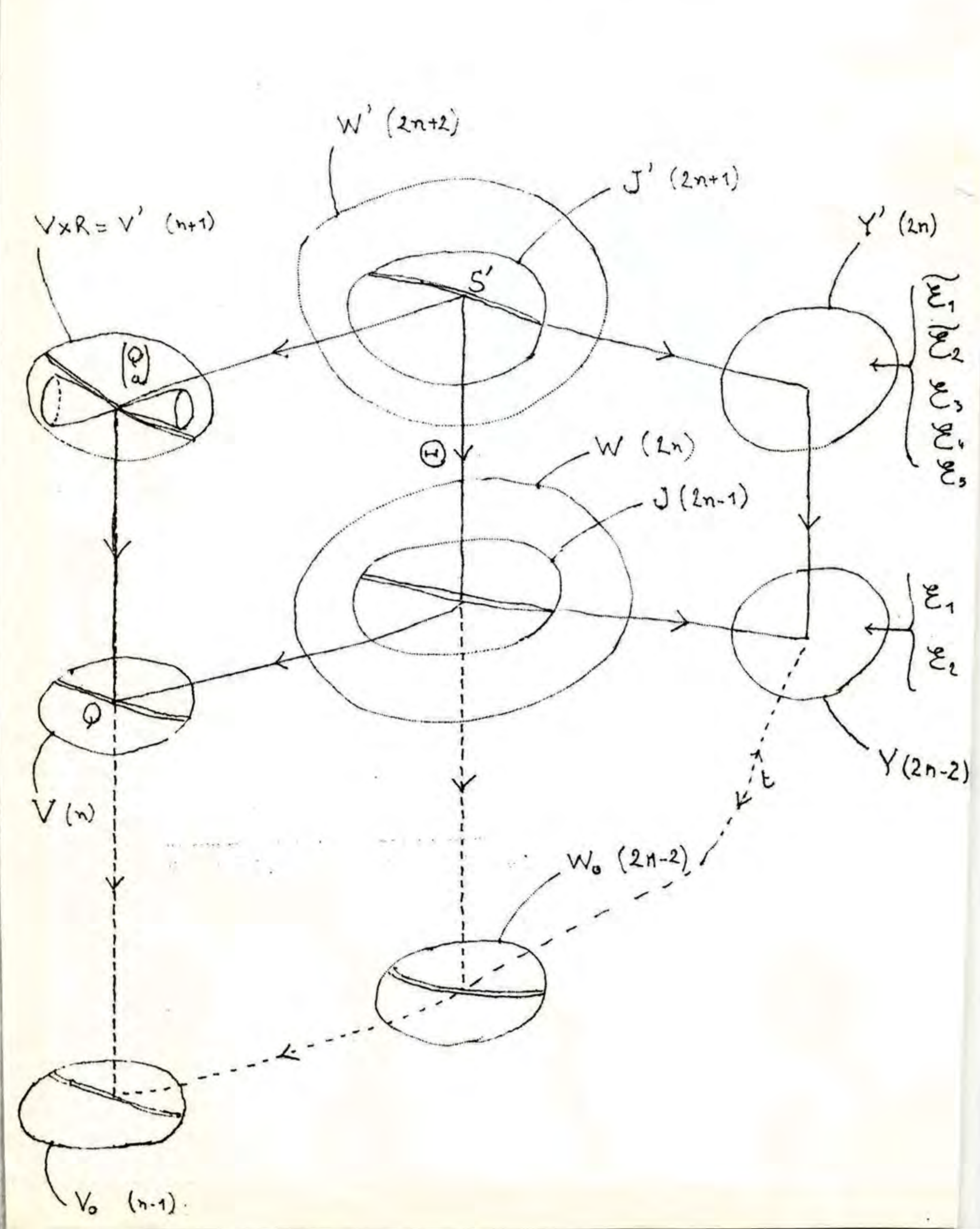
QUANTIFICATION CANONIQUE

Jean-Marie Souriau

FACULTÉ DES SCIENCES DE MARSEILLE

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE



W' (2n+2)
J' (2n+1)
V×R = V' (n+1)
Y' (2n)
S'
(Q a)
$\mathcal{E}_1$
$\mathcal{E}_2$
$\mathcal{E}_3$
$\mathcal{E}_4$
$\mathcal{E}_5$
Θ
W (2n)
J (2n-1)
$\mathcal{E}_1$
$\mathcal{E}_2$
Q
V (n)
Y (2n-2)
t
W₀ (2n-2)
V₀ (n-1)

A V E R T I S S E M E N T

Les méthodes utilisées d'habitude pour quantifier un système mécanique soulèvent, on le sait, de graves difficultés logiques: la "quantification" est-elle toujours possible ? est-elle invariante par un changement de coordonnées ? est-elle unique ? est-elle compatible avec l'invariance relativiste ?

Nous proposons ici une <u>nouvelle méthode de quantification</u>, qui est à l'abri de ces objections:

- Elle s'applique aussi bien aux problèmes newtoniens qu'aux problèmes relativiste (et même à la relativité générale); en fait, elle permet de quantifier les problèmes variationnels;
- Elle est <u>unique</u>, en ce sens qu'elle ne fait appel à aucun choix particulier, tel que celui de l'écriture de l'opérateur hamiltonien.
- Elle admet une formulation indépendante de tout système de coordonnées, ce qui assure son invariance; de façon plus précise, elle est <u>globale</u>, au sens que l'on donne à ce mot en géométrie différentielle.
-- Ses donditions d'applications (existence d'une "jacobienne évolutive") sont vérifiées par un grand nombre de problèmes de mécanique ou de variations ; on les vérifiera d'ailleurs sur les exemples traités.

Bien entendu, cette méthode n'dst pas miraculeuse: si elle permet de construire, pour chaque problème, un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et des opérateurs hermitiens sur $\mathcal{H}$ associés à <u>toutes</u> les variables dynamiques, on constate sur les exemples que $\mathcal{H}$ est plus grand que d'habitude et que les résultats classiques se retrouvent en faisant un choix assez arbitraire - à savoir celui d'un sous-espace $\mathcal{H}_o$ de $\mathcal{H}$. ($\mathcal{H}_o$ n'est d'ailleurs pas toujours un véritable espace de Hilbert, mais souvent un espace de distributions, alors que $\mathcal{H}$ est un espace fonctionnel). On devra exclure alors toutes les variables dynamiques auxquelles correspondent des opérateurs qui ne conservent pas $\mathcal{H}_o$ globalement.

Notre exposé commence par une étude globale des espaces de phases (§1), qui utilise les méthodes de la géométrie différentielle. A partir d'une variété différentiable V , nous construisons son espace de phases W , nous définissons les crochets de Poisson, la forme de Liouville, les transformations canoniques finies et infinitésimales, les variétés jacobiennes, la notion de jacobienne évolutive, etc, sans considérer aucun problème dynamique particulier.

Nous considérons ensuite un problème de variations (§2), et nous montrons que l'on peut, à trois niveaux dimensionnels différents, lui appliquer les notions géométriques précédentes; le niveau I fournit le formalisme hamiltonien; le niveau II le formalisme de Weierstrass ; quand au niveau III, il permet de traiter l'action a de la même façon que les autres variables dynamiques (il existe donc en particulier, une variable conjuguée de l'action) ; ce niveau III permet de traiter une catégorie de problèmes plus large que d'habitude (lagrangien dépendant de l'action).

C'est ce niveau III qui permet aussi de construire l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ (§3) ; $\mathcal{H}$ est le complété d'un espace $\mathcal{E}_5$ de fonctions infiniment différentiables; $\mathcal{E}_5$ est composé d'intégrales premières du problème III, qui sont de la forme

$$\psi = \omega\, e^{\frac{a}{i\hbar}}$$

ω étant indépendante de l'action. On montre qu'à toute variable dynamique u (du niveau II) , on peut faire correspondre canoniquement un opérateur hermitien sur $\mathcal{H}$, $\ulcorner u \urcorner$, qui vérifie les relations de commutation de Dirac.

En redescendant au niveau I , on constate que ces opérateurs vérifient les équations d'évolution usuelles.

- Nous montrons par ailleurs que $\mathcal{H}$ est un espace de représentation unitaire pour tout groupe qui laisse le lagrangien invariant.

Le § 4 est consacré à des exemples classiques, instructifs à des titres divers:

- La particule libre relativiste conduit à une représentation du groupe de Lorentz non homogène qui n'est pas irréductible, et que nous décomposons; on voit de cette façon que tous les états de spin entier sont contenus dans notre solution, et que la "masse quantique" possède un spectre continu, dont la masse quantique usuelle (définie par l'équation de Klein-Gordon) est la borne supérieure.

- Le spectre d'énergie de l'oscillateur harmonique se compose des multiples entiers de $h\nu$, y compris les multiples négatifs; on peut éliminer ceux-ci par une règle de sélection appropriée; mais on ne retrouve pas la constante additive $\frac{h\nu}{2}$, qui résulte d'un choix particulier de l'opérateur hamiltonien.

- L'atome d'hydrogène conduit à des résultats analogues; en recourant à la même règle de sélection, on retrouve le spectre d'énergie classique; cette règle de sélection fournit un rapprochement inattendu avec l'ancienne théorie des quantas (orbites de Bohr).

On peut s'interroger sur la signification à donner à la relation

$$\psi = \omega e^{\frac{a}{i\hbar}}$$

qui caractérise l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$, et qui introduit la constante de Planck dans la théorie. Peut-être serait-il plus satisfaisant de considérer que la variable a parcourt un <u>cercle de rayon $\hbar$</u>; la théorie précédente se retrouve en décomposant la fonction d'onde en série de Fourier de la variable a , et en ne considérant que l'hrmonique 1 . Les autres harmoniques pourraient alors être considérés comme les états <u>multiparticulaires</u>; l'opérateur attaché à la variable conjuguée de l'action serait l'opérateur <u>nombre de particules</u> . Un tel point de vue pourrait, d'autre part, être rapproché de la théorie "tubulaire" que nous avons proposée par ailleurs (références IV,V,VI).

Les résultats du présent travail ont été exposés d'abord au Séminaire de Physique Mathématique de la Faculté des Sciences de Marseille (avril 1961), puis au 6ème Colloque de Théories Variationnelles (Mont Aigoual, septembre 1961); nous reprenons ici et utilisons des résultats publiés antérieurement:

(I) "Géométrie symplectique différentielle-Applications" Colloque de Géométrie Différentielle de Strasbourg, C.N.R.S. LII 53(1953).

(II) "Equations canoniques et géométrie symplectique" Alger-Mathématiques, I , 2 , 239 (1954).

(III) "Univers abstraits et théories physiques - Géométrie" Séminaire de Physique Mathématique de Marseille(1961); ronéotypé

(IV) "Une axiomatique relativiste pour la microphysique" C.R.A.S, 247, 1559 (1958)

(V) "Conséquences physiques d'une théorie unitaire" C.R.A.S., 248, 1479 (1959)

(VI) "Relativité multidimensionnelle non stationnaire" Colloque de Royaumont sur les théories relativistes de la Gravitation et de l'Electromagnétisme, C.N.R.S. (1959)

Jean-Marie Souriau

§ I : GEOMETRIE GLOBALE DES ESPACES DE PHASES .

(1.1) Variétés différentiables.

Soit N un entier positif; nous désignons par R^N l'ensemble des colonnes $q = \begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \\ \cdots \\ q^N \end{bmatrix}$ de N nombres réels q^1, q^2, ... q^N.

Une fonction u sera dite C^∞ si elle est définie dans un ouvert de R^N , et si $u(q)$ admet des dérivées partielles continues de tous ordres par rapport à $q^1, q^2, \ldots q^N$.

Nous supposerons connue la définition d'une variété (infiniment) différentiable de dimension N ; rappelons seulement que l'on définit sur une telle variété V des cartes locales , qui sont des application biunivoques d'un ouvert de R^N dans V , dont les domaines de valeurs recouvrent V ; que si F et G sont deux cartes locales, $F^{-1} {}_o G$ est de classe C^∞ ; qu'une fonction u définie sur une partie de V est dite de classe C^∞ si, quelle que soit la carte locale F , $u {}_o F$ est une fonction C^∞ (définie dans un ouvert de R^N).

- De même,une application A d'une partie de V dans V sera dite C^∞ si, quelles que soient les cartes locales F et G , $F^{-1} {}_o A {}_o G$ est C^∞ ; nous appellerons glissements de V les applications biunivoques d'une partie de V dans V qui sont C^∞ , ainsi que leur inverse; il est clair que si A et B sont des glissements de la variété V, $A.B$ et A^{-1} sont aussi des glissements; on vérifie aisément que V possède une topologie, définie de la façon suivante : une partie H de V est un ouvert si l'opérateur identique sur H (que nous noterons 1_H) est un glissement; les cartes et les glissements sont des applications bicontinues pour cette topologie.

Le lecteur trouvera une étude plus détaillée des glissements dans Souriau 3 .

(1.2) Vecteurs et covecteurs.

Nous supposerons également connue la notion d'espace vectoriel tangent en un point Q à une variété différentiable V ; si F est une carte locale de V , un vecteur tangent à V au point $Q = F(q)$ est défini par la colonne

$$\delta q = \begin{bmatrix} \delta q^1 \\ \delta q^2 \\ \cdots \\ \delta q^N \end{bmatrix}$$

. de ses composantes ; on le notera δQ ,et on résoudra le problème du changement de carte pour un tel vecteur en traitant le symbole δ comme un symbole de différentiation.

- Les covecteurs tangents à V sont les éléments du dual de l'espace vectoriel tangent ; on appellera composantes du covecteur P dans la carte F les nombres $p_1, p_2, \ldots p_N$ tels que

(1.2.1) $$P.\,\delta Q \equiv p_1\,\delta q^1 + p_2\,\delta q^2 + \ldots\, p_N\,\delta q^N$$

quel que soit le vecteur δQ ;

Cette formule (1.2.1) peut encore s'écrire,en notation matricielle

(1.2.2) $$P.\,\delta Q \equiv p.\,\delta q$$

si l'on désigne par p la ligne

(1.2.3) $$[\, p_1\ p_2\ \ldots\ p_N\,]$$

ou, en notations tensorielles :

(1.2.4) $$P \cdot \delta Q = p_j \cdot \delta q^j$$

j étant un indice muet qui prend les valeurs $1, 2, \ldots N$.
on dira que les p_j sont les composantes du covecteur P dans la carte F.

(1.3) Espace de phases.

V étant une variété différentiable, de dimension N nous appellerons phase de V tout couple $\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ formé par un point Q de V et par un covecteur P, tangent à V en Q.

Il est clair que l'ensemble W des phases de V possède une structure de variété différentiable de dimension $2N$; on associera à chaque carte locale F de V une carte locale de W en faisant correspondre à la colonne

(1.3.1) $$q = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \ldots \\ p_N \\ q^1 \\ q^2 \\ \ldots \\ q^N \end{pmatrix}$$

la phase S dont les composantes dans la carte F sont, au sens de (1.2), $p_1, p_2, \ldots p_N$ pour P, $q^1, q^2, \ldots q^N$ pour Q.
On en déduit immédiatement qu'il existe, sur l'espace de phases W, un champ de covecteurs R (on dit aussi une forme d'ordre 1) défini intrinsèquement par

(1.3.2) $$R \cdot \delta S \equiv P \cdot \delta Q$$

dans la carte que nous venons de définir, la ligne r des composantes de R est

(1.3.3) $$r = [\,0 \quad 0 \ \ldots\ 0 \quad p_1 \ p_2 \ldots p_N\,]$$

puisque l'on doit avoir $r.\delta s \equiv R.\delta S \equiv P.\delta Q \equiv p_1\delta q^1 + p_2\delta q^2 + \ldots + p_N\delta q^N$.
Nous appellerons cette forme "forme de Pfaff" de l'espace de phase.

- On sait que la <u>dérivée extérieure</u> d'une forme P d'ordre 1 est la forme ∇P d'ordre 2 définie par la formule

(1.3.4) $$\nabla P\,(dQ)(\delta Q) \equiv dp.\,\delta q - \delta p.dq$$

ou, en notations tensorielles :

(1.3.5) $$[\nabla P]_{jk} = \partial_j p_k - \partial_k p_j$$

dont on peut montrer qu'elle est indépendante du choix de la carte.
En appliquant cet algorithme à la forme R définie sur W, on voit que l'on a :

(1.3.6) $$\boxed{\begin{aligned}\nabla R(dS)(\delta S) &= dr.\,\delta s - \delta r.\,ds\\ &= dp.\,\delta q - \delta p.\,dq\\ &= dp_j.\,\delta q^j - \delta p_j.dq^j\end{aligned}}$$

par conséquent, la matrice des composantes $[\nabla R]_{\lambda\mu}$ $(\lambda,\mu=1,2\ldots 2N)$ a la valeur

(1.3.7) $$\left[\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix}-1 & & \\ & -1 & \\ & & \ddots \\ & & & -1\end{matrix} \\ \hline \begin{matrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{matrix} & 0 \end{array}\right]$$

Ainsi, la forme ∇R est une forme <u>antisymétrique de rang 2N</u> (le déterminant de la matrice (1.3.7) vaut en effet +1); nous l'appellerons <u>forme de Poisson</u> en W ; elle définit sur l'espace vectoriel tangent à W en S un <u>produit symplectique</u> qui s'obtient en posant

(1.3.8) $$\langle dS \mid \delta S \rangle = \nabla R(dS)(\delta S)$$

qui est bilinéaire et régulier comme le produit scalaire sur une variété riemanienne, mais antisymétrique.

L'espace de phases W est donc une variété symplectique; c'est une variété <u>plate</u>, en ce sens qu'il existe au voisinage de tout point une carte où les composantes du produit symplectique sont des constantes (à savoir les coefficients de la matrice (1.3.7)).

Des considérations précédentes, il résulte que l'on peut définir sur tout espace de phases trois structures distinctes, au moyen des ensembles suivants (ce sont des recueils, au sens de III)

- L'ensemble (A) des glissements de W (voir 1.1) ;

- L'ensemble (B) des glissements de W qui conservent la forme de Poisson et que l'on appellera glissements (ou transformations) canoniques;

- L'ensemble (C) des glissements de W qui conservent la forme de Pfaff R.

La structure (A) est la structure de variété différentiable à 2N dimensions; nous reviendrons plus loin sur la structure (B) (cf. 1.6); indiquons que la structure (C) est la structure d'<u>espace fibré</u> (voir III) de base V :

Les fibres de W sont les ensembles des phases $\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$, où Q a une valeur fixe ; ce sont donc aussi les espaces vectoriels cotangents à V ; les éléments de l'ensemble (C) sont les <u>relèvements</u> des glissements de V ; on les obtient en choisissant un glissement A de V et en faisant correspondre à la phase $\begin{pmatrix} P_o \\ Q_o \end{pmatrix}$ la phase $\begin{pmatrix} P_1 \\ Q_1 \end{pmatrix}$ définie par $Q_1 = A(Q_o), P_1 . dQ_1 \equiv P_o\ dQ_o$

Les glissements qui conservent une forme conservent sa dérivée extérieure; par suite, (C) $\subset$ (B) ; en d'autres termes, les glissements de V se relèvent par des transformations canoniques de W; la vérification directe de ce fait est immédiate.

(1.4) <u>Forme de Liouville</u>.

Il est clair que les transformations canoniques, qui conservent la forme ∇R , conservent aussi les <u>puissances extérieures</u> de cette forme.

Considérons en particulier la puissance extérieure N-ème de la forme de Poisson; c'est une forme non nulle (parce que la forme de Poisson est régulière) d'ordre maximum 2N ; ses composantes sont des constantes dans la carte définie en (1.2), puisque ce sont des fonctions des composantes constantes de la forme de Poisson; par suite, cette forme est égale, à un facteur constant près, à la forme Λ définie par

(1.4.1) $$\Lambda_{12\ldots[2N]} = +1$$

oau encore par

(1.4.2) $\Lambda(\delta_1 S)(\delta_2 S)\ldots(\delta_{2N} S)$ = déterminant dé la matrice

$$[\delta_1 s \quad \delta_2 s \quad \ldots\ \delta_{2N} s\ ]$$

Nous appellerons <u>forme de Liouville</u> la forme Λ ; nous voyons que la forme de Liouville est conservée par toutes les transformations canoniques, notamment par les relèvements des glissements de V.

La forme de Liouville donne à l'espace de phases W une structure de variété orientée; elle permet d'intégrer sur W toutes les fonctions continues u à support compact, l'intégrale étant invariante par les transformations canoniques du support ; on peut évidemment noter cette intégrale

(1.4.3) $$\int_W u(S)\, dp_1\, dp_2 \ldots dp_N\, dq^1\, dq^2 \ldots dq^N$$

(1.5) Crochets de Poisson.

Soit u une fonction de classe C^∞ définie dans un ouvert de W. A chaque point S de cet ouvert, on peut associer le covecteur tangent (à W en S) $\frac{\partial u}{\partial S}$ défini par

(1.5.1) $$\frac{\partial u}{\partial S}\, \delta S \underset{\delta}{=} \delta u$$

la forme de Poisson étant une application de l'espace vectoriel tangent sur son dual, il existe donc un vecteur et un seul (que nous nommerons grad u par analogie avec le cas riemannien) tel que

(1.5.2) $$\langle \operatorname{grad} u \mid \delta S \rangle = \delta u \quad \text{quel que soit le vecteur } \delta S$$

Il résulte de la formule (1.3.6) que si l'on pose grad $u = dS$, on a

(1.5.3) $$\boxed{dp_j = \frac{\partial u}{\partial q^j} \qquad dq^j = -\frac{\partial u}{\partial p^j}}$$

u et v étant deux fonctions C^∞ dans un même ouvert, on appellera crochet de Poisson de u et v, en un point S, et on note classiquement $[u\,,\,v\,]$ le produit symplectique des gradients de u et v en ce point:

(1.5.4) $$[u, v] = \langle \operatorname{grad} u \mid \operatorname{grad} v \rangle$$

Dans une carte, les formules (1.3.6) et (1.5.3) fournissent l'expression classique

(1.5.5) $$[u, v] = \frac{\partial u}{\partial q^j}\frac{\partial v}{\partial p_j} - \frac{\partial u}{\partial p_j}\frac{\partial v}{\partial q^j}$$

Il est clair que le crochet de Poisson $[u,v]$ est une forme bilinéaire et antisymétrique par rapport aux fonctions u et v ; un calcul élémentaire permet de vérifier l'identité de Jacobi

(1.5.6) $$[u, [v,w]] + [v, [w,u]] + [w, [u,v]] = 0$$

qui sera interprétée et utilisée plus loin.

(1.6) Transformations canoniques infinitésimales.

Considérons d'abord une variété C^∞, V, et un champ de vecteurs $\delta Q = F(Q)$ défini dans un ouvert de V. Nous dirons que ce champ de vecteur est C^∞ si ses composantes δq^j sont des fonctions C^∞ des q^j; cette définition est évidemment indépendante du choix de la carte locale utilisée.

Le système différentiel

(1.6.1) $$\frac{dq^j}{ds} = \delta q^j$$

est aussi indépendant de la carte; il est donc légitime de l'écrire

(1.6.2) $$\frac{dQ}{ds} = \delta Q \quad (= F(Q))$$

La théorie classique des équations différentielles permet d'établir les résultats suivants :

a) A chaque point Q_0 de l'ouvert où est défini le champ, correspond une solution $Q = f(s)$ de l'équation différentielle (1.6.1) ou (1.6.2), telle que $f(0) = Q_0$; il existe un intervalle ouvert maximal, contenant 0 , où une telle solution existe (l'intervalle peut être infini); cette solution est unique ; nous la noterons $f(s) = \exp(s\delta)(Q_0)$.

b) pour chaque valeur de s, $\exp(s\delta)$ est un glissement de la variété; on a

(1.6.3) $$\exp(s\delta)^{-1} = \exp(-s\delta)$$

(1.6.4) $$\exp(s\delta) . \exp(s'\delta) = \exp([s+s']\delta)$$ pour s et s' de même signe.

Pour cette raison, on dit parfois que le champ de vecteurs δQ définit un glissement infinitésimal , les glissements finis correspondants étant les $\exp(s\delta)$.

-Considérons maintenant un champ de vecteurs δ défini sur un ouvert d'un espace de phases W ; cherchons à quelle condition les glissements $\exp(s\delta)$ seront des transformations canoniques (nous dirons alors que δ est une transformation canonique infinitésimale).

On peut remarquer qu'il est équivalent de dire que la forme de Poisson est un invariant intégral du système différentiel,ou encore que la dérivée de Lie de la forme de Poisson est nulle ; des formules classique de géométrie différentielle donnent immédiatement la condition cherchée, qui s'écrit

(1.6.5) $$\nabla \langle \delta S | = 0$$

ainsi que permet d'ailleurs de la vérifier un calcul direct.

La condition (1.6.5) peut encore s'écrire :

"au voisinage de chaque point,il existe une fonction u telle que

(1.6.6) $$\langle \delta S | = \frac{\partial u}{\partial S}$$ "

la relation (1.6.6) pouvant aussi se noter (cf. 1.5.2)

(1.6.7) $\delta S = \text{grad } u$

Ainsi,les transformations canoniques infinitésimales sont les

<u>champs de vecteurs qui sont localement des gradients (symplectiques)</u>.

Convenons d'associer à chaque fonction C^{∞}, u, la transformation canonique infinitésimale ∂_u définie par

$$\partial_u S = - \operatorname{grad} u \tag{1.6.8}$$

et de poser, pour toute fonction C^{∞}, v :

$$\partial_u w = \frac{\partial w}{\partial S} \partial_u S \tag{1.6.9}$$

Il est clair que l'on a identiquement :

$$\partial_u w = - \frac{\partial w}{\partial S} \operatorname{grad} u = - \langle \operatorname{grad} w \mid \operatorname{grad} u \rangle \text{, soit}$$

$$\partial_u w = [u , w] \tag{1.6.10}$$

Inversement, cette égalité (1.6.10), considérée comme identité en w, est équivalente à (1.6.8) ; il suffit pour le voir de remplacer w par les p_j et les q^j. Si on considère une troisième fonction v, on aura

$$\partial_u \partial_v w - \partial_v \partial_u w = [u, [v,w]] - [v, [u,w]]$$

soit, d'après l'identité de Jacobi (1.5.6) :

$$\partial_u \partial_v w - \partial_v \partial_u w = [[u,v],w] \tag{1.6.11}$$

puisque w est arbitraire, nous écrirons symboliquement cette égalité sous la forme suggestive:

$$\partial_u \partial_v - \partial_v \partial_u = \partial_{[u,v]} \tag{1.6.12}$$

(1.7) Variétés jacobiennes.

Nous appellerons variété jacobienne toute variété J à $2N-1$ dimensions, plongée dans l'espace de phases W, définie localement par une équation

(1.7.1) $$\varphi = 0$$

(on suppose que φ est une fonction de classe C^{∞}, et que φ et $\dfrac{\partial\varphi}{\partial S}$ ne s'annulent pas simultanément).

En chaque point S de J, les vecteurs dS tangents à J sont les solutions de $\dfrac{\partial\varphi}{\partial S}\,dS = 0$; ce sont donc les vecteurs dont le produit symplectique avec $\text{grad}\,\varphi$ est nul (nous dirons vecteurs "orthogonaux" à $\text{grad}\,\varphi$) ; ainsi $\text{grad}\,\varphi$ définit la direction orthogonale à J.

Mais comme $\text{grad}\,\varphi$ est orthogonal à lui-même (le produit symplectique étant antisymétrique), $\text{grad}\,\varphi$ est aussi tangent à J ; ce qui justifie la définition suivante :

(1.7.2) Nous appellerons caractéristiques d'une variété jacobienne J les trajectoires orthogonales de J ; ce sont des courbes tracées sur J.

En utilisant une carte locale, compte tenu de (1.5.3), on voit que:

Les caractéristiques de la jacobienne d'équation $\varphi = 0$ sont localement les solutions du système différentiel (dit caractéristique):

(1.7.3) $$\frac{dp_1}{\left[\dfrac{\partial\varphi}{\partial q^1}\right]} = \cdots\cdots = \frac{dp_N}{\left[\dfrac{\partial\varphi}{\partial q^N}\right]} = \frac{-dq^1}{\left[\dfrac{\partial\varphi}{\partial p_1}\right]} = \cdots = \frac{-dq^N}{\left[\dfrac{\partial\varphi}{\partial p_N}\right]}$$

pour lesquelles l'intégrale première φ a la valeur 0.

Il est clair que la définition (1.7.2) des caractéristiques est globale, et invariante par les transformations canoniques.

Par tout point S de J, on peut faire passer une autre jacobienne $\psi = 0$ qui ne soit pas orthogonale à J (c'est-à-dire telle que $[\varphi, \psi] \neq 0$ en ce point). Alors dans un voisinage de ce point, les équations $\varphi = \psi = 0$ définiront une variété K de dimension $2N-2$, qui sera en correspondance bi-univoque avec les arcs de caractéristique définis dans ce voisinage. Nous dirons que la jacobienne est <u>évolutive</u> si on peut trouver autour de chaque point S une telle variété de dimension $2N-2$ qui soit coupée en un seul point par les caractéristiques qui la rencontrent.* (il s'agit évidemment d'une propriété <u>globale</u> de la jacobienne). Dans ces conditions il est clair que l'ensemble des caractéristiques possède une structure de variété C^∞ à $2N-2$ dimensions, que l'on peut considérer comme le quotient de la jacobienne par la fibration des caractéristiques.
Il faut noter que cette variété quotient possède une <u>structure symplectique plate</u> ; en effet :

a) on peut montrer qu'au voisinage d'un point, il existe une transformation canonique qui applique la jacobienne sur un "hyperplan" d'équation $p_N = 0$ (c'est l'interprétation géométrique du théorème de Jacobi; cf. Souriau II,p.259); il en résulte évidemment une structure symplectique plate induite sur la sous-variété d'équation $p_N = 0$, $q_N = 0$.

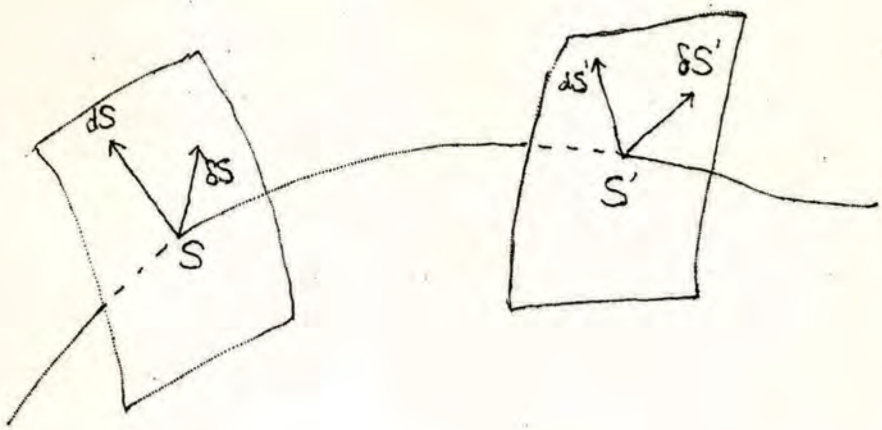
b) la forme de Poisson est un invariant intégral au sens de Cartan du système caractéristique (1); par suite, le produit symplec- de deux vecteurs tangents à une telle variété est conservé par

---

(1) Nous savons déjà que c'est un invariant intégral de Poincaré, puisque $\delta S = \mathrm{grad}\,\varphi$ est une transformation canonique infinitésimale ; voir Cartan.

* et si ces caractéristiques ne sont pas des courbes fermées

la correspondance avec une autre variété définie par projection le long des caractéristiques.



On peut appliquer à cette variété à 2N-2 dimensions un certain nombre de considérations de l'espace de phases, notamment l'existence d'une forme de Liouville (d'ordre 2N-2) et d'une orientation. Nous considérerons d'ailleurs des cas particuliers où cette variété peut être mise en correspondance "canonique" avec un espace de phases.

Notons que l'on peut identifier les intégrales premières du système caractéristique avec les fonctions définies sur les ouverts de la variété quotient (cette dernière définition étant d'ailleurs globale); on peut donc définir les intégrales premières C^{∞}, intégrer intrinsèquement ces intégrales premières à l'aide de la forme de Liouville (voir 1.4); définir le crochet de Poisson de deux intégrales premières sur une caractéristique; ceci peut d'ailleurs se faire élémentairement, en remarquant que les intégrales premières sont les fonction u telles que

(1.7.4) $$[\varphi , u] = 0 \;;$$

par suite, si u et v sont des intégrales premières, l'identité de Jacobi donne

(1.7.5) $$[\varphi, [u,v]] = [u,[\varphi ,v]] - [v,[\varphi , u]] = 0$$

ce qui montre que $[u,v]$ est une intégrale première (on reconnait le <u>théorème de Poisson</u>); l'identité du crochet de Poisson défini dans l'espace de phases avec celui défini sur la variété quotient se déduit de la possibilité d'écrire, par une transformation canonique, l'équation de la variété jacobienne sous la forme $p_N = 0$.

-Cherchons à interpréter la symétrie (en u et φ) de la condition (1.7.4): <u>la condition pour que u soit une intégrale première du système caractéristique de la jacobienne $\varphi = 0$ est aussi celle pour que la transformation canonique infinitésimale δ_u conserve cette jacobienne</u>.

On voit apparaître une corrélation entre invariance et conservation, analogue à celle que fournit le théorème de Noether. On peut d'ailleurs retrouver un aspect du théorème de Noether dans le cas où δ_u est le relèvement à W d'une transformation infinitésimale de la variété V (Cf. 1.3); il est clair que ce cas s'obtient en considérant les intégrales premières <u>linéaires par rapport à P</u> : $u = P.\delta Q$, où δQ est un champ de vecteurs tangents à V.

§ 2 - CALCUL CANONIQUE DES VARIATIONS

(2.1) <u>Triple aspect dimensionnel des problèmes de variations</u>.

Considérons un problème classique de variations

$$\delta \int_{t_o}^{t_1} f(t, q^j, \frac{dq^j}{dt})\, dt = 0 \qquad (2.1.1)$$

où il faut, comme d'habitude, déterminer $n-1$ fonctions q^j de t telles que la variation de l'intégrale donnée soit nulle pour toute variation des q^j nulles aux extrémités de l'intervalle d'intégration donné, (t_o , t_1).

(I) - Une première interprétation de ce problème consiste à considérer les q^j comme les coordonnées locales d'un point Q sur une variété V_0 de dimension $N = n-1$; on écrira alors le problème sous la forme

(2.1.2) $$\delta \int_{t-}^{t_1} F(t, Q, \frac{dQ}{dt})\, dt$$

F étant une fonction définie sur les triplets d'un nombre réel t, d'un point Q de V_0 et d'un vecteur tangent à V_0 en Q ; ou, si on le préfère, sur un point du produit direct de R par l'espace fibré des vecteurs tangents à V_0.
L'énoncé (2.1.2) est alors visiblement indépendant du choix de la carte locale ; il généralise même (2.1.1) en ce sens qu'il se présente sous une forme globale.

(II) - On peut aussi bien poser $q^n \equiv t$, et considérer les variables $q^1, \ldots q^n$ comme les coordonnées locales d'un point Q sur une variété V de dimension $N = n$; le problème consistera à chercher une courbe tracée sur V, c'est-à-dire $q^1, q^2, \ldots q^{n-1}$ et t en fonction d'un paramètre s de sorte que l'on ait

(2.1.3) $$\delta \int_{s_0}^{s_1} G(Q, \frac{dQ}{ds})\, ds = 0$$

avec

(2.1.4) $$G(Q, \frac{dQ}{ds}) \equiv f\left(t, q^j, \frac{\left[\frac{dq^j}{ds}\right]}{\left[\frac{dt}{ds}\right]}\right) \cdot \frac{dt}{ds}$$

le "lagrangien" $G(Q, \frac{dQ}{ds})$ est alors défini sur un ouvert de l'espace fibré des vecteurs tangents à V ; il est de plus homogène du premier degré par rapport à $\frac{dQ}{ds}$. Les variations de la courbe cherchée seront astreintes à conserver fixes ses extrémités.

Sous cette forme (2.1.3), on se pose un problème un peu plus général que le précédent, en ce sens qu'il ne sera pas nécessaire de supposer que t peut être pris pour paramètre, c'est à dire que $\frac{dt}{ds}$ ne s'annule pas ; autrement dit, la problème sera invariant pour les changements de carte d'une variété à n dimensions au lieu de $n-1$.

(III) On peut également introduite comme nouvelle variable <u>l'action</u>

$$a = \int_{t_o}^{t} f\left(\tau , q^j, \frac{dq^j}{d\tau} \right) d\tau \tag{2.1.5}$$

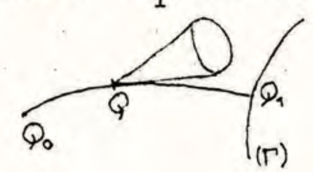
en la considérant comme fonction de la limite supérieure d'intégration ; il revient au même, bien entendu, de poser

$$\begin{cases} \dfrac{da}{dt} = f\left(t, q^j, \dfrac{dq^j}{dt} \right) \\ \\ a = 0 \quad \text{pour} \quad t = t_o \end{cases} \tag{2.1.6}$$

On considérera alors les variables $q^1, \ldots q^{n-1}, t , a$ comme les coordonnées d'un point Q sur une variété V' de dimension $N = n+1$; on cherchera une courbe tracée sur V' qui, en chaque point Q de V', devra être tangente au <u>cône</u> de l'espace vectoriel tangent défini par l'équation :

$$\psi\left(Q , \frac{dQ}{ds}\right) \equiv \frac{da}{ds} - f\left(t, q^j, \frac{\frac{dq^j}{ds}}{\frac{dt}{ds}}\right) \frac{dt}{ds} = 0 \tag{2.1.7}$$

On supposera donnée l'une des extrémités de l'arc de courbe (en effet, les q^j et a sont donnés pour $t=t_o$); l'autre extrémité Q_1 de la courbe cherchée sera astreinte à se trouver



sur une courbe donnée (Γ) (les q^j et t ayant des valeurs fixées, a étant à priori variable); on cherchera à déterminer la courbe pour que les courbes infiniment voisines vérifiant les conditions données aient même extrémité Q_1.

Malgré le rôle privilégié que semble jouer la variable "a" dans cet énoncé, nous verrons qu'il possède en fait l'invariance dans les changements de carte à $n+1$ dimensions; en effet, la condition cherchée sera indépendante du choix de la courbe (Γ), pourvu que sa tangente au point Q_1 ne soit pas dans un certain hyperplan. Le fait que la variable a n'intervienne pas dans l'équation (2.1.7), c'est à dire que le champ de cônes soit invariant par les glissements $a \to a+Cte$, ne joue aucun caractère essentiel dans le traitement du problème.

Nous allons traiter ces trois problèmes en introduisant l'espace de phases de la variété V ; il aura donc, suivant le cas, la dimension $2n-2$, $2n$ ou $2n+2$. Nous commencerons par établir un lemme important.

(2.2) Dualité des cônes.

Soit A un vecteur parcourant un espace vectoriel E de dimension N.

Nous appellerons <u>cône</u> l'ensemble des solutions d'une équation

(2.2.1) $$\boxed{\psi(A) = 0}$$

où ψ est une fonction C^{∞} en dehors de l'origine, homogène de degré quelconque.

Considérons un élément B du dual de E ; nous dirons que B est tangent au cône s'il existe un élément A du cône et un nombre s non nul tels que

(2.2.2) $$\boxed{B = s \frac{\partial[\psi(A)]}{\partial A}}$$

L'ensemble des covecteurs tangents au cône s'obtient donc en éliminant les variables A et s entre les équation (2.2.1) et (2.2.2) ;,il peut arriver qu'il forme un cône,d'équation

(2.2.3) $$\boxed{\varphi(B) = 0}$$

Dans ces conditions, on dira que (2.2.3) est l'équation du cône dual du premier, ou encore l'équation tangentielle du cône.

Il résulte immédiatement de l'hmogénéité de ψ que $\frac{\partial \psi(A)}{\partial A} . A = 0$; on a donc $B.A \equiv 0$, et par suite

$$\delta B . A \equiv -B. \delta A \equiv -s \delta [\psi(A)] \equiv 0$$

Par suite les covecteurs δB sont "orthogonaux" à A ; on a donc, d'après (2.2.3), en utilisant un multiplicateur de Lagrange

(2.2.4) $$\boxed{A = \lambda \frac{\partial\varphi(B)}{\partial B}}$$

Par suite,l'équation du cône (2.2.1) s'obtiendra en éliminant λ et B entre (2.2.3) et (2.2.4) ; on a ainsi le moyen d'obtenir l'équation du cône à partir de l'équation du cône dual.

- Comme application, considérons une fonction homogène du 1er degré

(2.2.5) $$\boxed{a = G(A)}$$

On peut considérer que (2.2.5) est l'équation d'un cône dans l'espace des couples $\begin{pmatrix} a \\ A \end{pmatrix}$; en appliquant le résultat précédent, on voit que si l'on pose

(2.2.6) $$\boxed{B = \frac{\partial a}{\partial A}}$$

l'élimination de A entre (2.2.5) et (2.2.6) peut conduite à une équation

(2.2.7) $$\boxed{\varphi(B) = 0}$$

et que l'on retrouve la fonction G en éliminant λ et B entre les relations

(2.2.8)
$$\boxed{\varphi(B) = 0 \;, \quad a = B.A \;, \quad A = \lambda \frac{\partial \varphi(B)}{\partial B}}$$

Nous verrons plus loin des exemples de ce fait.

(2.3) Résolution du problème N°II.

Si nous posons

(2.3.1)
$$\frac{dQ}{ds} = \dot{Q} \qquad\qquad \ell = G(Q,\dot{Q})$$

on pourra résoudre classiquement le problème (2.1.3) par l'équation d'Euler-Lagrange

(2.3.2)
$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \ell}{\partial \dot{Q}}\right) - \frac{\partial \ell}{\partial Q} = 0$$

ou mieux, en introduisant une nouvelle variable P :

(2.3.3)
$$P = \frac{\partial \ell}{\partial \dot{Q}}$$

(2.3.4)
$$\dot{P} = \frac{\partial \ell}{\partial Q}$$

Nous avons vu que le "lagrangien" ℓ est homogène du premier degré en $\dot{Q}$; par suite, il vérifie l'identité d'Euler :

(2.3.5)
$$\ell \equiv P.\dot{Q}$$

Par différentiation, on obtient

$$\delta\ell \equiv \frac{\partial \ell}{\partial Q}\,\delta Q + \frac{\partial \ell}{\partial \dot{Q}}.\,\delta\dot{Q} \equiv \delta P.\,\dot{Q} + P.\,\delta\dot{Q}$$

d'où, compte tenu de (2.3.3)

(2.3.6) $$\frac{\partial \ell}{\partial Q}\,\delta Q \equiv \delta P.\dot{Q}$$

si bien que l'on peut remplacer l'équation (2.3.4) par l'équation équivalente

(2.3.7) $$\dot{P}.\,\delta Q \equiv \delta P.\dot{Q}$$

Appliquons à la fonction homogène du 1er degré ℓ les résultats du N^{o}(2.2); il peut arriver (et c'est ce que nous supposerons désormais) que l'on puisse éliminer $\dot{Q}$ dans l'équation (2.3.3), et trouver ainsi une relation

(2.3.8) $$\varphi\,(P,Q) = 0$$

On sait alors que l'on pourra remplacer (2.3.3) par le système

(2.3.9) $$\varphi\,(P,Q) = 0 \quad , \quad \ell = P.\dot{Q} \quad , \quad \dot{Q} = \lambda\,\frac{\partial \varphi(\rho,\varphi)}{\partial P}$$

d'où l'on tire l'identité

(2.3.10) $$\delta P.\dot{Q} + \lambda\,\frac{\partial \varphi}{\partial Q}.\,\delta Q \equiv 0$$

ce qui permet d'écrire (2.3.7) sous la forme équivalente :

(2.3.11) $$\dot{P} = -\lambda\,\frac{\partial \varphi}{\partial Q}$$

On voit finalement que l'on peut écrire les équations de Lagrange sous la forme

(2.3.12) $$\varphi\,(P.Q) = 0 \qquad \dot{P} = -\lambda\,\frac{\partial \varphi}{\partial Q} \qquad \dot{Q} = \lambda\,\frac{\partial \varphi}{\partial P}$$

avec $\ell = P.\dot{Q}$

En comparant avec (1.7.3), on peut donc énoncer :

Soit à résoudre le problème

(2.1.3) $$\delta \int_{s_0}^{s_1} G(Q, \frac{dQ}{ds})\, ds = 0 \quad \text{(extrémités fixes)}$$

où le lagrangien $\ell = G(Q, \frac{dQ}{ds})$ est homogène du premier degré par rapport à $\dot{Q} = \frac{dQ}{ds}$.

(2.3.13) Si l'élimination de $\dot{Q}$ dans l'équation

(2.3.3) $$P = \frac{\partial \ell}{\partial \dot{Q}}$$

conduit à une équation

(2.3.8) $$\varphi(P,Q) = 0$$

la phase (P,Q), le long des courbes cherchées, décrit une <u>caractéristique</u> de la variété jacobienne définie par (2.3.8); par conséquent, les courbes extrémales cherchées sont les projections sur la variété **V** de ces caractéristiques.

(2.4) <u>Résolution du problème (I)</u> :

Ainsi qu'on l'a vu en (2.1), le problème (I) peut se ramener au problème (II); utilisons donc les résultats précédents.
On a vu (2.1.4) que

(2.4.1) $$\ell = f(t, q^j, \frac{\dot{q}^j}{\dot{t}})\, \dot{t}$$

en désignant par $q^{j'}$ les dérivées des q^j par rapport à t , et par L le lagrangien initial $f(t,q^j,q^{j'})$, on voit que les équations (2.3.3) s'écrivent :

(2.4.2) $$p_j = \frac{\partial L}{\partial q^{j'}} \qquad p_n = L - \frac{\partial L}{\partial q^{j'}} \cdot q^{j'}$$

On pourra appliquer le formalisme précédent si l'on suppose que l'on peut éliminer les $q^{j'}$ entre ces relations.
Le formalisme hamiltonien s'obtient en faisant une hypothèse supplémentaire, à savoir que la relation trouvée est résoluble en p_{n+1}, sous la forme :

(2.4.3) $$\varphi \equiv p_n + H\,(t,\ q^j, p_j) = 0$$

en appliquant les équations (1.7.3), on trouve alors les équations cherchées

(2.4.4) $$\frac{dq^1}{\frac{\partial H}{\partial p_1}} = \dots = \frac{dq^{n-1}}{\frac{\partial H}{\partial p_{n-1}}} = \frac{dt}{1} = \frac{-dp_1}{\frac{\partial H}{\partial q^1}} = \dots = \frac{-dp_{n-1}}{\frac{\partial H}{\partial q^{n-1}}} = \frac{-dp_n}{\frac{\partial H}{\partial t}}$$

auxquelles il faut joindre l'équation (2.4.3) ; celle-ci peut d'ailleurs servir à éliminer la variable p_n ; d'où l'énoncé d'Hamilton :

Pour résoudre le problème

(2.4.5) $$\delta \int_{t_o}^{t_1} L\ dt = 0 \qquad L = f(t,q^j,q^{j'}) \text{(extrémités fixes)}$$

si l'on pose

(2.4.6) $$p_j = \frac{\partial L}{\partial q^{j'}}$$

et si l'on peut en tirer par élimination des $q^{j'}$ une identité

(2.4.7) $$\frac{\partial L}{\partial q^{j'}} \cdot q^{j'} - L \equiv H(t, q^j, p_j)$$

alors l'évolution des p_j et des q^j le long des courbes cherchées est donnée par les équations d'Hamilton

(2.4.8) $$\frac{dq^j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j} \quad , \quad \frac{dp_j}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q^j}$$

L'interprétation géométrique de ces équations est évidente, dans le cas tout au moins où le lagrangien, donc H , ne dépend pas de t : elles s'écrivent en effet

(2.4.9) $$\frac{dS}{dt} = \partial_H S$$

S désignant la phase (de coordonnées locales q^j, p_j) et ∂_H la transformation canonique infinitésimale associée (suivant la convention (1.6.8)) à la fonction H . On sait que l'on en déduit classiquement le théorème de Liouville.

- On voit comment ce fait peut s'interpréter dans l'espace de phases à 2n dimensions : les courbes cherchées sont les caractéristiques de la variété jacobienne d'équation (2.4.3) ; comme le rapport $\frac{dt}{ds}$ ne s'annulle jamais (cf. les équations (2.4.4)) , les sections t = Cte coupent en un seul point ces caractéristiques ; par suite, la jacobienne est <u>évolutive</u> (§(1.7)).

Les caractéristiques déterminent sur chaque section $t = t_0$ une structure symplectique (qui n'est autre que celle de la variété quotient de la jacobienne) indépendante de t_0 ; par suite, l'évolution d'une phase depuis l'instant $t = t_0$ jusqu'à un autre instant $t = t_1$ est nécessairement une transformation canonique

- Nous sommes donc ici dans le cas où la variété quotient Y de la jacobienne peut être identifiée avec un espace de phases W_0 à savoir celui de la variété à n+1 dimensions définie dans l'énoncé (I).

- Il importe de remarquer que ce cas ne présente aucune particularité remarquable par rapport au précédent, l'hypothèse de la résolubilité en p_n de l'équation jacobienne n'ayant aucun caractère remarquable ou nécessaire ; nous l'avons étudié surtout en raison du grand nombre de travaux utilisant le formalisme hamiltonien, et aussi parce qu'il fournit un exemple de jacobienne évolutive.

(2.5) Aspect No(III) du problème variationnel.

Considérons, sur une variété V' de dimension N, un champ de cônes définis par une équation

$$\psi (Q, \dot{Q}) = 0 \tag{2.5.1}$$

homogène en $\dot{Q}$.

Supposons que l'on puisse écrire l'équation tangentielle de ces cônes sous la forme

$$\varphi (Q, P) = 0 \tag{2.5.2}$$

cette équation étant bien entendu homogène en P (cf.(2.2)).

Cette équation (2.5.2) peut être considérée comme l'équation d'une jacobienne J' de l'espace de phase, cette jacobienne étant conoïde (puisque ses sections Q = Cte sont des cônes en P). Nous conviendrons d'appeler caractéristiques du champ de cônes les caractéristiques de cette jacobienne, étant bien entendu qu'il s'agit de courbes tracées dans l'espace de phases. Il faut noter que cette définition ne coïncide pas exactement avec l'usage classique, où l'on considère non pas des phases mais des éléments de contact, c'est à dire des couples d'un point Q et d'un rayon de l'espace cotangent.

Il est facile de vérifier que ces caractéristiques fournissent la solution du problème suivant :

(2.5.3) Trouver une courbe (C) de V' vérifiant la condition (2.5.1), et associer à chaque point de cette courbe un covecteur P de sorte que $P.\delta Q$ ait une valeur constante sur (C) pour toutes les variations δQ compatibles avec la condition (2.5.1).

Il est clair alors que si l'on se limite à l'ensemble des courbes passant par un point Q_0 et rencontrant une courbe (Γ) (Cf. (2.1)), l'expression $P.\delta Q$ sera nulle sur (C) à cause de la condition en Q_0, et que le point Q_1 d'intersection avec (Γ) sera stationnaire, à moins que la tangente à (Γ) en ce point appartienne justement à l'hyperplan d'équation $P.\delta Q = 0$.

Ce n'est pas le cas si l'équation du cône est de la forme (2.1.7), et si la courbe (Γ) est obtenue en faisant varier la variable a seule, puisque $P.\delta Q = b.\delta a$ (si on appelle b la variable conjuguée de l'action a) et que b est une intégrale première du système caractéristique, puisque le problème est invariant par les translations selon a. (Nous verrons ceci de façon plus détaillée sur des exemples). D'où l'énoncé:

(2.5.4) - Pour rendre stationnaire l'action

$$a = \int G(Q,\dot{Q})\, ds$$

(où Q décrit une variété V, et où le lagrangien $G(Q,\dot{Q})$ est homogène du premier degré en $\dot{Q}$), il suffit de chercher les caractéristiques du champ de cônes (de la variété $V' = R \times V$) ayant pour équation

$$\dot{a} = G(Q,\dot{Q})$$

Remarquons que les calculs sont les mêmes que dans la méthode (2.3.13) ; en effet, l'équation tangentielle du cône s'obtient en remplaçant dans l'équation (2.3.8) P par $\frac{-P}{b}$; la variable b conjuguée de l'action peut être considérée (au signe près) comme une variable d'homogénéité des p_j.

§ 3 : QUANTIFICATION.

(3.1) Variables dynamiques.

On appelle classiquement "variables dynamiques" d'un problème de variation mis sous la forme (2.4.5), et nous appellerons variables dynamiques de type I toute fonction u des variables p_j, q^j; on considère de plus que la variable dynamique évolue en fonction du paramètre t selon les équations d'Hamilton, c'est à dire qu'elle vérifie les équations

(3.1.1) $$\frac{du}{dt} = [\, u \,, H \,]_I$$

où l'indice I indique un crochet de Poisson pris avec les variables p_j, q^j où j ne prend que les valeurs $1, 2, \ldots n-1$. Il résulte clairement de l'analyse que nous avons donnée du formalisme hamiltonien (fin de (2.4)) que ce sont des intégrales premières du système caractéristique posé dans (2.3.13) ; nous appellerons variables dynamiques de type II les fonctions des p_j, q^j, p_n, t, définies sur la jacobienne $\varphi(P, Q) = 0$, et qui vérifient l'équation

(3.1.2) $$[\, \varphi, u \,]_{II} = 0$$

où l'indice II désigne le crochet de Poisson sur l'espace de phase à $2n$ dimensions. Si la jacobienne est *évolutive*, il revient au même de définir les "variables dynamiques de type II" comme les fonctions (C^{∞}) définies sur la variété quotient V de cette jacobienne par ses caractéristiques.

On peut aussi chercher à définir les variables dynamiques au moyen de l'espace de phase à $2n+2$ dimensions ; mais il y a cette fois une certaine ambiguïté, due à l'homogénéité par rapport aux p_j ; nous la lèverons avec la convention suivante:

(3.1.3) On appellera variables dynamiques (de type III) d'un champ de cônes les intégrales premières de ses équations caractéristiques homogènes du premier degré par rapport à P.

La formule (1.7.3) montre alors que le crochet de Poisson de deux variables dynamiques est encore une variable dynamique.

- D'autre part, de toute variable dynamique du type II, on déduira une variable dynamique du type III

(3.1.4) $$u(p_j,q^j) \quad \to \quad -b\, u\left(\frac{-p_j}{b}, q^j\right)$$

caractérisée par le fait de coïncider avec la précédente pour $b = -1$; rappelons que c'est par cette règle que l'on passe de l'équation de la jacobienne $\varphi(p_j,q^j) = 0$ à l'équation tangentielle du cône ; on vérifie aussi que le crochet de Poisson de deux variables dynamiques du type II coïncide avec celui des variables du type III obtenues par la correspondance (3.1.4), si bien qu'on pourra identifier toute variable du type II avec la variable du type III correspondante. Mais il faut noter qu'il existe d'autres variables dynamiques du type III (celles qui dépendent explicitement de l'action a), et qu'elles vont jouer un rôle essentiel dans la quantification.

(3.2) Le problème de Dirac.

La méthode de quantification proposée par Dirac consiste essentiellement à associer linéairement à chaque variable dynamique u de type I , un opérateur hermitien sur un espace de Hilbert H (que nous noterons $\overline{u}$) de façon à vérifier les axiomes

$$(3.2.1) \qquad \begin{cases} \overline{u} \, . \, \overline{v} - \overline{v} \, . \, \overline{u} = i\hbar \, \overline{[u \, , \, v]} \\ \\ \overline{1} = \text{opérateur identique sur } H . \end{cases}$$

Il est clair que l'on peut poser

$$(3.2.2) \qquad \hat{u} = \frac{\overline{u}}{i\hbar}$$

que les opérateurs $\hat{u}$ seront <u>antihermitiens</u>, et que les axiomes (3.2.1) s'écriront :

$$(3.2.3) \qquad \begin{cases} \hat{u} \, . \, \hat{v} - \hat{v} \, . \, \hat{u} = \widehat{[u \, , \, v]} \\ \hat{1} = \dfrac{1}{i\hbar} \end{cases}$$

Le premier des axiomes (3.2.3) interprétera alors la correspondance $u \to \hat{u}$ comme une <u>représentation linéaire</u> de l'algèbre de Lie-Poisson des variables dynamiques (algèbre de Lie que l'on peut mettre en correspondance avec celle des transformations canoniques infinitésimales,en raison de la formule (1.6.12)) .

La seconde des conditions (3.2.3) a une interprétation plus fine (la variable dynamique 1 appartient au centre de l'algèbre de Lie-Poisson ; son image $\hat{1}$ pourrait être un scalaire quelconque, par exemple 0), que nous allons donner plus loin.

Nous étudierons un problème de Dirac "de type II" , en cherchant à appliquer la correspondance $u \to \hat{u}$ aux variables dynamiques de type II ;

nous verrons ensuite comment passer au cas "de type I",qui correspond à l'énoncé de Dirac.

(3.3) Solution du problème de Dirac (type II).

Nous considérons une variété C^{∞}, V ; un point Q décrit une courbe sur V en fonction d'un paramètre s ; on pose $\dot{Q} = \frac{dQ}{ds}$; le lagrangien $G(Q,\dot{Q})$ est homogène du premier degré en $\dot{Q}$, et on cherche à rendre stationnaire l'intégrale

(3.3.1) $$a = \int_{s_0}^{s_1} G(Q,\dot{Q})\, ds$$

(problème de variations sous la forme II, cf. §(2.1)).

On suppose que le covecteur P défini par

(3.3.2) $$P = \frac{\partial G(Q,\dot{Q})}{\partial \dot{Q}}$$

est lié à Q de sorte que la phase

(3.3.3) $$S = (P,Q)$$

décrive une jacobienne évolutive J lorsque Q et $\dot{Q}$ varient; en prenant une carte locale pour (V), Q sera repéré par des paramètres q^j, P par ses composantes p_j $(j = 1,2,\ldots n)$, et (J) admettra localement une équation

(3.3.4) $$\varphi\,(p_j,q^j) = 0$$

Dire que la jacobienne est évolutive, c'est dire (§(1.7) qu'au voisinage de chaque point de J, il existe une fonction $u(p_j,q^j)$ telle que les caractéristiques de J ne rencontrent qu'en un seul point l'ensemble

$$u(p_j,q^j) = 0$$

et que $[u\,,\varphi] \neq 0$

On considère également la variété

(3.3.5) $$V' = V \times \mathbb{R}$$

parcourue par le couple $\begin{bmatrix} Q \\ a \end{bmatrix}$

a désignant l'action, considérée comme fonction de la limite supérieure d'intégration de (3.3.1); alors le vecteur, tangent à V'

(3.3.6) $$\begin{bmatrix} \dot{Q} \\ \dot{a} \end{bmatrix}$$

appartient au cône d'équation

(3.3.7) $$G(Q,\dot{Q}) - \dot{a} = 0$$

Conformément à (2.5.4), nous formons l'équation tangentielle du cône (3.3.7), en écrivant (cf.(2.2.2)) que le covecteur, tangent à (V') :

(3.3.8) $$[\ \Pi \quad b\ ]$$

vérifie

(3.3.9) $$[\ \Pi \ b\ ]\ \delta \begin{bmatrix} \dot{Q} \\ \dot{a} \end{bmatrix} = \lambda\ \delta\ [\ G(Q,\dot{Q}) - \dot{a}\ ]$$

où λ désigne un scalaire non nul, et en éliminant λ, $\dot{Q}$ et $\dot{a}$.

L'équation (3.3.9) se décompose en

(3.3.10) $$\Pi = \lambda \frac{\partial G(Q,\dot{Q})}{\partial \dot{Q}}, \qquad b = -\lambda$$

Le résultat de l'élimination est immédiat :

(3.3.11) $$b \neq 0, \qquad \left(\frac{-\Pi}{b}, Q\right) \in J$$

Cette élimination montre que la phase

$$S' = \left((\Pi\ ,\ b)\ ,\ \begin{pmatrix} Q \\ a \end{pmatrix} \right) \tag{3.3.12}$$

décrit une jacobienne J', définie par les équations (3.3.11); on voit que si l'on pose

$$\Theta\ (S') \equiv \left(- \frac{\Pi}{b}\ ,\ Q\ \right) \qquad \text{pour} \quad b \neq 0 \tag{3.3.13}$$

la jacobienne J' est définie par l'équation

$$\Theta\,(S') \in J \tag{3.3.14}$$

qui s'écrit, à l'aide d'une carte locale de (V) :

$$\varphi\ \left(- \frac{\pi_j}{b}\ ,\ q^j\ \right) = 0 \tag{3.3.15}$$

(3.3.16) Proposition:
Les caractéristiques de J sont les images par Θ des caractéristiques de J'.

Si l'on forme, à l'aide de (1.7.3), les caractéristiques de J', on trouve le système différentiel

$$\frac{dq^1}{\frac{\partial\varphi}{\partial p_1}} = \ldots\ldots = \frac{dq^n}{\frac{\partial\varphi}{\partial p_n}} = \frac{da}{\sum_j p_j \frac{\partial\varphi}{\partial p_j}} = \frac{-dp_1}{\frac{\partial\varphi}{\partial q^1}} = \ldots = \frac{-dp_n}{\frac{\partial\varphi}{\partial q^n}} = \frac{-db}{0}$$

(on a posé $p_j \equiv \dfrac{-\pi_j}{b}$)

On voit que toute caractéristique de J' s'obtient bien en écrivant les équations qui indiquent que $\Theta\ (S')$ décrit une caractéristique de J, l'équation $b = Cte$ (non nulle), et que a est donné par une quadrature ; les caractéristiques de J se relèvent donc <u>globalement</u> en caractéristique de J' .

C.Q.F.D.

- Cette proposition est d'ailleurs une autre forme de l'énoncé (2.5.4).

(3.3.18) <u>Corollaire</u> :

La jacobienne J' est évolutive.

En effet, considérons un point S' de J' ; par le point $S = \Theta(S')$ de J , passe une variété

(3.3.19) $$u (p_j, q^j) = 0$$

qui coupe les caractéristiques de J en un point au plus ; donc l'image réciproque par Θ de cette variété, dont l'équation s'écrit

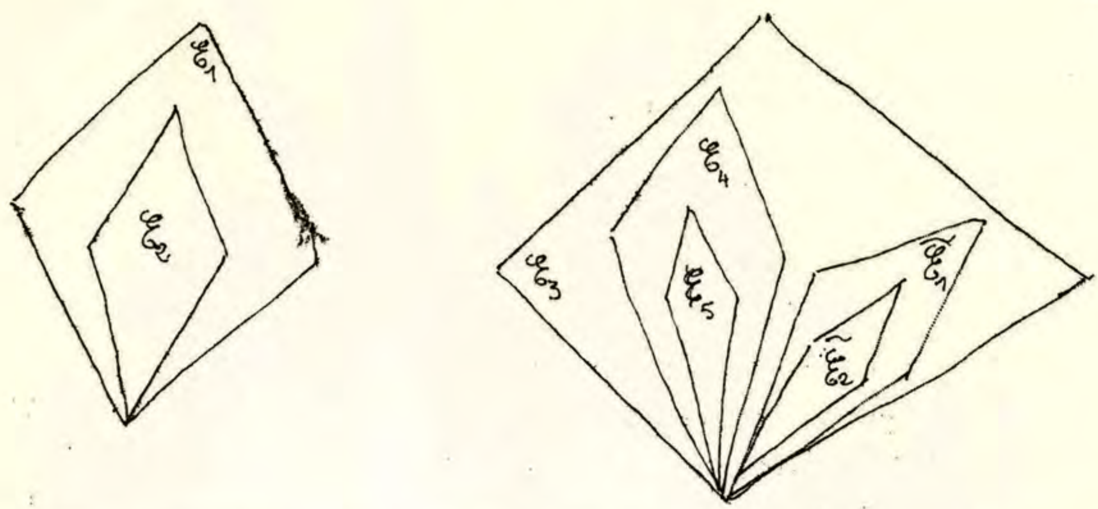
(3.3.20) $$u \left(\frac{-\pi_j}{\ell} , q^j\right) = 0$$

est une variété qui coupe en un point au plus les caractéristiques de J' , car b est constant sur les intégrales premières, et la valeur de a sur deux caractéristiques de même projection ne peut coïncider en un point sans coïncider partout.

C.Q.F.D.

Puisque la variété J est évolutive, on sait que l'ensemble de ses caractéristiques est une variété symplectique plate de dimension $2n-2$, (Cf.(1.7)), que nous désignerons par Y . De même l'ensemble des caractéristiques de J' est une variété symplectique plate Y' , de dimension $2n$.

Nous allons maintenant introduire les espaces fonctionnels suivants:



(3.3.21) $\boxed{\mathcal{E}_1 = \text{ensemble des fonctions complexes } C^{\infty} \text{ définies sur } Y.}$

- On sait que $\mathcal{E}_1$ peut être aussi considéré comme l'ensemble des intégrales premières C^{∞} du système caractéristique de J.

(3.3.22) $\boxed{\mathcal{E}_2 = \text{ensemble des fonctions de } \mathcal{E}_1 \text{ à support compact dans } Y.}$

- $\mathcal{E}_2$ est un sous-ensemble de $\mathcal{E}_1$, qui coïncide avec $\mathcal{E}_1$ si Y est copacte. Les fonctions u appartenant à $\mathcal{E}_2$ ont une intégrale selon la forme de Liouville sur Y, que nous désignerons par

(3.3.23) $$\int_Y u$$

La théorie de l'intégration sur une variété montre que:

(3.3.24) $$u > 0 \Rightarrow \int_Y u \geq 0$$

et que

(3.3.25) $$u \geq 0 \, , \quad \int_Y u = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 0$$

(3.3.26) $\mathcal{E}_3$ = ensemble des intégrales premières complexes, C^∞, homogènes du premier degré en $[\Pi, b]$, du système des caractéristiques de J'.

- Il est évident que la variété J' est invariante par les transformations

(3.3.27) $$\Pi \to \lambda \Pi \, , \quad b \to \lambda b, \quad Q \to Q \, , \quad a \to a$$

(λ = nombre réel non nul) (nous disons que J' est conoïde), et que cette tranformation change les caractéristiques en caractéristiques; par suite, la variété quotient Y' est elle aussi conoïde; $\mathcal{E}_3$ peut donc être considérée comme l'ensemble des fonctions C^∞ sur Y', homogènes du premier degré en λ par rapport aux transformations (3.3.27).

Proposition :

(3.3.28) Si u et v appartiennent à $\mathcal{E}_3$, $[u,v] \in \mathcal{E}_3$

On sait (théorème de Poisson) que le crochet de Poisson de deux intégrales premières est une intégrale première; l'expression

(3.3.29) $$[u \, , v] = \sum_j \frac{\partial u}{\partial q^j} \frac{\partial v}{\partial \pi_j} - \frac{\partial u}{\partial \pi_j} \frac{\partial v}{\partial q^j} + \frac{\partial u}{\partial a} \frac{\partial v}{\partial b} - \frac{\partial u}{\partial b} \frac{\partial v}{\partial a}$$

du crochet de Poisson sur J' montre que si u et v sont homogènes du premier degré par rapport aux variables π_j, b, il en sera de même de $[u \, , v]$.

C.Q.F.D.

(3.3.30) Proposition:

. . .

(3.3.31) Si $u \in \mathcal{E}_1$, et si l'on pose

$$\widetilde{u}(S') \equiv -b\, u(\Theta(S'))$$

alors $\widetilde{u} \in \mathcal{E}_3$

Il résulte de la proposition (3.3.16) que $u(\Theta(S'))$ est donstante sur les caractéristiques de J', donc intégrale première; **elle est visiblement** homogène de degré 0 ; en la multipliant par $-b$, qui est une intégrale première (3.3.17) homogène de degré 1, on a une fonction de degré 1.

C.Q.F.D.

(3.3.32) <u>Proposition</u> :
Pour qu'une fonction v de $\mathcal{E}_3$ se mette sous la forme $\widetilde{u}$, $(u \in \mathcal{E}_1)$ il faut et il suffit qu'elle vérifie

(3.3.33) $$[b, v] = 0$$

En effet, il résulte de (3.3.29) que

(3.3.34) $$[b, v] = -\frac{\partial v}{\partial a}$$

Dire que v appartient à $\mathcal{E}_3$ et vérifie (3.3.33), c'est dire que v est une fonction $v(b, \Pi, Q)$, constante sur les caractéristiques de J', homogène de degré 1 en (Π, b) ; si l'on pose

(3.3.35) $$u(P,Q) = v(-1,P,Q)$$

il est clair que $u \in \mathcal{E}_1$, et que $\widetilde{u} = v$; u est d'ailleurs la seule fonction à avoir ces propriétés.

C.Q.F.D.

- Les propositions (3.3.30) et (3.3.32) peuvent se résumer en remarquant que $\widetilde{\mathcal{E}_1}$ est l'ensemble des solutions de (3.3.33) dans $\mathcal{E}_3$.

(3.3.36) Définition

(3.3.37) Nous désignerons par $\mathcal{E}_4$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{E}_3$ qui vérifient l'identité :

$$[\, b \,,\, \psi \,] = \frac{-\psi}{i\hbar} \quad \left(\hbar = \frac{\text{constante de Planck}}{2\pi}\right)$$

Proposition:

(3.3.38) Si ψ_1, $\psi_2 \in \mathcal{E}_4$, $-\frac{1}{b}\,\overline{\psi}_1 . \psi_2 \in \widetilde{\mathcal{E}_1}$

En effet, la fonction $-\frac{1}{b}\,\overline{\psi}_1 . \psi_2$ est visiblement une intégrale première homogène de degré 1, et l'identité évidente:

(3.3.39) $$[u \,,\, vw] = [u,v]\; w + [u,w]\; v$$

montre que $[b \,,\, -\frac{1}{b}\,\overline{\psi}_1 \psi_2] = 0$; il suffit d'appliquer(3.3.32).

C.Q.F.D.

Définition:

(3.3.40) Nous appellerons $\mathcal{E}_5$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{E}_4$ qui vérifient

$$-\frac{1}{b}\,\overline{\psi} . \psi \in \widetilde{\mathcal{E}_2}$$

Proposition:

(3.3.41) $\mathcal{E}_5$ est un espace vectoriel de dimension infinie.

La variété J étant évolutive,de dimension $2n-1$, on peut trouver une sous-variété U, de dimension $2n-2$ contenue dans le domaine d'une carte locale (p_j, q^j), qui rencontre en un point au plus les caractéristiques de J, et qui est caractérisée par une équation $u = 0$, avec les conditions : u de classe C^{∞} , $[u,\varphi] \neq 0$.

Considérons l'ensemble $\mathcal{E}_6$ des fonctions complexes C^{∞} sur $U^{\cdot}$, à support compact; si $\omega \in \mathcal{E}_6$, on peut écrire

(3.3.42) $$\omega = \omega\,(p_j, q^j)$$

ω étant C^{∞} par rapport aux $2n$ variables p_j, q^j; si on pose

(3.3.43) $$\Omega\,(S') = -b\,\omega\left(\frac{-\pi_j}{b}, q^j\right) e^{\frac{a}{i\hbar}}$$

la fonction Ω est C^{∞} sur la variété $\widetilde{U}^{\cdot}$ à 2n dimensions, image réciproque de U par Θ ; comme les caractéristiques de J' rencontrent $\widetilde{U}^{\cdot}$ en un point au plus (Cf.(3.3.18)), $\Omega\,(S')$ est la trace sur $\widetilde{U}$ d'une fonction constante sur les caractéristiques, C^{∞} sur un ouvert de J' ,et nulle sur un voisinage de la frontière de cet ouvert; en la prolongeantpar la valeur 0 en dehors de cet ouvert,on a ainsi défini une intégrale première C^{∞} ,que nous appellerons $\widehat{\Omega}$, et qui vérifie (3.3.43) sur $\widetilde{U}$.

Comme les caractéristiques de J' sont invariantes par les substitutions (3.3.27),on voit que $\widehat{\Omega}$ est homogène du premier degré en (Π, b) (puisqu'il l'est sur $\widetilde{U}$, selon (3.3.43)); d'autre part il est clair que l'on a sur $\widetilde{U}$

$$[\,b\,,\,\Pi\,] = -\frac{\partial\Omega}{\partial a} = \frac{-\,\Omega}{i\hbar}$$

et que cette relation est vraie sur toutes les cafactéristiques rencontrant $\widetilde{U}$, puisque la forme de Poisson est un invariant intégral de Cartan du système caractéristique.Ainsi $\widehat{\Omega} \in \mathcal{E}_4$;

on a sur $\widetilde{U}^{\cdot}$ $-\frac{1}{b}\overline{\widehat{\Omega}}\,\widehat{\Omega} = -b\,\left|\,\omega\left(\frac{-\pi_j}{b}, q^j\right)\right|^2$; la fonction χ, définie sur (Y) , telle que $\widetilde{\chi} = -\frac{1}{b}\overline{\widehat{\Omega}}\widehat{\Omega}$ (théorème 3.3.38) coïncide avec $|\,\omega\,(p_j, q^j)\,|^2$ sur la projection canonique (biunivoque) de $U^{\cdot}$ sur Y , avec 0 ailleurs,elle a donc

$[\tilde{u}, \psi]$ est nulle dans tout ouvert où ψ est nulle, le support de $-\frac{1}{b}\,|[\tilde{u}, \psi]|^2$ est contenu dans celui de $-\frac{1}{b}\,|\psi|^2$, donc compact

C.Q.F.D.

Ce théorème peut aussi s'énoncer sous la forme suivante:

(3.3.47) Si on pose, pour tout u dans $\mathcal{E}_1$ et tout ψ dans $\mathcal{E}_5$:

$$\hat{u}(\psi) = [\tilde{u}, \psi]$$

$\hat{u}$ est, pour tout u, un opérateur linéaire appliquant $\mathcal{E}_5$ dans $\mathcal{E}_5$.

Théorème :

(3.3.48) Si u est réelle dans $\mathcal{E}_1$, $\hat{u}$ est antihermitien, en ce sens qu'il vérifie

$$\mathcal{R}(\langle \psi, \hat{u}(\psi) \rangle) \equiv 0$$

Ce résultat peut apparaître comme une conséquence du fait que la définition (3.3.47) de $\hat{u}$ est le résultat de la transformation canonique infinitésimale $\partial_{\tilde{u}}$ opérant sur ψ, et que les transformations canoniques conservent la forme de Liouville. Donnons-en une démonstration directe:

Si on calcule avec une carte locale, il vient immédiatement (cf. 3.3.29):

(3.3.49) $$[\tilde{u}, \psi] = -\frac{\partial u}{\partial p_j} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial q^j} - b\,\frac{\partial u}{\partial q^j}\,\frac{\partial \psi}{\partial \pi_j} + \frac{1}{i\hbar}\left[u - p_j\,\frac{\partial u}{\partial p_j}\right]\psi$$

d'où

$$\mathcal{R}(\bar{\psi} \times [\tilde{u}, \psi]) = -\frac{\partial u}{\partial p_j}\,\frac{\partial}{\partial q^j}\left(\frac{\bar{\psi}\psi}{2}\right) - b\,\frac{\partial u}{\partial q^j}\,\frac{\partial}{\partial \pi_j}\left(\frac{\bar{\psi}\psi}{2}\right)$$

Soit, en appelant v la fonction de $\mathcal{E}_1$ telle que

$$\tilde{v} = -\frac{1}{b}\,\bar{\psi}\psi \quad \text{(th. 3.3.38)}$$

$$\mathcal{R}\left(\overline{\psi}\times[u,\psi]\right) = \frac{1}{2}[u,v] = \frac{1}{2}\ \mathrm{div}\,(u\ \mathrm{grad}\ v)$$

(avec le gradient symplectique (1.5.2) et la divergence suivant la forme de Liouville);.

Par suite l'expression

$$\mathcal{R}\left(\langle\psi,\widehat{u}(\psi)\rangle\right) = \int_Y \mathcal{R}\left(\overline{\psi}\times[\widetilde{u},\psi]\right)$$

est nulle comme intégrale d'une divergence à support compact.

C.Q.F.D.

Théorème:

(3.3.50) Si u et $v \in \mathcal{E}_1$

$$\widehat{u}.\widehat{v} - \widehat{v}.\widehat{u} = \widehat{[u,v]}$$

En effet, quel que soit ψ dans $\mathcal{E}_5$,

$$\begin{aligned}[\widehat{u}.\widehat{v} - \widehat{v}.\widehat{u}](\psi) &= [\widetilde{u},[\widetilde{v},\psi]] - [\widetilde{v},[\widetilde{u},\psi]]\\ &= [[\widetilde{u},\widetilde{v}],\psi] && \text{(Identité de Jacobi)}\\ &= [\widetilde{[u,v]},\psi] && \text{(Formule (3.3.29))}\\ &= \widehat{[u,v]}(\psi)\end{aligned}$$

C.Q.F.D.

Théorème :

(3.3.51) $$\widehat{1}(\psi) \equiv \frac{\psi}{i\hbar}$$

Il suffit de faire $u = 1$ dans (3.3.49)

C.Q.F.D.

Par suite, les résultats précédents peuvent s'énoncer :

la correspondance (3.3.47) fait correspondre à toute fonction réelle u de $\mathcal{E}_1$ un opérateur linéaire $\hat{u}$ sur l'espace préhilbertien (de dimension infinie) $\mathcal{E}_5$, de façon que :   (3.3.52) $\hat{u}$ est antihermitien $\hat{u} \cdot \hat{v} - \hat{v} \cdot \hat{u} = \widehat{[u , v]}$ $\hat{1} = \dfrac{1}{i\hbar}$

On a donc bien résolu le problème de Dirac (type II), sous la forme indiquée en (3.2). Il est facile, si besoin est, d'obtenir par complétion un espace hilbertien sur lequel opéreront des opérateurs antihermitiens non bornés.

(3.4.) Solution du problème de Dirac (type I).

Soit V_0 une variété à $n-1$ dimensions, repérée dans une carte locale par les coordonnées q^j $(j = 1,2,\ldots n-1)$; on considère un problème de variations, défini par un lagrangien

$L\left(t , q^j , \dfrac{dq^j}{dt} \right)$; on suppose que les conditions (2.4.7) qui

permettent l'application du formalisme hamiltonien sont applicables; on suppose de plus que les équations d'Hamilton ont une solution, définie pour $-\infty < t < +\infty$, à partir de chaque système de conditions initiales $(p_{j_0}, q^j{}_0, t_0)$. En revenant à

l'interprétation au moyen de la variété à n dimensions $V = V_0 \times R$ repérée par les n variables $q^1, q^2, \ldots q^{n-1}$,

$q^n (\equiv t)$, et par son espace de phase W, on voit que cela revient à dire que les variétés $t = Cte$ coupent en un point et un seul chaque caractéristique de la jacobienne J ; par suite il existe pour chaque valeur de t une correspondance C^∞ biunivoque entre l'espace de phase W_0 de V_0 et l'espace Y, quotient de J par ses caractéristiques; il résulte immédiatement de la définition de la structure symplectique de Y (Cf.(1.7.3.)) que cette correspondance est canonique (c'est à dire qu'elle conserve le crochet de Poisson).

Soit alors u une variable dynamique de type (I), c'est à dire une fonction C^{∞} définie sur l'espace de phase W_o ; à chaque "instant" t, on peut donc lui associer une fonction C^{∞} définie sur Y, c'est à dire une variable dynamique de type (II), que nous désignerons par u_t ; dans une carte locale, cette correspondance est caractérisée par :

(3.4.1) $$u\,(p_1,\dots p_{n-1},q^1,\dots q^{n-1})$$

$$= u_t\Big(\text{caractéristique}(p_1,\dots p_{n-1},p_n,q^1,\dots q^{n-1},t)\Big);$$

on rappelle que l'équation de J s'écrit (Cf.(2.4.3)):

(3.4.2) $$p_n + H(t,q^j,p_j) = 0$$

La correspondance entre u et u_t étant canonique pour chaque valeur de t, on a évidemment l'identité

(3.4.3) $$[u\ ,\ v\ ]_I \equiv [u_t,v_t]_{II}$$

où les indices I et II rappellent qu'il s'agit respectivement de crochets de Poisson pris sur W_o et sur Y (ou sur J, si les variables dynamiques sont considérées comme intégrales premières).

Si donc on associe à chaque variable u de type (I) l'opérateur u_t (défini à partir de u_t par (3.3.47)), on aura évidemment :

(3.4.4.) $$\left[\begin{array}{l} \widehat{u_t} \text{ est antihermitien sur l'espace préhilbertien } \mathcal{E}_5 \\ \widehat{u_t}\cdot\widehat{v_t} - \widehat{v_t}\cdot\widehat{u_t} = \widehat{[u\ ,\ v]_t} \\ \widehat{1_t} = \dfrac{1}{i\hbar} \end{array}\right.$$

ce qui résout bien le problème de Dirac de type (I) .

On peut utiliser la méthode de démonstration du théorème (3.3.41) pour construire effectivement l'espace $\mathcal{E}_5$; on vérifie immédiatement que les éléments ψ de $\mathcal{E}_5$ sont définis par la formule

$$\psi = -b\ \psi_o\left(\frac{-\pi_j}{b}, q^j\right) e^{\frac{a}{i\hbar}} \quad \text{pour } t=t_o \text{ donné,} \tag{3.4.5}$$

$\psi_o(p_j, q^j)$ étant une fonction C^∞ à support compact défini sur l'espace de phase W_o de V_o.

Si nous nous donnons une fonction u, C^∞ sur W_o, la fonction $\widetilde{u_{t_o}}$ est donnée par

$$\widetilde{u_{t_o}} = -b\ u\left(\frac{-\pi_j}{b}, q^j\right) \quad \text{pour } t = t_o \tag{3.4.6}$$

Comme on sait que le crochet de Poisson de deux intégrales premières peut se calculer sur n'importe quelle section $t = t_o$, on voit que

$$\widehat{u_{t_o}}(\psi) = [\widetilde{u_{t_o}}, \psi] = -b\left[\frac{\partial u}{\partial q^j}\frac{\partial \psi_o}{\partial p_j} - \frac{\partial u}{\partial p_j}\frac{\partial \psi_o}{\partial q^j} + \left[u - p_j\frac{\partial u}{\partial p^j}\right]\frac{\psi_o}{ih}\right] e^{\frac{ia}{\hbar}} \tag{3.4.7}$$

ce qui montre bien que $\widehat{u_{t_o}}$ applique l'espace $\mathcal{E}_5$ dans lui-même, et fournit la formule :

$$\boxed{\overline{u_{t_o}}(\psi_o) = \left[u - p_j\frac{\partial u}{\partial p_j}\right]\psi_o + i\hbar\left[\frac{\partial u}{\partial q^j}\frac{\partial \psi_o}{\partial p_j} - \frac{\partial u}{\partial p_j}\frac{\partial \psi_o}{\partial q^j}\right]} \tag{3.4.8}$$

Il est facile de vérifier directement, à partir de cette formule, les relations de Dirac (3.2.1). Il est intéressant de noter que

$$\boxed{\overline{u_{t_o}}(\psi_o) = u\ \psi_o + i\hbar\frac{\partial u}{\partial q^j}\frac{\partial \psi_o}{\partial p_j}} \tag{3.4.9}$$ si u ne dépend que des q^j

$$\boxed{\overline{p_j}(\psi_o) = -i\hbar\frac{\partial \psi_o}{\partial q^j}} \tag{3.4.10}$$

Etudions enfin comment l'opérateur u_t dépend de t.

Il est clair (formule (3.4.1)) que

$$\frac{\partial u_t}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n-1}\left[\frac{\partial u}{\partial p_j}\frac{dp_j}{dt} + \frac{\partial u}{\partial q^j}\frac{dq^j}{dt}\right]$$

$$= \sum_j\left[-\frac{\partial u}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q^j} + \frac{\partial u}{\partial q^j}\frac{\partial H}{\partial p_j}\right] \quad \text{(équations d'Hamilton (3.4.8))}$$

$$= \left[u_t, H\right]_{II} \quad \left(\text{puisque } \frac{\partial u_t}{\partial p_{n+1}} = \frac{\partial H}{\partial p_{n+1}} = 0\right) ;$$

Par suite :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\widehat{u_t}) = \widehat{\frac{\partial u_t}{\partial t}} \quad [\text{la correspondance } \wedge \text{ est linéaire}]$$

$$= \widehat{[u_t, H]};$$

Si H est une intégrale première, on pourra appliquer (3.3.51); on aura donc l'équation d'évolution usuelle :

(3.4.11) $$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}[\widehat{u_t}] = \widehat{u_t}\cdot\widehat{H} - \widehat{H}\cdot\widehat{u_t}}$$

Dans ce cas où H est une intégrale première ("liaisons indépendantes du temps"), remarquons aussi que l'on a, compte tenu de (3.4.2)

$$\widehat{H}(\psi) = -\widehat{p_n}(\psi) = -[\pi_n, \psi] = \frac{\partial\psi}{\partial t} \quad \text{d'où}$$

(3.4.12) $$\ulcorner H \urcorner(\psi) = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

si bien que si ψ est fonction propre de l'opérateur $\ulcorner H \urcorner$, correspondant à la valeur propre E, on a

$$\psi = F(\pi_j, q^j, a, b)\, e^{-2i\pi\nu t} \quad \text{avec}$$

(3.4.13) $$E = h\nu$$

(3.5) Interprétation géométrique.

Revenons au cas général (problème de Dirac type II). L'espace de phase W' de la variété $V' = V \times R$ est muni, comme tout espace de phases, d'une structure d'espace, définie par le recueil $\mathcal{C}_J$ de toutes ses transformations canoniques (voir (1.3)). On sait qu'on peut lui donner une structure fibrée de base V', en se limitant aux transformations canoniques qui sont des relèvements de glissements de V'. Nous allons définir sur W' une autre structure fibrée, de base W.

Considérons en effet le groupe abélien à deux paramètres λ et μ, défini sur W' par les substitutions :

$$(3.5.1) \qquad Q \to Q \; ; \quad a \to a + \lambda \quad ; \quad \pi \to \mu\,\pi \, , \quad b \to \mu\, b \qquad (\mu \neq 0)$$

Si on considère le recueil R' des transformations canoniques qui commutent avec les transformation du groupe, il donne à W' une structure d'espace fibré principal (voir Souriau III, 18.22 et 18.23); les fibres sont les classes suivant le groupe (3.5.1), ce sont donc les images réciproques par Θ (voir 3.3.13) des points de W.

Pour trouver les projections des glissements de W' sur W, il est commode d'utiliser la formule évidente :

$$(3.5.2) \quad \langle dS', \delta S' \rangle = -b \langle dS, \delta S \rangle + db \left[\delta a - P.\, \delta Q \right] - \delta b \left[da - P.\, dQ \right]$$

(on a posé, comme sur la figure, $\Theta(S') \equiv S$)

On trouve alors que si la transformation $S' \to S'^*$ est canonique, et commute avec le groupe (3.5.1), la projection $S \to S^*$ est aussi canonique (on montre d'abord que $b^* = b$; il suffit ensuite de considérer des différentielles d et δ telles que $db = \delta b = 0$). Inversement, si on se donne une transformation $S \to S^*$ de W, on voit qu'elle sera relevable sous la condition que $P^*.dQ^* - P.dQ$ soit une différentielle totale $d\,g\,(P,Q)$; il suffira en effet de poser $a^* = a + g(P,Q)$; or ceci a toujours lieu localement.

D'où l'énoncé :

- L'espace W' , muni de la structure fibrée définie par le groupe principal (3.5.1) et par la projection Θ , admet comme base l'espace W , muni de sa structure symplectique.

(3.5.3) - Les <u>glissements de jauge</u> de W' (voir Souriau III, §17, N°23) sont les transformations $a \rightarrow a + Cte$ (dans un ouvert).

- Une transformation canonique $S \rightarrow S^*$ de la base W est globalement relevable sous la condition que $P^*.dQ^* - P.dQ$ soit une différentielle totale dans tout le domaine de déinition de la transformation.

Etudions maintenant les éléments infinitésimaux du recueil R'; localement ils sont définis à l'aide d'une fonction $v(S')$, par la formule $\delta S' = \text{grad } v$ (1.6) ; la commutation avec le groupe principal exige que v soit indépendant de a et homogène du premier degré en (π , b) (cette dernière condition permettant d'éliminer la constante additive arbitraire); il existe donc une fonction u définie sur un ouvert de W telle que $v = \tilde{u}$ (cf. (3.3.31) ; un calcul immédiat montre que $\delta S = \text{grad } u$, donc que la transformation canonique de W' associée à $\tilde{u}$ est un relèvement de la transformation canonique de W associée à u ; on voit en particulier que les <u>transformations de jauge infinitésimales</u> sont associées aux fonctions $u = Ctes$; ce qui donne une vérification a posteriori de l'identité de Jacobi pour les fonctions définies sur W.

Introduisons maintenant la jacobienne S'; elle est invariante par le groupe (3.5.1) (voir son équation (3.3.15)); c'est donc une réunion de fibres ; le recueil R' induit sur elle une structure de <u>sous-espace</u> (voir Souriau III, §4) ; les glissements infinitésimaux de S' sont associés aux fonctions u , définies sur S et qui sont des intégrales premières du système caractéristique (voir (1.7); théorème in fine), c'est à dire aux <u>variables dynamiques</u> de type II (voir (3.1)).

On voit donc que la construction que nous avons donné des relations de commutation de Dirac revient à associer à chaque variable dynamique u un élément infinitésimal du recueil R'' des glissements de l'espace fibré J' ; et à en donner la représentation linéaire canonique sur un sous-espace stable de l'espace des fonctions complexes définies sur J' (à savoir le sous-espace des fonctions constantes sur les caractéristiques, et solutions de l'équation $[b\,,\,\psi] = -\dfrac{\psi}{i\hbar}$).

Comme application, remarquons que si l'on connait un groupe de glissements de la variété V qui invarie le lagrangien, ce groupe se relèvera en groupe de glissements de V' conservant le champ de cônes (et la variable a) ; ce groupe se relèvera à son tour en un groupe de glissements de W', conservant a, b et J' ; on aur aura ainsi un <u>représentation unitaire sur l'espace $\mathcal{E}_5$ du groupe donné sur V.</u>

Dans le cas particulier d'un groupe à un paramètre défini par son élément infinitésimal $dQ = F(Q)$, la fonction u correspondante est $P.dQ$, qui est donc une intégrale première (on retrouve ainsi le théorème de Noether); on a alors $u(\psi) = -d\psi$, ce qui redonne la formule (3.4.12) dans le cas du groupe des translations dans le temps.

§ 4 EXEMPLES.

(4.1) <u>Particule libre relativiste.</u>

Le lagrangien du problème est $-mc^2\sqrt{1-\beta^2}$; d'où l'équation du cône tangent à $(V)\times R$:

$$\frac{\dot{a}^2}{m^2\,c^4} + \frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}{c^2} - \dot{t}^2 = 0\ ,\quad \dot{a}\,\dot{t} < 0 \qquad [n = 4] \tag{4.1.1}$$

l'équation tangentielle associée (équation de J') :

$$m^2c^4b^2 + c^2\left[\pi_x^{\,2} + \pi_y^{\,2} + \pi_z^{\,2}\right] - \pi_t^{\,2} = 0\ ,\quad \frac{\pi_t}{b} > 0\ , \tag{4.1.2}$$

et le système caractéristique de (J') :

$$\frac{dx}{c^2\pi_x} = \frac{dy}{c^2\pi_y} = \frac{dz}{c^2\pi_z} = -\frac{dt}{\pi_t} = \frac{da}{m^2c^4b} = \frac{-d\pi_x}{0} = \frac{-d\pi_y}{0} = \frac{-d\pi_z}{0} = \frac{-d\pi_t}{0} = \frac{-db}{0}\ ;$$

On peut, en utilisant la transformation de Fourier, écrire toute intégrale première de ce système différentiel sous la forme suivante

$$(4.1.4) \qquad \psi = \int F(b,P,\Omega)\, e^{i\langle \Omega, X + \frac{aP}{m^2c^4}\rangle}\, d\Omega$$

(on a appelé X et P les vecteurs de composantes respectives $[t,x,y,z]$,

$\left[\frac{\pi_t}{b}, \frac{-c\,\pi_x}{b}, \frac{-c\,\pi_y}{b}, \frac{-c\,\pi_z}{b}\right]$, et défini le produit scalaire $\langle\ \rangle$

par la formule $\langle dX, dX\rangle = dt^2 - \frac{1}{c^2}[dx^2 + dy^2 + dz^2]$)

P doit vérifier l'équation (4.1.2), qui s'écrit

$$(4.1.5) \qquad \langle P, P\rangle = m^2c^4 \quad , \quad P \text{ vecteur d'avenir}$$

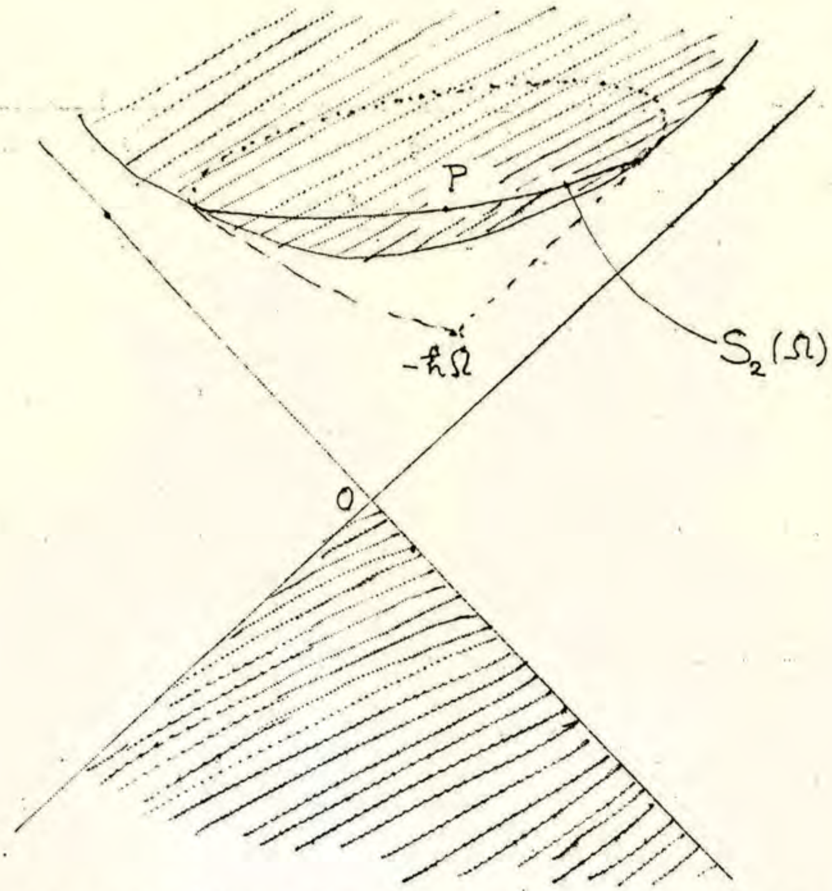
Pour que ψ appartienne à l'espace $\mathcal{E}_4$, il est nécessaire et suffisant que $F(b,P,\Omega)$ s'écrive $-b\,\Theta(P,\Omega)$, la distribution Θ étant nulle en dehors des couples (P,Ω) qui vérifient (4.1.5) et

$$(4.1.6) \qquad \langle \Omega, P\rangle = -\frac{m^2c^4}{\hbar};$$

en effet, ψ s'écrit alors

$$(4.1.7) \qquad \psi = -b\, e^{\frac{a}{i\hbar}} \int \Theta(P,\Omega)\, e^{i\langle \Omega, X\rangle}\, d\Omega$$

Les conditions (4.1.5) et (4.1.6) s'interprètent immédiatement:



P décrit la nappe d'avenir de la sphère (hyperbolique) S_3 de rayon mc^2 ; le point $-\hbar\Omega$ est dans l'hyperplan tangent à S_3 en P. On en déduit immédiatement que les valeurs interdites pour $-\hbar\Omega$ (hachurées sur la figure) sont les valeurs intérieures à l'hémisphère et au cône de passé. On en déduit en particulier que les valeurs permises pour $\langle \Omega , \Omega \rangle$ forment l'intervalle

$$\left[- \infty , \frac{m^2c^4}{\hbar^2} \right].$$

Pour une valeur donnée de Ω , P parcout la sphère à 2 dimensions $S_2(\Omega)$, contact du cône de sommet $-\hbar\Omega$ circonscrit à S_3; $S_2(\Omega)$ est euclidienne si Ω est un vecteur d'avenir, hyperbolique si Ω est un vecteur d'espace.

On voit alors comment dédomposer en sous-espace irréductibles la représentation du groupe de Lorentz non homogène sur l'espace des fonctions ψ qui se déduit canoniquement du §(3;5) : on choisit un nombre μ dans l'intervalle $\left[- \infty , \frac{m^2c^4}{\hbar^2} \right]$, un entier $j \geq 0$, et on se limite aux fonctions $\Theta(\Omega, P)$ qui sont nulles en dehors de $\langle \Omega , \Omega \rangle = \mu$, et qui sont, pour chaque valeur de Ω , une <u>fonction sphérique de degré j</u> lorsque P parcout la sphère $S_2(\Omega)$; on constate alors que le spin de la représentation est égal à j .

Le cas classique consiste à prendre pour μ sa borne supérieure $\frac{m^2c^4}{\hbar^2}$; la sphère $S_2(\Omega)$ se réduit alors au point $P = -\hbar\Omega$, si bien que les composantes P_λ de l'énergie -impulsion et $\frac{\Omega_\lambda}{2\pi}$ de la quadrifréquence sont reliées par la relation de Bohr $P_\lambda = -h\Omega_\lambda$; le fonction ψ vérifie, en X , l'équation de Klein-Gordon

$$(4.1.8) \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - c^2 \Delta \psi + \frac{m^2c^4}{\hbar^2} \psi = 0$$

quant au spin, il prend a priori la valeur 0,mais on peut aussi lui donner n'importe quelle valeur entière j : il suffit de faire tendre μ vers $\frac{m^2c^4}{\hbar^2}$ par valeurs inférieures, Θ devenant alors une distribution d'ordre plus élevé.

(4.2) Oscillateur harmonique.

Le lagrangien est $\frac{m}{2}[x'^2 - \omega^2x^2]$, ω étant la pulsation propre du système ; d'où l'équation de (J'):

$$(4.2.1) \qquad \pi_x{}^2 + \omega^2x^2m^2b^2 - 2mb\pi_t = 0 \qquad n = 2$$

et le système caractéristique

$$(4.2.2) \qquad \frac{dx}{\pi_x} = \frac{dt}{-mb} = \frac{da}{-m\pi_t + \omega^2 x^2m^2b} = \frac{-d\pi_x}{m^2\omega^2b^2x} = \frac{-d\pi_t}{0} = \frac{-db}{0}$$

Le complété de l'espace $\mathcal{E}_5$ est l'ensemble des fonctions

$$(4.2.3) \qquad \psi = -be^{\frac{1}{i\hbar}\left[a - \frac{r^2\sin2\varphi}{4m\omega}\right]} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \psi_n(r)\, e^{-in(\omega t+\varphi)}$$

avec la condition

$$(4.2.4)\qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} |\psi_n(r)|^2 \, r \, dr < \infty$$

(on a posé:

$$(4.2.5)\qquad m\omega x + ip_x = re^{i\varphi} \quad)$$

L'opérateur $\ulcorner H \urcorner = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ (formule (3.4.12)) transforme visiblement ψ_n en $n\omega\hbar\,\psi_n$; donc, le spectre de l'opérateur hamiltonien se compose des multiples entiers algébriques de $\omega\hbar$; il faut aussi noter que chaque espace propre est de dimension infinie (puisque c'est l'espace des fonctions à carré sommable, sur l'intervalle $[\,0\,,\infty\,]$, avec la mesure $r\,dr$).

On peut réduire ce spectre en se limitant aux solutions de l'équation :

$$(4.2.6)\qquad \ulcorner H \urcorner(\,\psi\,) = H.\psi$$

soit

$$(4.2.7)\qquad \frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{r^2}{2im\hbar}\,\psi$$

on trouve alors que $\psi_n(r)$ est une distribution, nulle en dehors de la valeur $r_0 = \sqrt{2n\,m\,\hbar\,\omega}$; par suite seules les valeurs ≥ 0 sont admises pour N. Mais la règle de sélection (4.2.6) fait jouer un rôle particulier à la variable temps, fait sortir de l'espace de Hilbert (les distributions trouvées ne vérifient pas la condition (4.2.4) , et ne permet la construction des opérateurs $\ulcorner u \urcorner$ que pour les variables dynamiques u qui sont des constantes du mouvement (afin que l'espace défini par (4.2.6) soit stable par $\ulcorner u \urcorner$).

(4.3) Point dans un champ newtonien central.

Le lagrangien du problème classique est $\frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] + \frac{e^2}{r}$;

l'équation du cône est donc $\frac{m}{2}\left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right] + \frac{e^2}{r}\dot{t}^2 - \dot{a}\dot{t} = 0$;

l'équation tangentielle $\frac{1}{2m}\left[\pi_x^2 + \pi_y^2 + \pi_z^2\right] - b\left[\pi_t + \frac{be^2}{r}\right] = 0$.

Ce cône est visiblement invariant par les translations sur les variables a et t ; les rotations d'espace autour de l'origine; les substitutions

$$a \to \lambda a$$
$$x \to \lambda^2 x$$
$$y \to \lambda^2 y$$
$$z \to \lambda^2 z$$
$$t \to \lambda^3 t$$

on en déduit les 6 intégrales premières

b; $H = -p_t = \frac{\pi_t}{b}$; $M_x = y\,p_z - z\,p_y$; $M_y = z\,p_x - x\,p_z$; $M_z = x\,p_y - y\,p_x$

$$\alpha = a + 3Ht - 2\left[x\,p_x + y\,p_y + z\,p_z\right]$$

la détermination d'une caractéristique s'achève par la donnée de la direction U du périhélie (dans le plan orthogonal au moment cinétique si celui-ci n'est pas nul) et de la date t_o du passage au périhélie. On en déduit l'expression d'une fonction de l'espace $\mathcal{E}_4$

$$\psi = -b\,F\,(U, M, H, t_o)\;e^{\frac{\alpha}{i\hbar}}$$

t_o n'est défini, pour $H < 0$, qu'à un multiple près de la période $T = \pi e^2\sqrt{\frac{m}{-2H^3}}$; F est donc, pour chaque valeur négative de H, fonction périodique en t_o, de période T. Elle vérifie une condition supplémentaire,due à l'indétermination du périhélie sur les trajectoires circulaires.

Si ψ est fonction propre de l'opérateur $\overline{H} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$, F est de la forme $G(U, M, H)\, e^{\frac{-2ni\pi t_0}{T}}$ pour $H < 0$, par conséquent, la valeur propre correspondante de $\overline{H}$ est :

(4.3.1) $$E = 3H + \frac{n\hbar}{e^2}\sqrt{\frac{-8H^3}{m}}$$

et par suite la fonction G est nulle en dehors des points où H est positif, ou solution de l'équation (4.3.1) pour une valeur entière algébrique de n.

On peut en déduire le spectre de l'opérateur $\overline{H}$; il est continu de $-\infty$ à $+\infty$.

Ce spectre se réduit en utilisant (comme pour l'oscillateur harmonique) la règle de sélection

(4.3.2) $$\overline{H}(\psi) = H \times \psi$$

La partie négative du spectre s'obtient alors en faisant $E = H$ dans (4.3.1) ; on trouve

(4.3.3) $$E = -\frac{1}{2}\frac{me^4}{n^2\hbar^2}$$

n étant un entier positif; on retrouve le spectre classique de l'atome d'hydrogène ; la fonction ψ devient une distribution nulle en dehors des orbites de Bohr.