SÉMINAIRE JANET.
MÉCANIQUE ANALYTIQUE
ET MÉCANIQUE CÉLESTE

JEAN-MARIE SOURIAU

Équations d'onde à 5 dimensions

Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste, tome 6 (1962-1963), exp. n° 2, p. 1-11.

<http://www.numdam.org/item?id=SJ_1962-1963__6__A2_0>

Séminaire de MÉCANIQUE ANALYTIQUE
et de MÉCANIQUE CÉLESTE
6e année, 1962/63, n° 2

1er décembre 1962

ÉQUATIONS D'ONDE À 5 DIMENSIONS

par Jean-Marie SOURIAU

1. Introduction.

Il est habituel de classer les forces (ou "interactions") que nous observons dans la nature en quatre types qui se répartissent en forces à longue ou à courte portée (les interactions faibles ou fortes ne sont guère décelables à plus de 10^{-12} cm) :

I. Interactions gravitationnelles	longue portée
II. Interactions électro-magnétiques	
III. Interactions faibles	courte portée
IV. Interactions fortes	

Le programme d'une "théorie unitaire" est de donner une description géométrique commune à toutes les forces de la nature, de même que la relativité générale "explique" les forces de gravitation au moyen de la courbure de l'espace-temps.

Vers 1920, les forces à courte portée étaient encore inconnues ; les recherches unitaires s'efforçaient donc d'unifier le champ électromagnétique avec le champ de gravitation ; dès 1921, la théorie de KALUZA [2] parvenait à des résultats positifs en ce sens.

Aujourd'hui, deux voies semblent ouvertes aux recherches :

1° construire une théorie strictement unitaire, capable d'expliquer simultanément les forces à longue et à courte portée ;

2° construire une théorie qui explique les forces à longue portée, et qui fournisse un cadre géométrique apte à décrire les particules élémentaires et leurs interactions à courte portée.

Or il n'est pas exclu qu'une relativité à 5 dimensions permette de réaliser ce second programme.

L'idée d'ajouter une cinquième dimension à l'espace-temps apparaît souvent, soit pour simplifier l'étude des spineurs [8], soit pour interpréter l'action hamiltonienne [12], soit encore dans la théorie de KALUZA [2].

Pour qu'une telle méthode soit autre chose qu'un simple artifice mathématique, il est nécessaire de mettre en évidence une symétrie aussi grande que possible entre les cinq dimensions.

Dans la théorie de Kaluza, on considère une variété riemanienne de dimension 5, sur laquelle on écrit des équations analogues à celles d'Einstein ; les quinze équations ainsi obtenues respectent bien cette symétrie, mais elle est rompue par deux postulats supplémentaires de la théorie : on ajoute un principe de "stationnarité" qui particularise la 5e dimension ; on modifie l'une des quinze équations de champ.

En dépit de ces défauts épistémologiques, la théorie de Kaluza arrive à des résultats remarquables : les quatorze équations qui restent sont les équations d'Einstein et de Maxwell usuelles ; la théorie donne une origine géométrique au principe d'invariance de jauge électromagnétique - principe purement phénoménologique en relativité ordinaire, et pourtant parfaitement vérifié dans ses applications à tous les domaines de la physique, y compris dans l'étude des particules élémentaires.

Il est donc permis de se demander s'il n'est pas possible de conserver ces résultats en s'affranchissant des hypothèses qui rompent la symétrie entre les cinq dimensions ; la théorie de JORDAN-THIRY [15] par exemple, utilise symétriquement les 15 équations de champ ; mais elle conserve le principe de stationnarité suivant lequel les composantes g_{jk} du tenseur métrique (1) sont indépendantes de la cinquième coordonnée x^5.

Grâce à ce principe, l'univers U à cinq dimensions prend une structure d'espace fibré ; sa base $\hat{U}$ est une variété riemannienne à quatre dimensions - que l'on identifie, bien entendu, avec l'espace-temps ; il existe un algorithme permettant de décrire tous les champs de U au moyen de champs de $\hat{U}$ (voir [14], § 41) ; la théorie possède donc une formulation quadridimensionnelle, dans laquelle on peut reconnaître, notamment, le champ de gravitation et le champ électromagnétique.

A priori, il semble que ce principe de stationnarité soit indispensable pour faire coller la théorie avec l'expérience ; mais il brise la symétrie entre les cinq coordonnées puisque, en fin de compte, la théorie ne possède plus que l'invariance dans les transformations de jauge

---

(1) Nous désignerons par des lettres latines $(j, k, \dots)$ les indices qui prennent les valeurs $1, 2, 3, 4, 5$; par des lettres grecques $(\mu, \nu, \dots)$ ceux qui prennent les valeurs $1, 2, 3, 4$.

(1) $$x^5 \to x^5 + f(x^\mu)$$ (voir la note (1)) .

Or, en 1926, O. KLEIN ([3], [4]) avait proposé, parmi diverses hypothèses, de remplacer la condition de stationnarité par la suivante :

(2) les g_{jk} sont des fonctions <u>périodiques</u> de x^5 .

Cette condition, beaucoup moins forte que la précédente, ne semble pas suffire à expliquer pourquoi nous ne percevons que quatre dimensions à l'univers ; c'est peut-être pourquoi, dans un article de 1938 [1], EINSTEIN et BERGMANN ont proposé de lui ajouter d'autres conditions (qui tendent plutôt à rapprocher la théorie de celle de Kaluza).

Cependant, en 1958, W. PAULI ([6], note 23) proposant de revenir à l'idée originale de Klein, et d'étudier sur la variété à 5 dimensions considérée, d'autres champs que le champ de tenseurs g_{jk} (notamment un champ de spineurs).

Or la théorie que nous avons proposée indépendamment en 1958, réalise ce programme de PAULI, en le précisant (2).

Il n'est pas difficile de voir, en effet, dans la condition (2) de O. KLEIN, une hypothèse topologique sur l'univers U ; elle suggère en effet que la 5e dimension est fermée sur elle-même, c'est-à-dire que U est homéomorphe à un "tube", produit direct de l'espace-temps (supposé simplement connexe) par un cercle, et que les x^j sont des coordonnées du <u>revêtement universel</u> de U . Lorsqu'on ajoutera une période à x^5 , on sera alors ramené <u>au même point</u> de U ; tous les champs reprendront donc la même valeur (et pas seulement le champ g_{jk}).

Dans son exposé de la théorie de Jordan-Thiry [5], A. LICHNEROWICZ a d'ailleurs attribué cette structure circulaire à la 5e dimension ; on peut montrer que ce cercle est du genre espace (3) ; nous désignerons par $2\pi\xi$ sa longueur.

La théorie de Jordan-Thiry ne permet pas de calculer la valeur de ξ (4) ; mais on est libre d'imaginer que ξ est <u>très petit</u>, et il est clair que cette

---

(2) Référence [9]. Pour un exposé détaillé de la théorie, consulter [14] (chapitre VII).

(3) L'hypothèse contraire, qui a été envisagée par divers auteurs, conduit à des forces électrostatiques <u>attractives</u> entre charges de même signe.

(4) Nous donnons ci-dessous cette valeur.

seule condition suffit à expliquer l'apparence quadridimensionnelle de l'univers ([5]) ; alors l'hypothèse de stationnarité n'a plus de raison d'être, et il est naturel de chercher à s'en affranchir, comme nous l'avons fait. On trouve ainsi une théorie invariante par toutes les transformations locales de la forme

(3) $$x^j \to f^j(x^k)$$

les f^j étant des fonctions arbitraires ([6]) ; la structure topologique attribuée à U n'intervient donc pas dans les équations de champ, mais seulement dans les transformations globales de U . La théorie des revêtements (voir [14], énoncés (10.29) et (40.12)) montre que ces transformations se partagent en deux classes ; l'une, qui est un sous-groupe, contient les transformations de la forme

(4) $$x^\mu \to f^\mu(x^j)\ ,\quad x^5 \to x^5 + f^\mu(x^j) \qquad (f^\mu\ ,\ f \text{ périodiques en } x^5)$$

qui ont été considérées par O. KLEIN et W. PAULI ([6], note 23, formule (29)) ; nous avons proposé d'interpréter les transformations de la deuxième classe (dont un exemple est la substitution $x^5 \to - x^5$) comme des conjugaisons de charge [9]. Ceci permet notamment d'interpréter géométriquement le groupe orthogonal complet à deux dimensions, proposé par L. MICHEL [6] pour la caractérisation électromagnétique des particules dans le cadre de la relativité restreinte.

La théorie proposée est donc strictement pentadimensionnelle (voir la formule (3)) ; elle admet cependant la théorie de Jordan-Thiry et celle de Kaluza comme approximations - au même titre qu'un tube suffisamment fin peut être assimilé à un fil et décrit par une seule dimension, ou qu'un milieu périodique à mailles fines (cristal) peut être considéré comme homogène.

Ces approximations sont précieuses pour l'interprétation physique de la théorie, car elles permettent d'en donner une image quadridimensionnelle approchée. Mais le véritable programme de la théorie consiste à donner une description pentadimensionnelle de la physique ; le principe de relativité à cinq dimensions, suivant lequel toutes les équations de la physique doivent être invariantes dans les transformations (3), impose des conditions très strictes, qu'il est possible de

---

([5]) On peut imaginer, si l'on veut, que chaque point de l'espace-temps est en réalité un cercle microscopique de rayon ξ ; mais cette image, comme celle du tube, est plutôt un frein pour l'esprit ; il est plus sage de ne se fier qu'à la géométrie différentielle et à la topologie.

([6]) Sous les mêmes réserves qu'en relativité générale : la transformation (3) doit être suffisamment différentiable, ainsi que la transformation inverse.

confronter avec l'expérience (7) .

Le problème fondamental de la théorie est évidemment l'étude des particules élémentaires et de leurs interactions, dans le cadre de la mécanique quantique ; nous nous bornerons ici à étudier certains aspects des équations d'onde.

2. Particules de spin 0 (voir [11]).

Ecrivons sur la variété à cinq dimensions l'équation invariante

$$\bigcirc \varphi + a\varphi = 0 \tag{5}$$

où φ désigne une fonction d'onde réelle, $\bigcirc$ le d'Alembertien à cinq dimensions, a une constante réelle.

Si nous choisissons la 5e coordonnée x^5 de façon à normer à 2π la période des champs, nous pouvons écrire la décomposition de Fourier

$$\varphi = \sum_{N \in Z} \varphi_N \, e^{iNx^5} \quad ; \tag{6}$$

les φ_N sont des fonctions complexes des x^μ ; φ_N et φ_{-N} sont complexes conjuguées ; φ_0 est réelle.

Dans l'approximation de KALUZA (pour le détail des calcules, voir [14], § 41 et § 42) on constate que φ_N est solution de l'équation quadridimensionnelle

$$\Box \varphi_N - 2iNk\, A^\mu \, \delta_\mu \, \varphi_N + \{N^2[\frac{1}{\xi^2} - k^2 \, g^{\mu\nu} A_\mu A_\nu] - iNk \operatorname{div} A + a\} \, \varphi_N = 0 \tag{7}$$

avec les notations

---

(7) Ainsi, le tenseur d'impulsion-énergie quadridimensionnel doit être remplacé par un tenseur pentadimensionnel symétrique, à divergence nulle ; dans l'approximation de la relativité restreinte, cette condition donne cinq lois de conservation simultanées : celles de l'énergie, des trois composantes de l'impulsion, et celle de l'électricité ; les lois concernant l'énergie et l'impulsion contiennent d'ailleurs explicitement les forces électro-magnétiques exercées sur les charges et les courants (voir [14], formules (41.57) et (37.33)) ; la théorie semble donc apte à rendre compte du principe - dit parfois principe d'interaction minimale - suivant lequel n'existe, comme mode d'interaction entre le champ et les charges, que celui qui est obtenu ici.

(8) $$\begin{cases} \Box = \text{opérateur de d'Alembert} \\ c = \text{vitesse de la lumière} \\ G = \text{constante d'attraction universelle de Newton} \\ \chi = \text{constante de gravitation d'Einstein} = \dfrac{8\pi G}{c^2} \\ \xi = \text{"rayon" du tube univers (voir ci-dessus)} \\ k = \dfrac{1}{\xi}\sqrt{\dfrac{\chi}{2\pi}} \\ A = \text{potentiel vecteur électro-magnétique} \end{cases}$$.

En relativité restreinte, cette équation s'écrit

(9) $$g^{\mu\nu}\left[\partial_\mu - \frac{iqA_\mu}{\hbar}\right]\left[\partial_\nu - \frac{iqA_\nu}{\hbar}\right]\varphi_N + \frac{m^2}{\hbar^2}\varphi_N = 0$$

en posant

(10) $$\begin{cases} c = 1 \\ h = \text{constante de Planck} \\ \hbar = \dfrac{h}{2\pi} \\ q = Nk\hbar \\ m = \hbar\sqrt{\dfrac{N^2}{\xi^2} + a} \end{cases}$$

c'est donc l'équation de Klein-Gordon pour une particule de charge q, de masse m, de spin 0, en présence du champ électromagnétique.

Ainsi, la relativité à cinq dimensions géométrise l'action du champ sur une telle particule (8) ; elle montre de plus que la charge électrique est nécessairement un multiple entier d'une charge élémentaire $k\hbar$, indépendante de la masse de la particule.

En l'identifiant avec la charge usuelle e (qui est par exemple celle d'un méson π^+ pour lequel on admet l'équation (9)), ceci nous donne la valeur numérique

---

(8) Pour un physicien orthodoxe, la théorie constitue donc, assez curieusement, un argument en faveur de la relativité générale : s'il est permis, en mécanique quantique, de négliger le plus souvent les interactions gravitationnelles, il n'en est plus de même pour les interactions électromagnétiques ; or l'origine géométrique que nous leur attribuons est indissolublement liée à la gravitation, sous la forme que lui a donnée EINSTEIN.
En d'autres termes, même si l'on néglige la constante de gravitation χ, on ne peut pas décrire pentadimensionnellement le champ électromagnétique sans introduire une courbure de l'univers.

$$\xi = \frac{\hbar}{e}\sqrt{\frac{\chi}{2\pi}} = \frac{2\hbar}{ec}\sqrt{G} = 3{,}782\ 10^{-32}\ \text{cm} \tag{11}$$;

cette grandeur est très petite devant les dimensions usuelles des noyaux (qui sont de l'ordre de 10^{-13} cm) ; ceci justifie a posteriori l'hypothèse initiale suivant laquelle ξ est assez petit pour que la cinquième dimension reste cachée.

La théorie apporte donc une raison géométrique à la quantification de la charge électrique - phénomène qui se constate sans s'expliquer en relativité à quatre dimensions.

La circonstance, usuelle en mécanique quantique, suivant laquelle une particule neutre est décrite par une fonction d'onde réelle et une particule chargée par une fonction d'onde complexe, apparaît aussi comme naturelle ; il est facile de vérifier que les transformations de jauge et les conjugaisons de charge (voir ci-dessus) opèrent bien suivant le schéma habituel (cf. [14], note (42.18)).

Il est clair que la théorie impose à une particule de spin 0 une infinité d'états de charge (repérés par les valeurs entières de N), avec un spectre de masse donné par la dernière des formules (10) ; mais les valeurs numériques montrent que l'on ne peut observer qu'un seul des états de charge (au signe près, bien entendu), les différences de masse étant de l'ordre de $\frac{\hbar}{\xi} \# 5\ 10^{20}$ Mev (9).

La théorie ne donne donc pas d'explication à l'existence des multiplets de charge que l'on rencontre parmi les particules soumises aux interactions fortes (mésons Π par exemple) ; ce n'est d'ailleurs pas ce que nous en attendions (voir l'introduction).

3. Particules de spin 1/2 (voir [13]).

La même méthode peut s'appliquer aux champs de spineurs ; on sait que les spineurs de l'espace hyperbolique normal à cinq dimensions sont les mêmes que ceux de l'espace de Minkowski (cf. [14], (44.33) et (44.34)) ; si un tel spineur vérifie l'équation invariante

$$\gamma^j \hat{\partial}_j \psi + a\psi = 0 \tag{12}$$

(9) On sait pourtant que certains rayons cosmiques primaires se rapprochent d'une telle énergie.

avec

$$(13)\quad \begin{cases} \gamma^j.\gamma^k + \gamma^k.\gamma^j = 2g^{jk} \qquad \text{(signature } + - - - - \text{)} \quad , \\ \hat{\partial}_j = \text{dérivation covariante des spineurs } (^{10}) \text{ suivant } x^j \quad , \\ a = \text{constante} \end{cases}$$

il vient, à l'approximation de la relativité restreinte, l'équation

$$(14)\quad \gamma^\mu[\partial_\mu - \frac{Ne}{\hbar} i\Lambda_\mu]\,\psi_N + [a \dotplus \frac{Ne}{\hbar}\sqrt{\frac{2\pi}{\chi}}\,\gamma_5]\,\psi_N - \frac{i}{8}\sqrt{\frac{\chi}{2\pi}}\,F_{\mu\nu}\,\gamma^\mu.\gamma^\nu.\gamma_5\,\psi_N = 0 \quad ;$$

γ_5 désigne, suivant l'usage des physiciens, une matrice qui anticommute avec les γ^μ et dont le carré vaut $+1$ ($i\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4$ avec les notations actuelles) ; les $F_{\mu\nu}$ sont les composantes du champ électro-magnétique.

Le dernier terme de l'équation (14) est complètement négligeable à l'échelle de la mécanique quantique (dans les unités usuelles où $\hbar = c = 1$, la constante $\frac{1}{8}\sqrt{\frac{\chi}{2\pi}}$ est de l'ordre de 10^{-33} cm).

En le supprimant, et en faisant le changement de variable défini par

$$(15)\quad \begin{cases} m\lambda = Ne\sqrt{\frac{2\pi}{\chi}} - a\hbar \\ \frac{m}{\lambda} = Ne\sqrt{\frac{2\pi}{\chi}} + a\hbar \\ \tilde{\psi} = \frac{1+\gamma^5}{2}\,\psi_N + i\lambda\,\frac{1-\gamma^5}{2}\,\psi_N \end{cases}$$

il vient, si $N \neq 0$ (cas des particules chargées), l'équation

$$(16)\quad \gamma^\mu[\partial_\mu - \frac{iNe}{\hbar}\Lambda_\mu]\tilde{\psi} + \frac{im}{\hbar}\,\tilde{\psi} = 0$$

on reconnaît l'équation de Dirac, pour une particule de charge Ne , de masse m , de spin $1/2$, en présence du champ électromagnétique.

La relativité à cinq dimensions géométrise donc aussi bien les interactions électromagnétiques des fermions que celles des bosons ; on obtient un résultat supplémentaire : l'indépendance de la charge élémentaire vis-à-vis du spin.

(^{10}) pour la définition de cette opération, on peut consulter [14] (§45) et [16] ; l'équation (12) peut s'écrire sans recourir explicitement aux symboles de Christoffel et aux matrices de Fock-Ivanenko, sous la forme

$$\gamma^1\,\partial_j\,\psi + \{\frac{1}{2\sqrt{|g|}}\,\partial_j[\sqrt{|g|}\,\gamma^j] - \frac{1}{8}\,\gamma^j[\partial_j\,\gamma_k - \partial_k\,\gamma_j]\,\gamma^k\}\,\psi + a\psi = 0$$

Le cas des neutrinos s'obtient en faisant $N = 0$, $a = 0$. Le changement de variables (15) devient alors inutile, et on trouve (en négligeant comme précédemment le dernier terme de (14)) l'équation usuelle

$$\gamma^{\mu}\,\partial_{\mu}\,\psi = 0 \qquad (17)$$

Supposons maintenant que nous ayons à étudier les interactions d'un électron et d'un neutrino - représentés respectivement par les spineurs ψ_{el} et ψ_{neut} .

Parmi les grandeurs invariantes que l'on peut construire à l'aide de ces spineurs, figure évidemment le penta-vecteur V de composantes

$$V^j = \overline{\psi_{neut}}\;\gamma^j\;\psi_{el} \qquad (18)$$

compte tenu de (15), ses composantes d'espace-temps s'écrivent [11]

$$V^{\mu} = \overline{\psi_{neut}}.\gamma^{\mu}.\left[\frac{1+\gamma^5}{2}\,\tilde{\psi}_{el} + \frac{1}{i\lambda}\,\frac{1-\gamma^5}{2}\,\tilde{\psi}_{el}\right] \qquad (19)$$

Comme la constante λ est très petite, la partie principale de ce terme est, à un facteur près :

$$\overline{\psi_{neut}}.\gamma^{\mu}.\frac{1-\gamma_5}{2}.\tilde{\psi}_{el} = \overline{\frac{1-\gamma_5}{2}\,\psi_{neut}}.\gamma^{\mu}.\tilde{\psi}_{el} \qquad (20)$$

Or des termes de ce genre interviennent dans l'étude des interactions faibles (radio-activité β) ; ce fait (que l'on appelle "interaction V-A ") se vérifie notamment en mesurant la polarisation des électrons émis ; il est à l'origine de la théorie du "neutrino à deux composantes" de LEE et YANG, à l'occasion de laquelle ces auteurs ont renoncé au principe de conservation de la parité. On voit en effet (formule (20)) que le neutrino n'intervient que par sa projection $\frac{1-\gamma_5}{2}\,\psi_{neut}$ sur un espace à deux dimensions complexes ; l'équation (17) montre que si ψ_{neut} est, à un moment, vecteur propre de γ_5 (la valeur propre correspondante s'appelle chiralité du neutrino), il restera dans cet état.

Mais l'interprétation penta-dimensionnelle donne un résultat supplémentaire, qui n'a été vérifié expérimentalement que récemment : la nécessité de l'existence de deux neutrinos de chiralité différente (indépendamment des antineutrinos correspondants, dont l'existence se déduit peut-être du fait que la représentation de spin du groupe de Lorentz complet à cinq dimensions nécessite l'introduction de deux spineurs de Dirac simultanés).

---

(11) Il est bien connu que $\frac{1+\gamma_5}{2}$ et $\frac{1-\gamma_5}{2}$ sont deux projecteurs supplémentaires de l'espace des spineurs.

On voit que le principe de relativité à cinq dimensions est peut-être destiné à jouer un rôle dans la description des particules élémentaires et de leurs interactions - même s'il ne les "explique" pas toutes.

Terminons par la remarque suivante : si on recherche algébriquement le commutant réel des γ^j , on constate que celui-ci est isomorphe au corps Q des quaternions ; ceci permet de donner à l'espace des spineurs de Dirac une structure d'espace Q-vectoriel, telle que les γ^j soient Q-linéaires ([12]) . La multiplication de ψ par un quaternion fixe arbitraire conserve visiblement l'équation (12) : en d'autres termes, l'espace vectoriel de ses solutions est aussi quaternionique.

Cette propriété disparaît dans l'équation quadridimensionnelle (16) de l'électron, à cause du rôle particulier joué par le quaternion i (voir la note ([12])) ; mais elle subsiste dans l'équation (17) du neutrino : on reconnaît la transformation de jauge de PAULI-GÜRSEY.

BIBLIOGRAPHIE

[1] EINSTEIN (Albert) and BERGMANN (P. G.). - On a generalization of Kaluza's theory of electricity, Annals of Math., Series 2, t. 39, 1938, p. 683-701.

[2] KALUZA (Theodor). - Zum Unitätsproblem der Physik, Sitzungsb. preuss. Akad. Wiss. Berl., 1921, p. 966-972.

[3] KLEIN (Oskar). - Atomicity of electricity as a quantum theory law, Nature, t. 118, 1927, p. 516.

[4] KLEIN (Oskar). - Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie, Z. für Physik, t. 37, 1926, p. 895-906.

[5] LICHNEROWICZ (André). - Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme. - Paris, Masson, 1955 (Collection d'Ouvrages de Mathématiques à l'usage des Physiciens).

[6] MICHEL (L.). - Selection rules imposed by charge conjugation, Nuovo Cimento, 9e série, t. 10, 1953, p. 319-339.

[7] PAULI (Wolfgang). - Theory of relativity. - London, Pergamon Press, 1958.

[8] PETIAU (Gérard). - Sur les relations tensorielles entre densités de valeurs moyennes en théorie de l'électron de Dirac, II : Relations différentielles, J. Math. pures et appl., 9e série, t. 26, 1947, p. 1-14.

([12]) Voir [14], § 43 et § 44. En fait, le nombre complexe i que nous avons fait figurer dans les formules (14), (15), (16) peut être considéré comme un quaternion particulier.

[9] SOURIAU (Jean-Marie). - Une axiomatique relativiste pour la microphysique, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 247, 1958, p. 1559-1562.

[10] SOURIAU (Jean-Marie). - Conséquences physiques d'une théorie unitaire, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 248, 1959, p. 1478-1480.

[11] SOURIAU (Jean-Marie). - Relativité multidimensionnelle non stationnaire, Colloques internationaux du Centre national de la Recherche scientifique : Théories relativistes de la gravitation [91. 1959. Royaumont] (à paraître).

[12] SOURIAU (Jean-Marie). - Quantification canonique. - Marseille, Faculté des Sciences, 1961 (multigraphié).

[13] SOURIAU (Jean-Marie). - Equations d'onde pentadimensionnelles, Colloque de Mathématiques à l'occasion du 3e centenaire de la mort de Blaise Pascal [1962. Clermont-Ferrand] (à paraître).

[14] SOURIAU (Jean-Marie). - Géométrie et relativité. - Paris, Hermann, 1963 (Enseignement des Sciences).

[15] THIRY (Yves). - Etude mathématique des équations d'une théorie unitaire à quinze variables de champ, J. Math. pures et appl., 9e série, t. 30, 1951, p. 275-396 (Thèse Sc. math. Paris. 1950).

[16] WHEELER (J. A.). - Geometrodynamics. - New York, Academic Press, 1962.