q = 0$; d'où :

(5,4)
Le vecteur J est nul si le rang de $\frac{\partial Q}{\partial M}$ est inférieur à 3;

sinon, J est en chaque point tangent à la ligne de courant qui passe par ce point :

$$\frac{\partial Q}{\partial M}.J = 0.$$

Nous appellerons J *vecteur courant de matière.*

Rappelons que J n'est défini qu'à un facteur multiplicatif près, constant sur chaque ligne de courant.

Γ étant un covecteur tangent à (U), on a, par définition (1,3) d'un déterminant

$$\lambda\,\text{dét}\begin{bmatrix}\Gamma\\ \frac{\partial Q}{\partial M}\end{bmatrix}\text{vol}\,(J)\,(d_1M)\,(d_2M)\,(d_3M)$$

$$= \text{vol}\begin{pmatrix}\Gamma.J\\ \frac{\partial Q}{\partial M}.J\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Gamma.d_1M\\ d_1Q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Gamma.d_2M\\ d_2Q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Gamma.d_3M\\ d_3Q\end{pmatrix}$$

d'où, puisque $\frac{\partial Q}{\partial M}.J = 0$ et compte tenu de (5,2)

$$\text{dét}\begin{bmatrix}\Gamma \\ \frac{\partial Q}{\partial M}\end{bmatrix} \text{vol}\,(d_1Q)\,(d_2Q)\,(d_3Q) = \Gamma.J\;\text{vol}\,(d_1Q)\,(d_2Q)\,(d_3Q)$$

soit

$$(5,5) \quad \Gamma.J = \lambda\,\text{dét}\begin{bmatrix}\Gamma \\ \frac{\partial Q}{\partial M}\end{bmatrix} \quad \text{quel que soit le covecteur } \Gamma;$$

cette formule est équivalente à (5,2).

Prenons pour Γ le transposé d'un vecteur V; l'opérateur $\begin{bmatrix}\bar{V} \\ \frac{\partial Q}{\partial M}\end{bmatrix}$ est le transposé d'une ligne S de 4 vecteurs; en appliquant la formule $\text{dét}\,(\bar{S}) = -\,\text{dét}\,(S)$ (1) qui définit la jauge de (U), on a :

$$\text{dét}\,(S)^2 = -\,\text{dét}\,(\bar{S}.S) = -\,\text{dét}\begin{bmatrix}\bar{V}.V & \bar{V}.\overline{\frac{\partial Q}{\partial M}} \\ \frac{\partial Q}{\partial M}.V & \frac{\partial Q}{\partial M}.\overline{\frac{\partial Q}{\partial M}}\end{bmatrix}$$

soit, en développant :

$$\bar{\Lambda}.J.\bar{J}.V = -\lambda^2\left[\bar{V}.V\,\text{dét}\left(\frac{\partial Q}{\partial M}.\overline{\frac{\partial Q}{\partial M}}\right) - \bar{V}.\overline{\frac{\partial Q}{\partial M}}.\text{Adj}\left(\frac{\partial Q}{\partial M}.\overline{\frac{\partial Q}{\partial M}}\right).\frac{\partial Q}{\partial M}.V\right]$$

soit, V étant un vecteur arbitraire :

$$(5,7) \quad J.\bar{J} = \lambda^2\left[\overline{\frac{\partial Q}{\partial M}}\,\text{Adj}\left(\frac{\partial Q}{\partial M}.\overline{\frac{\partial Q}{\partial M}}\right).\frac{\partial Q}{\partial M} - \underline{\text{dét}\left(\frac{\partial Q}{\partial M}.\overline{\frac{\partial Q}{\partial M}}\right)}\right]$$

et, en prenant la trace de (5,7)

$$(5,8) \qquad \bar{J}.J = -\,\lambda^2\,\text{dét}\left(\frac{\partial Q}{\partial M}.\overline{\frac{\partial Q}{\partial M}}\right).$$

On voit que la matrice (d'ordre 3) $\frac{\partial Q}{\partial M}.\overline{\frac{\partial Q}{\partial M}}$ est régulière, à moins que le vecteur courant soit *nul ou isotrope*; son déterminant est positif si J est un vecteur d'espace, négatif si J est un vecteur de temps.

(1) Qui est valable, on le vérifie immédiatement, même si S n'est pas régulière.

Si $\bar{J}.J$ n'est pas nul, il vient en divisant (5,7) par (5,8)

$$(5,9) \qquad \overline{\frac{\partial Q}{\partial M}} \cdot \left[\frac{\partial Q}{\partial M} \cdot \overline{\frac{\partial Q}{\partial M}}\right]^{-1} \cdot \frac{\partial Q}{\partial M} = -\Pi_J$$

Π_J désignant le *projecteur orthogonal* sur le vecteur J :

$$(5,10) \qquad \Pi_J = \frac{J.\bar{J}}{\bar{J}.J}$$

5.B. Présence de la matière.

La présence de la matière est de la forme (2,4 *a*) :

$$(5,11) \qquad p = f\left(Q, \frac{\partial Q}{\partial X}, G\right).$$

G désignant la matrice de Gram $\bar{S}.S$ de la base $S = D(F)(X)$ (F est une carte arbitraire).

Dans un changement de carte linéaire

$$X = A.X^* \quad (\text{dét}(A) > 0)$$

l'expression de la présence est la même; d'où l'identité

$$(5,12) \qquad f\left(Q, \frac{\partial Q}{\partial X}, G\right) = f\left(Q, \frac{\partial Q}{\partial X}.A, \bar{A}.G.A\right) \qquad \text{pour} \qquad \text{dét}(A) > 0.$$

Elle s'interprète de façon simple en choisissant une ligne T de trois vecteurs tangents à (U) en un point, une base S au même point, et en posant

$$(5,13) \qquad \psi(Q, T, S) = f(Q, \bar{T}.S, \bar{S}.S);$$

ψ est une fonction de classe C^2, qui vérifie :

$$\psi(Q, T, S.A) = f(Q, \bar{T}SA, \bar{A}.\bar{S}.S.A) = f(Q, \bar{T}.S, \bar{S}S) = \psi(Q, T, S)$$

si $\text{dét}(A) > 0$, donc qui est indépendante de la base S. On peut la désigner par $\psi(Q, T)$.

Soit alors R une rotation de l'espace tangent ($\bar{R}.R = R.\bar{R} = 1$, $\text{dét}(R) = 1$). Il vient

$$\psi(Q, R.T) = \psi(Q, R.T, S) = f(Q, \bar{T}.\bar{R}.S, \bar{S}.S) = f(Q, \bar{T}.S', \bar{S'}.S'),$$

si on pose $S' = \overline{R}.S$, soit encore

$$\psi(Q, R.T) = \psi(Q, T)$$

la présence de la matière est donc de la forme

$$\psi\left(Q, \frac{\partial Q}{\partial M}\right)$$

la fonction vérifiant ψ l'identité

$$\psi(Q, R.T) = \psi(Q, T) \quad \text{si R est une rotation.}$$

Remarquons que la variable $T = \frac{\partial Q}{\partial M}$ décrit l'espace à 12 dimensions des lignes de trois vecteurs; définissons dans cet espace l'ensemble Ω par la condition

$$\text{dét}(\overline{T}.T) \neq 0$$

qui exprime que val(T) est un espace non isotrope de dimension 3.

Ω est un ouvert partout dense; la fonction ψ, qui est continue, est donc entièrement définie par ses valeurs sur Ω.

On démontre aisément que si T et T′ appartiennent à Ω, une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une rotation R telle que $T' = R.T$ est $\overline{T}.T = \overline{T}'.T'$ (1); la fonction $\psi(Q,T)$ est donc, sur Ω, de la forme $\varphi(Q, \overline{T}.T)$.

Soit T_0 un élément de Ω; la matrice $G_0 = \overline{T}_0.T_0$ est régulière; A étant une matrice hermitienne d'ordre 3, posons

$$T = T_0[1 + G_0^{-1}.A]$$

d'où $\overline{T}.T = G_0 + 2A + A.G_0^{-1}.A$.

La correspondance entre $\overline{T}.T$ et A est donc biunivoque et analytique au voisinage de $A = 0$, dans l'espace à 6 dimensions des matrices hermitiennes d'ordre 3; la relation

$$\varphi(Q, \overline{T}.T) = \psi(Q, T_0[1 + G_0^{-1}.A])$$

montre que φ est, comme ψ, de classe C^2 lorsque $\overline{T}.T$ est dans un voisinage de G_0, donc quel que soit T dans Ω, puisque T_0 y est arbitraire.

(1) Par exemple en complétant T et T′ par des vecteurs unitaires bien choisis.

On est donc conduit à l'énoncé :

$$
(5,14) \quad \left\{ \begin{array}{l}
a) \text{ Il existe une fonction } \varphi \text{ telle que la présence de} \\
\text{la matière parfaite se mette sous la forme} \\
\qquad \varphi(\mathrm{Q}, \mathrm{H}) \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{H} = \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \mathrm{M}} \cdot \overline{\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \mathrm{M}}} \\
\text{la fonction } \varphi \text{ est de classe } \mathrm{C}^2 \text{ pour } \mathrm{dét}(\mathrm{H}) \neq 0. \\
b) \text{ Inversement, toute fonction } \varphi \text{ vérifiant les pro-} \\
\text{priétés ci-dessus est une expression de la présence} \\
\text{compatible avec les axiomes (2,4), sous la seule réserve} \\
\text{que sa limite définisse encore une fonction de classe} \\
\mathrm{C}^2 \text{ de } \mathrm{Q}, \ \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \mathrm{X}} \text{ et G lorsque } \mathrm{dét}(\mathrm{H}) = 0.
\end{array} \right.
$$

5.C. ÉQUATIONS ET TENSION DE LA MATIÈRE PARFAITE.

En différentiant l'identité

$$(5,15) \qquad p = \varphi(\mathrm{Q}, \mathrm{H})$$

on trouve une identité

$$(5,16) \qquad \delta p = \Pi . \delta \mathrm{Q} + \mathrm{Tr}(\mathrm{K} . \delta \mathrm{H})$$

Π étant une ligne d'ordre 3, K une matrice hermitienne d'ordre 3, définies complètement par cette équation. Π et K sont des fonctions différentiables de Q et H.

En remplaçant les variables par leur valeur, il vient

$$(5,17) \qquad \delta p = \Pi \delta \mathrm{Q} + \mathrm{P}^j \delta[\partial_j \mathrm{Q}] + \mathrm{A}^{rs} \delta g_{rs}$$

avec

$$(5,18) \quad \mathrm{P}^j = 2\,{}^j| \, \mathrm{G}^{-1} \overline{\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \mathrm{X}}} \cdot \mathrm{K}, \qquad \mathrm{A}^{rs} = - {}^r\!\left[\mathrm{G}^{-1} \cdot \overline{\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \mathrm{X}}} . \mathrm{K} \cdot \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \mathrm{X}} \mathrm{G}^{-1} \right]_s$$
$$= - g^{r\alpha} g^{s\beta} \, \overline{\partial_\alpha \mathrm{Q}} . \mathrm{K} . \partial_\beta \mathrm{Q}.$$

On en tire immédiatement les équations aux variations :

$$(5,19) \qquad u\Pi = 2^j | \partial_j \left[u \mathrm{G}^{-1} \overline{\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \mathrm{X}}} \cdot \mathrm{K} \right]$$

et l'expression des composantes de la tension :

$$(5,20) \qquad {}^k\mathrm{E}_l = p^k|_l - 2 \, {}^k\!\left[\mathrm{G}^{-1} \overline{\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \mathrm{X}}} \cdot \mathrm{K} \cdot \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \mathrm{X}} \right]_l$$

d'où

(5,21) $$\boxed{E = \underline{p} - 2\,\overline{\frac{\partial Q}{\partial M}}\cdot K\cdot \frac{\partial Q}{\partial M}}.$$

On tire immédiatement de (5,21), compte tenu de (5,4):

(5,22) $$\boxed{E.J = pJ}$$

S'il n'est pas nul, le vecteur courant est donc *vecteur propre de la tension, la valeur propre correspondante étant égale à la présence.*

5.D. Fluides et poussières.

(5,23) Nous appellerons *fluide parfait* une matière parfaite dont la tension est toujours de la forme

$$\alpha\Pi_J + \beta$$

α et β étant deux scalaires.

La théorie des fluides parfaits, à partir de cette expression de la tension et des deux équations

$$\widehat{\mathrm{div}}(J) = 0 \qquad \widehat{\mathrm{div}}(E) = 0$$

a été donnée par Lichnerowicz ([1]) et de nombreux autres auteurs; elle est évidemment compatible avec nos définitions; nous ne la développerons pas ici. Signalons simplement que les valeurs propres de la tension, soit $\alpha + \beta$ et β, sont respectivement appelées *densité propre* et *pression propre* ([2]) du fluide.

Cherchons maintenant l'expression de la *présence* d'un fluide parfait.

En remplaçant Π_J par son expression (5,10) dans (5,23), et en tenant compte de (5,21), il vient

$$\alpha + \beta - p + \overline{\frac{\partial Q}{\partial M}}\left[2K - \alpha\left[\frac{\partial Q}{\partial M}\overline{\frac{\partial Q}{\partial M}}\right]^{-1}\right]\frac{\partial Q}{\partial M} = 0$$

d'où, en multipliant par J

$$p = \alpha + \beta$$

([1]) Lichnerowicz, II et III.

([2]) La pression usuelle s'en déduit par multiplication par c^2.

et, en multipliant par un vecteur arbitraire dM :

$$\overline{\frac{\partial Q}{\partial M}}\left[2K - \alpha\left[\frac{\partial Q}{\partial M}\cdot\overline{\frac{\partial Q}{\partial M}}\right]^{-1}\right]dQ = 0.$$

$\frac{\partial Q}{\partial M}$ étant de rang 3, dQ est un vecteur arbitraire de R^3; on a donc

$$\overline{\frac{\partial Q}{\partial M}}\left[2K - \alpha\left[\frac{\partial Q}{\partial M}\cdot\overline{\frac{\partial Q}{\partial M}}\right]^{-1}\right] = 0$$

d'où, en transposant et en multipliant encore par dM à droite :

$$K = \frac{\alpha}{2}\left[\frac{\partial Q}{\partial M}\overline{\frac{\partial Q}{\partial M}}\right]^{-1} = \frac{\alpha}{2}H^{-1}.$$

Or (5,16) donne, pour $\delta Q = 0$, $\delta p = \mathrm{Tr}(K.\delta H)$, soit

$$\delta[\varphi(Q, H)] = \frac{\alpha}{2}\mathrm{Tr}(H^{-1}.\delta H) = \frac{\alpha}{2}\delta[\mathrm{Log}|\text{dét}(H)|]$$

par suite, si $\delta[\text{dét}(H)] = 0$, $\delta[\varphi(Q, H)] = 0$: la présence d'un fluide parfait ne dépend donc de H que par son déterminant.

Inversement, considérons une matière parfaite dont la présence soit une fonction de Q et de $\sigma = -\text{dét}(H)$; il vient

$$K = \sigma\frac{\partial p}{\partial\sigma}H^{-1}, \qquad E = p - 2\sigma\frac{\partial p}{\partial\sigma}[1 - \Pi_J];$$

d'où le théorème :

(5,24) Un fluide parfait est une matière parfaite dont la présence est de la forme

$$p = f(Q, \sigma)$$

avec $\sigma = -\text{dét}(H)$.

Sa tension est

$$E = \underline{p} - 2\sigma\frac{\partial p}{\partial\sigma}[\underline{1} - \Pi_J].$$

On en déduit immédiatement que :

(5,25) La *densité propre* d'un fluide parfait est égale à sa présence; sa *pression propre* est

$$\varpi = 2\sigma\frac{\partial p}{\partial\sigma} - p.$$

Ces formules indiquent que les fluides parfaits sont des milieux *holonomes* (Cf. Lichnerowicz III), *d'indice* $\frac{\partial p}{\partial \sigma}.\sqrt{\frac{\sigma}{\sigma_0}}$, *si l'expression de la présence est indépendante de* Q.

La densité et la pression s'expriment alors en fonction de σ, on en déduit par élimination l'*équation d'état* du fluide.

C'est dans ce cas que l'on peut définir les mouvements *irrotationnels;* signalons qu'on les obtient directement en remarquant que $\sigma = \bar{J}.J$ (formule 5,8, avec $\lambda \equiv 1$), et en écrivant le principe variationnel

$$\delta \int_G p \text{ vol} = 0,$$

en remplaçant la liaison (5,2) par la liaison $\widehat{\text{div}}\, J = 0$ qui s'en déduit ce qui doit, *a priori*, donner des solutions particulières.

Un fluide s'appellera *poussière*, ou *matière pure*, lorsque sa pression sera identiquement nulle; (5,25) donne alors l'équation

$$2\sigma \frac{\partial p}{\partial \sigma} - p = 0$$

d'où

$$p = f(Q)\sqrt{|\sigma|}. \tag{5,26}$$

La tension de la poussière s'écrit alors

$$E = p\Pi_J \tag{5,27}$$

on déduit aisément de l'équation div $(p\Pi_J) = 0$ que les lignes de courant de la poussière sont des *géodésiques de la connexion riemanienne*; on sait que c'est cette remarque qui permet, en assimilant les planètes à des molécules de poussière, de vérifier astronomiquement l'équation d'Einstein (4,19).

Remarque. — On vérifie aisément que, pour que la fonction $p = \varphi(Q, \sigma)$ soit de classe C^2 en Q, $\frac{\partial Q}{\partial X}$ et G (5,14), il est nécessaire et suffisant qu'elle soit de classe C^2 en Q et σ, en particulier lorsque $\sigma = 0$.

L'équation que nous avons donnée pour la présence de la poussière (5,26) ne peut pas se prolonger jusqu'à $\sigma = 0$; ce résultat d'apparence paradoxale peut peut-être s'expliquer ainsi : lorsque la densité tend vers 0, la représentation d'une poussière réelle par un milieu homogène tombe évidemment en défaut; le terme de pression qui doit nécessairement apparaître représentant alors les tensions internes des molécules.

Par contre, on décrira sans difficultés analogues le *fluide incompressible*, avec l'équation caractéristique

$$p = a + b\sigma \quad (a \text{ et } b \text{ étant deux constantes})$$

d'où la valeur de la pression

$$\varpi = -a + b\sigma.$$

5.E. Déduction de l'Élasticité classique.

Pour comparer, les équations de la matière parfaite avec celles de l'Élasticité classique, nous allons nous placer d'abord dans le cadre de la Relativité Restreinte, en posant

$$(5{,}28) \qquad X = \begin{bmatrix} t \\ P \end{bmatrix} (t \in R, \ P \in R^3)$$

et en considérant t comme la mesure du temps, P comme un point de l'espace usuel à 3 dimensions; nous supposerons, comme en (4,B), que

$$(5{,}29) \qquad G = \bar{S}.S = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1/c^2 & & \\ & & -1/c^2 & \\ & & & -1/c^2 \end{bmatrix}, \quad \text{avec} \quad S = \frac{\partial M}{\partial X}.$$

Les molécules de la matière étant repérées par l'élément Q de R^3, fonction de X, nous introduirons le vecteur vitesse tridimensionnelle V de ces molécules, défini par

$$(5{,}30) \qquad \frac{\partial Q}{\partial P}.V + \frac{\partial Q}{\partial t} = 0$$

sa longueur

$$(5{,}31) \qquad v = \sqrt{\bar{V}.V}$$

et le nombre

$$(5{,}32) \qquad \rho = f(Q) \text{ dét} \left(\frac{\partial Q}{\partial P}\right)$$

que l'on pourra considérer comme la *densité* de la matière; $f(Q)$ est une fonction positive arbitraire, qui pourra être considérée comme la densité dans l'état de référence $Q = P$.

On trouve alors :

$$(5{,}33) \qquad H = \frac{\partial Q}{\partial M}.\overline{\frac{\partial Q}{\partial M}} = -c^2 D$$

en posant

$$D = \frac{\partial Q}{\partial P} \cdot \left[1 - \frac{V.\overline{V}}{c^2} \right] \cdot \frac{\overline{\partial Q}}{\partial P} \tag{5,34}$$

et

$$J = S \begin{bmatrix} \rho \\ \rho V \end{bmatrix} \tag{5,35}$$

si l'on prend (cf. 5,2)

$$\lambda = \frac{f(Q)}{c^3}. \tag{5,36}$$

La présence de la matière pure est une fonction de Q et de H, donc de Q et de D; mettons-là sous la forme loisible

$$p = c^2 f(Q) \sqrt{\text{dét}(D)} + w \tag{5,37}$$

w étant une nouvelle fonction de Q et de D; nous désignerons par Θ la matrice hermitienne d'ordre 3 telle que

$$\delta w = \mathrm{Tr}(\Theta . \delta D) \quad \text{pour} \quad \delta Q = 0. \tag{5,38}$$

On trouve alors, pour la tension de la matière, la formule

$$E = c^2 f(Q) \sqrt{\text{dét}(D)} . \Pi_s + \underline{w} + \frac{2}{c^2} \frac{\overline{\partial Q}}{\partial M} . \Theta . \frac{\partial Q}{\partial M} \tag{5,39}$$

soit, en utilisant la base S :

(5,40)

$$E = S \begin{bmatrix} \dfrac{\rho c^2}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} + w + \dfrac{\overline{V}.A.V}{c^2} & -\dfrac{\rho \overline{V}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} - \dfrac{\overline{V}.A}{c^2} \\ \dfrac{\rho c^2 V}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} + A.V & -\dfrac{\rho V.\overline{V}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} + \underline{w} - A \end{bmatrix} S^{-1}$$

en posant pour abréger

$$A = 2 \frac{\overline{\partial Q}}{\partial P} . \Theta . \frac{\partial Q}{\partial P}; \tag{5,41}$$

la disposition des termes de la matrice intervenant dans (5,40) est la suivante :

$$\begin{bmatrix} \text{scalaire} & \text{covecteur} \\ \text{vecteur} & \text{affineur hermitien} \end{bmatrix}.$$

Les équations $\widehat{\operatorname{div}} J = 0$, $\widehat{\operatorname{div}}\, E = 0$ fournissent alors, en désignant par div la divergence usuelle dans l'espace à trois dimensions des P :

$$(5{,}42) \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}[\rho V] = 0$$

$$(5{,}43) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\rho c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} + w + \frac{\overline{V}.A.V}{c^2}\right] + \operatorname{div}\left[\frac{\rho c^2 V}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} + A.V\right] = 0$$

$$(5{,}44) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\rho\overline{V}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} + \frac{\overline{V}.A}{c^2}\right] + \operatorname{div}\left[\frac{\rho V.\overline{V}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} + A - \underline{w}\right] = 0$$

(5,43) peut se remplacer par

$$(5{,}45) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho c^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} - 1\right] + w + \frac{\overline{V}.A.V}{c^2}\right] + \operatorname{div}\left[\rho c^2 V\left[\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} - 1\right] + A.V\right] = 0$$

obtenue par combinaison linéaire avec (5,42).

Supposons maintenant que la constante c soit considérée comme très grande; les équations (5,45) et (5,44) deviennent respectivement

$$(5{,}46) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left[w + \rho\frac{v^2}{2}\right] + \operatorname{div}\left[\left[A + \rho\frac{v^2}{2}\right]V\right] = 0$$

$$(5{,}47) \qquad \frac{\partial}{\partial t}[\rho\overline{V}] + \operatorname{div}[\rho.V.\overline{V} + A - \underline{w}] = 0.$$

Cette dernière équation se transforme, compte tenu de (5,42), en

$$(5{,}48) \qquad \overline{\rho\left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial P}.V\right]} + \operatorname{div}[A - \underline{w}] = 0$$

d'où l'énoncé :

Avec les variables indiquées, l'expression (5,37)

(5,49) $$p = c^2 f(\mathrm{Q})\sqrt{\text{dét}(\mathrm{D})} + w$$

pour la présence de la matière parfaite, et en supposant c très grand (le terme prépondérant dans l'expression de la présence étant alors celui d'une poussière), on obtient les équations classiques de l'élasticité :

(5,42) $$\text{div}\,[\rho \mathrm{V}] + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{(équation de continuité)}$$

(5,48) $$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t} + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{P}}\,.\,\mathrm{V} + \frac{1}{\rho}\,\overline{[\text{div}\,\mathrm{A}']} = 0 \quad \text{(équation d'Euler)}$$

l'affineur hermitien $\mathrm{A}' = \mathrm{A} - \underline{w}$ étant considéré comme la *contrainte* du milieu; l'équation

(5,50) $$\frac{\partial}{\partial t}\left[w + \rho\frac{v^2}{2}\right] + \text{div}\left[\left[\mathrm{A}' + \underline{w} + \rho\frac{v^2}{2}\right]\mathrm{V}\right] = 0$$

qui exprime la conservation de l'énergie (élastique et cinétique)

$$\int_{\mathrm{R}^3}\left[w + \rho\frac{v^2}{2}\right]\text{vol}$$

enfin les équations :

(5,51) $$\mathrm{A}' = 2\,\overline{\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \mathrm{P}}}\,.\,\Theta\,.\,\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \mathrm{P}} - \underline{w}$$

(5,38) $$\delta w = \mathrm{Tr}(\Theta\,.\,\delta \mathrm{D})$$

exprimant la contrainte A' en fonction de la *déformation*

(5,52) $$\mathrm{D} = \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \mathrm{P}}\,.\,\overline{\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \mathrm{P}}}\ (^1)$$

(1) C'est la formule (5,34) en faisant c très grand; D mesure effectivement la déformation du milieu en ce sens que deux états du milieu déduits l'un de l'autre par déplacement sont caractérisés par la conservation de D en chaque molécule.

Remarques :

L'expression (5,37) de la présence peut s'écrire

$$p = w + c^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Par suite, l'intégrale de p prise entre deux hyperplans $t = t_1$, $t = t_2$ a la valeur (à un facteur constant près) :

$$\mathrm{I} = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint \left[\rho c^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + w\right] dx\, dy\, dz$$

soit, en remarquant que $\iiint \rho\, dx\, dy\, dz$ est, en raison de l'équation de continuité, une constante m :

$$\mathrm{I} = mc^2[t_2 - t_1] + \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint \left[\rho c^2\left[\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - 1\right] + w\right] dx\, dy\, dz;$$

l'intégrale, qui doit être stationnaire, s'écrit pour c grand :

$$\int_{t_1}^{t_2} [\mathrm{W} - \mathrm{T}]\, dt$$

W étant l'*énergie potentionelle* et T l'*énergie cinétique : le principe variationnel* (2,5) *est bien une généralisation du principe d'Hamilton.*

Nous pouvons maintenant interpréter la matrice qui représente la tension dans la base S sous la forme suivante :

$$\mathrm{S}^{-1}.\mathrm{E}.\mathrm{S} = \begin{bmatrix} \text{densité d'énergie} & -\text{(transposée de la densité d'impulsion)} \\ \text{flux d'énergie} & -\text{(contrainte dynamique)} \end{bmatrix}.$$

En dehors de l'équation de continuité, qui est conséquence *a priori* du choix des variables, on doit s'attendre à trouver 3 équations aux variations puisqu'il y a trois fonctions scalaires inconnues (les composantes de Q); en effet, on constate que l'équation (5,50) est conséquence de (5,48). Nous sommes donc dans un cas où l'équation de conservation $\widehat{\mathrm{div}}\,\mathrm{E} = 0$ est équivalente aux équations aux variations, alors qu'elle n'en est en général qu'une conséquence. C'est ce qui explique que l'étude relativiste des fluides ait pu être abordée sans principe variationnel.

La notion de matière parfaite, définie par (5,1), coïncide avec la notion classique de milieu élastique si on la suppose « presque poussiéreuse », c'est à dire si les efforts internes sont petits. Nous allons étudier un exemple où cette circonstance n'a pas lieu.

5.F. EXEMPLE DE DÉMATÉRIALISATION.

Considérons une matière parfaite dont la présence s'écrit

$$(5,53) \quad p = a + b\,\mathrm{Tr}\left(\frac{\partial Q}{\partial M}.\overline{\frac{\partial Q}{\partial M}}\right), \quad a \text{ et } b \text{ étant des constantes.}$$

Il en résulte immédiatement l'équation aux variations

$$(5,54) \qquad \Box Q = 0$$

si bien que les ondes sonores, aussi bien longitudinales que transversales, se propagent dans cette matière à la vitesse c (on peut si l'on veut considérer cette matière comme définissant le *solide relativiste*).

Prenons, en Relativité Restreinte,

$$X = \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \qquad S.\overline{S} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix} \qquad (\text{on a posé } c = 1).$$

et considérons la solution suivante de (5,54)

$$(5,55) \qquad Q = \begin{bmatrix} 1/2\,(x^2 + t^2) \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

d'où l'on déduit

$$J = S \begin{bmatrix} x \\ -t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(5,55) montre que dans l'espace $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, les trajectoires sont des parallèles à Ox.

Dans le plan $\begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix}$, les trajectoires sont des cercles concentriques $x^2 + t^2 = C^{te}$.

On voit que la matière va « plus vite que la lumière » dans les régions (II) et (IV), moins vite dans (I) et (III).

On constate également que :

a) pour $t < 0$, il y a *création de matière* de part et d'autre du plan $x = 0$, avec une vitesse infinie; cette vitesse diminue en valeur absolue lorsqu'on s'écarte du plan pour devenir plus petite que l sur les plans $x = \pm t$.

b) pour $t = 0$, la vitesse s'annule partout;

c) pour $t > 0$, les vitesses sont inversées : il y a dématérialisation sur le plan $x = 0$, toujours avec une vitesse infinie.

Dans les régions où la vitesse est inférieure à 1, on constate que le

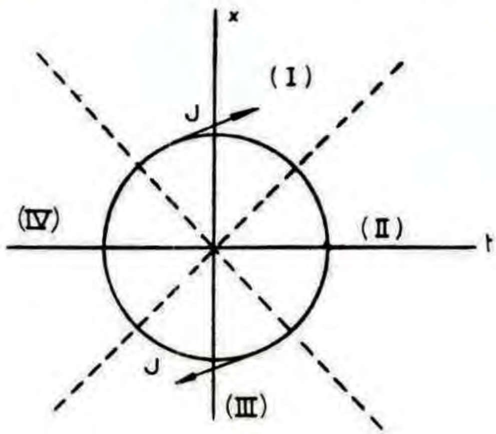

FIG. 2.

vecteur J est un vecteur d'avenir ou de passé suivant le côté du plan considéré : on peut admettre si l'on veut que l'on a de la *matière* d'un côté, de l'*antimatière* de l'autre.

Il est à remarquer que la tension E, qui est un polynôme en x et t, ne présente aucune particularité, ni sur le plan de création-annihilation $x = 0$, ni sur les plans $x = \pm t$ où la vitesse est égale à 1.

Bien que très schématique, cette étude s'accorde bien avec les expériences de création ou d'annihilation d'un doublet particule-antiparticule, en considérant les antiparticules comme des particules qui « remontent le temps ».

D'autres mouvements du « solide relativiste » peuvent s'étudier simplement, notamment le mouvement de rotation uniforme autour d'un axe.

§ 6. — Lumière.

6.A. Présence de la lumière.

(6,1)	Nous appellerons *lumière* tout phénomène constitué par un covecteur.

Pour déterminer les expressions possibles de la présence de la lumière, nous suivrons une voie parallèle à celle utilisée dans le cas de la matière parfaite (5,B).

Soit F une carte de (U); posons, comme précédemment

$$(6,2) \qquad M = F(X); \qquad \frac{\partial M}{\partial X} = S; \qquad \bar{S}.S = G.$$

Le covecteur-lumière sera désigné par Λ; la ligne qui le représente dans la base S par L; ses composantes par λ_j :

$$(6,3) \qquad L = \Lambda.S.$$

La présence est une fonction de classe C^2 de L, $\frac{\partial L}{\partial X}$ et G.

On vérifie immédiatement que dans un changement de carte

$$(6,4) \quad X = X^* + A(X^*)(X^*) \quad (\text{A étant bilinéaire symétrique})$$

L et G sont conservés au point $X = 0$, tandis que $\frac{\partial L}{\partial X}$ est remplacé par $\frac{\partial L}{\partial X} + 2L.A$.

Si L n'est pas nul au point $X = 0$, on peut profiter de cette circonstance pour annuler la composante symétrique de l'opérateur bilinéaire $\frac{\partial L}{\partial X}$; $\frac{\partial L}{\partial X}$ est alors remplacé par sa composante antisymétrique d'où une identité

$$(6,5) \qquad p = f(\lambda_j, \partial_j\lambda_k - \partial_k\lambda_j, g_{rs})$$

valable d'ailleurs si L est nulle, puisque la fonction f est continue, et dans toutes les cartes, puisque les quantités

$$(6,6) \qquad h_{jk} = \partial_j\lambda_k - \partial_k\lambda_j$$

sont les composantes de la forme (d'ordre 2) $\nabla\Lambda$. La fonction f est d'ailleurs de classe C^2.

Si nous écrivons maintenant que l'expression de la présence est invariante dans un changement de carte linéaire

$$X = A.X^* \quad (\text{dét}(A) > 0),$$

on trouve l'identité

$$(6,7) \quad f(\lambda_j, h_{jk}, g_{rs}) = f(\lambda_\alpha {}^\alpha A_j, h_{\alpha\beta}, {}^\alpha A_j, {}^\beta A_k, g_{\alpha\beta}\, {}^\alpha A_r\, {}^\beta A_s);$$

pour l'interpréter, considérons un vecteur V, un affineur antihermitien H et une base directe S, et posons :

$$(6,8) \qquad \psi(V, H, S) = f(\bar{V}.S_j, {}^j\bar{S}HS_k, {}^r[\bar{S}\,S]_s)$$

$S' = S.A$ étant une autre base directe, il vient d'après (6,7)

$$(6,9) \qquad \psi(V, H, S) = \psi(V, H, S').$$

Remarquons par ailleurs que le polynôme caractéristique de tout affineur antihermitien H est *bicarré*, et que dét(H) est négatif ou nul.

Supposons donc d'abord $\text{dét}(H) \neq 0$; H admet alors deux valeurs propres réelles et opposées; les vecteurs propres correspondants sont isotropes (puisqu'un affineur antihermitien transforme tout vecteur en vecteur perpendiculaire) ; on les désignera par S_1 et S_2, en précisant que

$$(6,10) \qquad \begin{cases} \bar{S}_1.S_2 = 1 \\ \bar{S}_2.V = 1 \end{cases}$$

ce qui est loisible [1], à moins que V ne soit orthogonal à S_2.

Le vecteur $V - S_1 - S_2\,\bar{S}_1\,V$ est orthogonal à S_1 et S_2, donc vecteur d'espace; choisissons un vecteur collinéaire S_3, de carré scalaire -1, et complétons S_1, S_2, S_3 par un vecteur orthogonal S_4, de carré scalaire -1, choisi en sorte que la base $S = [S_1\, S_2\, S_3\, S_4]$ soit directe.

On constate que l'on a alors, α, β, x, y désignant des nombres :

$$(6,11) \qquad \bar{S}.S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(6,12) \qquad H = S \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix} S^{-1} \text{ [2]}$$

$$(6,13) \qquad V = S \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}.$$

On peut de plus supposer (soit en intervertissant S_1 et S_2, soit en changeant le signe de S_3) que :

$$(6,14) \qquad \alpha > 0, \qquad y \geqslant 0.$$

[1] Deux vecteurs isotropes indépendants ne peuvent être orthogonaux dans un espace hyperbolique normal.

[2] Les deux premières colonnes de cette matrice se déterminent en écrivant que S_1 et S_2 sont vecteurs propres, les valeurs propres correspondantes étant α et $-\alpha$; la matrice se complète en écrivant que $H + \bar{H} = 0$.

En prenant, conformément à (6,8),

$$(6,15)\quad \lambda_j = \bar{V}.S_j, \qquad h_{jk} = {}^j[\bar{S}.H.S]_k, \qquad g_{rs} = {}^r[\bar{S}.S]_s$$

on vérifie que l'on a :

$$(6,16)\quad \left\{\begin{aligned} \lambda_j\lambda_k g^{jk} &= 2x - y^2 \\ \lambda_j h_{kl} h_{pq} \lambda_r g^{jk} g^{lp} g^{qr} &= -2x\alpha^2 - y^2\beta^2 \\ h_{jk} h_{pq} g^{jp} g^{kq} &= 2[\beta^2 - \alpha^2] \\ h_{jk} h_{pq} \operatorname{vol}^{jkpq} &= 8\alpha\beta \end{aligned}\right.$$

ce qui permet d'exprimer les nombres α, β, x, y en fonction analytique des premiers membres de (6,16) [les deux dernières équations définissent $[\alpha + i\beta]^2$ donc α et β, puisque $\alpha > 0$; les deux premières donnent ensuite x et y^2, d'où y, qui est $\geqslant 0$; les premiers membres étant visiblement des invariants, la présence étant (comme le montrent les formules (6,9), (6,11), (6,12), (6,13), une fonction de classe C^2 de α, β, x, y, on voit que :

$$(6,17)\quad \left\{\begin{array}{l} \text{Sur un ouvert partout dense [1] de l'espace à 10} \\ \quad \text{dimensions repéré par les } \lambda_j \text{ et les } h_{jk} = \partial_j\lambda_k - \partial_k\lambda_j, \\ \quad \text{la présence est une fonction de classe } C^2 \text{ des 4 quantités :} \\ \qquad \xi = \lambda_j\lambda_k g^{jk} \\ \qquad \pi = \lambda_j h_{kl} h_{pq} \lambda_r g^{jk} g^{lp} g^{qr} \\ \qquad \varphi = -\dfrac{1}{2} h_{jk} h_{pq} g^{jp} g^{kq} \\ \qquad \psi = \dfrac{1}{4} h_{jk} h_{pq} \operatorname{vol}^{jkpq}. \end{array}\right.$$

Il est clair, inversement, que toute fonction de classe C^2 de ξ, η, φ, ψ sera une expression valable de la présence, sous réserve qu'elle définisse par continuité une fonction partout de classe C^2 des λ_j, h_{jk}, g_{rs}, en dehors de l'ensemble ouvert considéré en (6.17).

6.B. Approximation du premier ordre.

Les formules (6,17) montrent que les substitutions $\lambda_j \to -\lambda_j$ ou $h_{kl} \to -h_{kl}$ ne changent pas la présence de la lumière; par suite, cette présence admet, autour de la valeur $\lambda_j = 0$, $h_{kl} = 0$, un développement limité sans termes du premier degré :

$$(6,18)\quad p = p_0 + a^{jk}\lambda_j\lambda_k + b^{jkp}\lambda_j h_{kp} + c^{jkpq} h_{jk} h_{pq} + \cdots$$

---

(1) Caractérisé par les relations $\text{dét}(H) \neq 0$, $\bar{V}.S_2 \neq 0$.

p est donc stationnaire pour $\lambda_j = 0$, $h_{kl} = 0$; par suite :

(6,19)	Les équations aux variations de la lumière admettent nécessairement la solution nulle.

Nous étudierons les solutions voisines (lumière « faible ») en réduisant l'expression de p aux termes écrits en (6,18); telle sera l'*approximation du premier ordre* pour la lumière.

On peut remarquer d'ailleurs, en changeant le signe des λ_j et en conservant les h_{kl}, que le terme $b^{jkp}\lambda_j h_{kp}$ est nul lui aussi; il reste alors :

$$p = p_0 + a^{jk}\lambda_j\lambda_k + c^{jkpq}h_{jk}h_{pq}; \tag{6,20}$$

cette expression étant invariante, est donc une fonction de ξ, η, φ, ψ.

En utilisant la base définie en (6,10), elle se met sous la forme

$$a = bx + cy + dx^2 + exy + fy^2 + g\alpha^2 + h\alpha\beta + k\beta^2,$$

qui fait intervenir 9 constantes arbitraires.

En exprimant cette quantité en fonction de ξ, η, φ, ψ par résolution de (6,16) et en écrivant qu'elle est, à une constante près, homogène de degré 2, il reste une expression à 6 constantes, arbitraires :

$$p = a_1 + b_1\xi + c_1\varphi + d_1\psi + e_1\sqrt{\varphi^2+\psi^2} + f_1\frac{\varphi\xi + 2\eta}{\sqrt{\varphi^2+\psi^2}}. \tag{6,21}$$

En prenant maintenant, ce qui est loisible :

$$H = S\begin{bmatrix} 0 & 1+t & 0 & 0 \\ 1+t & 0 & 0 & t-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & 0 & 0 \end{bmatrix}S^{-1}, \qquad V = S\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{S}.S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

il vient $\zeta = -z^2$, $\eta = 0$, $\varphi = 4t$, $\psi = 0$, d'où, en portant dans (6,21) :

$$p = a_1 - b_1z^2 + 4c_1t + 4e_1|t| - f_1z^2\,sgn(t)$$

et dans (6,20) :

$$p = a_2 + b_2z^2 + c_2t + e_2t^2$$

d'où, par identification, $e_1 = f_1 = 0$; en portant dans (6,21), et en remplaçant ξ, φ, ψ par leurs valeurs, on voit que :

(6,22) Dans l'approximation du premier ordre, la présence de la lumière est

$$p = a + \frac{b}{2}\lambda_j\lambda_k g^{jk} + \frac{1}{4}[\partial_j\lambda_k - \partial_k\lambda_j][\partial_p\lambda_q - \partial_q\lambda_p][eg^{jp}g^{kq} + f\,\mathrm{vol}^{jkpq}]$$

a, b, e, f étant des constantes.

En différentiant, il vient

$$(6,23)\quad \begin{cases} \delta p = \Pi^\alpha \delta\lambda_\alpha + P^{\alpha\beta}\delta[\partial_\beta\lambda_\alpha] \\ \text{avec} \qquad \delta g = 0, \qquad \Pi^\alpha = b.g^{\alpha j}.\lambda_j, \\ P^{\alpha\beta} = [\partial_p\lambda_q - \partial_q\lambda_p][eg^{\beta p}g^{\alpha q} + f\,\mathrm{vol}^{\beta\alpha pq}] \end{cases}$$

On en déduit les équations aux variations, en supposant qu'au point considéré les ${}^j\Gamma_{kl}$ soient nuls, ce qui entraîne $\partial_j g^{\alpha\beta} = 0$, $\partial_j\,\mathrm{vol}^{\alpha\beta pq} = 0$:

$$(6,24)\qquad bg^{\alpha j}.\lambda_j - eg^{\beta p}\,g^{\alpha q}\,\partial_\beta[\partial_p\lambda_q - \partial_p\lambda_q] = 0$$

ou encore, après multiplication contractée par $g_{\alpha\gamma}$:

$$(6,25)\qquad b\lambda_\gamma - e\partial_\beta[g^{\beta p}[\partial_p\lambda_\gamma - \partial_\gamma\lambda_p]] = 0.$$

Si nous introduisons à nouveau l'affineur antihermitien H défini par

$${}^j[\bar{S}.H.S]_k = \partial_j\,\lambda_k - \partial_k\,\lambda_j = \nabla\Lambda\,(S_j)\,(S_k)$$

ce qui s'écrit encore :

$$(6,26)\qquad \boxed{\overline{dM}.H.\delta M = \nabla\Lambda\,(dM)(\delta M)}$$

on trouve

$${}^jH_k = {}^j[S^{-1}HS]_k = {}^j[G^{-1}\bar{S}HS]_k = {}^j[G^{-1}]_r\,{}^r[\bar{S}HS]_k$$
$$= g^{jr}[\partial_r\lambda_k - \partial_k\lambda_r]$$

et (6,25) prend la forme

$$b\lambda_\gamma - e\partial_\beta[{}^\beta H_\gamma] = 0$$

soit, en appliquant (3,15), les ${}^j\Gamma_{kl}$ étant nuls au point considéré :

$$(6,27)\qquad \boxed{b\Lambda - e\,\widehat{\mathrm{div}}\,H = 0}$$

Le système des équations (6,26), (6,27), évidemment indépendant de toute carte, constitue les *équations aux variations de la lumière.*

Le calcul de la *tension* conduit à la formule :

$$(6,28) \qquad \boxed{\mathrm{E} = a + b\left[\frac{1}{2}\,\underline{\Lambda\bar{\Lambda}} - \bar{\Lambda}\Lambda\right] + e\left[\mathrm{H}^2 - \frac{1}{4}\,\underline{\mathrm{Tr}(\mathrm{H}^2)}\right]}$$

Il est intéressant d'écrire ces formules en Relativité restreinte, en posant, de façon compatible avec (5,28), (5,29) :

$$(6,29) \qquad \begin{cases} d\mathrm{M} = \mathrm{S}\begin{bmatrix} dt \\ d\mathrm{P} \end{bmatrix} & \bar{\mathrm{S}}.\mathrm{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \underline{-1/c^2}_{\mathrm{R}^3} \end{bmatrix} \\ \Lambda = \begin{bmatrix} \frac{v}{c} & -\frac{\bar{\mathcal{A}}}{c^2} \end{bmatrix}\mathrm{S}^{-1}, & \mathrm{H} = \mathrm{S}\begin{bmatrix} 0 & \bar{\mathcal{E}}/c \\ c\mathcal{E} & -\mathrm{J}(\mathcal{H}) \end{bmatrix}\mathrm{S}^{-1}\ (^1). \end{cases}$$

Les équations (6,26) et (6,27) prennent alors la forme :

$$(6,30) \qquad \boxed{\begin{matrix} \mathcal{E} = -\operatorname{Grad} v - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\mathcal{A}}{\partial t} & \mathcal{H} = \operatorname{Rot}\mathcal{A} \\ \operatorname{div}\mathcal{E} = \dfrac{b}{ec^2}\,v & \operatorname{Rot}\mathcal{H} - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\mathcal{E}}{\partial t} = \dfrac{b}{ec^2}\,\mathcal{A} \end{matrix}}$$

et (6,28) s'écrit :

$$(6,31) \qquad \begin{aligned} \mathrm{E} = a - b\mathrm{S}&\begin{bmatrix} \dfrac{v^2 + |\mathcal{A}|}{2c^2} & -\dfrac{v\bar{\mathcal{A}}}{c^3} \\ \dfrac{\mathcal{A}v}{c} & \dfrac{|\mathcal{A}|^2 - v}{2c^2} - \dfrac{\mathcal{A}\bar{\mathcal{A}}}{c^2} \end{bmatrix}\mathrm{S}^{-1} \\ + e\mathrm{S}&\begin{bmatrix} \dfrac{|\mathcal{E}|^2 + |\mathcal{H}|^2}{2} & -\dfrac{1}{c}\,\overline{\mathcal{E}\wedge\mathcal{H}} \\ c\mathcal{E}\wedge\mathcal{H} & \mathcal{E}\bar{\mathcal{E}} + \mathcal{H}\bar{\mathcal{H}} - \dfrac{|\mathcal{E}|^2 + |\mathcal{H}|^2}{2} \end{bmatrix}\mathrm{S}^{-1}. \end{aligned}$$

Les équations (6,30) coïncident avec les équations de la mécanique

---

(1) Nous désignons par $\mathrm{J}(\mathcal{H})$ l'affineur tel que $\mathrm{J}(\mathcal{H})(\mathrm{V}) \equiv \mathcal{H} \wedge \mathrm{V}$ (produit vectoriel de l'espace à *trois dimensions*). On a les identités

$$\operatorname{div}\mathrm{J}(\mathcal{H}) = \overline{\operatorname{Rot}\mathcal{H}}$$

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{P}} - \overline{\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{P}}} = \mathrm{J}(\operatorname{Rot}\mathrm{V})$$

ondulatoire du photon (L. de Broglie, I), ou plus généralement de la *particule de spin* 1, si on prend

$$\frac{b}{e} = -\frac{4\pi^2\mu_0^2c^4}{h^2}$$

(μ_0 = masse de la particule; h = constante de Planck),

et avec les équations de Maxwell dans le vide en prenant $b = 0$; dans ce cas, on interprète v comme le potentiel électrique, $\mathcal{A}$ comme le potentiel vecteur magnétique; $\mathcal{E}$ et $\mathcal{H}$ sont respectivement le champ électrique et le champ magnétique.

Quand à E, il représente le « tenseur d'impulsion-énergie du champ électromagnétique », si l'on prend $a = 0$, $b = 0$, $e = 1/4\pi$.

En supposant μ_0 non nul, donc en prenant $e = 1/4\pi$, $b = -\frac{\pi\mu_0^2c^4}{h^2}$ et $a = 0$, on trouve un des deux tenseurs proposés par L. de Broglie pour décrire l'impulsion et l'énergie du photon (L. de Broglie, II).

On rappelle que la constante a (3,E) peut si l'on veut être incorporée à la constante cosmologique, et que la valeur $a = 0$ est donc légitime.

(6,32) Les équations (6,26), (6,27), (6,28) auxquelles conduit l'approximation du premier ordre pour la lumière, avec les notations (6,29), sont les équations de Maxwell dans le vide si $a = 0$, $b = 0$, $e = 1/4\pi$; les équations d'une particule de spin 1 si b/e est négatif (1).

6. C. INTERACTION MATIÈRE-LUMIÈRE.

Considérons deux phénomènes concomitants, tels que la matière et la lumière; désignons leurs présences respectives par p_1 et p_2 :

$$p_1 = \varphi\left(Q, \frac{\partial Q}{\partial M} \cdot \overline{\frac{\partial Q}{\partial M}}\right)$$

$$p_2 = a + \frac{b}{2}\lambda_j\lambda_k g^{jk} + \frac{1}{4}[\partial_j\lambda_k - \partial_k\lambda_j][\partial_p\lambda_q - \partial_q\lambda_p][eg^{jp}g^{kq} + f\,\mathrm{vol}^{jkpq}]$$

(en faisant l'approximation du premier ordre pour la lumière).

(1) On rappelle qu'on associe généralement deux solutions réelles de ces équations pour former une solution complexe, ce qui est, bien entendu, compatible avec la Relativité variationnelle.

L'intégrale
$$\int_G [p_1 + p_2] \operatorname{vol}$$
est alors stationnaire pour toute variation de Q et de Λ; on peut donc si l'on veut considérer que ces phénomènes constituent un seul phénomène [l'espace fibré correspondant étant le produit des deux espaces fibrés, au sens indiqué en (1,F)], repéré par les 7 variables ${}^1Q$, ${}^2Q$, ${}^3Q$, λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, et dont la présence est $p_1 + p_2$.

Nous rendrons compte d'une *interaction* possible entre matière parfaite et lumière en posant
$$p_3 = \sigma\Lambda.J$$
(J est le vecteur courant de matière, σ une fonction arbitraire de Q) et en attribuant au phénomène produit la présence $p_1 + p_2 + p_3$.

Ce terme p_3, que nous appellerons *présence d'interaction*, semble *a priori* arbitraire; il a cependant une propriété remarquable: *le terme correspondant dans l'expression de la tension est nul.*

En effet, la formule (5,5) nous donne :
$$p_3 \operatorname{vol}_{1234} = \lambda\sigma \operatorname{dét}\begin{bmatrix}\Lambda \\ \dfrac{\partial Q}{\partial M}\end{bmatrix}\operatorname{vol}_{1234}$$
$$= \lambda\sigma \operatorname{dét}\begin{bmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \partial_1 Q & \partial_2 Q & \partial_3 Q & \partial_4 Q\end{bmatrix}$$
Cette expression *ne contenant pas les* g_{rs}, (3,3, *a*) montre bien que le terme correspondant de E sera nul.

Donnons maintenant une variation à Λ seul; avec les notations (6,23), il vient
$$\delta p = \Pi^\alpha\delta\lambda_\alpha + P^{\alpha\beta}\delta[\partial_\beta\lambda_\alpha] + \sigma J^\alpha\delta\lambda_\alpha$$
d'où l'équation aux variations $\Pi^\alpha + \sigma J^\alpha - \partial_\beta P^{\alpha\beta} = 0$ (en un point où les symboles de Christoffel sont nuls), soit, avec les notations (6,26)

$$\boxed{b\Lambda - e\,\widehat{\operatorname{div}}\,H + \sigma\bar{J} = 0}. \tag{6,33}$$

Si nous faisons l'approximation de la relativité restreinte, avec les notations précédentes (6,29), il vient le système :

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathcal{E} = -\operatorname{Grad} v - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\mathcal{A}}{\partial t} & \mathcal{H} = \operatorname{Rot}\mathcal{A} \\ \operatorname{div}\mathcal{E} = \dfrac{b}{ec^2}v + \dfrac{\sigma\rho}{ce} & \operatorname{Rot}\mathcal{H} - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\mathcal{E}}{\partial t} = \dfrac{b}{ec^2}\mathcal{A} + \dfrac{\sigma\rho}{ec^2}V \end{array}\right. \tag{6,34}$$
$$[e = 1/4\pi]$$

qui $\left(\text{abstraction faite des termes en } \frac{b}{ec^2}\right)$ constitue les équations de Maxwell en présence d'une densité électrique $\frac{\sigma\rho}{ce}$ et d'un vecteur courant électrique $\frac{\sigma\rho}{c}\frac{V}{c}$; on peut les interpréter en disant que les molécules de matière sont électriquement chargées, avec une densité $\frac{\sigma}{ce}$ dans l'état de référence; et que leur déplacement crée un courant électrique, mesuré en unités électromagnétiques ([1]) par $1/c\ \alpha V$, α étant la densité électrique :

(6,35)	Le terme d'interaction entre matière et lumière fournit donc l'expression de l'influence des charges en mouvement sur le champ électromagnétique, et permet d'interpréter la constante c comme le rapport des unités électromagnétiques et électrostatiques.

Pour étudier les équations aux variations de Q, on peut utiliser le théorème de conservation; la tension de l'interaction étant nulle, nous avons l'équation

$$\widehat{\text{div}}\,[E_1 + E_2] = 0$$

E_1 et E_2 désignant les tensions de la matière et de la lumière.

En utilisant les expressions précédentes, et en tenant compte du système (6,34), on trouve les équations :

$$(6,36)\quad \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\rho\overline{V}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{\overline{V}.A}{c^2}\right] + \text{div}\left[\frac{\rho V.\overline{V}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + w - A\right] = \frac{\sigma\rho}{c}\overline{\mathcal{E}} + \frac{\sigma\rho}{c^2}\overline{V\wedge\mathcal{H}}.$$

En posant à nouveau $\alpha = \frac{\sigma\rho}{c}$, et en négligeant les termes en $1/c^2$

([1]) L'expression $\frac{|\mathcal{E}|^2 + |\mathcal{H}|^2}{8\pi}$ pour la densité d'énergie électromagnétique que l'on tire de (6,31) montre bien que $\mathcal{E}$ est mesuré en unités électrostatiques et $\mathcal{H}$ en unités électromagnétiques.

(mais non les termes en $1/c$), il vient, compte tenu de l'équation de continuité (5,42)

$$(6{,}37) \qquad \rho\left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial P}.V\right] = \operatorname{div} A' + E\alpha + \frac{\alpha}{c} V \wedge \mathcal{H}.$$

Le premier membre étant interprété en mécanique classique comme la force par unité de volume, on peut dire qu'à la force élastique div A′ s'ajoute une force électromagnétique $E\alpha + \frac{\alpha}{c} V \wedge \mathcal{H}$, correspondant aux lois élémentaires Coulomb-Laplace :

(6,38) Le terme d'interaction entre matière et lumière fournit également l'expression de l'influence du champ électromagnétique sur le mouvement des charges.

Les énoncés (6,35) et (6,38) justifient bien le terme *interaction.*

§ 7 Conclusions.

Nous nous contenterons ici de quelques remarques sur ce qui précède.

7.A. La Relativité Variationnelle peut être considérée comme une *théorie unitaire,* en ce sens que :

1° elle fournit *a priori,* par des considérations purement géométriques, les lois expérimentales de la gravitation, de l'élasticité et de l'électromagnétisme;

2° elle traite la gravitation sur le même plan que les autres phénomènes;

3° elle fournit, en principe, toutes les équations de la physique;

4° elle donne une interprétation correcte et générale de l'énergie et de l'impulsion.

Mais c'est une théorie *ouverte,* en ce sens que le nombre des phénomènes n'est pas borné, et qu'un appel à l'expérience est nécessaire pour déterminer, parmi celles qui sont compatibles avec la théorie, l'expression véritable de la présence d'un phénomène donné.

7.B. Dans les champs gravifiques et électromagnétiques intenses, il n'y a pas de raison de se limiter à l'approximation du premier ordre;

on peut par exemple ajouter à la présence de la lumière une expression homogène du 4^e^ degré, qui s'écrira (notations 6,17) :

$$A\xi^2 + B\varphi^2 + C\psi^2 + E\varphi\xi + F\varphi\psi + G\xi\psi + H\eta$$

et fait intervenir 7 constantes arbitraires. Les équations du champ « non linéaire » s'en déduisent immédiatement. Une vérification expérimentale doit être possible.

7.C. Nous avons vu que la possibilité d'exprimer la gravitation au moyen de tenseur fondamental est une particularité de l'approximation du premier ordre; les équations générales de la gravitation sont des équations aux dérivées partielles (qu'il ne faut pas confondre avec les équations d'Einstein).

Cette remarque peut avoir d'importantes conséquences physiques; en particulier, il peut exister des phénomènes en interaction avec la gravitation.

7.D. Nous avons supposé *a priori* l'univers *orienté*; cette hypothèse, entraînant la « non conservation de la parité », est en fait moins forte que l'hypothèse contraire : les expressions invariantes dans un univers non orienté le sont *a fortiori* dans un univers orienté.

Dans les exemples que nous avons traités jusqu'au bout, en particulier dans l'approximation du premier ordre de la gravitation et de la lumière, cette hypothèse n'a aucune conséquence vérifiable; en particulier le terme en f dans l'expression (6,22) de la présence de la lumière n'intervient, ni dans les équations (6,26), (6,27) de la lumière, ni dans l'expression (6,28) de sa tension.

Mais il n'en est plus de même dans les équations non linéarisées; en particulier les termes du 4^e^ degré $[F\varphi + G\xi]\ \psi$ de l'expression ci-dessus (7,B) changent de signe quand on change l'orientation de la carte, et influent effectivement les équations.

Nous avons de même réduit au minimum les hypothèses de différentiabilité de l'Univers, qui figurent dans le même axiome (12), que l'orientation.

7.E. Nous avons volontairement limité ici l'étude des phénomènes à trois exemples où l'interprétation physique se fait sans difficulté. Il est bien entendu essentiel d'interpréter dans le cadre de la théorie les phénomènes moléculaires et nucléaires; il est d'ailleurs possible que les équations non linéarisées de la gravitation et de la lumière y jouent un rôle important.

Bien que certains résultats aient déjà été obtenus dans ce sens (1) la plus grande partie de ce travail reste à faire. (2)

Manuscrit reçu en mars 1958.

Jean-Marie SOURIAU
Professeur à la Faculté des Sciences,
Marseille.

(1) En dehors de la particule de spin 1, traitée au § 6, nous avons indiqué ailleurs (Souriau, II) comment écrire en Relativité variationnelle les équations de la particule de spin $\frac{1}{2}$.

(2) Dans ce but, on peut remplacer la variété univers par une variété homéomorphe au produit direct de R^4 par un cercle K; on obtient ainsi une théorie pentadimensionnelle où s'interprètent notamment *l'invariance de jauge du champ électromagnétique, la conservation de l'électricité, l'équation d'onde de Klein-Gordon en présence du champ électromagnétique, la charge électrique élémentaire, les antiparticules.*

En remplaçant K par une *variété compacte*, on peut espérer rendre compte de diverses propriétés des particules élémentaires, notamment de celles qui sont liées au spin isotopique.

Voir à ce sujet :

J.M. Souriau, *C.R. Acad. Sciences*, 247, 1958, p. 1559. — J.M. Souriau, *C.R. Acad. Sciences*, 248, 1959, p. 1478. — J.M. Souriau, Comm. au Coll. Intern. sur les Théories Relativistes de la Gravitation (Royaumont, juin 1959).

(Note ajoutée à la correction des épreuves.)

ACHEVÉ D'IMPRIMER
SUR LES PRESSES DE
L'IMPRIMERIE DURAND
A CHARTRES
LE 20-XI 1959

PAPIER OFFSET BLANC VII/I
DES PAPETERIES DE FRANCE

DÉPÔT LÉGAL : 4e TRIMESTRE 1959.
No 3509.