J. 1961

29

Faculté des Sciences de Marseille

Séminaire de Physique Mathématique (3ème année , 1960-1961)

UNIVERS ABSTRAITS ET THEORIES PHYSIQUES

Première partie : GEOMETRIE

(Exposés de Jean-Marie SOURIAU)

Table de la première partie

AVERTISSEMENT.

Nous proposons de construire la géométrie à partir de l'axiomatique des <u>recueils</u> ; un ensemble sur lequel opère un recueil s'appellera un <u>espace</u>.

La première partie de ce séminaire est consacrée à l'étude des espaces les plus généraux :

- Tout espace est pourvu d'une <u>topologie</u> naturelle, et inversement toute topologie d'un ensemble est induite par diverses structures d'espace, dont deux sont canoniques (§3).
- Une partie F d'un espace E possède une structure de <u>sous-espace</u> (§4).
- Les <u>isomorphismes</u> et <u>isomorphismes locaux</u> permettent de définir <u>la structure globale</u> et les <u>structures locales</u> d'un espace (§§ 5, 6, 7) ; dans le cas d'un univers (espace à recueil transitif), on peut construire toutes les structures globales correspondant à une structure locale donnée (§8).
- Un espace est dit <u>parfait</u> si ses automorphismes locaux sont intérieurs ; cette propriété pose souvent des problèmes difficiles (les structures différentiables sont-elles parfaites ?).
- Nous définissons un <u>espace fibré</u> comme un ensemble muni simultanément d'une structure d'espace et d'une équivalence, avec certaines relations de compatibilité entre ces deux structures (§ 17) ; on peut alors construire un espace quotient (la <u>base</u> de l'espace fibré) ; sur chaque fibre opère le <u>groupe structural</u>, dont le <u>groupe de jauge</u> est un sous-groupe distingué.
- Nous indiquons diverses constructions d'espaces fibrés : sous-fibrations, classes de jauge, espaces fibrés principaux, faisceaux, revêtements (§ 18).

- Les espaces fibrés sans groupe de jauge peuvent être construits à partir de leur base, grâce à l'axiomatique des racines (§ 11); pour des raisons techniques, nous étudions les racines avant les espaces fibrés (§§ 10 à 16) .
- L'isomorphisme de racine permet la définition de la variance (§ 12) ; chaque racine est associée à une représentation du groupe des germes (§ 10) sur le groupe structural (§13) ; on en tire notamment une relation d'ordre sur les variances (subordination).
- Les racines permettent de donner une définition générale des champs ; on définit notamment les familles invariantes de champs (§ 14) .
- Le § 15 est consacré aux méthodes standard de construction de racines : représentation , restriction , prolongement , quotient , produit direct , sous-racines , juxtaposition , racines d'opérateurs , germes de champs , etc ; une étude sommaire des structures invariantes des fibres est donnée au § 16 .

La deuxième partie de ce séminaire sera consacrée à des applications à diverses théories physiques (calcul des variations et mécanique analytique ; quantification ; relativité ;théorie unitaire pentadimensionnelle) ; nous montrerons, en cours de route,comment les notions classiques de géométrie différentielle peuvent prendre place dans la théorie générale des espaces.

J.M. Souriau

Index de la première partie

- 0 - 0 - 0 - 0 - 0 -

SEMINAIRE DE PHYSIQUE MATHEMATIQUE DE MARSEILLE - 1960-1961.

Exposés de J.M. Souriau.

I AXIOMATIQUE DES "ESPACES" . (7 novembre 1960)

§ 1 : Prérecueils .

Nous appellerons opérateur toute application d'un ensemble sur un ensemble ; nous supposerons que la donnée d'un opérateur A entraîne celle de son ensemble de définition, que nous appellerons déf(A) , et de son ensemble de valeurs, que nous appellerons val(A).

Il sera utile notamment de considérer l'opérateur impuissant, dont l'ensemble de définition est vide; l'opérateur identique sur un ensemble E, que nous noterons 1_E. Il est clair que l'opérateur impuissant peut se noter $1_\emptyset$, $\emptyset$ désignant l'ensemble vide.

Etant donnés deux opérateurs A et B , nous noterons A.B le produit (de composition) de ces opérateurs, défini par

$$[A.B](X) = A(B(X)) \tag{1.1}$$

chaque fois que le second membre existe.

Le produit de deux opérateurs est toujours un opérateur, même s'il est impuissant.

La multiplication des opérateurs est associative; quels que soient les ensembles de définition de A,B,C, on a toujours

$$[A.B].C = A.[B.C] \tag{1.2}$$

On en déduit les règles de calcul des puissances entières positives d'un opérateur. La multiplication n'est pas commutative; on dira que A et B commutent si A.B = B.A.

<u>Exemples</u> : Les puissances entières positives d'un opérateur A commutent; E étant un ensemble, les opérateurs qui commutent avec 1_E sont ceux qui donnent de E une image et une image réciproque contenues dans E.

Nous dirons qu'un opérateur A est <u>régulier</u> si

(1.3) $$A(x) = A(y) \quad \Rightarrow \quad x = y$$

c'est à dire si A établit une correspondance biunivoque entre déf(A) et val(A); A étant régulier, l'opérateur <u>inverse</u> A^{-1} est défini par

(1.4) $$A^{-1}(x) = y \quad \Longleftrightarrow \quad x = A(y)$$

On vérifie immédiatement que A^{-1} est régulier, et que

(1.5) $$\left\{\begin{array}{l} [A^{-1}]^{-1} = A \text{ ; que } \operatorname{déf}(A^{-1}) = \operatorname{val}(A) \quad , \operatorname{val}(A^{-1}) = \operatorname{déf}(A) \text{ ,} \\ \qquad A^{-1}.A = 1_{\operatorname{déf}(A)} \quad , A.A^{-1} = 1_{\operatorname{val}(A)} \end{array}\right.$$

que si A et B sont réguliers, $A.B$ est régulier et que l'on a

(1.6) $$[A.B]^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$$

2 mais cette formule tombe en défaut si le produit $A.B$ est régulier sans que A ou B le soit.

On l'étend à l'inverse du produit de n opérateurs réguliers, et on en déduit le calcul des puissances entières négatives.

Nous dirons qu'un ensemble R est un <u>pré-recueil</u> si:

(1.7)
a) les éléments de R sont des opérateurs réguliers, dont l'inverse appartient aussi à R ;
b) le produit de deux éléments de R est un élément de R.

de façon brève : $[A, B \in R] \Rightarrow [A^{-1}, A.B \in R]$

Exemples :

Soit E un ensemble quelconque d'opérateurs réguliers; les produits finis d'éléments de E et d'inverses d'éléments de E forment un prérecueil (règles 1.2, 1.5, 1.6); c'est évidemment le plus petit prérecueil contenant E. -Il est clair que tout groupe de permutations est un prérecueil; inversement, un prérecueil ne constitue un groupe que si $A^{-1}.A$ est indépendant de A, donc si les éléments du prérecueil sont tous des permutations d'un même ensemble.

(1.8) Soit R un prérecueil; nous appellerons <u>espace de R</u> la réunion E des ensembles de définition des éléments de R.

C'est aussi la réunion des ensembles de valeurs des éléments de R (règles 1.7 a ; 1.5) ; en d'autres termes, E est le plus petit ensemble tel que les éléments de R soient des applications d'une partie de E dans E.

Considérons deux points x et y de l'espace E d'un prérecueil R. Il est clair que la relation

(1.9) "il existe A dans R tel que $A(x) = y$ "

est symétrique (car $x = A^{-1}(y)$), transitive (car si $z = B(y)$, on a aussi $z = [B.A](x)$) et réflexive (car si $x \in E$, il existe un A dans R tel que $x \in \text{déf}(A)$, donc que $x = [A^{-1}.A](x)$) ; par suite E se partage en classes d'équivalence suivant cette relation; nous les appellerons <u>classes de transitivité</u> du prérecueil.

Nous dirons que le prérecueil R est <u>transitif</u> s'il existe une seule classe ; donc si, x et y appartenant à l'espace de R , il existe toujours un élément A de R tel $A(x) = y$.

Soit R un prérecueil quelconque; F une de ses classes de transitivité. Il est clair que si $x \in F$ et $A \in R$, $A(x)$ et $A^{-1}(x)$ appartiennent à F; donc que $A.\,1_F = 1_F.A$; désignons par R_F l'ensemble des opérateurs $A.1_F$, A appartenant à R .

Il est clair que R_F est un <u>prérecueil</u> (car

$[A.1_F]^{-1} = [1_F.A]^{-1} = A^{-1}.1_F$; $A.1_F.B.1_F = A.B.[1_F]^2 = A.B.1_F$),
d'espace F , et qu'il est transitif.

§ 2. : Recueils.

Soient A et B deux opérateurs; nous dirons que B est un prolongement de A, ou que A est une restriction de B, et nous écrirons $A < B$ si

(2.1) $\qquad \text{déf}(A) \subset \text{déf}(B) \quad ; \quad x \in \text{déf}(A) \Rightarrow A(x) = B(x)$

Il est clair que cette relation $<$ est une relation d'ordre :

(2.2) $\qquad [A < B, B < A] \Longleftrightarrow [A = B] \qquad [A < B,\ B < C] \Rightarrow [A \Rightarrow C]$

Nous dirons qu'une famille d'opérateurs A_j (j parcourant un quelconque ensemble d'indices) est compatible si elle est majorée pour la relation $<$, c'est à dire s'il existe un opérateur A tels que

(2.3) $\qquad$ quel que soit j , $\text{déf}(A_j) \subset \text{déf}(A)$, $A_j(x) = A(x)$

Il est clair que si la famille A_j est compatible, on a

(2.4) $\qquad x \in \text{déf}(A_j) \cap \text{déf}(A_k) \quad \Rightarrow \quad A_j(x) = A_k(x)$

Inversement, si une famille A_j vérifie cette condition (2.4), posons $E = \bigcup_j \text{déf}(A_j)$; x étant un élément de E , il existe au moins un j tel que $x \in \text{déf}(A_j)$; la valeur $A_j(x)$ ne dépend pas du choix de j; appelons-la $A(x)$. Il est clair que A est la borne supérieure exacte de la famille A_j; ainsi :

(2.5) Pour qu'une famille d'opérateurs A_j soit majorée pour la relation $<$, il faut et il suffit qu'elle vérifie la relation (2.4); elle admet alors une borne supérieure exacte (notée $\sup_j(A_j)$), qui est le plus petit prolongement commun à tous les A_j.

Etudions les rapports de la relation $<$ avec les opérations définies sur les opérateurs au § 1.

On vérifie immédiatement que

(2.6) $A < A'\ ,\quad B < B' \quad\Rightarrow\quad A.B < A'.B'$;

que si les familles A_j et B_k sont chacune compatible, la famille $A_j.B_k$ est compatible, et que l'on a

(2.7) $\sup\limits_{jk}(A_j.B_k) = \sup\limits_j (A_j) \,.\, \sup (B_k)$

De même

(2.8) $[\,A < A'\ ,\ A' \text{ régulier}\,] \quad\Rightarrow\quad [\,A \text{ régulier},\ A^{-1} < A'^{-1}]$

et

(2.9) $\left[A_j \text{ compatibles}, \sup\limits_j(A_j) \text{régulier}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A_j \text{réguliers}, A_j^{-1} \text{ compatibles} \\ \sup\limits_j(A_j^{-1}) = [\sup\limits_j(A_j)\,]^{-1} \end{array}\right]$

mais les prolongements d'un opérateur régulier ne sont pas tous réguliers; si des opérateurs réguliers forment une famille compatible, leur borne supérieure n'est pas nécessairement régulière, leurs inverses ne sont pas nécessairement compatibles.

Nous dirons qu'un ensemble R d'opérateurs est un <u>recueil</u> s'il vérifie les axiomes des prérecueils :

a) $[\,A \in R\,] \Rightarrow [\,A \text{ régulier},\ A^{-1} \in R\,]$

(2.10) b) $[\,A \text{ et } B \in R\,] \Rightarrow [\,A.B \in R\,]$

plus l'axiome suivant :

c) $[A_j\text{=partie compatible de } R, \sup(A_j) \text{régulier}\,] \Rightarrow [\sup(A_j) \in R\,]$

Considérons un <u>prérecueil</u> R_o; appelons R l'ensemble des opérateurs A qui vérifient

(2.11) A régulier, $A = \sup\limits_j(A_j)$ $\quad A_j$=famille compatible d'éléments de R_o

la formule (2.9) montre que $A^{-1} = \sup\,(A_j^{-1})$; les A_j^{-1}

appartenant à R_o, A^{-1} appartient à R ; de même si $B \in R$, soit: B régulier, $B = \sup B_k$, $B_k \in R_o$, la formule (2.7) montre que l'opérateur régulier $A.B$ est égal à $\sup_{jk} A_j.B_k$, donc que $A.B \in R$, puisque $A_j.B_k \in R_o$; ainsi, R est un <u>prérecueil</u>.

Par ailleurs, soit A_r une famille compatible d'éléments de R, tels que $A = \sup(A_r)$ soit régulier; on peut écrire $A_r = \sup_j(A_{rj})$, les A_{rj} étant des éléments de R_o; tous les A_{rj} sont compatibles, puisque $A_{rj} < A_r < A$; leur borne supérieure est évidemment A, qui est régulier, donc $A \in R$; ainsi R vérifie l'axiome (2.10,c); R est un <u>recueil</u>.

Notons aussi que si $A \in R_o$, la partie de R_o qui se réduit à A est évidemment compatible, et que sa borne supérieure est A, qui est régulière; donc $A \in R$: le recueil R contient R_o.

Supposons enfin qu'un recueil R' contienne R_o; A étant un élément de R, on peut écrire $A = \sup(A_j)$, $A_j \in R_o$; A est une borne supérieure régulière d'éléments de R_o, donc de R'; R' vérifiant (2.10,c) par hypothèse, A appartient donc à R'; ainsi $R \subset R'$. En résumé :

(2.12) R_o étant un prérecueil, les opérateurs A qui vérifient la condition (2.11) forment un recueil; c'est le plus petit recueil contenant R_o ; nous dirons que c'est le <u>recueil engendré par R_o</u>.

Exemple: on sait qu'un groupe G de permutations de l'ensemble E est un prérecueil; le recueil engendré se compose de G et de l'opérateur impuissant (borne supérieure de la partie vide de G).

Remarquons que le recueil R engendré par un prérecueil R_o a même espace E que R_o (les éléments de R_o appliquant une partie de E dans E, il en est de même de toutes leurs bornes supérieures); que les classes de transitivité de R_o et de R sont <u>les mêmes</u>.

§ 3 : Espaces et univers.

(3.1) Soit E un ensemble. On dira que E est muni d'une structure d'espace lorsqu'on aura choisi un recueil R admettant E comme espace. Les éléments de R s'appelleront alors les glissements de l'espace. Si le recueil des glissements de E est transitif sur E, nous dirons que E possède une structure d'univers.

Soit R_o un prérecueil, d'espace E ; on sait que le recueil engendré par R_o admet aussi l'espace E, et y définit donc une "structure d'espace" ; nous dirons sans ambiguïté qu'il s'agit de la structure d'espace définie par R_o. -Par abus de langage, nous appellerons simplement espace tout ensemble muni d'une structure d'espace; c'est le cas notamment pour les "espaces vectoriels" (structure définie par le groupe linéaire), les "espaces topologiques" (voir ci-dessous) et les espaces des diverses théories physiques.

Lemme :

(3.2) Soit E un espace, R le recueil de ses glissements. Alors :

a) l'opérateur impuissant appartient à R ;

b) si 1_F et 1_G appartiennent à R, $1_{F \cap G} \subset R$

c) si les parties F_j de E sont telles que $1_{F_j} \in R$,

$1_{\bigcup_j F_j} \in R$;

d) $1_E \in R$

En effet :

a) l'opérateur impuissant est régulier, et il est la borne supérieure de la partie vide de R ; il appartient donc à R (axiome 2.10,c)

b) si 1_F et 1_G appartiennent à R, il en est de même de leur produit $1_F . 1_G = 1_{F \cap G}$

c) il est évident que $1_{\bigcup_j F_j}$ est la borne supérieure des 1_{F_j} ; comme cet opérateur est régulier, il appartient aussi à R;

d) Λ étant un glissement, l'ensemble $E_\Lambda = \text{déf}(\Lambda)$ est tel que $1_{E_\Lambda} \in R$, puisque $1_{E_\Lambda} = \Lambda^{-1}.\Lambda$; il résulte de (c) que $1_{\underset{\Lambda}{U}(E_\Lambda)} \in R$; or, par définition, $E = \underset{\Lambda}{U}(E_\Lambda)$

C.Q.F.D.

Il est clair que (3.2) peut s'énoncer de la façon suivante :

(3.3) Soit E un espace ; R le recueil de ses glissements. Une partie F de E sera dite <u>ouverte</u> si $1_F \in R$; on définit ainsi sur E une <u>topologie</u> (au sens de Bourbaki); Nous l'appellerons <u>topologie naturelle</u> de l'espace E.

Théorème :

(3.4) Les glissements d'un espace E sont, pour sa topologie naturelle, des <u>homéomorphismes locaux</u>, c'est à dire des applications bicontinues d'un ouvert de E sur un ouvert de E.

Soit Λ un élément du recueil R des glissements de E. Quel que soit l'ouvert Ω de E, 1_Ω appartient à R ; donc aussi $\Lambda^{-1}.1_\Omega.\Lambda$.

Or $\Lambda^{-1}.1_\Omega.\Lambda$ est visiblement l'opérateur identique sur l'image réciproque de Ω par Λ, qui est donc un ouvert. Ainsi Λ est continu; son domaine de définition, que l'on obtient en faisant $\Omega = E$, est un ouvert.

Comme Λ^{-1} jouit des mêmes propriétés, Λ est bien un homéomorphisme local.

C.Q.F.D.

- Soit E un espace; nous appliquerons directement à E la terminologie de sa topologie naturelle: E peut être ou non <u>séparé</u>, <u>compact</u>, <u>normal</u>, <u>connexe</u>, etc.

- Supposons inversement donnée une topologie T d'un ensemble E; on peut se demander s'il existe une structure d'espace sur E admettant T comme topologie naturelle. La réponse est donnée par l'énoncé suivant, que le lecteur vérifiera aisément :

(3.5) Soit T une topologie de l'ensemble E. Les homéomorphismes locaux de E forment un recueil ; c'est le plus grand recueil admettant T pour topologie naturelle. Le plus petit recueil ayant cette propriété est constitué par l'ensemble des 1_Ω , Ω étant ouvert dans E.

Exemples :

Considérons la structure d'espace définie sur un ensemble E par un groupe de permutations de E ; on vérifie immédiatement que la topologie naturelle est non séparée : les seuls ouverts de E sont E et l'ensemble vide.

-Soit E un ensemble muni d'une topologie T et d'un groupe G de permutations <u>continues</u> pour la topologie T.

Il est clair que les produits $A.1_\Omega$, où A est un élément de G et Ω un ouvert, forment un prérecueil; on donne ainsi à E une structure d'espace; on peut vérifier que la topologie naturelle de E coïncide avec la topologie donnée T , et que les éléments du groupe G sont des glissements de E ; le recueil ainsi construit est d'ailleurs le plus petit qui ait ces deux propriétés.

Ce procédé peut s'appliquer notamment à <u>l'espace-temps</u> de Minkowski, en prenant pour T la topologie usuelle et pour G le groupe de Lorentz non homogène; la structure d'univers ainsi obtenue semble adéquate à la description de la Relativité Restreinte.

On peut vérifier que les glissements de cet univers s'obtiennent de la façon suivante : on considère un ouvert Ω ; dans chacune des composantes connexes Ω_j de Ω , le glissement cherché A coïncide avec une transformation de Lorentz non homogène L_j ; les L_j ne sont astreints qu'à la régularité de A.

On peut dire que l'on obtient ce glissement général en prenant une partie ouverte de l'espace,et en "éparpillant" chacun des morceaux de cette partie,sans que ces morceaux se touchent.

Il est clair qu'il importe à la Physique de savoir quel groupe de Lorentz on doit considérer : groupe connexe,groupe à 4 composantes,ou l'un des trois groupes à 2 composantes (groupe orthochrone,groupe conservant la parité d'espace,groupe à jacobien positif). Mais dans tous les cas le procédé indiqué définira un recueil de glissements.

-On peut aussi proposer pour l'espace-temps un recueil plus grand que ceux que nous venons d'indiquer : c'est le cas par exemple de la Relativité Générale.

Remarques :

Nous avons indiqué que si un prérecueil R admet E pour espace,la restriction de R à chaque classe de transitivité est un prérecueil transitif; chaque classe d'un espace E admet donc ainsi une structure d'univers; les classes ne sont pas nécessairement des ouverts de E, ni des ensembles connexes; mais leur topologie naturelle est la topologie induite par celle de E.

-Considérons un espace E, et une application A d'une partie de E dans E vérifiant :

a) A est régulier

b) Quel que soit x dans déf(A),il existe un voisinage de x où A coïncide avec un glissement.

A chaque point x de déf(A),on associe donc un ouvert Ω_x et un glissement G_x tels que $x \in \Omega_x$, $x \in$ déf(G_x)

$A > G_x \cdot 1_{\Omega_x}$

Il est clair que A est la borne supérieure des $G_x \cdot 1_{\Omega_x}$; ceux-ci appartenant au recueil des glissements,il en est de même de A.

Il résulte de cette propriété que les glissements forment <u>un pseudo-groupe</u> , au sens d'Ehresmann.

En d'autres termes,l'axiomatique des recueils est équivalente à celle des pseudo-groupes,si on associe à chaque recueil la topologie naturelle de son espace.

-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-

Exposé N° II : STRUCTURE GLOBALE ET LOCALE. (1)

(14 Novembre 1960)

§ 4 Sous-espaces.

Considérons un espace E ; le recueil R de ses glissements; une partie quelconque F de E . Définissons l'ensemble R_F en posant :

(4.1) $[B \in R_F] \Longleftrightarrow$ [il existe A, dans R, tel que $B = 1_F . A = A . 1_F$]

Il est immédiat que les produits et inverses d'éléments de R_F sont encore des éléments de R_F, donc que R_F est un prérecueil ; que les domaines de définition des éléments de R_F sont des parties de F , et que $1_F \in R_F$ (il suffit de prendre $A = 1_E$): ainsi F est l'espace du prérecueil R_F.

Il résulte immédiatement de (4.1) que le domaine de définition d'un élément de R_F est l'intersection de F et d'un ouvert de E ; il en est de même pour les bornes supérieures d'éléments de R_F ,donc pour le recueil R'_F engendré par le prérecueil R_F (voir 2.12).

Inversement, si Ω est un ouvert de E , $1_\Omega \in R$, et la formule $1_{\Omega \cap F} = 1_\Omega . 1_F = 1_F . 1_\Omega$ montre que $1_{\Omega \cap F} \in R_F$, donc que $\Omega \cap F$ est ouvert pour la topologie naturelle déduite du recueil R'_F. En résumé :

(4.2) Soit E un ensemble, R le recueil de ses glissements. Nous appellerons sous-espace de E toute partie F de E ,

---

(1) Les signes $\eth$, $\eth\,\eth$ signifieront respectivement "le lecteur vérifiera aisément que" et "avec quelque habileté, le lecteur vérifiera que ".

munie de la structure d'espace définie par le recueil R_F (formule 4.1).

(4.2) -La topologie naturelle de F est <u>induite</u> par celle de E ; ce qui signifie que les ouverts de F sont les intersections de F et des ouverts de E .

<u>Exemples de sous-espaces</u>:

-Si F est une classe de transitivité de R , nous avons déjà vu (fin du § 1) que 1_F commute avec tous les glissements et que le sous-espace F est un univers (c'est à dire que les glissements y sont transitifs).

-Soit U un univers; toute partie F de U possède une structure de sous-espace; mais F n'est pas nécessairement un sous-univers. Ainsi, si U est l'espace ordinaire, muni du prérecueil G des déplacements, les sous-univers de U sont l'ensemble vide et les classes de transitivité des sous-groupes de G (exemples: les sommets d'un polygone ou d'un polyèdre régulier; une droite; un plan; un cercle; une sphère; un cylindre; une hélice; etc).

-Le cas d'un <u>sous-espace ouvert</u> mérite une mention particulière.

δ Soit F un ouvert de l'espace E , considéré comme sous-espace de E .

-Les glissements de F sont les glissements A de E qui vérifient

(4.3) $$\text{déf}(A) \subset F \qquad\qquad \text{val}(A) \subset F$$

-Le recueil des glissements de F est aussi l'ensemble des $1_F.A.1_F$, A désignant un glissement quelconque de E .

-Les ouverts de F sont les ouverts de E contenus dans F.

-Si E est un univers, F est aussi un univers.

§ 5 <u>Isomorphismes. Structure globale.</u>

(5.1) Soit Φ un opérateur régulier. Nous appellerons <u>transmuté</u> par Φ de l'opérateur A (resp. de l'ensemble d'opérateurs A_j)

l'opérateur $\Phi . A . \Phi^{-1}$ (resp. l'ensemble d'opérateurs $\Phi . A_j . \Phi^{-1}$).

(5.2) E et E' étant deux espaces, nous appellerons <u>isomorphisme</u> de E à E' tout opérateur régulier Φ, tel que def(Φ) = E, val(Φ) = E', et que le recueil R' des glissements de E' soit transmuté par Φ du recueil R des glissements de E.

δ l'opérateur 1_E est un isomorphisme de E à E; si Φ est un isomorphisme de E à E', Φ^{-1} est un isomorphisme de E' à E; si Φ et Ψ sont des isomorphismes de E à E' et de E' à E", $\Psi . \Phi$ est un isomorphisme de E à E"; d'où l'énoncé :

(5.3) Deux espaces E et E' sont dits <u>isomorphes</u> s'il existe un isomorphisme de E à E' ; cette relation est une <u>équivalence entre espaces</u>; la classe d'un espace E suivant cette relation s'appellera <u>structure globale</u> de E.

-Il est clair que les isomorphismes d'espace sont aussi des isomorphismes pour la structure topologique, c'est à dire des opérateurs <u>bicontinus</u>; on le vérifie directement en remarquant que le transmuté par Φ de 1_Ω est l'opérateur identique sur l'image de Ω par Φ, et que par suite Φ transforme (comme son inverse) les ouverts en ouverts.

-Nous appellerons <u>glissements globaux</u> d'un espace E les glissements A de E tels que déf(A) = val(A) = E ; ce sont des permutations de E, qui forment un groupe (axiomes de prérecueils).

Si B est un glissement quelconque, A un glissement global, $A.B.A^{-1}$ et $A^{-1}.B.A$ sont des glissements (axiomes des prérecueils); donc A transmute en lui-même le recueil

R des glissements de E :

(5.4) Les glissements globaux de l'espace E sont des isomorphismes de E à E (on dit aussi des <u>automorphismes</u> de E).

(5.5) Les automorphismes d'un espace E forment un groupe de permutations de E ; les glissements globaux en forment un sous-groupe distingué .

Soit E un espace ; Φ un opérateur régulier tel que déf(Φ) = E . le transmuté par Φ du recueil R des glissements de E est un recueil, d'espace E' ; par suite :

(5.6) Si Φ est un opérateur régulier, appliquant un espace E sur un ensemble E' , on peut donner à E' une structure d'espace telle que Φ soit un isomorphisme de E à E'.

§ 6 : <u>Isomorphismes locaux.</u>

(6.1) Soient E et E' deux espaces ; R et R' les recueils de leurs glissements. On appellera <u>isomorphisme local</u> de E à E' tout opérateur régulier Φ ,appliquant une partie de E dans E',tel que

a) Φ transmute les éléments de R en éléments de R'

b) Φ^{-1} transmute les éléments de R' en éléments de R .

En particulier, on voit que $\Phi \cdot 1_E \cdot \Phi^{-1} = 1_{val(\Phi)} \in R'$,donc que val($\Phi$) est ouvert dans R',et de même que déf(Φ) est ouvert dans R .

En se reportant à l'énoncé (4.3) relatif aux sous-espaces ouverts,on constate alors que Φ est un isomorphisme du sous-espace ouvert déf(Φ) au sous-espace ouvert val(Φ) ; la réciproque est vraie,de sorte que :

(6.2) E et E' étant deux espaces,les isomorphismes locaux de E à E' sont aussi les isomorphismes d'un sous-espace ouvert de E à un sous-espace ouvert de E'.

Soit A un glissement quelconque de l'espace E ; quel que soit le glissement B, il est clair que $A.B.A^{-1}$ et $A^{-1}.B.A$ sont des glissements, donc (définition 6.1) que A est un isomorphisme local de E à E ; donc :

(6.3) On appelle <u>automorphismes locaux</u> d'un espace E les isomorphismes locaux de E à E ; tous les glissements de E en sont.

Soient Φ et Ψ deux isomorphismes locaux d'un espace E. Il est clair que si A est un glissement, $\Psi.A.\Psi^{-1}$ est un glissement, donc aussi

$$\Phi[\Psi.A.\Psi^{-1}]\Phi^{-1} = \Phi.\Psi.A.[\Phi.\Psi]^{-1}$$

, et de même $[\Phi\Psi]^{-1}.A.[\Phi.\Psi]$. Ainsi $\Phi.\Psi$ est un automorphisme local ; la symétrie de l'énoncé (6.1) en Φ et Φ^{-1} montre que Φ^{-1} est un automorphisme local. Compte tenu de (6.3), on peut énoncer :

(6.4) Les automorphismes locaux d'un espace E forment un <u>prérecueil</u>, d'espace E, qui contient le recueil des glissements.

Bien entendu, le prérecueil des automorphismes locaux engendre un recueil (voir 2.12), donc une structure d'espace, et une topologie; les ouverts de cette topologie sont les réunions de domaines de définition d'automorphismes locaux, qui sont tous les ouverts de E pour la topologie initiale (voir 6.2 et 6.3); donc :

(6.5) La topologie naturelle pour le prérecueil des automorphismes est la même que la topologie initiale (définie par le recueil des glissements).

Les éléments d'un prérecueil étant bicontinus pour leur topologie naturelle (théorème 3.4), on voit que :

(6.6) Les isomorphismes locaux d'un espace E sont bicontinus pour la topologie naturelle de E,

ce qui peut d'ailleurs se vérifier directement, ou se déduire du fait que ce sont des isomorphismes (globaux) de sous-espaces ouverts.

Exemple 1 :

Soit E un ensemble muni d'une topologie T ; on a vu (3.5) que les opérateurs identiques sur les ouverts de E forment un recueil R ; le automorphismes locaux de E sont les opérateurs bicontinus d'ouvert à ouvert (" homéomorphismes locaux"). Ils forment donc un recueil R' (th. 3.5) qui engendre aussi la topologie T.

Exemple 2 :

Munissons maintenant E de la structure d'espace définie par le recueil R'. On sait que les automorphismes locaux forment un prérecueil P , qui contient le recueil R' (th.6.4), et que le recueil R'' engendré par P définit sur E la même topologie T que R' (th.6.5). Comme R' est le plus grand recueil définissant la topologie T (th.3.5), on a $R' \subset P \subset R'' \subset R'$, d'où $P = R'$: il n'y a pas dans ce cas d'autre automorphisme local que les glissements .

Exemple 3 :

Considérons la droite réelle R , et l'ensemble P des opérateurs définis sur un intervalle ouvert, et qui y coïncident avec une translation. P est un prérecueil ; l'opérateur $F\ [F(x) = 2x \text{ pour } x > 0]$ appartient au prérecueil P' des automorphismes locaux de la droite, ainsi que l'opérateur $G\ [G(x) = x \text{ pour } x < 0]$; mais P' n'est pas un recueil ; en effet, $\sup(F,G)$ n'est pas un automorphisme local.

Exemple 4 :

on définit, sur l'espace numérique R^n , la structure d'espace p fois différentiable par le recueil R des applications d'un ouvert sur un ouvert qui sont, ainsi que leur inverse, p fois continûment différentiables.

J'ignore s'il existe d'autres automorphismes locaux de cet espace que les glissements.

Remarques :

Les automorphismes locaux d'un espace E , qui constituent un prérecueil (th.6.4) peuvent constituer un recueil (exemples 1 et 2), ou non (exemple 3). Ils peuvent être transitifs sans que les glissements le soient (exemple 1, en prenant $E = R^n$).

(6.7) Nous dirons qu'un espace E est <u>parfait</u> s'il n'existe pas d'autre automorphisme que les glissements.

Nous avons rencontré des cas d'espaces parfaits (exemple 2) et d'espaces non parfaits (exemple 3).

Un autre cas intéressant d'espace non parfait est celui de l'espace de Minkowski, si on admet la "non conservation de la parité", c'est à dire qu'une symétrie dans un miroir n'est pas un glissement. En effet, les miroirs sont visiblement des automorphismes de cet espace.

-Les homothéties sont d'ailleurs, elles aussi, des automorphismes de l'espace de Minkowski.

§ 7 : <u>Structure locale</u> .

Considérons l'ensemble des couples (E,X), où E est un espace et X un point de E , et la relation $\sim$ définie entre ces couples par

(7.1) $$\left[(E,X) \sim (E',X')\right] \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l}\text{Il existe un isomorphisme local } \Phi \\ \text{de } E \text{ à } E' \text{ tel que } \Phi(X) = X'\end{array}\right]$$

$\mathcal{S}$ cette relation est une équivalence; nous appellerons <u>structure locale de E au point X</u> la classe de (E,X) suivant $\sim$; en d'autres termes :

(7.2) La relation (7.1) pourra aussi s'énoncer :" la structure locale de E au point X est la même que la structure locale de E' au point X' ".

Considérons maintenant deux points X et Y d'un univers U; par hypothèse, il existe un glissement A tel que $A(X) = Y$ (3.1); A est un automotphisme local (6.3); on a donc $(U,X) \sim (U,Y)$:

(7.3) La structure locale d'un univers U est la même en tous ses points; on l'appellera <u>structure locale</u> de U .

Remarque : un espace E peut avoir même structure locale en tout point sans être un univers; (ainsi R^n muni du recuei des opérateurs identiques sur les ouverts); il faut et il suffit pour cela que E soit un univers pour la structure définie par le prérecueil de ses automorphismes locaux.

Considérons maintenant deux univers U et V; nous dirons que U et V sont <u>localement isomorphes</u> s'ils ont même structure locale en tous leurs points; il faut et il suffit pour cela qu'il existe un isomorphisme local <u>non impuissant</u> de U à V; cette relation est évidemment une équivalence sur l'ensemble des univers non vides.

Exemple : soit V un ouvert de l'univers U; il est clair que 1_V est un isomorphisme local de U à V; donc :

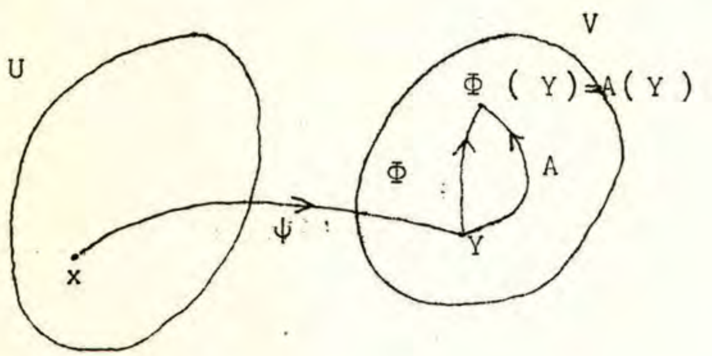
(7.4) Tout univers a même structure locale que ses ouverts non vides (considérés comme sous-univers, voir 4.3).

-Soit maintenant X un point de l'univers U; V un univers localement isomorphe à U; Φ un automorphisme local de V; Y un point de déf(Φ).

La structure locale de U en Y est la même que celle de V en Y; il existe donc un isomorphisme local de U à V, ψ, tel que $\psi(X) = Y$.

V étant un univers, il existe un glissement A de V tel que $A(Y) = \Phi(Y)$.

δ $\Theta = \psi^{-1}.A^{-1}.\Phi.\psi$ est un automorphisme local de U, conservant le point X; c'est donc un glissement de U, puisque U est parfait. Son transmuté par l'isomorphisme local ψ est un glissement de V; donc aussi son produit par le glissement A, soit $B = A.\psi.\Theta.\psi^{-1} = 1_{val(A.\psi)}.\Phi.1_{val(\psi)}$



$A.\psi$ et ψ étant des isomorphismes locaux, leurs domaines de valeur sont des ouverts; Φ étant bicontinu, est donc la restriction de Φ à un ouvert, qui contient visiblement Y.

Ainsi, l'opérateur régulier Φ coïncide avec un glissement dans un voisinage de tout point Y de son domaine de définition; c'est donc un glissement (voir la fin du paragraphe 3); Φ étant un automorphisme quelconque, V est parfait :

(7.5) Tout univers localement isomorphe à un univers parfait est parfait.

On peut dire si l'on veut que la perfection d'univers est une <u>propriété locale</u>.

§ 8 <u>Univers synthétiques</u>.

Problème :

(8.1) Soient U_1 et U_2 deux univers non vides; R_1 et R_2 les recueils de leurs glissements.

1°) Existe-t-il sur leur réunion U une structure d'univers telle que U_1 et U_2 en soient des sous-univers ouverts ?

2°) Le recueil R définissant une telle structure est-il unique ?

Le problème se traite de façon différente suivant que l'intersection V de U_1 et U_2 est vide ou non.

a) δ δ

(8.2) Supposons $V = U_1 \cap U_2$ non vide. Pour que le problème (8.1) ait une solution, il est nécessaire et suffisant que V soit ouvert dans U_1 et dans U_2 et que les restrictions à V de R_1 et de R_2 soient les mêmes.
La solution est alors unique; R est le recueil engendré par le prérecueil des produits finis d'éléments de R_1 et de R_2.

b) Supposons U_1 et U_2 disjoints.
Si le problème a une solutions, U_1 et U_2 sont localement isomorphes, comme sous-espaces ouverts d'un même univers (7.4); il existe donc un isomorphisme local non impuissant Φ de U_1 à U_2.

(8.3) Soit P l'ensemble des opérateurs qui se mettent sous l'une des 4 formes

$$A_1 \qquad A_2 \qquad A_2 . \Phi . A_1 \qquad A_1 . \Phi^{-1} . A_2$$

A_1 et A_2 désignant des éléments quelconques de R_1 et R_2.

Il est clair que les éléments de P appliquent une partie de U dans U, et que P est transitif sur U; que le produit de deux éléments de P est un élément de P (parceque les produit $A_1 . A_2$ et $A_2 . A_1$ sont impuissants, et parceque Φ est un isomorphisme local (voir la définition 6.1), ainsi que l'inverse d'un élément de P. Ainsi P est un <u>prérecueil</u>; le recueil engendré R définit sur U une structure d'univers.

Montrons que la restriction de R à U_1 se réduit à R_1;

en effet, si l'élément A de R applique une partie de U_1 dans U_1, il est borne supérieure d'éléments de P ayant la même propriété, donc de glissements A_1 de U_1 (voir 8.3); comme A est régulier, et que R_1 est un recueil, $A \in R_1$. Il en est de même de U_2. Donc :

(8.4) Supposons U_1 et U_2 disjoints.
Pour que le problème (8.1) ait une solution, il est nécessaire et suffisant que U_1 et U_2 soient localement isomorphes, c'est à dire qu'il existe un isomorphisme local non impuissant Φ de U_1 à U_2.
Dans ces conditions, l'ensemble P défini en (8.3) est un pré-recueil; le recueil R engendré par P résout le problème.

-Supposons que la solution du problème soit unique; le recueil R ne dépend alors pas du choix de l'isomorphisme local Φ ; comme il contient visiblement Φ, tout isomorphisme local de U_1 à U_2 appartient à R.

Soit V_1 le domaine de définition de l'isomorphisme local Φ choisi initialement; V_1 est un ouvert de U_1 (6.2), donc un sous-univers; soit ψ un automorphisme local de V_1. Il est clair que $\Phi \cdot \psi$ est un isomorphisme local de U_1 à U_2, donc un élément de R ; par suite aussi son produit par l'élément Φ^{-1} de R, soit $\Phi^{-1} \cdot \Phi \cdot \psi = 1_{V_1} \cdot \psi = \psi$.
Ainsi tout automorphisme local ψ de V_1 est un glissement ; V_1 est parfait, donc aussi les univers localement isomorphes U, U_1, U_2 (th. 7.5).

Supposons inversement les espaces U_1 et U_2 localement isomorphes et parfaits.
Il existe un recueil R répondant à la question (8.4); il fait

de U un univers localement isomorphe à U_1, donc parfait.
Soit Φ un isomorphisme local de U_j à U_k $(j,k = 1,2)$;
A étant un élément de R, on a $\Phi.A.\Phi^{-1} = \Phi.1_{U_j}.A.1_{U_j}.\Phi^{-1}$;
comme $1_{U_j}.A.1_{U_j} \in R_j$ (th.4.3), son transmuté par Φ est un élément de R_k, donc de R. On voit de même que Φ^{-1} transmute aussi les éléments de R en éléments de R, donc que c'est un automorphisme local de U ; U étant parfait, $\Phi \in R$.

R étant un recueil, contient tous les opérateurs réguliers qui se mettent sous la forme $\sup_{jk} \Phi_{jk}$, Φ_{jk} étant un isomorphisme local de U_j à U_k.

Inversement, si A est un élément de R, et si l'on pose $\Phi_{jk} = 1_{U_k}.A.1_{U_j}$, Φ_{jk} est un isomorphisme local de U_j à U_k, et $A = \sup_{jk} \Phi_{jk}$; donc :

suite de (8.4)

(8.5) Pour que la solution soit unique, il est nécessaire et suffisant que U_1 et U_2 soient parfaits. Dans ces conditions, le recueil R des glissements de U est engendré par le prérecueil des isomorphismes locaux de U_j à U_k $(j,k = 1,2)$.

§ 9 Structures globales correspondant à une structure locale.

Donnons-nous une structure locale d'univers, celle d'un univers non vide U, que nous appellerons univers-type.
Nous allons chercher les structures globales de tous les univers ayant même structure locale que U ; c'est à dire un algorithme permettant d'obtenir un univers globalement isomorphe à tout univers V localement isomorphe à U.

a) Soit V un univers localement isomorphe à U ; nous pouvons (par un isomorphisme global, théorème 5.6) supposer V disjoint de U; puis donner à $W = U \cup V$ une structure d'univers admettant U et V comme sous-univers ouverts (théorème 8.4).

Appelons <u>cartes</u> les glissements de W qui appliquent une partie de l'univers V dans l'univers-type U; <u>atlas</u> un ensemble de cartes dont les domaines de définition recouvrent V (il en existe, par exemple l'ensemble de toutes les cartes).

Désignons par F_j les cartes d'un atlas (j parcourt un ensemble d'indices bien choisi) et posons $H_{jk} = F_j . F_k^{-1}$ (<u>changeurs de cartes</u>).

Il résulte immédiatement de cette définition que les H_{jk} vérifient :

(9.1)
1) H_{jk} est un glissement de U ;
2) $H_{jj} = 1_{U_j}$, U_j étant un ouvert de U ;
3) $H_{jk}^{-1} = H_{kj}$
4) $H_{jk} . H_{kl} < H_{jl}$

b) Donnons-nous inversement un ensemble d'ouverts U'_j (non tous vides) et de glissements H'_{jk} de l'univers U, vérifiant les relations (9.1). Sur l'ensemble des couples $\binom{j}{X}$, tels que $X \in U'_j$, définissons la relation $\sim$:

$$(9.2) \qquad \left[\binom{j}{X} \sim \binom{k}{Y} \right] \Longleftrightarrow \left[X = H'_{jk}(Y) \right]$$

δ -La relation $\sim$ est une équivalence ;

- si on appelle $G_j(X)$ la classe de $\binom{j}{X}$ suivant $\sim$ et V' la réunion des classes, les G_j sont des opérateurs réguliers, et le plus petit recueil contenant les G_j ~~et les glissements~~

et les glissements de U définit sur la réunion de U et V' une structure d'univers, dont U et V' sont des sous-univers ouverts;

- Les $F'_j = G_j^{-1}$ forment un <u>atlas</u> de V', et vérifient

$F'_j . F'^{-1}_k = H'_{jk}$;

- si les H'_{jk} coïncident avec les H_{jk} définis en (a), les opérateurs $G_j . F_j$ sont compatibles, et leur borne supérieure est un isomorphisme global de V à V'.

En résumé :

(9.3)
- Les relations (9.1) sont nécessaires et suffisantes pour que les H_{jk} soient les changeurs de cartes $F_j . F_k^{-1}$ d'un atlas F_j d'un univers localement isomorphe à l'univers-type U ;
- Si un atlas F_j d'un univers V et un atlas F'_j d'un univers V' ont les mêmes changeurs de cartes, V et V' sont globalement isomorphes.

- Nous avons bien résolu le problème posé, appliquant l'ensemble des solutions de (9.1) sur l'ensemble des structures globales d'univers localement isomorphe à U; mais le problème de savoir si deux familles distinctes de changeurs de carte définissent ou non la même structure globale est difficile.

Exemple :

- Soit A un glissement de l'univers U. On vérifie les relations (9.1) en posant $H_{11} = H_{22} = 1_U$; $H_{12} = A$; $H_{21} = A^{-1}$.

On définit ainsi une structure globale, que l'on peut se représenter en imaginant deux univers U_1 et U_2 isomorphes à U, et en collant le point X de U_2 sur le point $A(X)$ de U_1.

Si on prend $A = 1_\Omega$, Ω étant un ouvert ayant un point frontière X, on obtiendra un univers non séparé (les points $F_1(X)$ et $F_2(X)$ sont distincts, mais tout voisinage de l'un coupe tout voisinage de l'autre), même s'il est localement séparé (c'est à dire localement isomorphe à un univers séparé U).

-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-

Exposé N°III : GEOMETRIE DES CHAMPS

(21 Novembre 1960)

§ 10 : Germes et cogermes.

(10.1)

-Soit E un espace topologique; X un point de E.

-Considérons l'ensemble des opérateurs A tels que

$\text{déf}(A) \subset E$

-Définissons sur cet ensemble la relation $\sim$: $[A \sim B] \Leftrightarrow$ [il existe un ouvert Ω, contenant X, tel que $A.1_\Omega = B.1_\Omega$]

-Ó la relation $\sim$ est une équivalence.

-Nous appellerons germe de A au point X la classe de A suivant $\sim$

(10.2)

-Soit E un espace topologique; X un point de E.

-Considérons l'ensemble des opérateurs A tels que

$\text{val}(A) \subset E$

-Définissons sur cet ensemble la relation $\backsim$: $[A \backsim B] \Leftrightarrow$ [il existe un ouvert Ω, contenant X, tel que $1_\Omega.A = 1_\Omega.B$]

-Ó la relation $\backsim$ est une équivalence.

-Nous appellerons cogerme de A au point X la classe de A suivant $\backsim$.

Puisque la relation $\sim$ (resp. $\backsim$) est une équivalence, on a

(10.3) $\quad [A \in \text{germe}_X(B)] \Longleftrightarrow [\text{germe}_X(A) = \text{germe}_X(B)]$

(10.4) $\quad [A \in \text{cogerme}_X(B)] \Leftrightarrow [\text{cogerme}_X(A) = \text{cogerme}_X(B)]$

Soient A et B deux opérateurs réguliers; il est clair que $A.1_\Omega = B.1_\Omega$ est équivalent à $1_\Omega.A^{-1} = 1_\Omega.B^{-1}$; donc:

(10.5) Si A et B sont réguliers

$$[\text{germe}_X(A) = \text{germe}_X(B)] \Leftrightarrow [\text{cogerme}_X(A^{-1}) = \text{cogerme}_X(B^{-1})]$$

-Soit A un opérateur qui applique une partie de l'espace topologique E dans l'espace topologique E' ; X_0 un point de $déf(A)$.

On dit que A est continu en X_0 si, à tout ouvert ε contenant $A(X_0)$, correspond un ouvert η, contenant X_0, tel que

(10.6) $$\begin{bmatrix} X \in \eta \\ A(X) \text{ existe} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} A(X) \in \varepsilon \end{bmatrix}$$

Le premier membre de (10.6) peut s'écrire $X \in déf(A.1_\eta)$ le second $X \in déf(1_\varepsilon .A)$; donc (10.6) peut s'écrire $A.1_\eta < 1_\varepsilon .A$, puisque ces deux opérateurs sont compatibles (prolongés par A). On en tire, en multipliant à droite par 1_η :

$$A.1_\eta < 1_\varepsilon .A.1_\eta$$

et comme il est évident que $1_\varepsilon .[A.1_\eta] < A.1_\eta$

(10.7) $$1_\varepsilon .A.1_\eta = A.1_\eta$$

Inversement, si la condition (10.7) est vérifiée, si $X \in \eta$ et si $A(X)$ existe, on a

$A(X) = [A.1_\eta](X) = [1_\varepsilon .A.1_\eta](X) \in \varepsilon$; (10.6) est vérifiée:

Si l'opérateur A applique une partie de l'espace topologique E dans l'espace topologique E',

(10.8) $$\begin{bmatrix} A \text{ continu en } X_0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} \text{Quel que soit } \varepsilon \text{ ouvert contenant } A(X_0), \\ \text{il existe } \eta \text{ ouvert, contenant } X_0, \text{ tel} \\ \text{que } 1_\varepsilon .A.1_\eta = A.1_\eta \end{bmatrix}$$

- Supposons maintenant que l'opérateur A soit défini dans un voisinage de X_0 (c'est à dire qu'il existe un ouvert φ tel que $X_0 \in \varphi \subset déf(A)$), continu en X_0, et que $B \subset cogerme_{A(X_0)}$ (
Par hypothèse, il existe un ouvert ε, contenant $A(X_0)$, tel que

$1_\varepsilon \cdot B = 1_\varepsilon \cdot A$ (définition 10.2 du cogerme); le théorème (10.8) montre qu'il existe un ouvert η, contenant X_0, tel que $A.1_\eta = 1_\varepsilon .A.1_\eta$; on a donc $1_\varepsilon .B.1_\eta = A.1_\eta$, d'où $A.1_\eta < B.1_\eta$ et, a fortiori, $A.1_\eta .1_\varphi < B.1_\eta .1_\varphi$.

Or $\text{déf}(B.1_\eta .1_\varphi) \subset \eta \cap \varphi = \text{déf}(A.1_\eta .1_\varphi)$ (par définition de φ); donc $B.1_\eta .1_\varphi = A.1_\eta .1_\varphi$; $\eta \cap \varphi$ étant un ouvert qui contient X_0 , B appartient au germe de A en X_0; le cogerme est donc contenu dans le germe.

Supposons inversement cette condition réalisée; quel que soit le voisinage ouvert ε de $A(X_0)$, il est clair que $1_\varepsilon .A$ appartient au cogerme de A, donc à son germe; il existe donc un voisinage ouvert de X_0, η , tel que $[1_\varepsilon .A].1_\eta = A.1_\eta$; A est continu (condition 10.8) :

(10.9) Soit A un opérateur qui applique un voisinage de X_0 dans un espace topologique;

$$\left[A \text{ continu en } X_0 \right] \Leftrightarrow \left[\text{cogerme}_{A(X_0)}(A) \subset \text{germe}_{X_0}(A) \right]$$

- Soient A et B deux homéomorphismes locaux, tels que $A(X) = B(X) = Y$. Si $\text{cogerme}_Y(A) = \text{cogerme}_Y(B)$, on a $B \in \text{cogerme}_Y(A)$, donc $B \in \text{germe}_X(A)$ (th. 10.9), donc $\text{germe}_X(B) = \text{germe}_X(A)$.

Si $\text{germe}_X(B) = \text{germe}_X(A)$, on a $\text{cogerme}_Y(B^{-1}) = \text{cogerme}_Y(A^{-1})$ (th. 10.5); le résultat précédent montre que $\text{germe}_X(B^{-1}) = \text{germe}_X(A^{-1})$, d'où $\text{cogerme}_Y(B) = \text{cogerme}_Y(A)$:

(10.10) A et B étant deux homéomorphismes locaux tels que $A(X) = B(X) = Y$

$$[\text{germe}_X(A) = \text{germe}_X(B)] \Leftrightarrow [\text{cogerme}_Y(A) = \text{cogerme}_Y(B)]$$

Théorème :

(10.11) Soit E un espace topologique; C_X l'ensemble des opérateurs appliquant une partie de E dans E, conservant le point X, continus en X.
Les germes en X des éléments de C_X ont une loi de composition associative $\times$, définie par

$$\text{germe}(A) \times \text{germe}(B) = \text{germe}(A.B)$$

Il est clair que la formule (10.11) définit bien une loi de composition associative, sous la seule réserve qu'elle soit cohérente, c'est à dire que

$$[\text{germe}(A)=\text{germe}(A'),\text{germe}(B)=\text{germe}(B')] \Rightarrow [\text{germe}(A.B)=\text{germe}(A'.B')]$$

Supposons donc qu'il existe des ouverts F, G, contenant X, tels que $A.1_F = A'.1_F$, $B.1_G = B'.1_G$; B étant continu, il existe un ouvert H, contenant X, tel que $1_F.B.1_H = B.1_H$ (théorème 10.8) ; on a donc
$A.B.1_H.1_G = A.1_F.B.1_H.1_G = A'.1_F.B.1_H.1_G = A'.B.1_H.1_G = A'.B.1_G.1_H =$ $A'.B'.1_G.1_H$; comme $1_H.1_G$ est l'opérateur identique sur l'ouvert $H \cap G$, on voit que germe$(A.B)$ = germe$(A'.B')$

C.Q.F.D.

Théorème :

(10.12) Soit X un point de l'espace E.
Les germes des glissements conservant X forment un groupe pour la loi $\times$ (10.11); on l'appellera <u>groupe des germes de glissements au point X</u>.

Il suffit de vérifier qu'il y a un élément neutre (le germe de 1_E) et que tout élément germe(A) possède un inverse (c'est le germe de A^{-1}).

Remarques :

- On trouverait le même groupe en se limitant aux germes des glissements d'un prérecueil P engendrant le recueil R des glissements de E.

- On peut aussi définir la composition des cogermes de glissements au point X ; on obtient ainsi le même groupe (th. 10.10).

- Les glissements conservant le point X ne forment pas un groupe, sauf si l'espace E ne contient que deux ouverts (E et $\emptyset$). Dans ce cas, ce groupe est évidemment isomorphe au groupe des germes (car $[\text{germe}_X(A) = \text{germe}_X(B)] \Longleftrightarrow [\ A = B\ ]$).

Théorème :

(10.13) Soit F un isomorphisme local de E à E'.
Si $X' = F(X)$, il existe un isomorphisme Φ du groupe des germes de glissements de E en X sur le groupe des germes de glissements de E' en X', défini par

$$\Phi\ (\text{germe}_X(A)\ ) \quad = \quad \text{germe}_{X'}(F.A.F^{-1})$$

On montre d'abord que

$$[\ \text{germe}_X(A)=\text{germe}_X(A')\ ]\Rightarrow[\ \text{germe}_X(F.A.F^{-1})=\text{germe}_{X'}(F.A'.F^{-1})\ ]$$

(la démonstration utilise la continuité de F^{-1}) ; il en résulte la cohérence de la définition de Φ ; il est clair que

$$\Phi(\text{germe}_X(A)\times \text{germe}_X(B))= \Phi\ (\text{germe}_X(A)\times\text{germe}_X(1_{\text{déf}(F)}\times\text{germe}_X(B)))$$

$$= \Phi(\text{germe}_X(A.1_{\text{déf}(F)}.B))=\text{germe}_{X'}(F.A.1_{\text{déf}(F)}.B.F^{-1})=\text{germe}_{X'}(F.A.F^{-1}.F.B.F^{-1}\ )$$

$= \Phi(\text{germe}_X(A))\times \Phi\ (\text{germe}_X(B))$, donc que Φ est un homomorphisme; il reste à vérifier que Φ est un isomorphisme; cela résulte de la formule évidente:

$$\Phi^{-1}(\text{germe}_{X'}(A')) = \text{germe}_X(F^{-1}.A'.F)$$

C.Q.F.D.

Ainsi, la structure du groupe des germes de glissements de E en X ne dépend que de la <u>structure locale</u> en ce point; en particulier, elle est la même en tous les points d'un univers (7.3).

- Considérons un point X de l'espace E ; soit G_{gliss} le groupe des germes de glissements conservant X.

Les automorphismes locaux de E constituent un prérecueil, contenant le recueil des glissements ; donc les germes d'automorphismes locaux conservant X constituent un groupe G_{auto}, qui admet G_{gliss} comme sous-groupe.

Soit F un automorphisme local conservant X ; on sait (th. 10.10) qu'il lui correspond un isomorphisme de G_{gliss} défini par $\Phi(\text{germe}(A)) = \text{germe}(F.A.F^{-1})$

$$= \text{germe}(F) \times \text{germe}(A) \times \text{germe}(F)^{-1}$$

on voit que les éléments de G_{auto} transmutent les éléments de G_{gliss} en éléments de G_{gliss}, donc que G_{gliss} est un <u>sous-groupe distingué</u> de G_{auto}.

- Soit X un point de l'univers U où $G_{gliss} = G_{auto}$; F un automorphisme local non impuissant de U ; Y un point de déf(F).

U étant un univers, il existe des glissements A et B tels que $A(X) = Y$, $B(X) = F(Y)$; A, B, F appartenant au prérecueil des automorphismes, il en est de même de $B^{-1}.F.A$, qui conserve visiblement X ; par hypothèse, $B^{-1}.F.A$ a même germe en X qu'un glissement; il existe donc un ouvert V, contenant X, tel que $C = B^{-1}.F.A.1_V$ soit un glissement. Par suite $B.C.A^{-1} = B.B^{-1}.F.A.1_V.A^{-1}$ est un glissement ; or c'est la restriction de F à un voisinage ouvert de Y ; donc F, qui est régulier et qui coïncide localement avec des glissements, est un glissement (fin du § 3) ; U est parfait.

Soit X un point de l'espace E ; G_{gliss} le groupe des germes de glissements en X ; G_{auto} le groupe des germes d'automorphismes locaux en X .

(10.14) G_{auto} est un sous-groupe distingué de $G_{\cancel{gliss}}$; nous appellerons
glis
groupe d'imperfection le groupe quotient $G_{\cancel{gliss}}^{\ auto}/G_{\cancel{auto}\ glis}$; pour que E soit parfait , il est nécessaire que ce groupe se réduise à un élément; c'est suffisant si E est un univers.

§ 11 Racines.

Axiomatique des racines:

Soit E un espace, R le recueil de ses glissements.
Nous appellerons racine de l'espace E tout opérateur F tel que :

(11.1)
a) $[A \in R, X \in \text{déf}(A)] \Rightarrow [F(A)(X)$ est un opérateur non impuissant$]$

b) $[A$ et $B \in R, X \in \text{déf}(A.B)] \Rightarrow [F(A.B)(X) = F(A)(B(X)).F(B)(X)]$

c) $[X \in \Omega$, Ω ouvert de $E] \Rightarrow [F(1_{\Omega})(X) = F(1_E)(X) =$ opérateur régulier$]$

Théorème :

(11.2)
F étant une racine de l'espace E:

a) $F(1_E)(X)$ est l'opérateur identique sur un ensemble, que nous appellerons fibre de la racine F au point X.

b) Si $X \in \text{déf}(A)$, $F(A)(X)$ est un opérateur régulier qui applique la fibre au point X sur la fibre au point $A(X)$.

c) $[F(A)(X)]^{-1} = F(A^{-1})(A(X))$

Démonstration:

- En faisant dans la formule (11.1 b) $A = B = 1_E$, on voit que $F(1_E)(X)$ est égal à son carré; comme il est régulier, c'est nécessairement un opérateur identique. Nous désignerons par F_X son ensemble de définition (fibre en X).

- Soit A un glissement défini en X ; Y le point $A(X)$. Posons $F(A)(X) = P$; $F(A^{-1})(Y) = Q$. En appliquant plusieurs fois la formule (11.1,b) il vient :

$P.1_{F_X} = P$; $1_{F_Y}.P = P$ (d'où déf$(P) \subset F_X$, val$(P) \subset F_Y$) ;

$Q.P = 1_{F_X}$; $P.Q = 1_{F_Y}$ (d'où $F_X \subset$ déf(P) , $F_Y \subset$ val(P))

On a donc déf$(P) = F_X$, val$(P) = F_Y$; de même déf$(Q) = F_Y$, val$(Q) = F_X$; et les formules $P.Q = 1_{F_Y}$ et $Q.P = 1_{F_X}$ montrent que P et Q sont inverses, donc réguliers.

C.Q.F.D.

Remarque : il est évidemment loisible d'inclure quelques-uns des résultats du théorème (11.2) dans l'axiomatique (11.1) , sans changer sa valeur logique.

Exemples :

Considérons l'espace numérique R^n , muni de la <u>structure différentiable</u>, c'est à dire du recueil des opérateurs qui sont, ainsi que leur inverse, continuement différentiables dans un ouvert.

A étant un glissement, désignons par $D(A)(X)$ la matrice dérivée de A au point X , c'est à dire la matrice (d'ordre n) des dérivées partielles :

(11.3) $$[\, D(A)(X)\,]^j_k = \frac{\partial}{\partial x^k} [\, A(X)\,]^j$$

a) $D(A)(X)$, que l'on peut considérer comme opérateur linéaire appliquant R^n dans R^n , est évidemment un opérateur non impuissant.

b) La formule de dérivation des fonctions de fonctions s'écrit

$$D(A.B)(X) = D(A)(B(X)).\, D(B)(X)$$

c) Si A est l'opérateur identique sur un ouvert contenant X , il est clair que la matrice des dérivées partielles (11.3) est la matrice unité, donc l'opérateur identique sur R^n ; ainsi :

(11.4) L'opérateur D défini par (11.3) est une racine; sa fibre en tout point X de R^n est égale à R^n.

- Considérons maintenant l'espace ordinaire E, muni du prérecueil des déplacements. X étant un point de E, désignons par S_X la sphère de centre X, de rayon 1. A étant un déplacement, posons

(11.5) $$S(A)(X) = A.1_{S_X}$$

Il est clair que l'on a, quel que soit le point X et le déplacement B
$$1_{S_{B(X)}}.B.1_{S_X} = B.1_{S_X}$$

d'où, A étant un autre déplacement
$$A.B.1_{S_X} = A.1_{S_{B(X)}}.B.1_{S_X}$$

ou encore $S(A.B)(X) = S(A)(B(X)).S(B)(X)$, soit l'axiome (11.1,b) ; les autres se vérifient immédiatement; on a en particulier $S(1_E)(X) = 1_{S_X}$; d'où :

(11.6) La formule (11.5) définit une racine S ; la fibre de S au point X est la sphère S_X.

§ 12 Variance.

Définition, théorème :

(12.1) Soient R et S deux racines d'un même espace E ; R_X et S_X leurs fibres au point X.

- On appellera <u>isomorphisme</u> de R à S tout opérateur F tel que :

a) déf$(F) = E$; quel que soit X dans E, $F(X)$ est un opérateur régulier, appliquant R_X sur S_X.

b) Quel que soit le glissement A, et X dans déf(A) :

$$\times \qquad S(A)(X) = F(A(X)).R(A)(X).[F(X)]^{-1}$$

- Deux racines seront dites <u>isomorphes</u> s'il existe un isomorphisme de l'une à l'autre ; $\overset{?}{O}$ cette relation est une <u>équivalence</u> entre racines d'un même espace ; la classe d'une racine s'appellera <u>variance</u> de la racine.

Exemple : considérons , à côté de la racine S définie en (11.6) , la racine S' obtenue en remplaçant par a' le rayon a des sphères S_X. $\overset{?}{O}$ Si l'on appelle F(X) l'homothétie de sommet X , de puissance a'/a , on définit un isomorphisme de S à S'. En d'autres termes, la variance de la racine S ne dépend pas du choix du nombre a .

- On peut définir les automorphismes d'une racine comme étant les isomorphismes de cette racine à elle-même; ainsi, si on appelle F(X) la symétrie par rapport au point X , on définit un automorphisme de la racine S (11.6).

Théorème :

Soit R une racine de l'espace E ; F un opérateur faisant correspondre à chaque point X de E un opérateur régulier
(12.2) défini sur la fibre de R au point X .
$\overset{?}{O}$ L'opérateur S , défini par la formule (12.1)est une <u>racine</u>; sa fibre en X est val(F(X)) .

Il est clair que cette racine S est isomorphe à R.

Applications :

- Soit R une racine ; Z un élément de la fibre de R au point X . Posons F(X)(Z) = le couple $\binom{X}{Z}$; le procédé (12.2) donne une racine R' dont on peut dire :

R étant une racine de l'espace E , il existe une racine R' ,
(12.3) isomorphe à R , dont les fibres sont <u>deux à deux disjointes</u> ; on peut prendre

$$R'(A)(X)\left(\binom{X}{Z}\right) \equiv \binom{A(X)}{R(A)(X)(Z)}$$

- Considérons un groupe quelconque G ; notons $\perp$ sa loi de composition. Si l'on pose $T(X)(Y) = X \perp Y$, il résulte immédiatement des axiomes de groupe que les $T(X)$ sont des permutations de G (on les appelle <u>translations à gauche</u> du groupe) ; que T est un opérateur régulier ; que $T(X).T(Y)= T(X \perp Y)$; que $[T(X)]^{-1}= T(X^{-1})$; qu'il existe une seule translation à gauche amenant le point X sur le point Y,à savoir $T(Y \perp X^{-1})$. Supposons maintenant définie sur G une structure d'espace,de sorte que les translations à gauche soient des glissements. En fait, G est un univers,puisque les translations à gauche opèrent transitivement sur G. D'où la définition :

(12.4) On appellera <u>univers-groupe</u> tout ensemble muni d'une structure d'espace et d'une structure de groupe,les translations à gauche $T(X)$ étant des glissements. C'est nécessairement un univers.

Théorème :

(12.5) Soit R une racine définie sur l'univers-groupe G ; H sa fibre en l'élément neutre e de G.

Il existe alors une racine S , et une seule,qui vérifie :

a) $S(A)(e) = R(A)(e)$ si le glissement A conserve e ;

b) $S(T(X))(Y) = 1_H$ quels que soient X et Y dans G.

Cette racine S est isomorphe à R ; toutes ses fibres sont égales à H.

Démonstration :

1°) Unicité. Soit A un glissement; X un point de déf(A); Y le point $A(X)$.

Il est clair que l'opérateur $B = T(Y^{-1}).A.T(X)$ est un glissement qui conserve e ; que $A = T(Y).B.T(X^{-1})$. Si donc une racine S vérifie (a) et (b) , on a

$$S(A)(X) = S(T(Y).B.T(X^{-1}))(X)$$

$$= S(T(Y)(e) . S(B)(e) . S(T(X^{-1}))(X)$$

(double application de 11.1.b)

$$= R(B)(e) \quad (12.5 \text{ , a et b })$$

ce qui montre l'unicité de la racine éventuelle S ; il vient

$$S(A)(X) = R(T(Y^{-1}).A.T(X))(e)$$
$$= R(T(Y^{-1}))(Y).\ R(A)(X).R(T(X))(e)$$

2°) Existence. Posons $F(Z) = R(T(Z))(e)^{-1}$

soit (formule 11.2.c) $F(Z) = R(T(Z^{-1}))(Z)$

La dernière formule du 1° s'écrit

$S(A)(X) = F(A(X)).R(A)(X).\ F(X)^{-1}$

en la prenant pour définition de S, on voit que S est une racine isomorphe à R, de fibre H, puisque $F(Z)$ applique régulièrement la fibre de R en Z sur H (théorèmes 12.2 et 11.2 b). Reste à vérifier qu'elle remplit bien les conditions (12.5 a et b) ; cela résulte des propriétés des translations à gauche.

C.Q.F.D.

Exemple : l'espace R^n considéré comme groupe additif, et muni de la structure différentiable (voir plus haut, 11.3), peut être considéré comme univers-groupe. On peut appliquer le théorème (12.5) à toutes ses racines. L'application à la racine D ne donne rien de nouveau, puisque les translations $T(X)$ de R^n vérifient $D(T(X))(Y)$ = matrice unité.

Théorème :

(12.6) Soient R et S deux racines d'un <u>univers</u> U ; X_o un point de U.
Pour que R et S soient isomorphes, il est nécessaire et suffisant qu'il existe un opérateur régulier Φ, appliquant la fibre de R en X_o sur la fibre de S en X_o, tel que

$$\maltese \qquad S(A)(X_o) = \Phi\ .\ R(A)(X).\ \Phi^{-1}$$

pour tout glissement A conservant X_o.

Il est clair que si R et S sont isomorphes, (12.6 $\maltese$) est vérifiée en prenant $\Phi = F(X_o)$.

Partons inversement de (12.6 $\maltese$) ; soit X un point de E, B un glissement tel que $B(X_o) = X$. L'opérateur

$S(B)(X_o).\ \Phi.\ R(B)(X_o)^{-1}$ ne dépend que de X (et pas du choix de B); si on l'appelle $F(X)$, et si C est un glissement défini en X, ∂ $S(C)(X) = F(C(X)).R(C)(X).F(X)^{-1}$; F est bien un isomorphisme de R à S.

C.Q.F.D.

– Ce théorème montre en particulier que deux racines d'un univers sont isomorphes si elles coïncident en un point (c'est-à-dire si $R(A)(X) = S(A)(X)$ pour tous les glissements conservant ce point).

§ 13 Groupe structural.

(13.1) Soit X un point de l'espace E ; R une racine de E. L'ensemble des $R(A)(X)$, où A désigne un glissement conservant X, est un groupe de permutations de la fibre de R au point X ; on l'appellera <u>groupe structural</u> de R au point X.

On sait en effet que les $R(A)(X)$ sont des permutations de la fibre (11.2.b) ; que si A et B conservent X, $R(A)(X).R(B)(X) = R(A.B)(X)$, $[R(A)(X)]^{-1} = R(A^{-1})(X)$ (formules 11.1 b et 11.2 c).

C.Q.F.D.

Exemple : le groupe structural du fibreur de dérivation D défini en 11.3 est le groupe linéaire de R^n en tout point X (tout entier, pjisque si M est une matrice régulière, l'opérateur $A(X) = M.X$ appartient au recueil différentiable, et vérifie $D(A)(X) = M$).

(13.2) Soit A un glissement ; X un point de déf(A). ∂ Le transmuté par $R(A)(X)$ du groupe structural de la racine R en X est le groupe structural de R au point $A(X)$.

Par conséquent, en deux points d'un univers, les groupes structuraux d'une racine R sont <u>isomorphes</u> (comme groupes d'opérateurs).

Considérons un glissement A de l'espace E; un point X de déf(A); un ouvert Ω contenant X. Quelle que soit la racine R, on a

$$R(A.1_\Omega)(X)=R(A)(X).R(1_\Omega)(X)=R(A)(X).R(1_E)(X)=R(A.1_E)(X)=R(A)(X)$$

Par suite, si A' a même germe que A, il existe un Ω tel que $A.1_\Omega = A'.1_\Omega$ donc que

$R(A')(X)=R(A'.1_\Omega)(X)=R(A.1_\Omega)(X)=R(A)(X)$; d'où le

Théorème :

(13.3) Soit R une racine; A un glissement ; X un point de déf(A). L'opérateur $R(A)(X)$ ne dépend de A que par son germe au point X.

- Considérons un groupe G ; on sait que l'on appelle <u>homomorphisme</u> de G une application H de G dans un groupe G', telle que $H(X \perp Y) = H(X) \top H(Y)$, en désignant respectivement par $\perp$ et $\top$ les lois de composition de G et G'. Il est clair que H transforme l'élément neutre de G en l'élément neutre de G', que $H(X^{-1})=[H(X)]^{-1}$; que val(H) est un sous-groupe de G'; on sait que l'image réciproque par H de l'élément neutre de G' est un sous-groupe distingué de G, appelé <u>noyau</u> de H, et que le groupe val(H) est isomorphe au groupe quotient de G par ce noyau.

Si G' est le groupe des permutations d'un ensemble F, nous dirons que H est une <u>représentation</u> du groupe G. En d'autres termes,

(13.4) Une représentation H est un opérateur défini sur un groupe G, tel que

$$\left[\forall X, Y \in G\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} H(X) = \text{permutation de l'ensemble } F \\ H(X \perp Y) = H(X).H(Y) \end{array}\right]$$

Nous dirons que F est la <u>fibre</u> de la représentation.

Exemple: nous avons vu que si on pose, dans un groupe quelconque G, $T(X)(Y) = X \perp Y$, T est une représentation de G, ayant G pour fibre.

-On dira que la représentation H est <u>linéaire</u> (resp. unitaire, affine,etc) si les éléments de H sont des opérateurs linéaires (resp.unitaires,affines,etc).

2

On dit souvent <u>représentation</u> avec le sens de <u>représentation linéaire</u>.

Cette terminologie permet d'énoncer le théorème :

(13.5) R étant une racine de l'espace E , X un point de E , il existe une <u>représentation</u> H du groupe des germes de glissements (en X) sur le groupe structural de R (en X) , définie par

$$\text{※} \qquad H(\text{germe}_X(A)) = R(A)(X)$$

pour tout glissement A conservant X .

Il résulte en effet de (13.3) qu'il existe un opérateur H vérifiant (13.5 ※); il est clair que son domaine de valeurs est le groupe structural.

H est bien une représentation,parceque

$$\begin{aligned} H(\text{germe}(A) \times \text{germe}(B)) &= H(\text{germe}(A.B)) && (\text{définition } 10.11) \\ &= R(A.B)(X) && (\text{définition } 13.5) \\ &= R(A)(X) \,.\, R(B)(X) && (\text{" } 11.1.b) \\ &= H(\text{germe}(A)) \,.\, H(\text{germe}(B)) \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

Réciproque de (13.5):

(13.6) Si E est un <u>univers</u>, X un point de E , H une représentation du groupe des germes de glissement en X , il existe une racine R telle que

※ $H(\text{germe}_X(A)) = R(A)(X)$ pour tout glissement A conservant X ; R est unique,à un isomorphisme près.

a) Unicité de la variance : si deux racines R et R' vérifient (13.6 ※) , R(A)(X) = R'(A)(X) pour tout glissement A conservant X ; R et R' sont donc isomorphes (th. 12.6).

b) Existence. Considérons les couples $\begin{pmatrix} A \\ Z \end{pmatrix}$, où A est un glissement défini en X, et Z un point de la fibre de la représentation H. Définissons la relation $\sim$ en posant :

$$\begin{pmatrix} A \\ Z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A' \\ Z' \end{pmatrix} \iff \begin{bmatrix} A(X) = A'(X) \\ Z' = H(\text{germe}(A'^{-1}.A))(Z) \end{bmatrix}$$

? cette relation $\sim$ est une équivalence; ? si le glissement B est défini au point $A(X)$, et si $\binom{A}{Z} \sim \binom{A'}{Z'}$, $\binom{B.A}{Z} \sim \binom{B.A'}{Z'}$.

Y étant un point de déf(B), on a donc le droit de poser

$$S(B)(Y)\left(\text{classe}\begin{pmatrix} A \\ Z \end{pmatrix}\right) = \text{classe}\begin{pmatrix} B.A \\ Z \end{pmatrix}$$

pour tout glissement A tel que $A(X) = Y$.

? S est une racine de E ; sa fibre S_Y au point Y est l'ensemble des classes des couples $\binom{A}{Z}$, A étant un glissement tel que $A(X) = Y$.

Z étant un élément de la fibre de la représentation H, posons $\Phi(Z) = \text{classe}\begin{pmatrix} 1_E \\ Z \end{pmatrix}$; il est immédiat que Φ est un opérateur régulier, qui applique la fibre de H dans la **fibre** S_X ; en fait, val(H) est égal à S_X, parceque si le glissement A conserve X

$$\begin{pmatrix} A \\ Z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1_E \\ H(\text{germe}(A))(Z) \end{pmatrix}$$

et par suite

$$\text{classe}\begin{pmatrix} A \\ Z \end{pmatrix} = \Phi\big(H(\text{germe}(A))(Z)\big) \tag{13.7}$$

Si donc l'on pose $F(Y) = 1_{S_Y}$ pour $Y \neq X$, et $F(X) = \bar{\Phi}$, l'opérateur $F(X)^{-1}$ est défini pour tout X sur la fibre S_X , l'opérateur R

$$R(B)(Y) = F(B(Y))^{-1}.S(B)(Y).F(Y)$$

est une racine (théorème 12.2); si A conserve X, on a donc

$R(A)(X) = \bar{\Phi}^{-1}.R(A)(X).\bar{\Phi}$,d'où $R(A)(X)(Z) = [\bar{\Phi}^{-1}.S(A)(X)]\left(\text{classe}\begin{pmatrix}1_E\\ Z\end{pmatrix}\right)$

$= \bar{\Phi}^{-1}\left(\text{classe}\begin{pmatrix}A\\ Z\end{pmatrix}\right)$ par définition de S

$= H(\text{germe}(A))(Z)$ (formule 13.7)

d'où $R(A)(X) = H(\text{germe}(A))$

C.Q.F.D.

Définition :

(13.8) On appellera <u>noyau</u> de la racine R au point X de l'espace E ,l'ensemble des glissements A tels que

$$A(X) = X , \quad R(A)(X) = R(1_E)(X)$$

– Il est clair que le noyau de R au point X est un <u>recueil</u> d'espace E , et que les glissements conservant E en sont des <u>automorphismes locaux</u> .

Théorème :

Soit X un point de <u>l'univers</u> U ; N un ensemble de glissements conservant X .

Les conditions (a) et (b) sont équivalentes :

(13.9) a) Il existe une racine R telle que N soit le noyau de R en X ;

b) Il existe un sous-groupe distingué Γ du groupe des germes de glissements en X tel que

$$A \in N \iff \text{germe}_X(A) \in \Gamma$$

1° Supposons (a) . H étant la représentation définie en (13.5), il est clair que $R(A)(X) = R(1_E)(X)$ s'écrit
$H(\text{germe}(A)) = H(\text{germe}(1_E))$, ou encore $\text{germe}(A) \in \text{noyau}(H)$;
ce noyau Γ est, on le sait, un sous-groupe distingué.

2° Supposons (b). On sait qu'il existe un homomorphisme H_o du groupe G des germes ayant Γ comme noyau (homomorphisme canonique $G \to G / \Gamma$); une représentation fidèle T du groupe G / Γ (translations à gauche); $H = T.H_o$ est donc une représentation du groupe des germes ayant Γ comme noyau ; la racine R que lui fait correspondre le théorème (13.6) vérifie (a).

C.Q.F.D.

Exemples :

(13.10) Soit E un espace, F un ensemble ; $\overset{?}{O}$ l'opérateur R :

$$R(A)(X) = 1_F \text{ quel que soit le glissement } A \text{ défini}$$

en X est une racine, dont la fibre est F en tout point. On l'appellera <u>racine triviale</u> de fibre F .

Il est clair que le noyau en X de toute racine triviale est l'ensemble des glissements conservant X , donc que le sous-groupe Γ est confondu avec le groupe G (notations de 13.9).
Inversement :

(13.11) $\overset{?}{O}$ Pour que le noyau d'une racine R de l'univers U au point X soit l'ensemble des glissements conservant X , il faut et il suffit que R soit isomorphe à une racine triviale.

- Une racine triviale a donc le plus grand noyau possible en un point X . De même, le théorème (13.9) montre qu'il existe , sur un univers U , une racine R ayant le plus petit noyau possible, c'est-à-dire telle que

$$\left[A \text{ conserve } X, R(A)(X) \text{ identique}\right] \Longleftrightarrow \left[\text{germe}_X(A) = \text{germe}_X(1_E)\right] \tag{13.12}$$

On peut en construire un autre exemple sur un espace E quelconque:

Soit en effet A un glissement de l'espace E; X un point de $\text{déf}(A)$; F_1 et F_2 deux opérateurs à valeurs dans E, ayant même cogerme en X.

∂ $A.F_1$ et $A.F_2$ ont même cogerme en $A(X)$; on peut donc définir un opérateur R par

(13.13) $$R(A)(X)(\text{cogerme}_X(F)) = \text{cogerme}_{A(X)}(A.F)$$

pour tout opérateur F à valeurs dans E.

∂ R est une racine ; si $R(A)(X)$ est un opérateur identique, il vient, en prenant $F = 1_E$

$$\text{cogerme}_X(A) = \text{cogerme}_X(1_E)$$

d'où, A et 1_E étant des homéomorphismes locaux, $\text{germe}_X(A) = \text{germe}_X(1_E)$; R possède bien le plus petit noyau.

Théorème :

Soient R et S deux racines d'un espace E ; X un point de E.

1°) Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(a) $\text{noyau}_X(R) \subset \text{noyau}_X(S)$

(b) il existe une représentation H du groupe structural de R en X sur le groupe structural de S en X telle que,

(13.14) pour tout glissement A conservant X,

$$S(A)(X) = H(R(A)(X))$$

2°) Si E est un univers, la condition (a) ou (b) est indépendante du point X ; on l'exprimera en disant que S est <u>subordonnée</u> à R.

En effet :

-∂ (b) ⇒ (a)

-Supposons (a) vérifiée; soient H_1 et H_2 les deux représentations du groupe des germes telles que

$$R(A)(X) = H_1(\text{germe}_X(A)) \quad , \quad S(A)(X) = H_2(\text{germe}_X(A))$$

(théorème 13.5)

La condition (a) exprime que le noyau de H_1 est contenu dans le noyau de H_2; par suite

$$[H_1(Z) = H_1(Z')] \Leftrightarrow [Z^{-1} \times Z' \in \text{noyau } (H_1)] \Rightarrow [H_2(Z)=H_2(Z')];$$

il existe donc un opérateur H, défini sur $\mathrm{val}(H_1)$, tel que $H_2 = H.H_1$; H est un homomorphisme, donc une représentation du groupe structural de R sur le groupe structural de S ; l'égalité $H_2 = H.H_1$ exprime bien (13.14 ✗).

Supposons que E soit un univers, que (a) soit vérifiée, et que le glissement A' appartienne au noyau de R au point X'.

Il existe un glissement B tel que $B(X) = X'$; on trouve

$$R(B^{-1}.A'.B)(X)=R(B^{-1})(X').R(A')(X').R(B)(X)$$

$$=R(B^{-1})(X').R(1_E)(X').R(B)(X)=R(B^{-1}.B)(X)$$; donc $B^{-1}.A'.B$ appartient au noyau de R en X, donc aussi au noyau de S ; en développant $S(B^{-1}.A'.B)(X)=S(1_E)(X)$, il vient de même $S(A')(X')=S(1_E)(X')$; ainsi, tout élément A' du noyau de R en X' appartient au noyau de S en X'; la condition (b) est vérifiée en X'.

C.Q.F.D.

- Application : supposons que deux racines R et S aient même noyau en X ; alors elles sont subordonnées l'une à l'autre, la représentation H (13.14 ✗) est fidèle, les groupes structuraux de R et S sont isomorphes (comme groupes abstraits); ceci sera réalisé à fortiori s'ils sont isomorphes comme groupes d'opérateurs, c'est-à-dire si R et S sont isomorphes (th.12.6)

On voit donc qu'on a obtenu une <u>classification des racines</u> d'un univers U : les racines ont une partition par <u>variances</u>; les variances ont une partition par <u>noyaux</u> ; les noyaux correspondent biunivoquement aux <u>sous-groupes distingués</u> du groupe des germes de glissements en un point (th.13.9).

- Les racines triviales sont subordonnées à toutes les autres (puisque leur noyau est le plus petit); de même, toute racine est subordonnée à la racine des cogermes, définie en (13.13).

- Exemples:

- Considérons, dans l'espace R^n, une structure d'univers admettant la topologie usuelle, et telle que tous les glissements vérifient localement la condition de Lipschitz (c'est le cas par exemple de la structure différentiable).

r étant un nombre ≥ 0, appelons N_r l'ensemble des glissements A conservant 0 et vérifiant la condition

$$\lim_{|X| \to 0} \frac{|A(X) - X|}{|X|^r} = 0$$

Il est clair que cette condition ne fait intervenir que le germe de A au point 0 ; les germes d'éléments de A forment un sous-groupe distingué du groupe des germes ; par suite N_r est le noyau d'une racine R_r, que l'on peut construire par le procédé de la démonstration (13.9).

Une racine quelconque de cet univers sera dite <u>d'ordre fini</u> si elle est subordonnée à l'une des R_r; on appellera <u>ordre</u> de la racine S la borne inférieure des r telle que S soit subordonnée à R_r (donc que $N_r \subset \text{noyau}_0(S)$). (Il est clair que $r < r' \Rightarrow N_r \supset N_{r'}$).

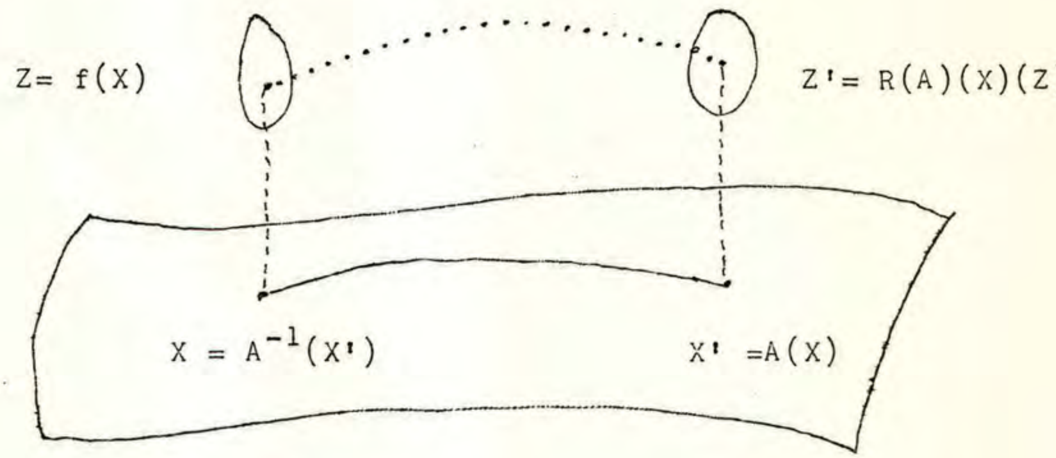
- On peut vérifier que les racines triviales sont d'ordre 0 ; que la racine de dérivation D (11.3) est d'ordre 1 ; que si les éléments du recueil sont infiniment différentiables, l'ordre d'une racine R est un nombre entier p (s'il est fini); $R(A)(X)$ s'exprime alors avec les dérivées de A au point X jusqu'à l'ordre p ; que si les éléments du recueil sont localement affines (déplacements, transformations de Lorentz, etc), toutes les racines sont d'ordre 0 (si elles sont isomorphes à une racine triviale) ou 1 (dans le cas contraire).

§ 14 : Champs .

(14.1) Soit R une racine de l'espace E .
On appellera R-champ tout opérateur f , défini dans un ouvert de E , tel que

$$[X \in \text{déf}(f)] \Rightarrow [f(X) \in \text{fibre de } R \text{ au point } X]$$

(14.2) - Un champ sera dit global (sur E) si son ensemble de définition est E tout entier.



Soit f un R-champ , A un glissement de E .
L'image par A de l'ouvert $\Omega = \text{déf}(f)$ est un ouvert Ω' ; quel que soit X' dans Ω' , $X = A^{-1}(X')$ appartient à déf(f) ; $Z = f(X)$ appartient donc à la fibre au point X ; $Z' = R(A)(X)(Z)$ est un élément de la fibre au point X' (th. 11.2.b). D'où l'énoncé :

(14.3) Soit f un **R-champ** ; A un glissement. On appellera image de f par A , et on notera $A^R(f)$, l'opérateur tel que

$$A^R(f)(A(X)) \equiv R(A)(X)(f(X))$$

$A^R(f)$ est un R-champ, dont l'ensemble de définition est l'image par A de déf(f).

Remplaçons dans (14.3) A par $A.B$; il vient :

$[A.B]^R(f)([A.B](X)) = R(A.B)(X)(f(X))$

$= R(A)(B(X))(R(B)(X)(f(X)))$ (axiome 11.1.b des racines)

$= R(A)(B(X))(B^R(f)(B(X)))$ (formule 14.3)

$= A^R(B^R(f))(A(B(X)))$ (formule 14.3)

$= [A^R.B^R](f)([A.B](X))$

comme il est clair que $\text{déf}([A^R.B^R](f)) = \text{val}(A.B.1_{\text{déf}(f)})$ $= \text{déf}([A.B]^R(f))$, il vient :

(14.4) Quelle que soit la racine R, les glissements A et B, on a:

$$[A.B]^R = A^R.B^R$$

Soit Ω un ouvert ; X un point de $\Omega \cap \text{déf}(f)$; comme $R(1_\Omega)(X)$ est l'opérateur identique sur la fibre de R en X (th.11.2.a), la formule (14.3) donne

$$[1_\Omega]^R(f)(X) = f(X)$$

d'où la formule :

(14.5)
$$[1_\Omega]^R(f) = f.1_\Omega$$

si Ω est un ouvert, et si f est un R-champ.

Remarques : La formule (14.4) montre que la correspondance $A \to A^R$ est une sorte d' "homomorphisme de recueil" ; mais les opérateurs A^R ne sont pas réguliers en général (parceque si E comporte au moins deux ouverts non vides disjoints Ω et Ω', tous les champs f dont l'ensemble de définition est Ω' sont transformés par $[1_\Omega]^R$ en le champ impuissant).

- La formule (14.4) permettra aussi, si aucune confusion n'est à craindre, d'écrire $A(f)$ au lieu de $A^R(f)$, c'est-à-dire de prolonger canoniquement les glissements à tous les champs.
- De la définition (14.3) résulte évidemment la formule équivalente

(14.6)
$$A^R(f)(X) = R(A)(A^{-1}(X))\,(f(A^{-1}(X)))$$

(14.7) γ Si la racine R est triviale,

$$A^R(f) = f.A^{-1}$$

Définition :

(14.8) Une famille Φ de R-champs est dite <u>invariante</u> si

$$[\, f \in \Phi \;,\; A = \text{glissement} \,] \Rightarrow [\, A^R(f) \in \Phi \,]$$

Exemple : dans la plupart des théories physiques, les solutions des "équations de champ" sont des familles invariantes.

Remarques :

Si f appartient à une famille invariante Φ, toutes les restrictions de f à des ouverts appartiennent aussi à Φ (cf. 14.5).

- Ψ étant une famille quelconque de R-champs, γ l'ensemble Φ des $A^R(f)$ (A = glissement, $f \in \Psi$) est une <u>famille invariante</u> ; il est clair que c'est <u>la plus petite famille invariante contenant Ψ</u>.

- En particulier, f étant un R-champ, la plus petite famille invariante contenant f se compose de l'ensemble des $A^R(f)$.

Théorème :

définition :

(14.9) Soit f un R-champ. On dira que le glissement A <u>invarie</u> le champ f si

$$\text{déf}(A) \subset \text{déf}(f) \;,\; \text{val}(A) \subset \text{déf}(f) \;,\; A^R(f) < f$$

Les glissements qui invarient f forment un recueil, dont l'espace est déf(f).

Soit E l'ensemble des glissements qui invarient f.

- Si A et B appartiennent à E, on a

$[A.B]^R(f) = A^R(B^R(f)) < A^R(f) < f$; donc $A.B \in E$.

- Si $A \in E$, il est clair que

$\text{déf}([A^{-1}]^R(f)) = \text{val}(A^{-1}.1_{\text{déf}(f)}) = \text{val}(A^{-1}) = \text{déf}(A)$

On a d'autre part $f.1_{\text{déf}(A)} = [1_{\text{déf}(A)}]^R(f) = [A^{-1}.A]^R(f)$

$= [A^{-1}]^R(A^R(f)) < [A^{-1}]^R(f)$, qui comparé à ce qui précède, donne $[A^{-1}]^R(f) = f.1_{\text{déf}(A)} < f$, d'où $A^{-1} \in E$.

- Supposons que les $A_j \in E$, et que $\sup(A_j)$ soit régulier; alors $\sup(A_j)$ est un glissement A , et l'on peut écrire $A_j = 1_{\Omega_j}.A$, $\bigcup_j(\Omega_j) = \text{val}(A)$. Les relations $A_j^R(f) < f$ s'écrivent $[1_{\Omega_j}]^R.A^R(f) = A^R(f).1_{\Omega_j} < f$; par suite la borne supérieure des $A^R(f).1_{\Omega_j}$ est $<$ f ; or elle s'écrit $A^R(f).1_{\text{val}(A)} = [1_{\text{val}(A)}]^R.A^R(f) = A^R(f)$; donc $A \in E$.

Ainsi E vérifie bien les axiomes (2.10) des recueils;son espace est visiblement déf(f) , puisque δ $1_{\text{déf}(f)} \in E$.

C.Q.F.D.

- Si l'ensemble des glissements qui invarient f est transitif sur déf(f), on dira que le champ f est <u>homogène</u>.

Considérons par exemple un univers-groupe G ; une racine R de G . On sait que l'on peut,par un isomorphisme,supposer que la fibre H de R est la même en tout point,et que $R(A)(X) = 1_H$ si A est une translation à gauche du groupe (th.12.5).

- Un R-champ f défini sur G est dit <u>invariant à gauche</u> sur le groupe si toutes les translations à gauche l'invarient; le condition $A^R(f) = f$ s'écrit alors,puisque $R(A)(X)=1_H$, $f(X) = \text{Cte}$ (formule 14.3,en remarquant que les translations à gauche sont transitives sur G).

Ainsi :

(14.10) Si R est une racine de l'univers-groupe G , et si Z est un élément de la fibre de R en l'élément neutre e , il existe un seul R-champ f , invariant à gauche,et tel que $f(e) = Z$.

(14.11) - On peut aussi trouver ce résultat sans supposer la condition $R(A)(X)= 1_H$; δ le champ invariant à gauche est donné par

$f(X) = R(T(X))(e)(Z)$, $T(X)$ étant la translation à gauche associée à X .

-Soit R une racine de l'espace E ; X un point de E ; f et g deux R-champs.
Si f et g ont même germe en X , il existe un ouvert Ω , contenant X , tel que

$$f.1_{\Omega} = g.1_{\Omega}$$

Quel que soit le glissement A défini en X , il existe un ouvert Ω', contenant $A(X)$, tel que $1_{\Omega'}.A = A.1_{\Omega}$;
on a donc
$A^R(f).1_{\Omega'} = [1_{\Omega'}]^R.A^R(f) = [1_{\Omega'}.A]^R(f) = [A.1_{\Omega}]^R(f) = A^R(f.1_{\Omega})$,

de même $A^R(g).1_{\Omega'} = A^R(g.1_{\Omega})$; par suite $A^R(f).1_{\Omega'}$ $= A^R(g).1_{\Omega'}$, les champs $A^R(f)$ et $A^R(g)$ ont même germe au point $A(X)$. On peut donc définir un opérateur S par la relation

(14.12) $$S(A)(X)(\text{germe}_X(f)) = \text{germe}_{A(X)}(A^R(f))$$

(14.13) Soit R une racine ; l'opérateur S , défini par la formule (14.12) (où A désigne un glissement, X un point de déf(A) et f un R-champ) est une <u>racine</u> ; on l'appellera <u>racine des germes de R-champs</u>.

- On peut trouver des cas où la racine S n'est pas isomorphe à R , et n'a pas le même noyau ; en fait, c'est la racine R qui est subordonnée à la racine S ; on le vérifie aisément, moyennant l'axiome du choix.
- Un cas particulier important est celui où l'espace E ne comporte que deux ouverts (E et $\emptyset$); les champs sont soit globaux, soit impuissants; deux champs qui ont même germe en un point X coïncident ; on peut donc identifier les germes de champs aux champs.

Pour qu'il n'y ait que deux ouverts, il faut et il suffit que les glissements non impuissants forment un groupe de permutations de E . D'où l'énoncé :

(14.14) Soit E un ensemble, muni de la structure d'espace définie par un groupe G de permutations.
R étant une racine de E , on définit une racine S en posant

$$S(A)(X)(f) = A^R(f)$$

pour tout $A \in G$, tout $X \in E$, et tout R-champ f .

Il est clair dans ce cas que S(A)(X) ne dépend pas de X , et que toutes les fibres de S sont égales.

§ 15 : Constructions de racines .

Rappelons d'abord les procédés de construction déjà rencontrés:

- Les racines triviales (13.10) ;
- Les racines isomorphes à une racine donnée (12.2); le théorème (12.5) en donne un cas particulier important (univers-groupes)
- Les racines déduites (sur un univers) d'une représentation du groupe des germes de glissements en un point (13.6); on sait que toutes les racines d'un univers s'obtiennent par ce procédé, à un isomorphisme près (Cf.13.5)
- comme cas particulier, les représentations du groupe structural d'une racine R en un point X de l'univers E définiront (à un isomorphisme près) toutes les racines subordonnées à R (13.14).
- Nous avons vu que les cogermes d'opérateurs à valeur dans un espace E définissent une racine (13.13), à laquelle toutes les autres sont subordonnées.
- A toute racine R correspond la racine des germes de R-champs (14.13) , à laquelle R est subordonnée.

Nous allons maintenant donner d'autres constructions de racines.

<u>Changement de recueil</u>.

Soit E un espace; G le recueil de ses glissements ; G' un recueil contenu dans E.

Il est clair que l'espace de G' est une partie ouverte E' de E.

Soit R une racine de l'espace E ; appelons R' la restriction de R à G' ; ce qui signifie

(15.1) $$R'(A)(X) = R(A)(X) \quad \text{pourvu que } A \in G'$$

Il est clair que R' vérifie les axiomes (11.1) des racines; donc:

(15.2) R étant une racine de l'espace E, G' un recueil de glissements de E, la restriction R' de R à G', définie par (15.1) est une racine de l'espace E' de G'.

Il est clair que si $X \in E'$ (donc $X \in E$), la fibre de R' en X est la même que la fibre de R ; que le groupe structural de R' (ensemble des $R(A)(X)$ pour les A tels que $A \in R'$, $A(X) = X$) est un <u>sous-groupe</u> du groupe structural de R ; que tout R'-champ f est aussi un R-champ.

- Deux racines R et S de E, distinctes, peuvent avoir évidemment la même restriction à E', ou simplement devenir isomorphes alors qu'elles ne l'étaient pas (ainsi, les vecteurs et covecteurs de R^3, lorsqu'on se limite au sous-recueil des déplacements euclidiens); leurs restrictions peuvent avoir même noyau, sans que R et S l'aient (ainsi, les <u>connexions</u> de l'univers de la Relativité Générale deviennent, en Relativité Restreinte, des <u>tenseurs</u> ; or les connexions correspondent à des racines d'ordre 2, les tenseurs à des racines d'ordre 1 (voir la fin du § 13)). Ainsi, la restriction du recueil peut faire <u>confluer</u> des variances ou des noyaux; il n'y a donc pas unicité pour le problème du prolongement des racines par augmentation du recueil.

- Cependant un cas particulier important présente moins de singularités; c'est celui où E' est un <u>sous-espace ouvert</u> de E, c'est-à-dire où le recueil G' est constitué par les $1_{E'} \cdot A \cdot 1_{E'}$, $A \in G$ (th. 4.3). Il n'y a évidemment plus de confluence de variances ou de noyaux. De plus on a le théorème :

(15.3) Soit E' un sous-univers ouvert, non vide, de l'univers E ; R' une racine de E'.
Il existe alors une racine R de E, dont la restriction à E' coïncide avec R' ; elle est unique, à un isomorphisme près.

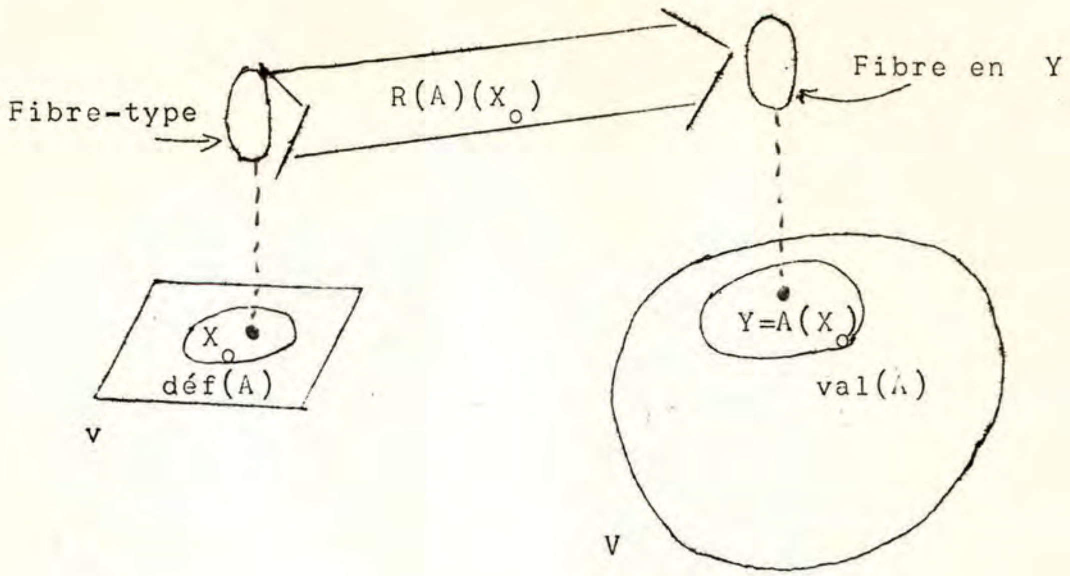
- On peut déduire ce résultat des théorèmes de représentations; X étant un point de E', A un glissement de E' conservant X, on peut définir une représentation H du groupe des germes en posant $H(\mathrm{germe}_X(A)) = R'(A)(X)$; or les glissements de E ou de E' qui conservent X ont mêmes germes ; on a donc défini une représentation du groupe des germes de E ; il lui correspond (th. 13.6) une racine R_1 de E, dont la restriction R'_1 à E' est isomorphe à R'. On peut alors construire une racine R de E, isomorphe à R_1, et dont la restriction à E' coïncide avec R.

C.Q.F.D.

Application : Considérons un univers V, localement isomorphe à un univers-type U (Cf. § 9). On sait construire (en supposant U et V disjoints) une structure d'univers sur $W = U \cup V$, de sorte que U et V en soient des sous-univers ouverts.
Ainsi, toute racine R, définie sur U ou sur V, peut se prolonger à W (ce prolongement n'est canonique qu'à un isomorphisme près, et seulement dans le cas où la structure locale est parfaite (th. 8.5)).

Alors l'opérateur $R(A)(X)$ est défini (pour $X \in \mathrm{déf}(A)$), si A est un <u>glissement de l'univers V</u>, un glissement de l'univers U (<u>changeur de carte</u> notamment), une <u>carte</u> ou une <u>cocarte</u> (inverse de carte).

Choisissons en particulier un point X_0 de l'univers-type U; appelons <u>fibre-type</u> la fibre de R en X_0 ; quel que soit le point Y de V, il existe une cocarte A telle que $A(X_0) = Y$; l'opérateur $R(A)(X_0)$ sera une application régulière de la fibre-type sur la fibre en Y, qu'on appellera <u>repère</u> en Y.



- Si f est un R-champ défini dans une partie de V, et B une carte, l'image par B du champ f sera un R-champ défini dans une partie de U; elle se note évidemment $B^R(f)$. Il est clair que tout R-champ f défini dans V est entièrement déterminé par les champs $F_j^R(f)$, les F_j étant les cartes d'un <u>atlas</u> (§ 9).

- <u>Sous-racines.</u>

Définition , théorème :

Soient R et S deux racines de l'espace E ; R_X et S_X leurs fibres en un point X.

- On dira que S est une <u>sous-racine</u> de R si, pour tout glissement A et pour tout X dans déf(A):

$$S(A)(X) < R(A)(X)$$

(15.4) -Dans ce cas, S_X est une <u>partie</u> de R_X ; δ S_X est <u>invariante par le groupe structural</u> de R en X.

- Soit inversement R une racine de l'<u>univers</u> E ; X un point de E ; F une partie de la fibre R_X <u>non vide et invariante par le groupe structural en X</u> ; δ il existe alors <u>une seule sous-racine</u> S telle que $S_X = F$.

Cet énoncé entraîne évidemment le suivant :

- Une racine sera dite <u>irréductible</u> si elle n'admet pas d'autre sous-racine qu'elle même.

(15.5) -Pour qu'une racine d'un univers E soit irréductible, il faut et il suffit qu'en un (resp. tout) point X de E, le groupe structural soit transitif sur la fibre.

Soit R une racine de l'univers E ; Z_o un point de la fibre de R en X_o.

- Il existe une seule sous-racine irréductible R' de R, telle que

δ
$$Z_o \in R'_{X_o} \quad ;$$

On dira que R' est la sous-racine irréductible engendrée par

(15.6) le couple (X_o , Z_o).

- Quel que soit X dans E, la fibre R'_X est l'ensemble des $R(A)(X_o)(Z_o)$, A parcourant l'ensemble des glissements tels que $A(X_o) = X$.

On voit donc que sur un univers, les sous-racines irréductibles d'une racine R correspondent aux classes de transitivité du groupe structural en un point.

- Soit R une racine irréductible ; si on réduit le recueil des glissements, on diminue aussi le groupe structural de R en un point; par suite, le nombre de classes de transitivité sur la fibre augmente; <u>une racine irréductible peut cesser de l'être lorsqu'on diminue le recueil</u>.

- Il est clair que si le glissement A conserve X, et si S est une sous-racine de R, la correspondance

$$S(A)(X) = R(A)(X).1_{S_X}$$

est un homomorphisme de $R(A)(X)$ à $S(A)(X)$; donc que (déf. 13.14) :

(15.7) Toute sous-racine S d'une racine R est <u>subordonnée</u> à R.

Exemples :

I : Considérons la racine~~s~~ de dérivation D, définie sur R^n (11.3); on a vu que son groupe structural est le groupe linéaire de R^n; on sait que ce groupe admet deux classes de transitivité; il existe donc deux sous-racines de D, qui sont irréductibles : celle dont la fibre se réduit à 0, qui est triviale ; la racine D' définie par $D'(A)(X)(Z)=D(A)(X)\,Z$ pour $Z \neq 0$.

II : Considérons une racine R de l'espace E ; une famille invariante Φ de R-champs (déf.14.8). Désignons par T_X l'ensemble des germes en X d'éléments de Φ.

Soit Z un élément de T_X: $Z = \text{germe}_X(f)$, $f \in \Phi$. S désignant la racine des germes de R-champs (14.12), on a évidemment

$S(A)(X)(Z) = S(A)(X)(\text{germe}_X(f)) = \text{germe}_{A(X)}(A^R(f)) \in T_{A(X)}$;

donc :

(15.8) Soit R une racine de l'espace E ; S la racine des germes de R-champs. A toute famille invariante Φ de R-champs correspond une sous-racine de S, obtenue par restriction de $S(A)(X)$ aux germes en X d'éléments de Φ.

III : Soit X un point de l'espace E ; G_X l'ensemble des cogermes en X de glissements de E ; Z un élément de G_X : $Z = \text{cogerme}_X(B)$, B = glissement de E.

La définition (13.13) de la racine R des cogermes donne

$$R(A)(X)(Z) = R(A)(X)(\text{cogerme}_X(B)) = \text{cogerme}_{A(X)}(A.B) \in G_{A(X)}$$

pour tout glissement A défini en X ; donc :

(15.9) La racine R des cogermes d'un espace E (13.13) admet une <u>sous-racine</u> S que l'on obtient en restreignant $R(A)(X)$ aux <u>cogermes en X de glissements de E</u>.

- ? La racine S est <u>irréductible</u>.
- ? S admet en tout point X de E le même noyau que R, à savoir le plus petit de tous; toute racine de l'espace E

est donc subordonnée à S , comme à R .

- Considérons maintenant une racine R quelconque d'un espace E ; une sous-racine S de R .

Soit f un S-champ ; quel que soit X dans $\text{déf}(f)$, $f(X)$ est un élément de S_X , donc de R_X . Si A est un glissement de E , on a évidemment

$$A^S(f)(A(X)) = S(A)(X)(f(X)) = R(A)(X)(f(X)) = A^R(f)(A(X)) ;$$

d'où l'énoncé :

(15.10) Si S est une sous-racine de la racine R , on a pour tout glissement A

$$A^S < A^R ;$$

l'ensemble des S-champs est une <u>famille invariante de R champs</u>.

- Application : supposons qu'en un point X_o d'un univers U , il existe un élément de la fibre d'une racine R , Z_o , <u>invariant par le groupe structural</u> . Il existe alors (th.15.4) une sous-racine S de R , admettant Z_o tout seul comme fibre en X_o ; sa fibre en tout point X de E se réduit à un seul point, qu'on peut appeler $f(X)$. Il est clair que tout S-champ est une restriction de f ; parmi les R-champs , f a donc la propriété que ses rectrictions à des ouverts forment une famille invariante ; on peut aussi dire que tous les glissements de U invarient f .

Inversement, on voit que si un R-champ f a l'une de ces propriétés (on dira que f est un R-champ <u>invariant</u>), $f(X)$ est invariant par le groupe structural de R en X .

Juxtaposition.

Théorème , définition :

- Soient R_j des racines d'un même espace E , dont les fibres en tout point X de E sont deux à deux disjointes ; désignons par R_X la réunion de ces fibres.

(15.11) Si l'on pose, Z appartenant à R_X

$$R(A)(X)(Z) = R_j(A)(X)(Z)$$

l'indice j étant choisi de façon à ce que le second membre ait un sens, $\overset{?}{\mathrm{O}}$ on définit ainsi une racine R , dont la fibre en X est R_X , et qui admet les R_j comme sous-racines. On dira que R est la juxtaposition des racines R_j .

- $\overset{?}{\mathrm{O}}$ Toute racine est égale à la juxtaposition de ses sous-racines irréductibles.

- Remarque : si on se donne des racines R_j quelconques,on pourra toujours construire des racines R'_j isomorphes,dont les fibres sont disjointes en tout point X de E ; par exemple en posant

$$R'_j(A)(X)\begin{pmatrix} j \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j \\ R_j(A)(X)(Z) \end{pmatrix} \qquad (15.12)$$

et ensuite construire,comme en (15.11), la juxtaposition des R'_j.

Produit direct :

Considérons deux racines R_1 et R_2 d'un espace E ; il est clair que si Z_1 et Z_2 appartiennent à leurs fibres en X , et si le glissement A est défini en X , $R_1(A)(X)(Z_1)$ et $R_2(A)(X)(Z_2)$ appartiendront à leurs fibres en $A(X)$; si l'on pose

$$R(A)(X)\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1(A)(X)(Z_1) \\ R_2(A)(X)(Z_2) \end{pmatrix} \qquad (15.13)$$

$\overset{?}{\mathrm{O}}$ on définit ainsi une racine R dont la fibre en un point X est le produit direct (ensemble des couples) des racines de R_1 et R_2 .Plus généralement :

Théorème , définition :

Soient R_j des racines d'un même espace E ; R_{j_X} la fibre de R_j au point X.

Il existe alors une racine R, dont la fibre en X est le

(15.15) produit direct des R_{j_X} , et qui est définie par

$$[R(A)(X)(Z)]_j = R_j(A)(X)(Z_j)$$

R s'appellera <u>produit direct</u> (ou somme directe) des racines R_j.

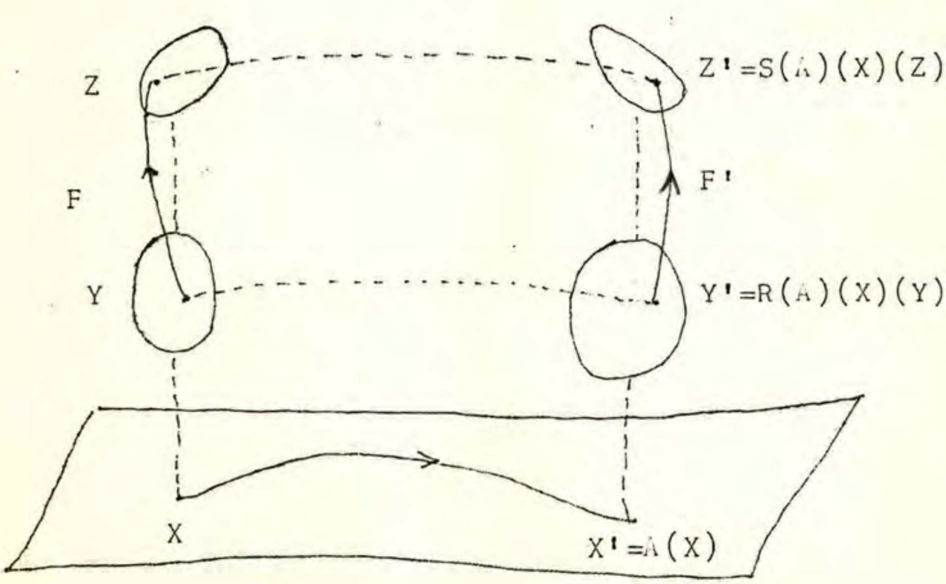
2

- Ne pas confondre avec la <u>juxtaposition</u> des racines R_j (dont la fibre est la réunion des R_{j_X}).
- Il est clair qu'un R-champ définit un R_j-champ pour chaque valeur de j.

<u>Racines d'opérateurs</u> .

Théorème :

Soient R et S deux racines d'un même espace E ; R_X et S_X leurs fibres en un point X ; désignons par T_X l'ensemble des opérateurs qui appliquent une partie de R_X dans S_X.
Supposons que $F \in T_X$, $Y \in \text{déf}(A)$. Alors $Z = F(Y) \in S_X$.



Effectuons le glissement A ; X devient $X' = A(X)$; Y et Z deviennent respectivement $Y' = R(A)(X)(Y)$ et $Z'=S(A)(X)(Z)$; l'opérateur F' qui fait passer de Y' à Z', et que nous pouvons appeler $T(A)(X)(F)$, est donc défini par

$$T(A)(X)(F)(R(A)(X)(Y)) = S(A)(X)(F(Y))$$

ou encore par

(15.15) $$T(A)(X)(F) = S(A)(X) . F . R(A)(X)^{-1}$$

? L'opérateur T ainsi défini est une racine ; d'où l'énoncé:

(15.16) - R_X et S_X désignant les fibres de deux racines R et S d'un espace E en un point X, si l'on appelle T_X l'ensemble des opérateurs qui appliquent une partie de R_X dans S_X, il existe une racine T, dont la fibre en X est T_X, et qui est définie par (15.15).
- On dira que T est la <u>racine des opérateurs de R à S</u>.

- Il est clair que T admet beaucoup de <u>sous-racines</u>: on en obtiendra en se restreignant aux éléments de T_X qui sont <u>définis sur R_X</u>, ou bien <u>dont le domaine de valeurs est T_X</u>, ou bien <u>réguliers</u>, etc.
-On peut bien entendu prendre $R = S$. Un autre cas important est celui où l'on considère des opérateurs F définis (resp. prenant leurs valeurs) dans un ensemble fixe H ; ceci revient à prendre R (resp. S) <u>trivial</u>.
La formule (15.15) devient évidemment :

(15.17) $$T(A)(X)(F) = S(A)(X).F$$

(15.18) resp. $$T(A)(X)(F) = F.[R(A)(X)]^{-1}$$

(si R et S sont tous deux triviaux, T l'est aussi).

<u>Exemple</u> : soit S une racine quelconque de l'univers U ; X_o un point de U ; F_o un opérateur régulier appliquant un ensemble H sur la fibre de S en X_o.

Nous pouvons définir la racine T des applications de H dans la fibre S_X par la formule (15.17); étudions la sous-racine irréductible U engendrée par le couple (X_o, F_o).

On sait (15.6) que la fibre de U au point X est l'ensemble des opérateurs $T(A)(X_o)(F_o) = S(A)(X_o).F_o$,avec $A(X_o) = X$; ces opérateurs,qui appliquent l'ensemble H (<u>fibre-type</u>) sur la fibre de S au point X , s'appelleront <u>repères</u> (au point X). Nous en avons déjà considéré un cas particulier (applications de 15.3).

Il est clair que le groupe structural de S en X est l'ensemble des $P.Q^{-1}$, P et Q étant deux repères en X ; que le transmuté par l'inverse d'un repère en X du groupe structural en X est un groupe de permutations de l'ensemble H , qui ne dépend pas du point X , ni du choix du repère,mais seulement de F_o .

- En appliquant plusieurs fois la construction (15.16),ou bien en la combinant avec le produit direct de plusieurs racines,on peut évidemment définir les racines <u>d'opérateurs multiples</u>, ou d'applications de produits directs de fibres dans une fibre ; etc.

<u>Homomorphismes de racines</u>.

Définition :

(15.19) Soient R et S deux racines d'un espace E . On appellera <u>homomorphisme</u> de R à S tout champ invariant d'opérateurs de R à S .

On a vu que la racine T des opérateurs de R à S a pour fibre en un point X l'ensemble T_X des opérateurs θ appliquant une partie de la fibre R_X sur une partie de la fibre S_X , et que l'on a ,pour tout glissement A :

$$T(A)(X)(\theta) = S(A)(X) . \theta . R(A)(X)^{-1}$$

Si f est un T-champ,on a donc :

(15.20) $$A^T(f)(A(X))=T(A)(X)(f(X))=S(A)(X) . f(X) . [R(A)(X)]^{-1}$$

f est invariant si $A^T(f)(A(X))=f(A(X))$,soit d'après (15.20)

(15.21) $$f(A(X)) . R(A)(X) = S(A)(X) . f(X)$$

d'où l'énoncé (suite de 15.19) :

(15.22) Les homomorphismes de R à S sont les opérateurs f , définis sur E , tels que :
a) pour tout X , $f(X)$ est une application d'une partie de la fibre R_X sur une partie de la fibre S_X ;
b) f vérifie (15.21) quel que soit le glissement A et X dans déf(A).

(15.23) Nous dirons que f est un homomorphisme <u>total</u> de R à S si pour tout X , $f(X)$ applique tout R_X sur tout S_X .
? Tout homomorphisme de R à S est un homomorphisme total de R' à S' , R' et S' étant les <u>sous-racines</u> de R et S que l'on obtient en réduisant les fibres en X de R et S à déf($f(X)$) et val($f(X)$) respectivement .

Théorème :

(15.24) Soit R une racine de l'espace E ; f un opérateur défini sur E , tel que pour tout X , $f(X)$ soit défini sur une partie non vide de la fibre R_X .
Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) : quels que soient Z et Z' dans $déf(f(X))$, et le glissement A défini en X :

$$[f(X)(Z)=f(X)(Z')] \Rightarrow [f(A(X))(R(A)(X)(Z))=f(A(X))(R(A)(X)(Z'))]$$

(2) : il existe une racine S telle que f soit un homomorphisme de R à S.

$\eth$ (2)$\Rightarrow$ (1); inversement, si (1) est vérifiée, il est clair qu'il existe pour tout glissement A et pour tout X dans $déf(A)$, un opérateur H tel que
$f(A(X))(R(A(X)(Z)) = H(f(X)(Z))$; H est défini sur $val(f(X))$; il est loisible de l'appeler $S(A)(X)$, si bien que l'on a

(15.25) $$f(A(X)).R(A)(X) = S(A)(X).f(X)$$

$\eth$ S est une racine de E, dont la fibre en un point X est $val(f(X))$; la formule (15.25), qui coïncide avec (15.21), montre que f est un homomorphisme de R à S.

C.Q.F.D.

Exemples:

(15.26) Supposons que pour tout X, $f(X)$ soit régulier; la condition (15.24,(1)) est vérifiée; alors $f(X)$ est un homomorphisme régulier et total d'une sous-racine R' à une racine S; f est donc un <u>isomorphisme</u> de R' à S.
- Considérons l'espace R^n, muni de la <u>structure différentiable</u>; la racine r des germes de champs sur R^n à valeur réelle. Si φ est un tel champ, on sait que

(15.27) $$r(A)(X)(\text{germe}_X(\varphi)) = \text{germe}_{A(X)}(\varphi . A^{-1})$$

(formules 14.12 et 4.7).

Soit Z le germe en X d'un champ φ défini et différentiable au point X ; il est clair que la dérivée

$$\frac{\partial \varphi(X)}{\partial X} = \left[\frac{\partial \varphi(X)}{\partial X^1} \quad \frac{\partial \varphi(X)}{\partial X^2} \quad \cdots \quad \frac{\partial \varphi(X)}{\partial X^n} \right]$$

ne dépend que du germe de φ en X , et que l'on peut donc poser

(15.28) $$f(X)(\text{germe}_X(\varphi)) = \frac{\partial \varphi(X)}{\partial X}$$

Tout glissement A ayant un inverse A^{-1} différentiable, la formule de dérivation des fonctions de fonctions montre que si φ et φ' ont même dérivée en X , $\varphi.A^{-1}$ et $\varphi'.A^{-1}$ auront même dérivée en $A(X)$; on a donc

$$[f(X)(Z)=f(X)(Z')] \Rightarrow [f(A(X))(r(A)(X)(Z))$$

$$= f(A(X))(r(A)(X)(Z'))]$$

c'est-à-dire la condition (15.24,(1)); f est donc un homomorphisme de la racine r à une racine D^* ; on peut vérifier que la fibre de D^* en un point X est le dual R^n (ensemble des lignes de n nombres), et que l'on a

(15.29) $$D^*(A)(X)(L) = L.[D(A)(X)]^{-1}$$

D désignant la racine de dérivation (11.3).
On peut vérifier que $f(X)$ n'est pas régulier; f est un homomorphisme total d'une sous-racine r' de r à la racine D^*, mais ce n'est pas un isomorphisme.
- Considérons une racine R quelconque, d'espace E ; une équivalence $\underset{X}{\sim}$, définie sur chaque fibre R_X de R . Supposons que $\underset{X}{\sim}$ vérifie la condition

(15.30) $$[Z \underset{X}{\sim} Z'] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} R(A)(X)(Z) \underset{A(X)}{\sim} R(A)(X)(Z') \\ \text{pour tout glissement } A \text{ défini en } X \end{array}\right]$$

Si l'on désigne par $f(X)(Z)$ la classe de Z suivant la relation $\underset{X}{\sim}$, la condition (15.30) prend la forme (15.24(1));

$f(X)$ est donc un homomorphisme (d'ailleurs total) de R à une racine S ; d'où l'énoncé :

(15.31) Une équivalence $\underset{X}{\sim}$, définie sur la fibre de la racine R en un point X quelconque, sera dite <u>invariante</u> si elle vérifie la condition (15.30); il existe alors une racine S , dite <u>quotient de R par l'équivalence</u> $\underset{X}{\sim}$, définie par

$$S(A)(X)(\mathrm{classe}_X(Z)) = \mathrm{classe}_{A(X)}\Big(R(A)(X)(Z)\Big)$$

Nous avons défini les homomorphismes comme les champs d'opérateurs invariants; or les champs invariants sur un <u>univers</u> X sont définis par leur valeur en un point, qui est astreinte à la seule condition d'être invariante par le groupe structural; on en déduit l'énoncé :

(15.32) Soit R une racine de l'univers U ; X un point de U ; Φ un opérateur défini sur la fibre de R en X .
Les conditions (1) et (2) sont équivalentes :

(1) $[\Phi(Z) = \Phi(Z')] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \Phi(K(Z)) = \Phi(K(Z')) \\ \text{quel que soit } K \text{ dans le groupe structural} \end{array}\right]$

(2) Il existe une racine S et un homomorphisme total f de R à S , tels que $f(X) = \Phi$.

- De plus, la variance de la racine S ne dépend que de R et Φ .

§ 16 : <u>Structures invariantes</u>.

Considérons une racine R d'un espace E ; nous appellerons <u>structure invariante</u> une structure (structure vectorielle, topologique, structure d'espace, etc) définie sur chaque fibre de R , de sorte que les opérateurs $R(A)(X)$ soient des isomorphismes pour tout glissement A .

Il est clair que si l'on choisit un point X_0 de E , les éléments du groupe structural en X_0 , qui sont les $R(A)(X_0)$

pour tout glissement A conservant X_o , sont des <u>automorphismes</u> de la structure de la fibre.

Il est clair également que, si E est un univers, la structure invariante est définie entièrement par la structure de la fibre en X_o , si l'on admet que le fait que l'opérateur $R(A)(X_o)$ est un isomorphisme définit le transport de structure de son ensemble de définition à son ensemble de valeurs.

Inversement, soit R une racine de l'univers U ; supposons que l'on ait défini une structure sur la fibre de R au point X_o , telle que le groupe structural en X_o soit composé d'automorphismes.

Quel que soit le point X de U , il existe un glissement B tel que $B(X_o) = X$; on peut transporter la structure sur la fibre en X en supposant que l'opérateur $R(B)(X_o)$ est un isomorphisme; on vérifie immédiatement que cette structure ne dépend que du point X et de la structure en X_o ,mais pas du choix de B . On vérifie également que la structure ainsi définie est <u>invariante</u>.

En appliquant cette méthode , ? on arrive à l'énoncé suivant:

(16.1) Soit R une racine de l'univers U ; E la fibre de R au point X_o ; supposons que l'on ait défini sur E une structure d'espace (resp.d'espace topologique,d'espace vectoriel) tel que les éléments du groupe structural soient des automorphismes (resp. continus,linéaires); on peut alors prolonger canoniquement cette structure à toutes les fibres de R , en postulant que les opérateurs $R(A)(X)$ sont, pour tout glissement A , des isomorphismes (resp. continus,linéaires).

Exemples :

- Nous avons vu que sur l'espace numérique R^n , muni de la structure différentiable, la fibre de dérivation D est telle que $D(A)(X)$ soit linéaire ; la structure d'espace vectorielle de la fibre (qui est R^n en tout point X) est donc <u>invariante</u>.

(16.2) Supposons que R^n, muni du recueil différentiable, soit sous-univers d'un univers $R^n \cup V$ (on dira alors que V est une

<u>variété différentiable de dimension n</u>); on peut alors prolonger canoniquement la racine D (th. 5.3) à $R^n \cup V$; la structure d'espace vectoriel de la fibre se prolonge également, d'après le théorème précédent; c'est pourquoi la fibre en X s'appelle <u>espace vectoriel tangent</u> au point X .

Si F est une cocarte (glissement appliquant une partie de R^n dans V) l'opérateur D(F)(X) est un opérateur <u>linéaire</u> (16.1), qui applique R^n sur la fibre au point F(X); on peut donc le considérer comme une <u>base de l'espace vectoriel tangent en X</u> (qui a donc la dimension n); on dit parfois que c'est la base naturelle associée à la cocarte F .

(16.3) - Considérons une racine triviale R de l'univers U ; la fibre de R en un point X est un ensemble E indépendant de X ; les opérateurs R(A)(X) sont tous égaux à 1_E ; ainsi <u>toute structure de E est invariante.</u>

(16.4) -Considérons un <u>univers-groupe</u> G ; le théorème (12.5) montre que toute racine R peut, par un isomorphisme, être supposée triviale pour le sous-recueil des translations à gauche.

Supposons que l'on définisse, sur les fibres de R , une structure invariante; elle sera à fortiori invariante pour le sous-recueil des translations à gauche ; c'est-à-dire que cette structure sera <u>indépendante du point X</u> (les fibres de R étant toutes égales) .

-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-

Exposé N°IV : ESPACES FIBRES

(19 Décembre 1960)

§ 17 : Axiomatique des espaces fibrés.

Nous considérerons dans ce paragraphe une équivalence $\sim$,définie sur un ensemble E .

X étant un point de E , nous appellerons <u>fibre</u> de X , et nous noterons $\widetilde{X}$, la classe de X suivant $\sim$; nous aurons donc:

(17.1) $$[X \sim Y] \Leftrightarrow [\widetilde{X} = \widetilde{Y}]$$

E' étant une partie de E , nous noterons $\widetilde{E'}$ l'ensemble des fibres des éléments de E ; on peut donc considérer la correspondance $X \to \widetilde{X}$ comme une application de E sur $\widetilde{E}$; $\widetilde{E}$ s'appelle le <u>quotient</u> de E par $\sim$.

Théorème ,définition :

δ - Nous dirons que l'opérateur A est <u>toléré</u> par l'équivalence $\sim$ si déf(A) et val(A) sont des parties de E , et s'il existe un opérateur $\widetilde{A}$ tel que :

(17.2) $$\text{☒} \quad \begin{cases} \text{déf}(\widetilde{A}) = \widetilde{\text{déf}(A)} \\ [X \in \text{déf}(A)] \Rightarrow [\widetilde{A(X)} = \widetilde{A}\ (\widetilde{X})\ ] \end{cases}$$

- Pour que l'opérateur A soit toléré par $\sim$, il faut et il suffit que

$$\diamond \quad [X , Y \in \text{déf}(A) , X \sim Y] \Rightarrow [A(X) \sim A(Y)]$$

- Si A est toléré,l'opérateur $\widetilde{A}$ est entièrement défini par ☒ ; il vérifie aussi

$$\text{val}(\widetilde{A}) = \widetilde{\text{val}(A)}$$

Théorème :

(17.3) Si A et B sont tolérés par $\sim$, A.B est toléré,et

$$\widetilde{A.B} < \widetilde{A} . \widetilde{B}$$

Définition , théorème :

(17.4) Nous dirons que A est <u>bi-toléré</u> s'il est régulier, et si A et A^{-1} sont tolérés.
Si A est bi-toléré, $\tilde{A}$ est régulier, et $[\tilde{A}]^{-1} = \widetilde{[A^{-1}]}$

Il résulte évidemment de (17.3) et (17.4) que

(17.5) Les opérateurs bi-tolérés par une équivalence forment un prérecueil

(17.6) Quelle que soit la partie E' de E, $1_{E'}$ est bi-toléré, et l'on a

$$\widetilde{1_{E'}} = 1_{\tilde{E}'}$$

Théorème :

(17.7) $[A \text{ toléré}, B < A] \Rightarrow [B \text{ toléré}, \tilde{B} < \tilde{A}]$

Définition :

(17.8) Nous dirons qu'un opérateur A est <u>permis</u> par l'équivalence $\sim$ s'il est toléré par $\sim$, et si déf(A) est une réunion de fibres.

(17.9) Pour que A soit permis, il faut et il suffit que

$$\begin{bmatrix} X \in \text{déf}(A) \\ X \sim Y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} Y \in \text{déf}(A) \\ A(X) \sim A(Y) \end{bmatrix}$$

(comparer avec 17.2 ◇)

(17.10) Si A est permis

$$[X \in \text{déf}(A)] \Leftrightarrow [\tilde{X} \in \text{déf}(\tilde{A})] \Leftrightarrow [\tilde{X} \subset \text{déf}(A)] \Leftrightarrow [\widetilde{A(X)} = \tilde{A}(\tilde{X})]$$

(comparer avec 17.2 ◇)

Théorème :

(17.11) $[A \text{ et } B \text{ permis}] \Rightarrow [A.B \text{ permis}, \widetilde{A.B} = \tilde{A} . \tilde{B}]$

(comparer avec 17.3)

Théorème :

(17.12) Si les A_j forment une famille compatible d'opérateurs permis, alors

a) $\sup(A_j)$ est permis

b) les $\widetilde{A_j}$ sont compatibles

c) $\widetilde{\sup(A_j)} = \sup(\widetilde{A_j})$

Nous dirons qu'un opérateur A est bi-permis s'il est régulier, et si A et A^{-1} sont permis ; il résulte évidemment de (17.11) et (17.12) que

(17.13) $\sim$ étant une équivalence de l'ensemble E, les opérateurs bi-permis pour $\sim$ forment un recueil d'espace E

? o

(17.14) Soit E' une partie de E ; pour que $1_{E'}$ soit permis, il faut et il suffit que E' soit une réunion de fibres.
(comparer avec 17.6)

Définition :

(17.15) Nous dirons que l'équivalence $\sim$ est une <u>fibration</u> de l'espace E si tous les glissements de E sont permis pour $\sim$.
Nous appellerons <u>espace fibré</u> tout espace sur lequel nous aurons choisi une fibration.

Théorème :

(17.16) Soit E un espace fibré ; R le recueil de ses glissements; $\sim$ sa fibration.
L'ensemble $\widetilde{R}$ des $\widetilde{A}$ $(A \in R)$ est un <u>prérecueil</u> d'espace $\widetilde{E}$; l'ensemble $\widetilde{E}$, muni de la structure d'espace définie par $\widetilde{R}$, s'appellera <u>base</u> de l'espace fibré E.

En effet, deux éléments quelconque $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$ de $\widetilde{R}$ vérifient $\widetilde{A}.\widetilde{B} = \widetilde{A.B} \in \widetilde{R}$ (17.11); $[\widetilde{A}]^{-1} = [\widetilde{A^{-1}}] \in \widetilde{R}$ (17.4); enfin $1_{\widetilde{E}} = [\widetilde{1_E}] \in \widetilde{R}$ (17.6)

C.Q.F.D.

Remarques :

(17.17) - Il est clair que les glissements, dont l'inverse est un glissement, sont bi-permis; ils constituent donc un sous-recueil du recueil des opérateurs permis pour la fibration.

(17.18) - Dans un espace fibré, tout ouvert est une réunion de fibres (th. 17.14).

(17.19) - Soit E un espace fibré; A un glissement de sa base; nous appellerons <u>relèvement</u> de A un glissement B de E tel que $\widetilde{B} = A$.

Le théorème (17.15) montre que les glissements de E qui possèdent un relèvement forment un prérecueil; ? on peut O~~nous~~ construir~~ons~~ ~~plus loin~~ un exemple de glissement qui ne possède pas de relèvement. (~~Ex , §10~~).

- Si l'espace fibré E est un univers, il est clair que sa base est un univers; la réciproque n'est pas vraie (voir l'exemple I,§18)

(17.20) - E étant un espace fibré, il sera souvent commode de considérer un isomorphisme F de la base $\tilde{E}$ avec un espace E'. L'opérateur

$$\Phi\,(X) = F(\tilde{X})$$

s'appellera un <u>homomorphisme</u> de E <u>sur</u> E'; on appellera homomorphisme de E dans E' tout homomorphisme de E sur une partie E" de E', munie d'un sous-recueil de celui de E'.

(17.21) Pour qu'une application Φ d'un espace E dans un espace E' soit un homomorphisme, il faut et il suffit que :

[A est un glissement de E] $\Rightarrow$ [il existe un glissement B de E' tel que $\Phi\,.A = B.\,\Phi$]

En effet, si Φ est l'homomorphisme défini en (17.20), la condition (17.21) est vérifiée en prenant $B = F.\tilde{A}.F^{-1}$ (th. 17.10); inversement, de la condition (17.21), on déduit que la relation $\sim$: $[X \sim Y] \Rightarrow [\Phi\,(X) = \Phi\,(Y)]$ est une fibration de E, et que l'opérateur F, défini par $F(\tilde{X}) = \Phi\,(X)$ est un isomorphisme de la base E avec une partie de E', munie d'un sous-recueil .

C.Q.F.D.

(17.22) - Par abus de langage, on appellera encore <u>espace fibré de base E'</u> un espace E muni d'un homomorphisme Φ sur l'espace E' ; ce qui reviendra à identifier la fibre $\tilde{X}$ d'un point X de E avec son image $\Phi\,(X)$.

Définition :

(17.23) Soit E un espace fibré ; $\sim$ sa fibration.
On appellera <u>glissement de jauge</u> de E tout glissement A tel que

$$\tilde{A} < \tilde{1}_E$$

c'est-à-dire

$$[X \in \text{déf}(A)] \Rightarrow [A(X) \text{ appartient à la fibre de } X]$$

Théorème :

3 (17.24) Soit E un espace fibré; R le recueil de ses glissements. L'ensemble R' des glissements de jauge de E est un sous-recueil de R ; il définit sur E la même topologie naturelle que R .

Soit E un espace fibré; Φ une fibre de E .
Le recueil R des glissements de E donne à la fibre Φ une structure de <u>sous-espace</u> de E (4.1); la topologie de Φ est la topologie induite (th.4.2); comme les ouverts de E sont des réunions de fibres (17.18), Φ ne contient que deux ouverts , $\emptyset$ et lui-même ; par suite les glissements non impuissants de Φ forment un groupe ; d'où l'énoncé :

(17.25) Soit Φ une fibre de l'espace fibré E ; la restriction à Φ des glissements de E conservant globalement Φ forme un groupe de permutations de Φ , qu'on appellera <u>groupe structural</u> de la fibre Φ ; les glissements de Φ (considéré comme sous-espace de E) sont les éléments de ce groupe, et l'opérateur impuissant.

L'ensemble R' des glissements de jauge forme aussi un recueil, définissant la même topologie (th.17.24); le même raisonnement montre que :

(17.26) La restriction à la fibre Φ des glissements de jauge conservant globalement Φ forme un sous-groupe du groupe structural; on l'appelle <u>groupe de jauge</u> de la fibre Φ .

Théorème :

(17.27) Le groupe de jauge est un sous-groupe distingué du groupe structural.

En effet, si a appartient au groupe structural, b au groupe de jauge :

$a = A.1_{\Phi} = 1_{\Phi} .A$, $b = B.1_{\Phi} = 1_{\Phi} .B$, $A,B \in R$, $\widetilde{B} < 1_{\widetilde{E}}$,

on a $a.b.a^{-1} = A.B.A^{-1}.1_{\Phi}$;

or $\widetilde{A.B.A^{-1}} = \widetilde{A} . \widetilde{B} .[\widetilde{A}]^{-1} < \widetilde{A} . [\widetilde{A}]^{-1} < 1_{\widetilde{E}}$;

donc $a.b.a^{-1}$ appartient au groupe de jauge, qui est bien distingué.

C.Q.F.D.

?

Théorème :

(17.28) Soit X un point de l'espace fibré E ; H l'homomorphisme canonique du groupe structural de la fibre $\widetilde{X}$ sur son quotient par le groupe de jauge.

Il existe alors un homomorphisme K du groupe des germes de glissements de la base $\tilde{E}$ (au point $\tilde{X}$) , sur le groupe quotient,défini par

$$K\left(\text{germe}_{\tilde{X}}\left(\tilde{A}\right)\right) = H\left(A . 1_{\tilde{X}}\right)$$

Ce théorème ,qui peut se ~~vérifier directement,se déduira d'autres~~ considérations (§ 19).

Exposé N° V - ESPACES FIBRES (suite)

(23 Janvier 1961)

§ 18 : Exemples d'espaces fibrés.

Exemple I : espaces fibrés et racines.

Soit E un espace, R une racine de E.

(18.1) Soit $\hat{E}$ l'ensemble des couples $\begin{pmatrix} Z \\ X \end{pmatrix}$, Z appartenant à la fibre en X de la racine R (cf. 11.2).

A étant un glissement de E, posons

((18.2)

a) $$\hat{A}\left(\begin{pmatrix} Z \\ X \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} R(A)(X)(Z) \\ A(X) \end{pmatrix}$$

b) $$\widetilde{\begin{pmatrix} Z \\ X \end{pmatrix}} = X$$

∂ on a :

(18.3)

$$\hat{A} \cdot \hat{B} = \widehat{A \cdot B} \qquad \text{(axiome 11.1.b des racines)}$$

$$\widehat{A^{-1}} = [\hat{A}]^{-1} \qquad \text{(théorème 11.2.c)}$$

$[A_j$ compatibles, $\sup(\hat{A}_j)$ régulier $] \Rightarrow$

$$[\widehat{\sup(A_j)} = \sup\left(\hat{A}_j\right)] \qquad \text{(théorème 13.3)}$$

$$\widehat{1_E} = 1_{\hat{E}} \qquad \text{(théorème 11.2.a)}$$

d'où l'énoncé :

(18.4) les opérateurs $\hat{A}$ (18.2) forment un <u>recueil</u> d'espace $\hat{E}$ (18.1)

D'autre part, il résulte clairement de (18.2) que

$$\widetilde{\hat{A}\begin{pmatrix} Z \\ X \end{pmatrix}} = A(X) = A\left(\widetilde{\begin{pmatrix} Z \\ X \end{pmatrix}}\right)$$

donc que A est <u>toléré</u> par l'équivalence $\sim$, et que

(18.5) $$\tilde{\hat{A}} = A$$

(cf. 17.2)

comme $\text{déf}(\hat{A})$ est la réunion des fibres des points de $\text{déf}(A)$, A est permis (définition 17.8) , $\sim$ est une fibration de $\hat{E}$.

Il est clair que la <u>base</u> de cet espace fibré est E (définition 18.2.b) muni du recueil original (cf.(18.5)).

Il est clair que $\hat{A}$ est un relèvement de A (définition 17.19); c'est le seul,car si $\tilde{\hat{A}} = \tilde{\hat{B}}$, la formule (18.5) montre que $A = B$, donc que $\hat{A} = \hat{B}$.

En particulier, si Ω est un ouvert de E , son relèvement unique ne peut être que l'opérateur identique sur $\hat{\Omega}$; le groupe de jauge de E se réduit donc à l'unité,en tout point ; d'où le théorème :

(18.6) (suite de 18.4) : l'espace $\hat{E}$ est <u>fibré</u> par l'équivalence $\sim$ (18.2.b); en tout point,son groupe de jauge se réduit à l'unité.

- La base de $\hat{E}$ est l'espace E , muni de son recueil initial.
- Tout glissement A de E admet un relèvement et un seul, $\hat{A}$.

Soit inversement F un espace fibré dont le groupe de jauge se réduit à l'unité en tout point.

B étant un glissement de F , $\overset{?}{O}$ la correspondance ($B \to \tilde{B}$) est biunivoque ; les opérateurs $\tilde{B}$ forment un <u>recueil</u> (et pas seulement un prérecueil); on peut donc définir un opérateur S par la formule

(18.7) $$S(\tilde{B})(\tilde{Z})(Z) = B(Z)$$

Alors :

(18.8) ∂ | F étant un espace fibré sans groupe de jauge, l'opérateur S défini par (18.7) est une racine de la base $\tilde{F}$; ses fibres, deux à deux disjointes, coïncident avec celles de F ; son groupe structural (13.1) en un point de $\tilde{F}$ coïncide avec celui de la fibre correspondante de F (17.1).
- Si F est l'espace E défini à partir d'une racine R de E (définitions 18.1, 18.2), la racine S est isomorphe à R.

En d'autres termes, les axiomatiques suivantes sont équivalentes :

- Espaces fibrés sans jauge de base E.
- Racines à fibres disjointes de l'espace E

et le vocabulaire est cohérent (fibres, groupe structural).
Nous avons cependant introduit de façon autonome l'axiomatique des racines, pour pouvoir le cas échéant considérer des racines à fibres confondues (notamment dans le cas où la base est un groupe, th. 12.5), qui sont d'utiles instruments de calcul.

- Remarque : ∂ pour que F soit un univers, il faut et il suffit que E soit un univers et que la racine R (ou S) soit irréductible.

Exemple II : espace fibré des spineurs.

Soit M l'espace de Minkowski; désignons par E l'ensemble des couples $\begin{pmatrix} \psi \\ X \end{pmatrix}$, X étant un point de M et ψ un spineur de M.

On sait (voir par exemple Chevalley, The algebraic theory of spinors, II, 3) qu'il existe un groupe Γ d'opérateurs linéaires σ sur les spineurs (Γ = "groupe de Clifford"), et une représentation χ de ce groupe sur le groupe de Lorentz homogène; cette représentation n'étant d'ailleurs pas fidèle (régulière).

Soit φ une fonction à valeurs réelles définie sur M ; O un point de M ; V un vecteur de M . Posons

(18.9) $$F\begin{pmatrix}\sigma\\ \varphi\\ V\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi\\ X\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sigma\cdot\psi\, e^{i\varphi(x)}\\ \\ O+\chi(\sigma).\overrightarrow{OX}+V\end{pmatrix}$$

Un calcul élémentaire, basé sur le fait que χ est une représentation, montre que

(18.10) $$F\begin{pmatrix}\sigma'\\ \varphi'\\ V'\end{pmatrix}\cdot F\begin{pmatrix}\sigma\\ \varphi\\ V\end{pmatrix}\doteq F\begin{pmatrix}\sigma''\\ \varphi''\\ V''\end{pmatrix},\text{avec}\quad\begin{cases}\sigma''=\sigma'\cdot\sigma\\ \varphi''(X)\underset{X}{\equiv}\varphi(X)+\varphi'(O+\chi(\sigma)\overrightarrow{OX}+V)\\ V''=\chi(\sigma')V+V'\end{cases}$$

d'où l'on conclut que les opérateurs $F\begin{pmatrix}\sigma\\ \varphi\\ V\end{pmatrix}$ forment un groupe de permutations de E et lui donnent donc une structure d'espace.

Il résulte de (18.9) que l'équivalence $\sim$:

(18.11) $$\widetilde{\begin{pmatrix}\psi\\ X\end{pmatrix}}=X$$

est une <u>fibration</u> de E , ayant pour base l'espace M , muni du prérecueil des transformations de Lorentz non homogènes ;

(18.12) $$\widetilde{F\begin{pmatrix}\sigma\\ \varphi\\ V\end{pmatrix}}(X)=O+\chi(\sigma)\,\overrightarrow{OX}+V$$

La fibre en un point X_o est l'ensemble des couples $\begin{pmatrix}\psi\\ X_o\end{pmatrix}$,

ψ parcourant l'ensemble des spineurs. Les <u>glissements de jauge</u>

se déduisent de (18.12); ce sont les transformations

$$F \begin{pmatrix} \sigma \\ \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

σ appartenant au noyau de la représentation χ ; on en déduit le <u>groupe de jauge</u> en un point X ; ce sont les transformations

(18.13) $$\begin{pmatrix} \psi \\ X \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \psi \, e^{i\alpha} \\ X \end{pmatrix}$$

le groupe de jauge est donc isomorphe à T_1 (groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1).

- Cet exemple justifie l'empli que nous faisons du mot "jauge": on retrouve la notion que les physiciens appellent "transformations de jauge électromagnétique".

- On voit que les spineurs ne définissent pas une racine de l'espace de Minkowski, en raison justement de l'existence de cette jauge (Cf. l'exemple I ci-dessus) ; cette circonstance a lieu même si on se limite au cas $\varphi = 0$, parceque le noyau de la représentation χ ne se réduit pas à l'unité, χ n'étant pas fidèle.

- Nous allons voir que la notion de "classe de jauge" permet cependant de construire une racine avec l'espace fibré des spineurs (ex. IV).

Exemple III : <u>Sous-fibrations</u>.

Théorème :

Soit E un espace fibré; $\sim$ sa fibration ; $\smile$ une fibration de sa base $\tilde{E}$. La relation $\approx$,définie par :

(18.14) $$[\, X \approx Y \,] \iff [\, \tilde{\tilde{X}} = \tilde{\tilde{Y}} \,]$$

est une <u>fibration</u> de E; on dira que $\sim$ est une <u>sous-fibration</u> de la fibration $\approx$.

- On peut donc définir une nouvelle structure fibrée sur un espace fibré E en <u>fibrant sa base</u>.

- Pour qu'une fibration $\sim$ soit une sous-fibration de la fibration ∞ , il est évidemment nécessaire que $[X \sim Y] \Rightarrow [X \infty Y]$, c'est-à-dire que les ∞-fibres soient des réunions de $\sim$ -fibres. Inversement, si $\sim$ et ∞ sont deux fibrations de l'espace E , et si:

(18.15) $$[X \sim Y] \Rightarrow [X \infty . Y]$$

on peut définir une équivalence $\sim$ sur la base $\widetilde{E}$ en posant

(18.16) $$[\widetilde{X} \sim \widetilde{Y}] \Leftrightarrow [X \infty Y]$$

$\approx$ est une fibration de $\widetilde{E}$; comme on a $\infty = \approx$, il est clair que :

(18.17) Si $\sim$ et ∞ sont deux fibrations d'un même espace E , la condition (18.15) est nécessaire et suffisante pour que $\sim$ soit une sous-fibration de ∞ .Nous dirons que la fibration $\approx$ (18.16) est la <u>fibration quotient</u> de ∞ par $\sim$.

Remarque : pour que l'équivalence $\sim$ soit une sous-fibration de l'équivalence ∞ , il est d'ailleurs suffisant que ∞ soit une fibration, que les glissements de E soient <u>tolérés</u> par $\sim$, et que l'on ait (18.15).

Exemple IV : <u>Classes de jauge</u>.

Nous savons que si J est un recueil de l'espace E , la relation $\nsim$:

(18.18) $$[X \nsim Y] \Leftrightarrow [\text{Il existe } A \text{ tel que } A \in J,\ Y = A(X)]$$

est une <u>équivalence</u> (1.9) ; R étant encore un recueil de E , il peut arriver que les éléments de R soient <u>tolérés</u> par l'équivalence $\nsim$ (c'est le cas notamment si les éléments de R sont des <u>automorphismes locaux</u> de J) ,ou <u>permis</u> ; dans ce cas, nous dirons que le recueil J <u>fibre</u> le recueil R .

C'est la cas notamment si J est le recueil des <u>glissements de jauge</u> (17.24) de l'espace E (muni du recueil R, fibré par $\sim$) ; en effet, si $B \in R$, $A \in J$, on a
$\widetilde{B.A.B^{-1}} = \tilde{B}.\tilde{A}.\widetilde{B^{-1}} < \tilde{B}.\widetilde{B^{-1}} < 1_{\tilde{E}}$ (puisque $\tilde{A} < 1_{\tilde{E}}$)

donc $B.A.B^{-1} \in J$; par suite les éléments de R sont des automorphismes locaux du recueil J ; les glissements de E sont tolérés par $\nsim$; comme on a évidemment

$$
\begin{aligned}
[X \nsim Y] &\Rightarrow [Y = A(X),\ A \in J] \\
&\Rightarrow [\tilde{Y} = \tilde{A}(\tilde{X}),\quad \tilde{A} < 1_{\tilde{E}}] \qquad (17.2) \\
&\Rightarrow [Y \sim X]
\end{aligned}
$$

la condition (18.15) est vérifiée par les équivalences $\nsim$ et $\sim$; on peut appliquer le théorème (18.17) et la remarque qui suit ; d'où l'énoncé :

(18.19) Soit E un espace fibré, de fibration $\sim$; J le recueil de ses glissements de jauge.
La relation $\nsim$ définie par (18.18) est une <u>fibration</u> de E ; les fibres selon $\nsim$ s'appelleront <u>classes de jauge</u> de E.
– $\nsim$ est une <u>sous-fibration</u> de $\sim$.

Désignons par $\backsim$ la fibration quotient de $\sim$ par $\nsim$ (18.17); il est clair que

$$[\overset{\backsim}{A} < 1_{\overset{\backsim}{E}}] \Leftrightarrow [\tilde{A} < 1_{\tilde{E}}] \Leftrightarrow [A \in J] \Leftrightarrow [\overset{\nsim}{A} < 1_{\overset{\nsim}{E}}]$$

donc que :

(18.20) La fibration quotient de $\sim$ par $\nsim$ (cf. 18.19) donne à l'espace $\overset{\nsim}{E}$ des classes de jauge une structure d'espace fibré <u>sans groupe de jauge</u>, de base $\tilde{E}$.

Il en résulte immédiatement (18.8) que $\tilde{\tilde{E}}$ peut être construit à partir d'une racine S de la base $\tilde{E}$, définie ici par la formule

(18.21) $$S(\tilde{A})(\tilde{Z})(\tilde{\tilde{Z}}) = \widetilde{A(Z)}$$

– Ainsi, dans le cas de l'exemple II, les classes de jauge (qui correspondent aux spineurs définis "à une phase près") définissent une racine de l'espace de Minkowski ; on peut décomposer celle-ci en sous-racines irréductibles (th. 15.11) ; elles sont nécessairement d'ordre 1 (cf. p. 45) ; elles peuvent donc se ramener à des racines tensorielles. Il en est de même si on limite le groupe de jauge à ± 1 (Cf. J.M. Souriau, C.R.A.S., 245, p. 496 (1957) ; T. Takabayasi, C.R.A.S., 246, p. 64 (1958)).

Exemple V : Espace fibré principal .

Définition :

(18.22) Soit E un espace ; G un groupe de permutations de E. Nous dirons que G est un groupe principal si ses éléments commutent avec tous les glissements de E.

Théorème :

ℨ (18.23) La relation $\sim$:

$$[X \sim Y] \Leftrightarrow [\text{Il existe } F \text{ tel que } Y = F(X),\ F \in G]$$

est une fibration de l'espace E (si G est un groupe principal de E).

– E, fibré par cette relation, s'appellera espace fibré principal ; on notera sa base E / G.

– Il n'est pas nécessaire que G fasse partie du recueil des glissements de E ; dans ce cas, G est nécessairement abélien.

- Considérons le cas où E est un univers ; quel/que soit F dans G et X dans E, il existe un glissement A tel que $A(X) = F(X)$.

Soit X' un point quelconque de la fibre de X ; il existe Φ dans G tel que $X' = \Phi(X)$.

Si donc B est un glissement de E tel que $B(X) = A(X)$, on a $B(X') = [B \cdot \Phi](X) = [\Phi \cdot B](X) = [\Phi \cdot A](X) = [A \cdot \Phi](X) = A(X')$; ainsi la restriction de B à la fibre de X coïncide avec celle de A ; donc :

(18.24) Si E est un univers fibré principal, le groupe structural d'une fibre est simplement transitif sur la fibre.

Il est clair d'autre part que le groupe principal est aussi transitif sur la fibre, et qu'il y commute avec le groupe structural ; il en résulte immédiatement que :

(18.25) Sur chaque fibre d'un univers fibré principal, le groupe structural et le groupe principal opèrent de façon contragrédiente.

En d'autres termes, on peut donner une structure de groupe à chaque fibre, les deux groupes (principal et structural) opérant comme les translations à gauche et les translations à droite ; en particulier, le groupe principal est simplement transitif lui aussi ; ce qui montre que :

(18.26) Si un groupe G est principal sur un univers E, les éléments de G n'ont pas de point fixe (sauf l'élément 1_E).

(ce qui peut aussi se vérifier immédiatement).

Exemple VI : Espace fibré des repères.

Soit E un espace fibré ; X un point de E ; $\tilde{X}$ sa fibre.

Soit F l'ensemble des opérateurs S définis par

(18.27) $[S \in F] \Leftrightarrow$ [Il existe un glissement A de E, défini en X, tel que $S = A \cdot 1_{\tilde{X}}$]

B appartenant au recueil R des glissements de E , posons

(18.28) $\pi(B)(S) = B.S$ (si $B.S$ n'est pas impuissant)

et d'autre part

(18.29) $\overset{\backsim}{S} = \mathrm{val}(S)$

Alors :

L'ensemble F (dont les éléments s'appellent <u>repères</u>) est un <u>univers fibré principal</u> , ayant $\mathrm{val}(\pi)$ (cf. 18.28) comme recueil de glissements, $\backsim$ (cf. 18.29) comme fibration , et dont le grou-
δ pe principal est l'ensemble des applications

$$S \to S.K$$

(18.30) K appartenant au groupe structural de la fibre $\tilde{X}$.
La base de F est la classe de transitivité de $\tilde{X}$ dans le pré-recueil $\tilde{R}$ de $\tilde{E}$

- En particulier, si $\tilde{E}$ est un univers, F a même base que E ; dans ce cas les glissements de jauge de F sont les opérateurs $\pi(C)$, C étant un glissement de jauge de E : le groupe de jauge de F est donc isomorphe à celui de E .

Exemple VII : <u>espaces projectifs et sphères</u>.

Soit E l'ensemble R^n , muni du prérecueil P des matrices régulières.

Le groupe G des matrices scalaires non nulles est visiblement principal ; Il donne donc à E une structure d'univers fibré principal; sa base s'appelle <u>espace projectif</u> (de dimension $n-1$).

- On vérifie immédiatement que son groupe de jauge coïncide avec le groupe structural (parceque les matrices scalaires sont les seules qui admettent tous les vecteurs non nuls comme vecteurs propres).

- On déterminera d'autres structures analogues sur E , en modifiant P et G ; ainsi, si on remplace G par le groupe des nombres positifs, on définit la <u>sphère</u> à $n-1$ dimensions ; si on remplace P par le groupe des matrices orthogonales, la base devient l'espace de Riemann à n-1 dimensions.

Exemple VIII : <u>espaces anallagmatiques</u>.

Dans l'espace enclidien hyperbolique normal à n dimensions, muni du prérecueil des "transformations de Lorentz", le cône isotrope K de sommet l'origine constitue un sous-univers (cf. 4.2) ; le groupe G des homothéties de pôle O en est un groupe principal ; la base K/G est l'espace anallagmatique à n-2 dimensions.

Exemple IX : <u>Structures fibrées définies par une équivalence</u>.

Soit E un ensemble quelconque ; $\sim$ une équivalence définie sur E.

On sait (17.13) que les opérateurs bi-permis pour $\sim$ forment un recueil ρ d'espace E ; ρ et $\sim$ donnent donc à E une structure d'espace fibré.
On peut vérifier que le groupe structural d'une fibre et son groupe de jauge coïcident avec le groupe de toutes les permutations ; que la topologie de la base $\tilde{E}$ est discrète ; que cette base est un univers seulement si toutes les fibres ont même puissance.

- Supposons par ailleurs que l'on ait donné un recueil quelconque R sur E ; alors il est clair que $R' = R \cap \rho$ est le plus grand sous-recueil admettant $\sim$ comme fibration :

(18.31) E étant un espace, $\sim$ une équivalence définie sur E, il existe une structure d'espace fibré sur E, définie par le recueil R' des glissements bi-permis et par l'équivalence $\sim$.

Exemple X : Faisceaux.

Considérons un ensemble E muni simultanément de deux structures :

(a) une structure d'espace, définie par un recueil R ;

(b) une structure d'espace fibré, définie par un recueil R' et une fibration $\sim$ de R'.

Nous supposerons que R' est un sous-recueil de R.
Soit π la projection de E sur sa base $\tilde{E}$ (définie à partir de la structure (b)) :

$$\pi (X) = \tilde{X}$$

nous appellerons feuillet de E toute partie U de E telle que $\pi.1_U$ soit un isomorphisme local de E (muni de sa structure d'espace (a)) à $\tilde{E}$ (muni de la structure d'espace base déduite de (b)).
On dira que E est un faisceau si tout point X de E appartient à un feuillet.

? dans un faisceau E, les propositions suivantes sont valables:

- Si U est un feuillet, U est a-ouvert, $\tilde{U}$ est ouvert dans $\tilde{E}$; toute partie ouverte de U est un feuillet.
- La projection π est a-continue.
- L'image d'un feuillet par un b-glissement est un feuillet.

etc.

On considère souvent des faisceaux où chaque fibre est munie d'une structure (par exemple d'espace vectoriel, de module, etc) telle que les b-glissements induisent sur chaque fibre des isomorphismes de cette structure, et que les opérations définissant la structure soient a-continues.

Exemple XI : <u>revêtements d'espaces.</u>

Théorème :

Soit E un espace ; R le recueil de ses glissements ; G un groupe de permutations de E :

(a) L'ensemble R' des glissements de E qui commutent avec chaque élément de G (on l'appellera <u>commutant</u> de G dans R)

(18.32) est un <u>recueil</u> ;

(b) E possède une structure d'<u>espace fibré principal</u>, ayant R' pour recueil de glissement, G pour groupe principal ; sa base sera notée E/G, et appelée quotient de E par le groupe G :

Définition :

On appellera <u>groupe discret</u> d'un espace E un groupe G de

(18.33) glissements globaux (cf. § 5), tel que tout point X possède un voisinage U vérifiant :

$$[\ Y \in U\ ,\ F \in G\ ,\ F(Y) \in U\ ] \Rightarrow F = 1_E$$

Théorème :

Si le groupe G est un groupe discret, l'espace E (18.32) est un <u>faisceau</u> ; on dira alors que E est un <u>revêtement</u> de sa base

(18.34) $E' = E/G$

Il existe alors une famille Φ_j d'isomorphismes locaux de E' à E, qui vérifient

$$[\ X \in \text{déf}(\Phi_j)\ ] \Rightarrow [\ \widetilde{\Phi_j}(X) = X\ ]$$

$$\bigcup_j \text{déf}(\Phi_j) = E$$

A étant un élément du groupe G, si l'on pose

$$[\ X \in (j,A,k)] \Leftrightarrow [\ \Phi_j(X) = A \cdot \Phi_k(X)]$$

les ensembles (j, A, k) vérifient :

♡

$$(j,A,k) = \text{ouvert de } E'$$

$$(j,A,k) \cap (k,B,\ell) \subset (j,A.B,\ell)$$

$$(j,A,k) = (k,A^{-1},j)$$

$$(j,A,j) = \emptyset \text{ si } A \neq 1$$

$$\bigcup_j (j,1,j) = E'$$

$$\bigcup_A (j,A,k) = (j,1,j) \cap (k,1,k)$$

Réciproquement,

(18.35) Soit E' un espace, G un groupe abstrait, I un ensemble d'indices, (j,A,k) une partie de E', définie pour tout (j,k) dans I^2 et tout A dans G, et vérifiant (18.34 ♡). Il existe alors un espace E, sur lequel le groupe G opère discrètement, tel que $E' = E/G$; et une famille Φ_j d'isomorphismes locaux de E' à E vérifiant (18.34 ♢) et (18.34 ♧).

Ce théorème montre que la construction de tous les revêtements d'un espace E' se ramène à la réalisation des relations ♡ ; on remarque que ces relations ne font intervenir que la topologie de E'.

- 0 - 0 - 0 - 0 - 0 -