SÉMINAIRE JANET.
MÉCANIQUE ANALYTIQUE
ET MÉCANIQUE CÉLESTE

JEAN-MARIE SOURIAU

Matière parfaite en relativité générale

Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste, tome 3 (1959-1960), exp. n° 7, p. 1-11.

<http://www.numdam.org/item?id=SJ_1959-1960__3__A7_0>

Séminaire JANET
(Mécanique analytique et Mécanique céleste)
3e année, 1959/60, n° 7

7 mai 1960

MATIÈRE PARFAITE EN RELATIVITÉ GÉNÉRALE

par Jean-Marie SOURIAU

Cet exposé est extrait, pour la plus grande partie, de [7].

A. Principes.

On peut caractériser la relativité générale par l'axiomatique suivante (nous négligeons ici les questions telles que celles sur les hypothèses de différentiabilité) :

(1) L'univers est une variété U de dimension 4 , munie d'un champ de tenseurs g_{jk} symétrique, hyperbolique normal.

(2) Chaque phénomène physique (numéroté J) est un champ, doué d'une variance déterminée (nous le repérerons par une variable vectorielle Z_J) ; il possède une "fonction d'état" f_J telle que

$$\omega_J = f_J(Z_J \, , \, \partial_j Z_J \, , \, g_{jk})$$

soit une forme d'ordre 4 de U , invariante par changement de carte.

(3) Quelle que soit la chaîne C de dimension 4 , l'intégrale

$$\mathfrak{a} = \int_C \sum_J \omega_J$$

est stationnaire pour toute variation des Z_J et des g_{jk} nulle au bord de C .

Remarquons que le champ g_{jk} se distingue des "phénomènes" par deux points importants : il intervient dans toutes les formes ω_J ; ses dérivées partielles n'interviennent pas dans le lagrangien. Cependant, il est assujetti à vérifier <u>le même</u> principe variationnel que tous les phénomènes.

B. Théorèmes généraux.

Du champ g_{jk} ; on peut déduire une forme d'ordre 4 , que nous désignerons par vol , au moyen de la formule connue [1]

(4) $$\mathrm{vol}_{1234} = \sqrt{-\,\mathrm{dét}(g_{jk})} \;;$$

---

[1] Cette formule suppose que les changements de carte ont un jacobien positif, donc que U est une <u>variété orientée</u> ; mais le caractère local de la théorie permet de mettre un signe $\pm$ devant le radical, et de se contenter de chaînes C assez petites pour ne pas introduire de difficulté d'orientation.

la forme attachée au phénomène **numéro** J pourra donc s'écrire

(5) $$\omega_J = p_J \times \text{vol} \quad ;$$

nous appelerons présence du phénomène le scalaire p_J ainsi introduit.

Dans une variation δ affectant seulement le tenseur g_{jk}, on peut écrire

(6) $$\delta\omega_J = \frac{1}{2} E_J^{jk} \, \delta g_{jk} \times \text{vol} \quad ,$$

définissant aunsi un tenseur symétrique E_J^{jk} ; nous l'appelerons tenseur impulsion-énergie du phénomène considéré, cette définition étant justifiée par le théorème suivant ([6], [7]) :

(7) Les équations aux variations (par rapport à Z_J) entraînent les 4 équations de conservation

$$\nabla_j E_J^{jk} = 0 \quad .$$

Ce théorème fondamental est à rapprocher du théorème de Noether [4], bien qu'il en diffère par certains détails (il y a notamment une équation de conservation par phénomène, bien qu'il y ait un seul principe variationnel) ; il résulte de l'invariance de la forme ω_J dans les changements de cartes infinitésimaux, nuls au bord de C.

En donnant une variation à g_{jk} seul, le principe variationnel (3) entraîne évidemment l'équation

(8) $$\sum_J E_J^{jk} = 0 \quad ,$$

qui peut sembler paradoxale ; elle va s'interpréter en considérant un phénomène gravitation, dont le tenseur impulsion-énergie sera opposé à la somme des autres.

C. Gravitation.

Définissons la gravitation comme une connexion linéaire (nous la supposerons ici symétrique, mais cette hypothèse est en fait superflue) ; la gravitation est donc repérée par des symboles de Christoffel $\Gamma^j_{k\ell}$; sa présence est une fonction des g_{jk}, $\Gamma^j_{k\ell}$ et $\partial_m \Gamma^j_{k\ell}$, invariante par changement de carte ; on déduit aisément de cette condition que c'est une fonction des seuls tenseurs g_{jk} et $R^j_{k\ell m}$, et qu'elle admet un développement limité autour de la gravitation nulle (caractérisée par l'identité $R^j_{k\ell m} \equiv 0$), qui s'écrit :

(9) $$p = -\frac{\lambda}{\chi} + \frac{1}{2\chi} g^{jk} R_{jk} + \ldots$$

R_{jk} désignant le tenseur de Ricci de la connexion, λ et χ deux constantes.

Si on limite l'expression de la présence à ces deux premiers termes , on trouve, pour le tenseur impulsion-énergie de la gravitation, l'expression :

$$E_{jk} = -\frac{\lambda}{\chi} g_{jk} - \frac{1}{\chi}[R_{jk} - \frac{1}{2} g_{jk} g^{\ell m} R_{\ell m}] \tag{10}$$

et comme équation aux variations par rapport aux $\Gamma^j_{k\ell}$ l'équation

$$\Gamma^j_{k\ell} = \frac{1}{2} g^{jm}[\partial_\ell g_{mk} + \partial_k g_{m\ell} - \partial_m g_{k\ell}] \tag{11}$$

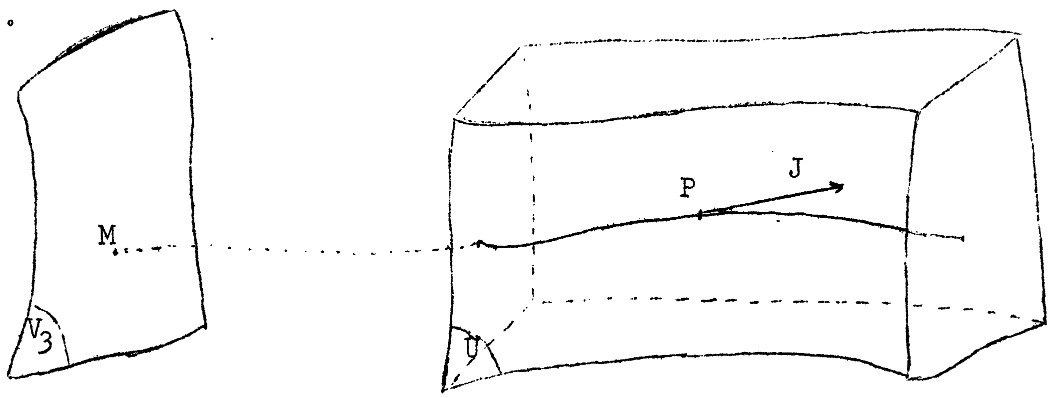
qui exprime que la connexion de gravitation coïncide avec la connexion riemanienne déduite des g_{jk} (il est remarquable que l'on ne trouve pas une équation aux dérivées partielles pour déterminer les $\Gamma^j_{k\ell}$) ; l'équation (8) s'écrit alors

$$[R^{jk} - \frac{1}{2} Rg^{jk}] + \lambda g^{jk} = \sum_J E^{jk}_J \tag{12}$$,

la somme du second membre étant étendue aux phénomènes autres que la gravitation ; on constate que les axiomes (1), (2), (3), et la réduction de la présence de la gravitation aux deux premiers termes conduit à l'énoncé exact de la gravifique d'Einstein, si l'on identifie χ avec la constante de la gravitation et λ avec la constante cosmologique ; de plus, cette équation confirme l'interprétation à donner au tenseur E^{jk} des autres phénomènes.

D. Matière parfaite : géométrie et cinématique.

Nous définirons la "matière parfaite" comme étant un phénomène dont le champ, invariant par changement de carte, prend ses valeurs dans une variété V_3 de dimension 3 .



Dans une région de U où la matière est présente, nous pourrons faire correspondre à chaque point P un point M de V_3 , que nous considérerons comme une "molécule" ; l'état et le mouvement de la matière sont, par définition, caractérisés par la fonction Φ telle que

$$M \equiv \Phi(P) \tag{13}$$.

Nous pourrons choisir des coordonnées locales q^λ pour V_3 (λ , et tous indices grecs = 1 , 2 , 3) .

L'équation M = Cte définira, en général, une courbe de U , qui s'interprète comme la trajectoire d'espace-temps de la molécule M ; nous l'appellerons <u>ligne de courant</u>.

Soit u une forme d'ordre 3 , non nulle, choisie arbitrairement sur V_3 . L'image réciproque de u par Φ est une forme y d'ordre 3 , définie sur U par

(14) $$y_{jk\ell} = u_{\lambda\mu\nu}\, \partial_j q^\lambda\, \partial_k q^\mu\, \partial_\ell q^\nu \qquad ;$$

on peut la caractériser par le quadrivecteur axial J tel que

(15) $$y_{jk\ell} = J^m \,\mathrm{vol}_{mjk\ell} \qquad .$$

Il est clair que si δP désigne un déplacement infinitésimal tangent à une ligne de courant $(\delta q^\lambda \equiv \partial_j q^\lambda . \delta x^j = 0)$, on aura

$$y_{jk\ell}\, \delta x^j \equiv u_{\lambda\mu\nu}\, \delta q^\lambda\, \partial_k q^\mu\, \partial_\ell q^\nu = 0 \qquad ,$$

soit $J^m . \delta x^j . \mathrm{vol}_{mjk\ell} = 0$; cette relation exprime que les vecteurs J et δP sont parallèles, donc que <u>le vecteur</u> J <u>est en chaque point</u> P <u>de</u> U <u>tangent à la ligne de courant passant par</u> P ; nous appellerons J vecteur <u>courant de matière</u> ; son flux à travers une hypersurface de U coupant un tube de matière est égal à l'intégrale de la forme u dans la région correspondante de V_3 ; il est donc nécessairement conservatif, ce qui s'écrit

(16) $$\mathrm{div}\, J \equiv \nabla_m J^m = 0 \qquad .$$

Si l'on change le choix de la forme u , le vecteur J est multiplié par un scalaire, <u>le même en tous les points d'une ligne de courant</u> ; cette transformation conserve, bien entendu, la relation div(J) = 0 .

Soit maintenant P un point de U ; nous pouvons définir, au point $M = \Phi(P)$, <u>l'image par</u> Φ <u>du tenseur contravariant</u> g^{jk} ; c'est un tenseur contravariant symétrique γ , dont les composantes sont définies par

(17) $$\gamma^{\mu\lambda} = g^{jk}\, \partial_j q^\lambda\, \partial_k q^\mu$$

et que nous appellerons <u>conformation</u> de la matière au point P .

Le tenseur γ est défini sur l'espace vectoriel tangent à V_3 , au point M ;

mais il dépend en général du choix du point P sur la ligne de courant de M ; dans le cas particulier où il ne dépend que de M, on dira que la matière est rigide. En général, la variation de ce tenseur définira la déformation de la matière, au voisinage de la molécule M, pendant le mouvement.

On vérifie aisément que le déterminant des $\gamma^{\lambda\mu}$ est nul lorsque le vecteur J est isotrope (quand la matière va à la vitesse de la lumière), et dans ce cas seulement ; que le tenseur γ est défini négatif si J est un vecteur de temps, hyperbolique normal si J est un vecteur d'espace (on adopte la signature $+---$ pour U). Si J n'est pas isotrope, on peut inverser la matrice $\gamma^{\lambda\mu}$, et définir ainsi un tenseur covariant $\gamma_{\lambda\mu}$ sur V_3 ; on vérifie que le tenseur de U :

$$P_{jk} = \partial_j q^\lambda \partial_k q^\mu \gamma_{\lambda\mu} \tag{18}$$

est le projecteur orthogonal parallèle au vecteur J.

E. Matière parfaite ; présence et équations.

Les axiomes proposés indiquent que la présence de la matière parfaite en un point P est fonction des valeurs en ce point des g_{jk}, q^λ et $\partial_j q^\lambda$, et invariante par changement de carte. Cette dernière hypothèse permet de montrer qu'elle ne dépend des g_{jk} et des $\partial_j q^\lambda$ que par l'intermédiaire du tenseur de conformation $\gamma^{\lambda\mu}$.

Inversement, il est clair que toute expression :

$$p = f(q^\lambda , \gamma^{\lambda\mu}) \qquad (\gamma^{\lambda\mu} = g^{jk} \partial_j q^\lambda \partial_k q^\mu) \tag{19}$$

est une fonction invariante par changement de carte de U, et peut donc a priori être prise comme expression de la présence ; les différents choix de la fonction f correspondront aux diverses espèces de matières.

On peut différentier la relation (19) ce qui fait apparaître un covecteur b_λ et un tenseur covariant symétrique $a_{\lambda\mu}$ (de V_3), tels que

$$\delta p \equiv a_{\lambda\mu} \delta\gamma^{\lambda\mu} + b_\lambda \delta q^\lambda \qquad , \tag{20}$$

et à l'aide desquels on peut écrire les équations aux variations.

Mais il sera plus instructif d'écrire les équations de conservation, déduites du théorème (7) ; nous aurons d'ailleurs des équations surabondantes, puisqu'il y a toujours 4 équations de conservation, et, dans le cas de la matière parfaite, 3 équations aux variations (correspondant aux variables q^1, q^2, q^3).

Les formules (6) et (20) donnent immédiatement le tenseur impulsion-énergie de la matière parfaite, soit

(21) $$E_{jk} = pg_{jk} - 2a_{\lambda\mu}\, \partial_j\, q^\lambda\, \partial_k\, q^\mu$$

le deuxième terme de cette différence est l'image réciproque par Φ du tenseur covariant $a_{\lambda\mu}$; c'est un tenseur de rang maximum 3, dont le noyau est constitué par les vecteurs tangents à la ligne de courant passant par P ; par suite, <u>le tenseur impulsion-énergie de la matière parfaite admet le vecteur courant comme vecteur propre, la valeur propre correspondante étant égale à la présence</u> p.

Nous définirons le "fluide parfait" comme étant une matière parfaite dont la présence ne dépend de la conformation (cf. (19)) que par son déterminant $-\sigma$:

(22) $$p = f(q^\lambda, \sigma) \qquad \sigma = -\,\text{dét}(\gamma^{\lambda\mu}) \qquad ;$$

la formule connue

(23) $$\frac{\delta\sigma}{\sigma} = \gamma_{\lambda\mu}\, \delta\gamma^{\lambda\mu}$$

donne alors, grâce à (21),

(24) $$E_{jk} = pg_{jk} - 2\sigma \frac{\partial p}{\partial\sigma}\, \gamma_{\lambda\mu}\, \partial_\gamma\, q^\lambda\, \partial_k\, q^\mu$$

soit encore, d'après (18),

(25) $$E_{jk} = pg_{jk} - 2\sigma \frac{\partial p}{\partial\sigma} P_{jk}$$

P_{jk} étant le projecteur orthogonal parallèle à J ; cette formule, jointe aux formules $\nabla_j E^{jk} = 0$, $\nabla_j J^j = 0$, constitue le point de départ de la théorie des fluides parfaits relativistes ([2], [3]) ; on interprète p comme la <u>densité propre</u> du fluide; quant à la <u>pression propre</u>, elle vaut $2\sigma \frac{\partial p}{\partial \sigma} - p$.

L'élimination de la variable σ entre l'expression de la densité et celle de la pression conduit à une <u>équation d'état du fluide</u>, qui est en général <u>fonction de la molécule considérée</u> ; le fluide sera holonome (au sens de LICHNEROWICZ) si cette équation d'état n'en dépend pas. On pourra, dans ce cas, exprimer le lagrangien au moyen du vecteur courant (on montre en effet que, par un choix convenable de la forme u de V_3, on a $\sigma = g_{k\ell}\, J^k J^\ell$) ; en remplaçant les variables q^λ par les variables J^k, liées par la relation de conservation $\operatorname{div}(J) = 0$, on sait a priori que l'on trouvera une <u>classe particulière de mouvements du fluide</u> (puisque la condition de nullité de δJ au bord de la chaîne

C n'y entraîne pas $\delta q^\lambda = 0$) ; le calcul montre que l'on obtient ainsi les mouvements irrotationnels, tels que les a définis LICHNEROWICZ ([2], [3]).

Le cas "matière pure" (ou "poussière") s'obtiendra en annulant la pression propre ; d'où l'équation $2\sigma \frac{\partial p}{\partial \sigma} - p = 0$, et l'expression de la présence

(26) $$p = f(q^\lambda)\sqrt{\sigma} \quad .$$

Ce cas est important parce qu'il se prête aux vérifications astronomiques (en assimilant les planètes à des molécules de poussière dans le champ de gravitation du Soleil) : les lignes de courant sont en effet les géodésiques du champ g_{jk} .

Si nous écrivons, ce qui est loisible, la présence d'une matière pure sous la forme

(27) $$p = c^2 f(q^\lambda)\sqrt{\sigma} + w$$

w étant une fonction arbitraire de q^λ et de la conformation $\gamma^{\lambda\mu}$, et si nous faisons l'approximation de la relativité restreinte, en donnant à la matrice des g_{jk} la valeur

(28) $$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1/c^2 & & \\ & & -1/c^2 & \\ & & & -1/c^2 \end{bmatrix}$$

on obtient une théorie restreinte de la matière parfaite, qui s'interprétera physiquement en faisant le passage à la limite $c \to \infty$. On obtient le système d'équations

(29) $$\partial_\lambda[\rho V^\lambda] + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad ;$$

(30) $$\rho[V^\mu \partial_\mu V^\lambda + \frac{\partial}{\partial t} V^\lambda] + \partial_\mu A^{\mu\lambda} = 0 \qquad ;$$

(31) $$\frac{\partial}{\partial t}[w + \frac{\rho}{2} V^\mu V_\mu] + \partial_\lambda[A^\lambda_\mu V^\mu + [w + \frac{\rho}{2} V^\mu V_\mu] V^\lambda] = 0$$

où l'on reconnaît l'équation de continuité, l'équation d'Euler et l'équation de conservation de l'énergie d'un milieu élastique ; on obtient aussi les équations donnant la contrainte $A^{\lambda\mu}$ en fonction de la déformation (par l'intermédiaire de la densité d'énergie élastique w).

Ainsi la théorie classique de l'élasticité peut être considérée, dans tous ses détails, comme une approximation non relativiste de la théorie de la matière parfaite (la seule hypothèse supplémentaire étant la petitesse des efforts internes, puisque le terme prépondérant de la présence (27) est celui d'une poussière).

Remarquons que les hypothèses à la base de la présente théorie sont moins nombreuses que celles qui fondent la théorie classique de l'élasticité (conservation de la masse ; équation fondamentale de la dynamique ; existence d'une densité d'énergie élastique, fonction de la déformation et de la molécule, et invariante par déplacement ; etc.). La relativité générale apparaît donc comme un cadre naturel pour cette théorie.

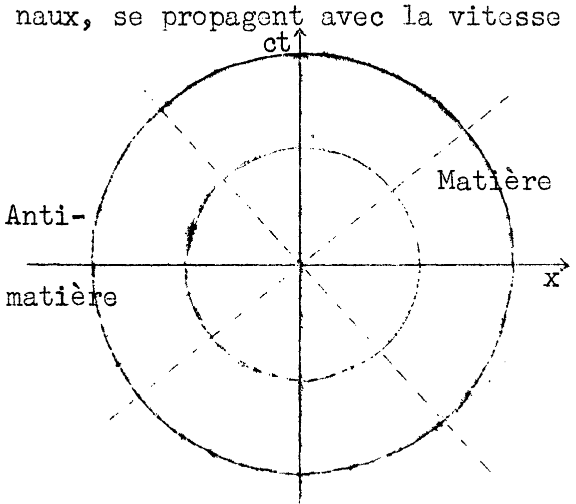
Il est intéressant de considérer des exemples de matière parfaite affranchis de l'hypothèse des petits efforts. Ainsi, si l'on pose :

(32) $$p = b + a_{\lambda\mu}\, \gamma^{\lambda\mu} \quad ,$$

b et $a_{\lambda\mu}$ étant des constantes, on définit une matière parfaite dont les équations aux variations sont

(33) $$\Box\, q^{\lambda} = 0$$

si bien que les ébranlements de ce milieu, aussi bien transversaux que longitudinaux, se propagent avec la vitesse de la lumière. Sur l'écoulement schématisé par la figure, les lignes de courant sont des cercles concentriques ; il y a donc création ou annihilation simultanée de matière et d'antimatière, avec une vitesse infinie, de part et d'autre du plan $x = 0$; et cependant le tenseur impulsion-énergie reste partout continu. Bien que cet exemple soit très schématique, il rappelle certains faits expérimentaux.



F. Interactions électromagnétiques.

Indiquons rapidement les résultats exposés dans [7] : le phénomène "lumière" peut être défini comme un champ de covecteurs A_j (2) ; on montre alors que sa présence est de la forme

(34) $$p = f(A_j \,,\, \partial_j A_k - \partial_k A_j \,,\, g_{jk})$$

et que l'"obscurité" $A_j \equiv 0$ est nécessairement solution des équations aux variations. Un développement limité au voisinage de cette solution fournit les équations de la "particule de spin 1", avec un tenseur impulsion-énergie

(2) Un champ de vecteurs A^j n'admettrait que la solution nulle.

proposé par Louis de BROGLIE [1].

Dans le cas particulier où p ne dépend que des $\partial_j A_k - \partial_k A_j$ et des g_{jk} (invariance de jauge), on retrouve les équations de Maxwell dans le vide, avec le tenseur impulsion-énergie classique correspondant.

Pour traiter la <u>matière électrisée</u> (mais non conductrice), il suffit d'ajouter à la présence p_{mat} de la matière et à celle p_{lum} de la lumière, un terme d'interaction

$$p_{int} = \varphi(q^\lambda)\, A_j\, J^j \tag{35}$$

A_j étant le covecteur lumière (potentiel électromagnétique), J^j le vecteur courant de matière (défini ci-dessus en (15)), et $\varphi(q^\lambda)$ une fonction arbitraire de la molécule, qui définira la répartition des charges électriques sur la matière.

On obtient ainsi tous les faits observés en électromagnétique classique : champ électrique et champ magnétique créés par les charges en mouvement ; rapport des unités, action mécanique des forces électromagnétiques sur la matière.

On peut remarquer que la forme associée au terme d'interaction, soit

$$\omega_{int} = p_{int} \times \text{vol} \qquad \text{(cf. ci-dessus, (5))} \tag{36}$$

est le <u>produit extérieur</u> de la forme A_j et de la forme $\varphi(q^\lambda)\, y_{jk\ell}$; comme cette forme ne dépend pas du tenseur g_{jk}, le terme d'impulsion-énergie correspondant sera <u>nul</u> (ci-dessus, (6)). Ainsi, bien que la présence $p_{mat} + p_{int} + p_{lum}$ doive être considérée globalement comme la présence du phénomène matière-lumière, et que seul son tenseur impulsion-énergie global soit conservatif, celui-ci est cependant la somme d'un terme matériel et d'un terme électro-magnétique. En d'autres termes, l'interaction échange de l'impulsion et de l'énergie entre matière et lumière (accélérateurs de particules), sans en posséder personnellement.

G. <u>Conclusions et anticipations</u>.

Bien qu'elle permette d'expliquer, avec peu d'hypothèses, un grand nombre de faits expérimentaux (existence et conservation de l'énergie et de l'impulsion ; mécanique rationnelle ; gravitation ; électromagnétisme), la présente axiomatique de la relativité générale ne doit être considérée que comme une approximation ; ainsi, il est bien certain qu'une description, même macroscopique, de la matière réelle doit être plus élaborée que celle de la "matière parfaite" (il faut bien introduire la thermodynamique).

D'autre part, dans le présent exposé, trois classes de faits restent parfaitement arbitraires : invariance de jauge ; conservation de l'électricité et de la matière ; interactions électromagnétiques.

Or, la relativité générale donne une interprétation géométrique satisfaisante de faits analogues : covariance des équations mécaniques ; conservation de l'énergie et de l'impulsion ; interactions gravifiques.

Il est donc souhaitable, pour une théorie "unitaire", d'unifier les invariances en espérant que, corrélativement, la théorie unifiera les lois de conservation et d'interaction.

Un pas dans ce sens a été réalisé par la théorie pentadimensionnelle de JORDAN-THIRY ([3], [12]), et par une théorie analogue non stationnaire ([8], [9], [10]).

Mais si l'on veut tenir compte de toutes les lois de conservation découvertes expérimentalement, il faut introduire davantage de dimensions nouvelles ; une méthode générale pour cela consiste à construire un univers topologiquement équivalent au produit direct de R^4 par une variété compacte W ([10]). Des faits expérimentaux (interactions fortes entre baryons et mésons) suggèrent même de donner à W la structure de la sphère S^6 plongée dans l'espace euclidien à 7 dimensions ([5], [11]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] de BROGLIE (Louis). - Une nouvelle théorie de la lumière. - Paris, Hermann, 1940.

[2] LICHNEROWICZ (André). - Sur l'invariant intégral de l'hydrodynamique relativiste, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., Série 3, t. 58, 1941, p. 285-304.

[3] LICHNEROWICZ (André). - Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme. - Paris, Masson, 1955 (Collection d'Ouvrages de Mathématiques à l'usage des Physiciens).

[4] NOETHER (Emmy). - Invariante Variationsproblem, Nachr. Gesellschaft Wiss. Göttingen, 1918, p. 235-257.

[5] PEASLEE (D. C.). - Seven-dimensional charge space, Phys. Rev., Series 2, t. 117, 1960, p. 873-886.

[6] SOURIAU (Jean-Marie). - Le tenseur impulsion-énergie en relativité variationnelle, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 245, 1957, p. 496-497.

[7] SOURIAU (Jean-Marie). - La relativité variationnelle, Alger-Mathématiques, Série A, t. 5, 1958, p. 103-170.

[8] SOURIAU (Jean-Marie). - Une axiomatique relativiste pour la microphysique, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 247, 1958, p. 1559-1562.

[9] SOURIAU (Jean-Marie). - Conséquences physiques d'une théorie unitaire, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 248, 1959, p. 1478-1480.

[10] SOURIAU (Jean-Marie). - Relativité multidimensionnelle non stationnaire, Colloques internationaux du Centre national de la Recherche scientifique : Théories relativistes de la gravitation [1959. Royaumont] (sous presse).

[11] SOURIAU (Jean-Marie). - Théorie algébrique des mésons et des baryons, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 250, 1960, p. 2807-2809.

[12] THIRY (Yves-René). - Etude mathématique des équations d'une théorie unitaire à quinze variables de champ, J. Math. pures et appl., 9e série, t. 30, 1951, p. 275-396.