Enfin, compte tenu de (4), l'équation (2) peut s'écrire, après calculs,

$$(8)\qquad \check{\nabla}_j\left[\xi^2\sqrt{\xi}\left(\rho+\frac{p}{c^2}\right)\check{u}^j\right]-\xi\sqrt{\xi}\,\check{u}^j\frac{\partial_j l}{\chi_0}-\xi\sqrt{\xi}\left(\rho+\frac{p}{c^2}\right)\left(2-\frac{\Lambda^2}{\xi^3}\right)\check{u}^j\,\partial_j\xi=0.$$

Les conditions de conservation dans V_5 *peuvent donc se traduire dans* V_4 *par les conditions* (6), (7) et (8).

3. *Conditions de conservation pour* $\xi = 1$. — Nous vérifions immédiatement que pour $\xi = 1$ les équations (6), (7) et (8) se réduisent aux conditions de conservation de la théorie provisoire de l'électromagnétisme.

(1) *Comptes rendus*, 247, 1958, p. 2304.
(2) A. Lichnerowicz, *Théories relativistes de la Gravitation et de l'Électromagnétisme*, p. 205.
(3) Y. Thiry, *Thèse*, Gauthier-Villars (*J. Math. pures et appl.*, p. 327).

RELATIVITÉ. — *Conséquences physiques d'une théorie unitaire.*

Note de (*) M. **Jean-Marie Souriau**, présentée par M. Joseph Pérès.

Dans la théorie proposée antérieurement (1), le groupe de Lorentz se remplace par un nouveau groupe L_5; sa structure (déterminée par homotopie) permet d'interpréter la *charge électrique* (nécessairement entière) des particules élémentaires; les *transformations de jauge* et *conjugaisons de particules* (cas neutre et cas chargés); l'*invariance P. C. T.*

A. *Univers pentadimensionnel.* — Dans la Note (1), nous avons proposé de considérer un univers pentadimensionnel V_5, homéomorphe à un tube $R^4 \times T$, muni d'un principe variationnel. Cet univers *n'est pas stationnaire;* il existe des transformations ponctuelles définies localement, les *glissements* [*voir* (2)], qui conservent les lois de la physique.

B. *Index de conjugaison.* — L'étude du *revêtement universel* de V_5 montre l'existence d'un homomorphisme du groupe des glissements globaux sur le groupe multiplicatif $[+1, -1]$; le nombre C ainsi associé à chaque glissement global (qui vaut $+1$ s'il transforme les lacets en lacets homotopes) s'appellera *index de conjugaison.*

C. *Définition de* L_5. — L'approximation de la relativité *restreinte* consistera ici à supposer l'existence d'une carte périodique globale où les g_{jk} sont constants. Les glissements globaux transformant cette carte en une carte ayant la même propriété forment un groupe L_5, que nous appellerons *groupe de Lorentz pentadimensionnel.*

D. *Structure de* L_5. — Désignons par L_4 le groupe de Lorentz non homogène usuel à quatre dimensions; on sait qu'il existe deux homomorphismes de L_4 sur $[+1, -1]$, qui définissent un *index de parité* P (-1 dans le cas d'une symétrie d'espace) et un *index de temps* T (-1 pour une symétrie de temps).

On peut montrer que L_5 est isomorphe au produit direct de L_4 par le groupe O_2 des matrices orthogonales réelles d'ordre 2. En d'autres termes, tout élément de L_5 se représente d'une seule façon sous la forme (λ, μ) $(\lambda \in L_4,\ \mu \in O_2)$, avec la règle de multiplication $(\lambda, \mu).(\lambda', \mu') = (\lambda\lambda', \mu\mu')$. On a $C = \text{dét}(\mu)$.

E. *Interprétation de* L_5. — Nous identifierons $(\lambda, 1)$ avec la transformation de Lorentz λ; nous interpréterons $(1, \mu)$ comme une *transformation de jauge* si $\text{dét}(\mu) = 1$, une *conjugaison* (de particules) si $\text{dét}(\mu) = -1$.

F. *Définition de la charge électrique d'une particule.* — En Mécanique quantique, on associe à chaque type de particule élémentaire une représentation linéaire irréductible de L_4; nous remplacerons ici L_4 par L_5; E sera l'espace vectoriel (qu'on peut toujours considérer comme réel) où opère la représentation; ψ un élément générique de E.

L'algèbre de Lie de la représentation est engendrée par les transformés des dix générateurs infinitésimaux de L_4 (dont on déduit, de façon classique, la *masse* et le *spin* de la particule), et par le transformé A du générateur infinitésimal $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ de O_2.

De l'irréductibilité et de la formule évidente $\exp(2\pi A) = 1$, on déduit l'existence d'un entier n tel que $A^2 = -n^2$; nous interpréterons n (supposé $\geqq 0$) comme la *charge électrique* de la particule.

G. *Cas des particules neutres.* — Si $n = 0$, on montre que $A = 0$, que les transformations de jauge laissent ψ invariant, que toutes les conjugaisons correspondent à un même opérateur B, et que $B = \pm 1$.

La particule est donc indiscernable de son antiparticule si $B = +1$, différente si $B = -1$.

H. *Cas des particules chargées.* — Si $n \neq 0$, nous ferons de E un espace vectoriel complexe en posant $i\psi = (1/n)\,A\psi$; E est alors hermitien si la représentation est unitaire; les transformés des éléments de L_5 sont linéaires ou antilinéaires selon que $C = +1$ ou -1; les transformations de jauge opèrent sous la forme $\psi \to e^{i\alpha}\psi$, et les conjugaisons de particules comme des *conjugaisons complexes*; la particule est nécessairement distincte de son antiparticule.

I. *Orientation de* V_5. — Dans le cadre de la théorie, il est permis de supposer V_5 *orienté* (les glissements qui conservent un point y ont un jacobien positif). Il faut alors remplacer L_5 par le sous-groupe obtenu en liant les index P et T de λ et l'index de conjugaison $C = \text{dét}(\mu)$ par la relation $P.C.T = 1$.

Certains des résultats précédents doivent alors être modifiés.

J. *Nécessité des antiparticules.* — L'index de conjugaison n'ayant pas de définition *locale*, on ne peut exclure le cas $C = -1$; la théorie impose donc l'existence des conjugaisons de particules (accompagnées, si V_5 est orientée, d'un retournement d'espace-temps).

(*) Séance du 2 mars 1959.

(1) *Comptes rendus*, 247, 1958, p. 1559.

(2) J.-M. Souriau, *La Relativité variationnelle*, Publ. nº 1, Labor. Math., Institut des Hautes Études de Tunis, 1958 (ronéotypé).

— Plusieurs points de cette Note ont été discutés, au Séminaire de Physique mathématique de la Faculté des Sciences de Marseille, avec MM. Daniel Kastler et Antoine Visconti.

PHYSIQUE THÉORIQUE. — *Sur la conjugaison de charge et deux transformations analogues.* Note de Mme **Judith Winogradzki**, présentée par M. Louis de Broglie.

En utilisant les huit spineurs du second rang à composantes invariantes comme opérateurs, on montre que tout spineur du premier rang est un élément, non privilégié, d'un ensemble de quatre spineurs de même variance. Tout couple extrait de cet ensemble est lié par des relations qui, dans le cas particulier d'un champ de Dirac, correspondent aux changements de signe : charge, masse ou les deux.

1. *Ensembles de quatre spineurs.* — Dans un travail antérieur (1), nous avons déterminé l'ensemble des spineurs du second rang dont les composantes sont invariantes par rapport aux transformations du groupe de Lorentz général (2). Ces spineurs sont

$$
(1)\quad\left\{\begin{array}{ll}
\overset{1+}{\underset{1+}{N}}{}^{k}{}_{m}\equiv\overset{i-}{\underset{1+}{N}}{}^{k}{}_{m}\equiv\overset{1+}{\underset{i+}{N}}{}^{k}{}_{m}\equiv\overset{i+}{\underset{i+}{N}}{}^{k}{}_{m}=\mathrm{I}, &
\overset{1+}{\underset{1-}{P}}{}^{\dot k}{}_{m}\equiv\overset{i-}{\underset{1-}{P}}{}^{\dot k}{}_{m}\equiv\overset{1+}{\underset{i+}{P}}{}^{\dot k}{}_{m}\equiv\overset{i-}{\underset{i+}{P}}{}^{\dot k}{}_{m}=\mathrm{C_T},\\
\overset{1-}{\underset{1-}{N}}{}^{k}{}_{m}\equiv\overset{i-}{\underset{1-}{N}}{}^{k}{}_{m}\equiv\overset{1-}{\underset{i-}{N}}{}^{k}{}_{m}\equiv\overset{i-}{\underset{i-}{N}}{}^{k}{}_{m}=\mathrm{I_U}, &
\overset{1-}{\underset{1+}{P}}{}^{\dot k}{}_{m}\equiv\overset{i+}{\underset{1+}{P}}{}^{\dot k}{}_{m}\equiv\overset{1-}{\underset{i-}{P}}{}^{\dot k}{}_{m}\equiv\overset{i+}{\underset{i-}{P}}{}^{\dot k}{}_{m}=\mathrm{C_E},\\
\overset{1+}{\underset{1+}{L}}{}_{km}\equiv\overset{i-}{\underset{1+}{L}}{}_{km}\equiv\overset{1+}{\underset{i-}{L}}{}_{km}\equiv\overset{i-}{\underset{i-}{L}}{}_{km}=\mathrm{B}, &
\overset{1+}{\underset{1-}{M}}{}_{\dot k m}\equiv\overset{i+}{\underset{1-}{M}}{}_{\dot k m}\equiv\overset{1+}{\underset{i-}{M}}{}_{\dot k m}\equiv\overset{i+}{\underset{i-}{M}}{}_{\dot k m}=\mathrm{A_T},\\
\overset{1-}{\underset{1-}{L}}{}_{km}\equiv\overset{i+}{\underset{1-}{L}}{}_{km}\equiv\overset{1-}{\underset{i+}{L}}{}_{km}\equiv\overset{i+}{\underset{i+}{L}}{}_{km}=\mathrm{B_U}, &
\overset{1-}{\underset{1+}{M}}{}_{\dot k m}\equiv\overset{i-}{\underset{1+}{M}}{}_{\dot k m}\equiv\overset{1-}{\underset{i+}{M}}{}_{\dot k m}\equiv\overset{i-}{\underset{i+}{M}}{}_{\dot k m}=\mathrm{A_E}\ (^3),
\end{array}\right.
$$

les matrices numériques I, I_U, B, B_U, C_T, C_E, A_T, A_E étant définies, à des coefficients arbitraires près, par les équations

$$
(2)\quad\left\{\begin{array}{llll}
\mathrm{I}\,\gamma^k\,\mathrm{I}^{-1}=\gamma^k, & \mathrm{B}\,\gamma^k\,\mathrm{B}^{-1}=\tilde\gamma^k, & \mathrm{C_T}\gamma^k\mathrm{C_T^{-1}}=\varepsilon_{(k)}\check\gamma^k, & \mathrm{A_T}\gamma^k\mathrm{A_T^{-1}}=\varepsilon_{(k)}\overset{+}{\gamma}{}^k,\\
\mathrm{I_U}\gamma^k\mathrm{I_U^{-1}}=-\gamma^k, & \mathrm{B_U}\gamma^k\mathrm{B_U^{-1}}=-\tilde\gamma^k, & \mathrm{C_E}\gamma^k\mathrm{C_E^{-1}}=-\varepsilon_{(k)}\check\gamma^k, & \mathrm{A_E}\gamma^k\mathrm{A_E^{-1}}=-\varepsilon_{(k)}\overset{+}{\gamma}{}^k\ (^4).
\end{array}\right.
$$

($\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=1$, $\varepsilon_4=-1$; ne pas sommer sur les indices entre parenthèses). En considérant ces huit spineurs comme des opérateurs et en les faisant agir sur un spineur $\Psi^{\cdot k}$ quelconque, on obtient huit spineurs du premier rang de même plexivariance que Ψ :

(I) (*a*) $\mathrm{I}\Psi=\Psi'$, (*b*) $\mathrm{I_U}\Psi=\Phi$, (*c*) $\dot{\mathrm{C}}_{\mathrm{T}}\check\Psi=\mathrm{X}$, (*d*) $\dot{\mathrm{C}}_{\mathrm{E}}\check\Psi=\Xi$;

(II) $\mathrm{B}\Psi$, $\mathrm{B_U}\Psi$, $\dot{\mathrm{A}}_{\mathrm{T}}\check\Psi$, $\dot{\mathrm{A}}_{\mathrm{E}}\check\Psi$.