Jimmy ELHADAD
40 H, Boulevard Voltaire
MARSEILLE (1er)

GEOMETRIE DE L'ESPACE DE PHASES

CALCUL DES VARIATIONS

ET

MECANIQUE QUANTIQUE

J.M. SOURIAU

—

RELATIVITÉ

FACULTÉ DES SCIENCES

PLACE VICTOR-HUGO - MARSEILLE 3E - FRANCE

Jimmy ELHADAD
40 H, Boulevard Voltaire
MARSEILLE (1er)

G E O M E T R I E D E L'E S P A C E D E P H A S E S

C A L C U L D E S V A R I A T I O N S

E T

M E C A N I Q U E Q U A N T I Q U E

par J.M SOURIAU

Faculté des Sciences de Marseille

Février 1965

INTRODUCTION.

-L'un des postulats qui ont guidé les fondateurs de la Mécanique Quantique est le principe de correspondance, selon lequel, à un certain degré d'approximation, la théorie doit fournir les résultats de la Mécanique Classique.

En même temps, le principe de correspondance contient -pour certains- l'idée qu'il est réciproquement possible de passer de la description classique d'un phénomène à sa description quantique au moyen d'un certain algorithme - la quantification - qui doit mettre en jeu la constante de Planck.

Selon Dirac, on peut fonder la Mécanique Quantique sur l'analogie qui existe entre la notion classique de crochet de Poisson et la notion quantique de commutateur ; c'est cette analogie que nous nous proposons d'approfondir .

-L'algorithme crée par Poisson, et qui porte son nom, était à l'origine une méthode pour construire des intégrales premières des problèmes dynamiques. Il est maintenant naturel d'étudier cette notion dans le cadre de la Géométrie Différentielle : nous appellerons ici variété canonique (§2) une variété différentiable V sur laquelle est défini en tout point un tenseur antisymétrique et régulier σ ; on suppose que V est plate, c'est à dire qu'il existe localement des coordonnées dans lesquelles les composantes σ_{jk} de σ sont constantes .

La notion de variété canonique a donc un certain parallélisme avec celle d'espace euclidien(définie par un tenseur g_{jk} ayant les mêmes propriétés,

à l'échange près de la symétrie avec l'antisymétrie) ; la différence essentielle concerne l'ensemble des isomorphismes de la structure ; dans l'espace euclidien, ils forment un groupe de Lie (déplacements euclidiens, groupe de Lorentz-Poincaré par exemple); dans le cas canonique, on obtient au contraire un groupe de dimension infinie , dont les éléments s'appellent transformations canoniques (1) ; la géométrie de ce groupe est la géométrie canonique , que nous étudions au chapitre I .

Ainsi, le tenseur covariant σ fournit la définition des "crochets de Lagrange" ; c'est le tenseur contravariant σ^{-1} qui donne naissance aux crochets de Poisson. Parmi les autres objets géométriques engendré par σ figure notamment la forme de Liouville ; de nombreuses formules relient ces objets entre eux .

Divers procédés fournissent des variétés canoniques : on peut par exemple associer à toute variété différentiable une variété canonique de dimension double (son "espace de phases") ; nous étudions par ailleurs, sous le nom d'espace quantifiant (§4), une variété munie d'un covecteur vérifiant certains axiomes ; on montre qu'une telle variété possède une structure d'espace fibré, et que sa base est une variété canonique.
Les espaces fibrés quantifiants permettent, par relèvement, d'interpréter l'algèbre de Lie définie par les crochets de Poisson, algèbre qui reste assez mystérieuse sur les variétés canoniques elles-mêmes.

Comment ces notions abstraites se rattachent-elles aux problèmes dynamiques? En fait, il serait maladroit de se limiter aux seuls problèmes

---

(1)Dans le cas des problèmes dynamiques, on retrouve bien la notion connue sous ce nom.

de la mécanique classique ; ce sont tous les problèmes variationnels réguliers (§5) qui sont concernés.

Le chapitre II est donc consacré à l'étude "canonique" du calcul des variations; après rappel des notions de base, nous montrons comment on peut, par paramétrisation, transformer les problèmes réguliers en problèmes d'un type plus général (type II) que nous résolvons; si une certaine condition est réalisée (cas "évolutif") l'ensemble des solutions du problème (c'est à dire l'espace abstrait des courbes extrêmales) possède une structure de variété canonique , qui constitue la clef de toute la présente étude .

Nous pouvons ainsi placer dans un cadre géométrique les principales notions de la Mécanique Analytique :équations canoniques d'Hamilton; covariance du lagrangien ; théorème de Noether ; etc... (1).

Nous considérons d'autre part une troisième forme des problèmes variationnels, qui consiste à introduire l'action comme nouvelle variable, et à la traiter sur le même plan que les autres (§7); cette méthode est utile notamment dans le cas de lagrangiens multiformes .

Ces outils mathématiques permettent d'aborder le problème de la quantification d'un problème dynamique (chapitre III) ; ayant examiné comment on passe des axiomes proposés par Heisenberg (§9) à ceux de Dirac (§10), nous montrons qu'il existe une méthode intrinsèque ("quantification canonique", §11) pour construire,à partir d'un problème dynamique, des opérateurs hermitiens

---

(1) Nous n'étudions pas ici les équations aux dérivées partielles du premier ordre ; mais la géométrie canonique permet de les interpréter très simplement (voir SOURIAU 1.954).

associés à toutes les variables dynamiques, ayant les relations de commutation voulues : il suffit de considérer la variété V des extrêmales du problème classique , et de construire un espace fibré $\mathcal{V}$ de base V, vérifiant les axiomes du § 4 (axiomes qui mettent en jeu explicitement la constante de Planck) ; nous avons établi, au §4 des conditions suffisantes pour qu'un tel espace fibré existe, et pour qu'il soit unique (à un isomorphieme près); ces conditions mettent en jeu la topologie globale de V ; la construction est toujours possible localement .

L'ensemble des états est alors un espace fonctionnel sur $\mathcal{V}$; les observables sont les opérateurs qui représentent des automorphismes infinitésimaux de la structure de $\mathcal{V}$; bien entendu, on peut aussi construire les opérateurs finis correspondants, ce qui conduit à des théorèmes d'extension de groupes .

-Cette méthode correspond-elle réellement à la Mécanique Quantique ? Pour permettre de répondre à cette question, quelques exemples sont traités au chapitre IV.

Nous montrons d'abord comment la "quantification canonique" peut s'appliquer aux problèmes dynamiques de type jacobien(en particulier à tous ceux qui ont une formulation hamiltonienne) , grâce à l'introduction de la variable "action" ; la méthode est utilisée pour quantifier une particule libre, dans le cadre de la Relativité Restreinte (§ 13).
D'après des théorèmes généraux,l'espace E des états de la particule quantifiée est un espace de représentation du groupe de Lorentz non homogène(ou, plus exactement, de son produit direct par le tore) ; en décomposant E en sous-espaces irréductibles pour cette représentation (1), on trouve un spectre

(1)Nous n'effectuons cette décomposition que formellement .

continu de masse, limité supérieurement par la "masse quantique" habituelle ; un spectre de spin, comprenant toutes les valeurs entières(le spin demi-impair est exclus à priori); chaque espace irréductible est isomorphe à un espace de fonctions d'ondes, vérifiant des équations explicitement formulées pour toutes les valeurs du spin j ; pour j = 0 et 1, par exemple, on retrouve les équations de Klein-Gordon et de Proca.

On sait aussi former canoniquement les observables correspondant à l'énergie, à l'impulsion et aux six moments ; là aussi, on retrouve les opérateurs habituels.

La méthode fournit évidemment tous les autres observables, tels que les opérateurs de position ; mais ces derniers, par exemple, mélangent masse et spin.

Une autre méthode pour construire les espaces fibrés quantifiants(dans le cas des problèmes "potentiels") est appliquée au cas des problèmes linéaires (§15); on montre que divers "schémas quantiques" sont possibles, mais unitairement équivalents par un déphasage ; l'espace fonctionnel construit (ici avec le schéma de Schrödinger) est un espace de représentation pour le groupe des transformations canoniques de l'espace vectoriel des extrêmales; notamment pour le sous-groupe de ses translations (ou, plus exactement, par une certaine extension de ce groupe par le tore ; cette extension est non abélienne, donc non triviale) ; là aussi on peut décomposer l'espace en sous-espaces irréductibles pour cette représentation (1); les P_j et les Q^j, qui sont les générateurs infinitésimaux du groupe , opèrent sur chaque sous-espace suivant les formules habituelles de Schrödinger.

---

(1)Nous n'effectuons cette décomposition que formellement .

Nous traitons aussi l'oscillateur harmonique (15.12) et l'atome d'hydrogène (12.18) ; une règle de sélection intrinsèque (proposée au § 16) permet de retrouver les valeurs usuelles du spectre d'énergie de ces deux problèmes.

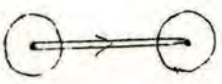
—o—o—o—o—

Il est naturel de se demander si cette méthode peut s'appliquer au cas de la dimension infinie, c'est à dire pour quantifier les champs.

Une adaptation est nécessaire, bien entendu; mais on peut remarquer que la quantification des champs de bosons libres est une extension naturelle du cas linéaire étudié au § 15 (voir à ce sujet D.KASTLER 1964); peut- être est-il permis d'espérer, par une généralisation convenable de la notion d'espace fibré quantifiant, trouver une méthode systématique pour quantifier les champs en interaction.

-o-o-o-o-o-o-o-o-o-

-Toutes les notions de Géométrie Différentielle utilisées sont extraites de notre livre "Géométrie et Relativité", (SOURIAU 1964)dont les références sont indiquées dans le texte par les initiales G.R. ;la théorie des invariants intégraux au sens de Cartan est rappelée dans un paragraphe d'introduction (§0). Sauf mention du contraire, toutes les fonctions, applications etc... considérées seront supposées infiniment différentiables ; les variétés seront donc C^∞ [G.R.(19.16)].

-Le chapitre II utilise la notion de variables liées; chaque système de variables implique un certain nombre d'applications(celles qui font passer aux variables non indépendantes) ; ces applications forment nécessairement un diagramme commutatif: ces diagrammes constituent les figures 1 à 7 . Dans ces diagrammes,les flèches simples représentent des surjections;les flèches doubles  désignent des injections canoniques d'un sous-ensemble dans un ensemble .

Le lecteur amateur d'algèbre reconnaîtra dans ces diagrammes des catégories (dont toutes les flèches, en particulier les flèches neutres, ne sont pas dessinées) ; nous étudions d'ailleurs certains de leurs foncteurs; mais la théorie des catégories n'est pas indispensable à l'intelligibilité du texte.

-o-o-o-o-o-o-

Certains des résultats de cet exposé de synthèse ont été publiés ailleurs: [SOURIAU 1953,1954] ;en ce qui concerne la géométrie canonique; la méthode de quantification canonique, exposée d'abord au séminaire de Physique Mathématique de la Faculté des Sciences de Marseille en 1960-1961, puis au colloque de théories variationnelles du Mont Aigoual(1961), a fait l'objet (sous une forme un peu différente) d'une publication ronéotypée (SOURIAU 1962).

§ 0 - DIRECTIONS ET LIGNES DE FORCE .

(0.1) - Soit E un espace vectoriel réel de dimension n ($n \geq 2$).

Si $y \in E$, $y \neq 0$, nous appellerons direction de y l'espace vectoriel (de dimension 1)

$$\mathrm{dir}(y)$$

engendré par y.

(0.2) - L'ensemble des directions s'appelle espace projectif associé à E .

(0.3) - Le transmuté du groupe linéaire de E par l'opérateur dir [Voir G.R. (6.11)] s'appelle groupe projectif (ou encore groupe homographique).

- L'espace projectif possède une structure de variété analytique de dimension n-1 , que l'on peut définir par l'atlas des cartes F :

(0.4) $$F(X) = \mathrm{dir}\,(y + S.X) \qquad [S = \text{base d'ordre } n-1 \text{ , } y \notin \mathrm{val}\,(S)\,]$$

cet atlas est visiblement invariant par le groupe projectif;donc aussi la structure de variété de l'espace projectif .

(0.5) - Considéré comme variété, l'espace projectif est compact; il n'est pas orientable si n est impair .

- Soit maintenant V une variété différentiable de dimension n.

(0.6) La racine D des vecteurs tangents à V [G.R.(20.1)] admet évidemment la sous racine des vecteurs non nuls;on constate que l'opérateur dir

ci-dessus (0.1) est un homomorphisme de cette racine [G.R.(13.1)]; cet homomorphisme définit donc une nouvelle racine , que nous appellerons racine des directions tangentes à V , que nous noterons $\mathfrak{D}$;elle est définie par

(0.7) - $$\boxed{\mathfrak{D}(A)(x)(\mathrm{dir}(y)) = \mathrm{dir}\,(D(A)(x)(y))}$$

La fibre $\mathfrak{D}_x$ en chaque point x de V ext l'espace projectif des directions des vecteurs tangents à V en x; le groupe structural est un sous-groupe du groupe projectif, ce qui montre que la structure de variété de cet espace (définie en (0.4))est invariante [G.R.(12.15)]; on constate que la racine $\mathfrak{D}$ est infiniment différentiable si V est C^∞ [G.R.(20.30)]; l'espace fibré $V^{\mathfrak{D}}$ des directions tangentes à V possède donc une structure de variété de classe C^∞, de dimension $2n-1$.

(0.8) De même, à partir de la racine D* des covecteurs tangents [G.R.(24.39)], on définira la racine $\mathfrak{D}'$ des directions de covecteurs, appelés aussi éléments de contact (d'hypersurfaces).

(0.9) Soit φ un $\mathfrak{D}$-champ de V(=champ de directions), que nous supposerons infiniment différentiable .

Nous appellerons ligne de force du champ toute courbe C ([1]) , connexe,

---

([1]) Courbe = variété de dimension 1, de classe C^∞ .

plongée ([2]) dans V , telle qu'en tout point x de C la direction tangente à C ([3]) soit $\varphi(x)$.

Cette notion coïncide bien avec la notion classique de ligne de force; il faut simplement prendre garde au fait que les variétés ne sont pas nécessairement dénombrables à l'infini [G.R(19.21)], et que dans ces conditions les lignes de forces peuvent éventuellement avoir une structure de droite transfinie. Mais ceci ne cause pas de difficultés particulières.

Si l'on applique la théorie générale des équations différentielles sur une variété [G.R.(§22)], on peut notamment établir les théorèmes suivants [(0. 10) , (0.11) , (0.12) , (0.14) , (0.17) , (0.22)] :

(0.10) Soit φ un $\mathfrak{D}$-champ infiniment différentiable sur une variété séparée V de dimension n .

Une ligne de force Γ du champ φ sera dite maximale si toute ligne de force qui rencontre Γ est plongée dans Γ .

Par tout point de V , il passe une ligne de force maximale, et une seule

Les lignes de force maximales forment donc une partition de V .

([2])Pour la notion de variété plongée, voir [G.R.(20.13)]; on rappelle que tous les plongements considérés ici sont infiniment différentiables.

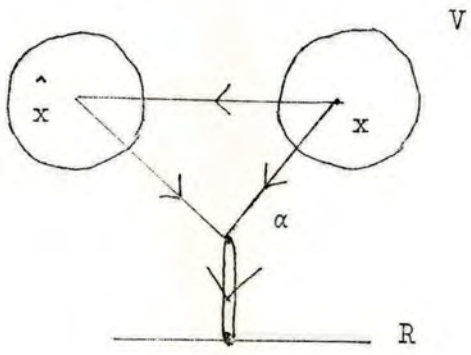
([3]) C'est à dire l'espace vectoriel tangent à C , qui est de dimension 1[G.R.(20.14)].

Définition, théorème:

Soit [x↦α] un champ scalaire infiniment différentiable sur la variété V (notations (0.10)).

(0.11)

On dit que α est une intégrale première du champ si α est constant sur toutes les lignes de force:



[$\hat{x}$ = ligne de force maximale qui passe par x; voir l'explication du diagramme dans l'introduction].

- Pour que α soit une intégrale première, il faut et il suffit que, pour tout x ∈ V :

$$\varphi(x) \subset \text{noyau } (\nabla \alpha)$$

$\nabla \alpha$ désigne la dérivée extérieure de α [G.R.(27.11)].

Définition, théorème:

(Mêmes hypothèses que (0.10)).

Soit $[x \to \alpha]$ un champ infiniment différentiable de p-formes de V [G.R.§ 27] ; p = 1,2,.....n.

On dit que α est un <u>invariant intégral</u> (1) <u>au sens de Cartan</u> (2) du champ φ si

(0.12) ♢ $\quad \delta_L \alpha = 0$ (3)

pour tout champ de vecteurs $x \to \delta x$ tel que

$$\text{dir}(\delta x) = \varphi(x)$$

Pour qu'une p-forme α soit un invariant intégral , il faut et il suffit (4) que l'on ait , pour tout x :

♡
$$\begin{cases} \varphi(x) \subset \text{noyau } (\alpha) \\ \varphi(x) \subset \text{noyau } (\nabla \alpha) \end{cases}$$

---

(1) parce que l'intégrale

$$\int_C^{\alpha} \alpha$$

ne varie pas quand on déplace la p chaîne C sur une ligne de force; voir la formule [G.R.(31.45)].

(2) Les invariants intégraux au sens de Poincaré [G.R.(31.45)] concernent les champs de vecteurs, et non les champs de directions.

(3) $\delta_L \alpha$ désigne la dérivée de Lie de α pour le champ de vecteurs $[x \to \delta x]$ [G.R. § 23] .

(4) Appliquer la "formule magique"

$$\delta_L \alpha = [\nabla \alpha] (\delta x) + \nabla[\alpha (\delta x)]$$

[G.R.(27.13)].

(0.13) Exercice: montrer que ce théorème s'étend au cas $p = 0$ si l'on écrit la première des formules ♡ sous la forme

$$[\mathrm{dir}(\delta x) = \varphi(x)\ ] \Rightarrow [\mathrm{Int}(\delta x)(\alpha) = 0\ ]$$

[voir G.R.(26.20)], et que les invariants intégraux de degré 0 sont les intégrales premières.

Définition, théorème:

(0.14) -Nous dirons qu'un champ scalaire infiniment différentiable $[x \to t]$, défini dans un ouvert de V(hypothèses (0.10)) est paramétrisant pour le champ φ si sa restriction à toute ligne de force Γ est une co-carte de Γ [G.R.(19.8)] .

-Pour que $[x \to t]$ soit paramétrisant , il faut et il suffit que :

♢ $\begin{cases} \varphi(x) \not\subset \text{ noyau } (\nabla t) & \text{pour tout } x \text{ où est défini } t\ ; \\ [x \to t\ ] \text{ est régulier sur chaque ligne de force [G.R.(1.3)]} \end{cases}$

-Si un champ $[x \to t]$ est défini sur V toute entière, pour qu'il soit paramétrisant, il suffit que

$$\varphi(x) \not\subset \text{ noyau } (\nabla t) \text{ pour tout } x \text{ dans V .}$$

Définition:

(0.15) Nous dirons qu'une variété séparée V , sur laquelle est définie un champ de directions, est évolutive si on peut définir un champ paramétrisant dans un voisinage de tout point de V.

(0.16) -Le théorème (0.14) montre que toute variété séparée V peut être recouverte par des ouverts dont chacun est évolutif(pour le champ induit de directions);la condition d'évolutivité,toujours vérifiée localement , est donc purement globale.Elle exprime que les lignes de force ne peuvent pas repasser une infinité de fois au voisinage d'un même point.

(0.17) Théorème:

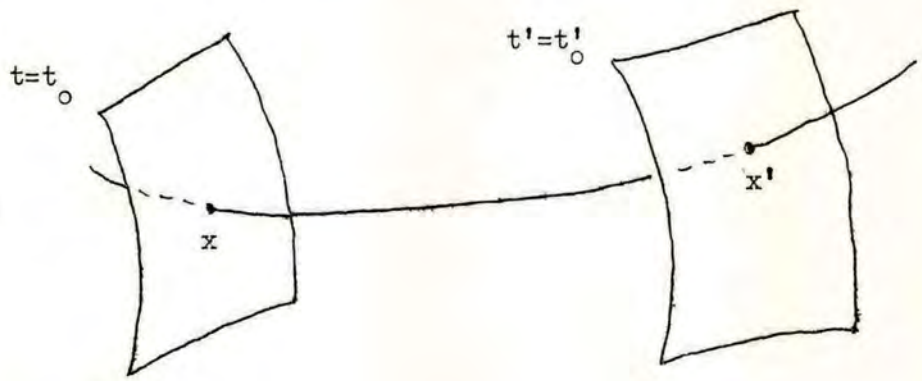
Soit V une variété de dimension n évolutive pour un champ de directions (déf.(0.15)). Si t est un scalaire paramétrisant, si F est une carte d'une des variétés (C^∞, de dimension n-1) t = Cte, désignons par $\hat{F}(X)$ la ligne de force maximale qui passe par F(X) [$X \in R^{n-1}$].

Alors l'ensemble des lignes de force maximales possède une structure de variété , de classe C^∞, de dimension n-1, définie par l'atlas des $\hat{F}$.

(0.18) Ce théorème revient à dire que si on se donne deux champs paramétrisants [x → t], [x → t'] la correspondance(entre un point x de la variété $t = t_o$ et un point x' de la variété $t' = t'_o$) :

"il existe une caractéristique maximale passant par x et x'" est biuni-voque et infiniment différentiable dans les deux sens:

(0.19)



On constate immédiatement , si V est évolutive , que :

(0.20) La variété $\hat{V}$ des lignes de force maximales est séparée ;

(0.21) - L'application

$$x \to \hat{x}$$

[$\hat{x}$= ligne de force maximale qui passe par x] est <u>infiniment différentiable</u>.

Théorème:

(0.22) Soit V une variété évolutive pour un champ de directions φ .

Soit $[x \to \alpha]$ un champ infiniment différentiable de p-formes défini sur V.

Alors les conditions $\diamondsuit$ et $\heartsuit$ sont équivalentes:

$\diamondsuit$ α est un <u>invariant intégral</u> de Cartan du champ φ (déf.(0.12));

$\heartsuit$ Il existe un champ infiniment différentiable de p-formes , $[\hat{x} \to \hat{\alpha}]$, défini **sur** la variété $\hat{V}$(0.20) , dont le champ $[x \to \alpha]$ est <u>l'image réciproque</u> [G.R.(25.47)] par l'application $[x \to \hat{x}]$ (0.21) .

(0.23) <u>Exercice</u>: montrer que l'intégrale de α sur une p-chaîne C [G.R.(31.38)] est égale à l'intégrale de $\hat{\alpha}$ **sur** l'image de C par l'application $(x \to \hat{x})$.

(0.24) -Ce théorème s'étend immédiatement au cas p = 0 : pour qu'un champ scalaire $[x \to \alpha]$, défini sur V , soit l'image réciproque d'un champ $[\hat{x} \to \alpha]$ de $\hat{V}$, il faut et il suffit que α soit une intégrale première ; le champ $[\hat{x} \to \alpha]$ est alors infiniment différentiable .

-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-

CHAPITRE I

GEOMETRIE CANONIQUE

§ 1 : GROUPE CANONIQUE.

Nous utiliserons les notations matricielles [G.R. (§ 17)] .

Définition, théorème :

(1.1) Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

-Nous dirons que E est un espace symplectique si l'on a choisi sur E une 2-forme σ ([1]) qui est régulière , c'est à dire telle que

$$[\ \sigma(X)\ (Y) = 0 \quad \text{pour tout } Y\ ] \Longleftrightarrow [\ X = 0\ ]$$

-Deux vecteurs X et Y de E seront dits orthogonaux si

$$\sigma(X)\ (Y) = 0$$

-Un sous-espace vectoriel E_1 de E sera dit isotrope si tous les vecteurs de E_1 sont orthogonaux ; isotrope maximal s'il n'est pas contenu dans un sous-espace isotrope plus grand .

Théorème :

(1.2) a)La dimension d'un espace symplectique E est paire.

b)Tout sous-espace isotrope est contenu dans un sous-espace isotrope maximal.

c)Tous les sous-espaces isotropes maximaux ont la même dimension n , qui est la moitié de la dimension de E .

d)Si des vecteurs $[S_1, S_2, \ldots . S_n]$ forment une base d'un sous-espace

---

([1]) C'est à dire un opérateur bi-linéaire antisymétrique à valeurs réelles [voir G.R.(26.1)] . Nous le noterons σ_E s'il y a lieu de préciser de quel espace symplectique E il s'agit .

(1.2) isotrope maximal, on peut les compléter par des vecteurs $T_1, T_2, \ldots T_n$ de façon que :

$$\left[\begin{array}{l} [S_1, \ldots S_n \quad T_1, \ldots T_n] \text{ est une base de E} \\ \diamondsuit \begin{cases} \sigma(S_j)(S_k) = 0 \\ \sigma(T_j)(T_k) = 0 \\ \sigma(S_j)(T_k) = \begin{cases} 1 & \text{pour } j = k \\ 0 & \text{pour } j \neq k \end{cases} \end{cases} \qquad [j,k = 1,2,\ldots n] \end{array}\right.$$

Une base S vérifiant ces relations s'appellera <u>base canonique</u> .

Il est clair que tout sous-espace de dimension 1 est isotrope (puisque σ est antisymétrique) ; (b) est évident , puisque la dimension de E est finie.

Soit donc E_1 un sous-espace isotrope maximal, $[S_1\ S_2\ \ldots S_n]$ une base de E_1 , E_2 un supplémentaire de E_1, $[T''_1\ T''_2\ \ldots T''_p]$ une base de E_2.

Il est clair que E_1 ne contient pas de vecteur non nul orthogonal à E_2 (sinon, il serait orthogonal à E_1 et E_2 , donc à E, donc nul) ; que E_2 ne contient pas de vecteur non nul orthogonal à E_1 (sinon ce vecteur sous-tendrait avec E_1 un espace isotrope plus grand que E_1,E_1 ne serait pas maximal).

Il en résulte que la matrice M, dont les éléments sont

$$j_{M_k} = \sigma(S_j)(T''_k)$$

est régulière , ainsi que la matrice transposée; donc M est une matrice carrée, p = n ; ce qui démontre (a) et (c).

Posons

$$[T'_1 \ldots T'_n] = [T''_1 \ldots T''_n] \cdot M^{-1}$$

les T'_j forment une nouvelle base de E_2 et l'on a par construction

$$\sigma(S_j)(T'_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

Si on pose maintenant

$$T_j = T'_j + 1/2 \sum_k S_k \ \sigma(T'_k)(T'_j)$$

on constate immédiatement que les S_j et les T_j forment une base de E, et que les relations $\diamondsuit$ sont vérifiées .

C.Q.F.D.

Définition , théorème :

(1.3) Soit n un entier positif.

-Si x et y sont des éléments de R^{2n} , nous poserons

$$\diamondsuit \qquad \sigma(x)(y) = \sum_{j=1}^{n} [j_x . \ ^{j+n}y - \ ^{j+n}x . \ j_y]$$

-Cette règle fait de R^{2n} un espace symplectique .

-Si E est un espace symplectique, et si S désigne une base canonique d'un espace symplectique de dimension 2n (1,2,d) , on a

$$\sigma_E(S.x)(S.y) = \sigma_{R^{2n}}(x)(y) \qquad [\ \forall\ x, y \in R^{2n}\ ]$$

La vérification est immédiate.

(1.4) On voit donc qu'une base canonique d'un espace symplectique E est un <u>isomorphisme</u> de R^{2n} avec E ; il existe donc une seule structure symplectique de dimension 2n.

-Si E est un espace symplectique, nous noterons Sp(E) le groupe des automorphismes de la structure symplectique de E :

(1.5) $$[A \in Sp(E)] \iff \begin{bmatrix} A = \text{application linéaire de E sur E} \\ \sigma(A.x)(A.y) = \sigma(x)(y) \quad \forall\ x,y \in E \end{bmatrix}$$

Sp(E) s'appelle <u>groupe symplectique</u> de E.

-On voit que la forme générale d'un élément de Sp(E) est

(1.6) $$A = S' . S^{-1}$$

S et S' étant deux bases canoniques.

Comme tout vecteur non nul peut être pris comme premier vecteur d'une base d'un sous-espace isotrope maximal, il en résulte que

(1.7) Le groupe symplectique opère transitivement sur les vecteurs non nuls .

-La formule (1.3 ◊) peut s'écrire, en utilisant les clefs matricielles $^{j}|$: [G.R. (17.2) , (26.41)] :

(1.8) $$\boxed{\sigma = \sum_{j=1}^{n} {}^{j}|\Lambda^{j+n}|}$$

on en déduit immédiatement les diverses puissances extérieures de σ , notamment la puissance n-ième :

(1.9) $$\boxed{\sigma \wedge \sigma \ldots\ldots \wedge\sigma = [-1]^{\frac{n(n-1)}{2}} \; n! \; {}^{1}|\Lambda^{2}|\ldots\Lambda^{n}|}$$

-Il est clair que le groupe symplectique respecte les diverses puissances extérieures de σ , notamment la dernière, qui n'est pas nulle; par suite [voir G.R.(26.13)] :

(1.10) $$[A \in Sp(E)] \Rightarrow [\det(A) = 1]$$

-On peut aussi utiliser la transposition pour étudier la structure symplectique; si l'on considère la matrice d'ordre 2n :

(1.11) $$\sum = \begin{bmatrix} & & 1 \\ & & \\ -1 & & \\ & & -1 \end{bmatrix}$$

on constate que la définition (1.3 ♢) de σ peut s'écrire

(1.12) $$\boxed{\sigma(x)(y) = \bar{x} \,.\, \Sigma \,.\, y} \qquad [\forall\, x,\, y \in R^{2n}]$$

$\bar{x}$ désignant la ligne transposée de x [G.R.(29.3),(29.17)] ; on en déduit immédiatement :

(1.13) Soit A une matrice carrée d'ordre 2n. Alors

$$[\, A \in Sp(R^{2n}) \,] \iff [\, \bar{A} \,.\, \Sigma \,.\, A = \Sigma \,]$$

(1.14) -Par dérivation, on en déduit <u>l'algèbre de Lie</u> du groupe symplectique de R^{2n} ; c'est l'ensemble des matrices B telles que $\Sigma.B$ soit symétrique ; la dimension de $Sp(R^{2n})$ est donc $n(2n+1)$; notons que la dimension du groupe <u>orthogonal</u> du même espace est seulement $n(2n-1)$.

(1.15) <u>Exercices</u>. Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel de dimension n; $\mathcal{E}^*$ son dual . On pose pour $Q, Q' \in \mathcal{E}$, $P, P' \in \mathcal{E}^*$:

$$\sigma\begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q' \\ P' \end{pmatrix} = P.Q' - P'Q$$

Montrer que $E = \mathcal{E} \times \mathcal{E}^*$ est un espace symplectique ; que $\mathcal{E} \times \{0\}$ et $\{0\} \times \mathcal{E}^*$ sont des sous-espaces isotropes maximaux .

-Montrer que $Sp(R^2)$ est le groupe des matrices déterminant 1 (d'ordre 2.)

§ 2 : <u>VARIETES CANONIQUES</u>.

(2.1) Désignons comme en [G.R.(18.19)] par $C^\infty(R^{2n})$ l'ensemble des difféomor-phismes de R^{2n} (applications) d'un ouvert de R^{2n} sur un ouvert de R^{2n} , régulières, infiniment différentiables ainsi que leur inverse) ; on sait que $C^\infty(R^{2n})$ est un <u>recueil</u> [G.R.(1.19)].

Associons à chaque point x de R^{2n} la 2-forme σ définie ci-dessus (1.3) .

(2.2) Nous appellerons <u>transformations canoniques</u> les éléments de $C^\infty(R^{2n})$ qui <u>invarient</u> le champ $[x \mapsto \sigma]$ [G.R.(15.12)] .

(2.3) Il résulte de [G.R.(15.12)] que l'ensemble des transformations canoniques de R^{2n} , que nous noterons $Can(R^{2n})$, est un <u>recueil</u> ; en se référant à [G.R.(25.36)], on peut le définir par :

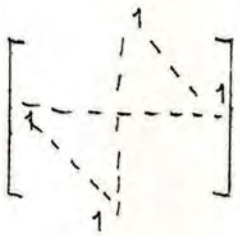
(2.4) $[\ A \in Can(R^{2n})\ ] \Longleftrightarrow [\ A \in C^\infty(R^{2n})\ ,\ [x \in def(A)] \Rightarrow [D(A)(x) \in Sp(R^{2n})]\ ]$

$D(A)(x)$ désignant la matrice dérivée de A au point x .

(2.5) En particulier, les translations, les éléments du groupe symplectique sont des transformations canoniques .

<u>Exercice:</u> On dira que A est <u>anticanonique</u> si l'image de σ par A est $-\sigma$. Montrer qu'on obtient toutes les transformations anticanoniques en multipliant à gauche(resp. à droite) une transformation canonique par la matrice

(2.6)



montrer que cette matrice est un <u>automorphisme</u> du recueil canonique [Voir G.R.(3.2)], ainsi que les matrices scalaires; en déduire que le recueil $Can(R^{2n})$ n'est pas <u>parfait</u> [déf . G.R.(4.7)].

Définition:

(2.7) Nous appellerons <u>variété canonique</u> de dimension 2n toute variété séparée de classe $Can(R^{2n})$ [Définition G.R.(19.6)]

On peut donc définir toute variété canonique V au moyen d'un atlas , c'est à dire d'une famille d'applications régulières F_j, qui appliquent des ouverts de R^{2n} dans V, telles que

$$(2.8)\qquad \begin{cases} F_j^{-1} \cdot F_k \in Can(R^{2n}) & \forall\ j,k \\ \bigcup_j \ val(F_j) = V \end{cases}$$

[voir G.R.(19.12)]; cette structure de variété permet de définir les cartes , cocartes et glissements de V (que nous qualifierons de canoniques s'il faut préciser).Les F_j , par exemple, sont des cartes canoniques; les éléments de $Can(R^{2n})$ sont les changeurs de cartes de V.

(2.9) Puisque le champ $[x \to \sigma]$ est un champ invariant sur R^{2n}[G.R.(15.14)] il est prolongeable d'une seule façon par un champ invariant sur $R^{2n} \cup V$; nous appellerons forme de Lagrange la forme ainsi définie, et nous la noterons encore σ .

(2.10) Ainsi, sur toute la variété canonique V est défini un champ de 2-formes régulières; on dit que V est une variété symplectique (i.e;: l'espace vectoriel tangent à V en tout point est symplectique); de plus il existe des systèmes de coordonnées(les cartes canoniques) dans lesquelles les composantes de cette forme sont constantes:on dit que V est une variété ~~canonique~~ symplectique plate.

(2.11) Notons que les glissements de $V \cup R^{2n}$ sont les difféomorphismes qui invarient $[x \to \sigma]$. La structure de variété canonique de V est donc entièrement caractérisée par sa forme de Lagrange .

Les différentes puissances extérieures de la forme de Lagrange sont encore des champs invariants. En particulier, nous appellerons <u>forme de Liouville</u>, et nous noterons "vol" la forme de degré maximum $2n$

(2.12) $$\boxed{\text{vol} = \frac{[-1]^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!} \sigma \wedge \sigma \ldots\ldots \wedge \sigma}$$

-Le champ [x →vol] est invariant sur $V \cup R^{2n}$; si $x \in R^{2n}$, la formule (1.9) montre que

(2.13) $$\boxed{\text{vol} = {}^1| \wedge {}^2| \ldots. \wedge {}^{2n}|}$$

c'est à dire que vol coïncide avec la jauge euclidienne sur R^{2n} [voir G.R.(29.25)].

(2.14) La forme de Liouville définit une <u>densité</u> invariante, ce qui permet de définir de façon intrinsèque l'intégrale d'un champ scalaire (à support compact) sur V, et une <u>orientation</u> invariante également: les variétés canoniques sont <u>orientées</u>, donc <u>orientables</u> [voir G.R.(24.33),(24.29),(2431),(24.32)].

(2.15) Puisque les composantes σ_{jk} du tenseur σ dans R^{2n} sont constantes, il est évident que sa dérivée extérieure $\nabla\sigma$ est nulle ; il existe donc un cahmp de 1-formes, $[x \to p]$, tel que $\sigma = \nabla p$ [réciproque du th. de Poincaré, G.R.(27.27)] ; on vérifie que l'on peut prendre

(2.16) $$\boxed{p \equiv \frac{1}{2} \sigma(x)}$$

En appliquant la théorème de commutation de la dérivation extérieure avec l'image par les applications [G.R.(27.17) on en déduit :

Soit V une variété canonique .

-La forme de Lagrange a une dérivée extérieure identiquement nulle

(2.17) $$\nabla \sigma = 0$$

-Au voisinage de tout point de V, on peut définir un champ de covecteurs $x \to p$, tel que

$$\nabla p = \sigma$$

(2.18) nous dirons que p est un <u>potentiel</u> covecteur.

-Nous dirons que V est une <u>variété potentielle</u> si l'on peut définir un champ potentiel covecteur $[x \to p]$ sur V toute entière.

(2.19) En particulier, une variété canonique V est potentielle si le deuxième groupe de cohomologie de V est nul (c'est le cas par exemple pour R^{2n})

-Soit x un point de V ; D_x (resp. D_x^*) désigne l'espace vectoriel tangent (resp.cotangent) à V en x [G.R.(20.1) (resp.(24.39))]

La forme de Lagrange σ est une application régulière de D_x <u>sur</u> D_x^* ; σ^{-1} est donc une application de D_x^* sur D_x ; on peut donc définir un tenseur contravariant du second ordre τ en posant

(2.20) $$\boxed{\tau(C)(C') = C.\,\sigma^{-1}(C')} \qquad [C, C' \in D_x^*]$$

On constate que τ est antisymétrique ; τ est donc une 2-forme contra - variante ; on l'appellera <u>forme de Poisson</u> ; le champ $[x \to \tau]$ est lui aussi

invariant sur R^{2n} UV.

-Nous dirons qu'un champ de vecteurs $[x \to \delta x]$ est <u>potentiel</u> si le covecteur $p = \sigma(\delta x)$ est potentiel :

(2.21) $$\boxed{\nabla [\sigma(\delta x)] = \sigma}$$

En appliquant la formule magique [G.R.(27.13)]

(2.22) $$[\nabla\omega](\delta x) + \nabla[\omega(\delta x)] = \delta_L \omega$$

on voit que:

(2.23) Les champs de potentiels-vecteurs sont les champs $[x \to \delta x]$ tels que

$$\delta_L \sigma = \sigma$$

δ_L désignant la dérivée de Lie associée à la dérivation δ .

On en tire immédiatement [G.R.(23.27)] :

(2.24) $$\boxed{\delta_L[\sigma^{-1}] = -\sigma^{-1}}$$

et, en introduisant la forme de Poisson τ:

(2.25) $$\boxed{\delta_L \tau = -\tau} \qquad (\delta x = \text{potentiel-vecteur})$$

Les potentiels vecteurs forment une <u>famille invariante</u> [G.R.(15.9)], ce qui implique que l'imege d'un potentiel vecteur par un glissement canonique est un potentiel vecteur .

(2.26) Par définition, <u>un glissement canonique/infinitésimal</u> de V est un champ de vecteurs(que nous supposerons infiniment différentiable) $[x \to f(x)]$ tel que la transformation e^{tf} [G.R.(22.9)] soit un glissement(canonique) pour tout t ; en appliquant le théorème [G.R.(23.15)] , on voit qu'il est pour cela nécessaire et suffisant que

(2.27) $$\boxed{\delta_L \sigma = 0} \quad \text{ou} \quad \boxed{\delta_L \tau = 0}$$

en désignant par δ la dérivation [$\delta x \equiv f(x)$] ; en utilisant (2.17) et (2.22), cette condition s'écrit aussi

(2.28) $$\boxed{\nabla[\sigma(\delta x)] \equiv 0}$$

(2.29) -Nous appellerons <u>variable dynamique</u> tout champ scalaire [$x \to \alpha$] de V; par analogie avec le cas riemannien [G.R.(30.34)],

nous appellerons <u>gradient</u> d'une variable dynamique α le champ de vecteurs $x \to \text{grad } \alpha$ défini par

(2.30) $$\boxed{\delta\alpha = \sigma(\delta x)(\text{grad } \alpha)}$$ pour toute dérivation δ

Cette formule (2.30) s'écrit aussi

(2.31) $$\boxed{\sigma(\text{grad } \alpha) = -\nabla \alpha}$$

ou encore

(2.32) $$\boxed{\text{grad } \alpha = -\sigma^{-1}(\nabla \alpha)}$$

(2.33) Le théorème de Poincaré et sa réciproque [G.R.(27.24),(27.25)] appliqués à (2.28) montrent que les gradients sont des glissements infinitésimaux ; réciproquement, que tout glissement infinitésimal est, localement, le gradient d'une variable dynamique α, définie à une constante additive près; l'existence de α est assurée globalement si le glissement infinitésimal est défini sur un ouvert <u>simple</u> [voir G.R.(27.31)], en particulier <u>simplement connexe</u> [G.R.(10.21)].

La comparaison de (2.21) et de (2.28) montre que la différence de deux potentiels vecteurs est un glissement infinitésimal canonique.

(2.34) Soient u et v deux variables dynamiques .

Nous appellerons <u>crochet de Poisson</u> de u et v la variable dynamique

(2.34) $[u,v]_P = \tau(\nabla u)(\nabla v)$ $= \nabla u \cdot \sigma^{-1}(\nabla v)$ $= -\nabla u \cdot \operatorname{grad} v$

τ étant la forme de Poisson (2.20).

On vérifie immédiatement les formules

(2.35) $[u,v]_P = -[\nabla u](\operatorname{grad} v) = [\nabla v](\operatorname{grad} u) = \sigma(\operatorname{grad} u)(\operatorname{grad} v)$

et

(2.36) $[u,v]_P + [v,u]_P = 0$

(2.37) $[u,v+w]_P = [u,v]_P + [u,w]_P$

(2.38) $[u,vw]_P = [u,v]_P \times w + [u,w]_P \times v$

(2.39) $[u,f(v)]_P = f'(v)\ [u,v]_P$ $\quad f(v)$ valeurs réelles

(2.40) $v = \text{Cte} \Rightarrow [u,v]_P = 0$

Pour dériver un crochet de Poisson, il suffit de prendre la dérivée de Lie de la définition (2.34); en utilisant [G.R.(23.24) et (27.23)] il vient

(2.41) $\delta[u,v]_P = [\delta u,v]_P + [u,\delta v]_P + [\delta_L \tau]\ (\nabla u)(\nabla v)$

En particulier, (2.27) montre que :

(2.42) Si $[x \mapsto \delta x]$ est un glissement canonique infinitésimal, on a

$$\delta[u,v]_P = [\delta u,v]_P + [u,\delta v]_P$$

En appliquant cette formule au glissement infinitésimal $\delta x = \operatorname{grad} w$ (th.(2.33)), d'où $\delta\alpha = [w,\alpha]_P$ pour toute variable dynamique α, on trouve <u>l'identité de Jacobi</u>

(2.43) $$\boxed{[w, [u,v]] = [[w,u] ,v] + [u,[w,v]]}$$

qui s'écrit aussi(compte tenu de l'antisymétrie(2.36)) :

(2.44) $$\boxed{[[u,v], w] + [[v, w],u]+[[w,u],v] = 0}$$

nous avons sous-entendu l'indice P dans ces deux formules.

-De même, la comparaison de (2.25) et (2.41) montre que:

Si δx est un potentiel-vecteur , on a

(2.45) $$\boxed{\delta[u,v]_P = [\delta u,v]_P + [u,\delta v]_P - [u,v]_P}$$

-Le crochet de Lie de deux glissements infinitésimaux grad u($\equiv\delta x$) et grad v se calcule aisément grâce aux formules [G.R(23.8),(23.21), (23.27),(23.23),(27.23),(23.11),(27.11)]; il vient

$$[\text{grad } u , \text{grad } v]_L = \delta_L[\text{grad } v] = - \delta_L[\sigma^{-1}(\nabla v)] = - \sigma^{-1}(\delta_L \nabla v)$$

$$= - \sigma^{-1}(\nabla \delta v) = - \sigma^{-1}(\nabla[\nabla v . \text{grad } u])$$

$$= - \sigma^{-1} (\nabla [u,v]_P)$$

d'où

(2.46) $$\boxed{[\text{grad } u , \text{grad } v]_L = \text{grad } [u,v]_P}$$

(2.47) Il résulte des formules ci-dessus que les variables dynamiques définies sur un ouvert Ω,munies du crochet de Poisson, forment une <u>algèbre de Lie</u> , de dimension infinie , que nous interpréterons plus loin (4.26); les glissements infinitésimaux sur Ω forment aussi une algèbre de Lie (pour le crochet de Lie); si Ω est simplement connexe, elle est isomorphe à <u>l'algèbre adjointe</u> de la précedente.

Exercices.Etablir les résultats suivants:

-Si V est un potentiel-vecteur, et δx = grad u un glissement infinitésimal, on a

(2.48) $$\delta_L V = \text{grad}\,[u - \nabla u.V]$$

si l'on pose alors , λ désignant une constante

(2.49) $$\{u,v\} = [u - \nabla u.V] \times v + \lambda\,[u,v]_P,$$

on a

(2.50) $$\{1,v\} = v$$

(2.51) $$\{u,\{v,w\}\} - \{v,\{u,w\}\} = \lambda\{[u,v]_P\ ,w\}$$

-Soit V un vecteur quelconque.Alors

(2.52) $$\sigma^{[\Lambda^p]}\,(V) = p\ \sigma^{[\Lambda^{p-1}]}\ \Lambda\,[\sigma(V)]$$

(on désigne par $\omega^{[\Lambda^p]}$ la puissance extérieure p-ième d'une forme ω; utiliser [G.R.(26.42)]);

(2.53) $$[-1]^{\frac{n(n-1)}{2}}\ [n-1]\ !\ \text{vol}(V) = \sigma^{[\Lambda^{n-1}]}\ \Lambda\,\sigma(V)$$

-Soient u et v deux variables dynamiques; alors

(2.54) $$\nabla[\text{vol}(u\ \text{grad}\ v)] = [v,u]_P\ \ \text{vol}$$

(cette dernière formule permet d'interpréter le crochet de Poisson $[v,u]_P$ comme la divergence du vecteur u × grad v pour la forme de Liouville "vol" [voir G.R.(30.35)].

§ 3 : CONSTRUCTION DE VARIETES CANONIQUES.

Théorème:

Soit F un champ de vecteurs infiniment différentiable de R^n , tel que

$$\diamondsuit \quad \begin{cases} F(0) = 0 \\ D(F)(0) = 1_{R^n} \end{cases} \qquad (=\text{matrice unité d'ordre } n)$$

(3.1) Alors il existe un difféomorphisme A $(A \in C^\infty(R^n))$ tel que $A(0) = 0$ et que l'image par A du champ F coïncide avec le champ $X \to X$ dans un voisinage de 0.

Nous allons montrer que l'on peut prendre

(3.2) $$\boxed{A(x) = \lim_{t \to +\infty} e^t \, [e^{-tF}(X)]}$$

où la notation exponentielle e^{sF} $[s \in R]$ désigne l'opérateur résolvant l'équation différentielle $\frac{dX}{ds} = F(X)$ [G.R.(22.9)].

Pour montrer que la limite (3.2) existe , posons

(3.3) $$H(u,Y) = \int_0^1 [1-\mu] D^2(F) \, (\mu u Y)(Y)(Y) \, d\mu \quad [\text{voir G.R.}(18.11)];$$

$H(u,Y)$ est une fonction infiniment différentiable au voisinage de l'origine de R^{n+1} ; appelons $A_u(X)$ la valeur de la solution Y de l'équation différentielle

$$\frac{dY}{du} = H(u,Y)$$

avec la condition initiale

$$Y = X \quad \text{pour} \quad u = 1$$

Si l'on pose

(3.4) $$\Phi \begin{pmatrix} u \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ H(u,Y) \end{pmatrix}$$

la définition de $A_u(X)$ peut s'écrire

$$\begin{pmatrix} u \\ A_u(X) \end{pmatrix} = e^{[u-1]\Phi} \begin{pmatrix} 1 \\ X \end{pmatrix} ; \tag{3.5}$$

comme Φ est infiniment différentiable en $\binom{u}{X}$, il en est de même de $A_u(X)$ [G.R.(22.25)] ; d'autre part la bi-linéarité de $D^2(F)(X)$ montre qu'il existe un voisinage de l'origine où H vérifie une inégalité

$$|H(u,Y)| < a\,|Y|^2 \qquad (a > 0) ; \tag{3.6}$$

on en déduit l'existence d'un voisinage de l'origine où $A_0(X)$ existe et vérifie une inégalité

$$|X - A_0(X)| < b\,|X|^2 \quad (b > 0) ; \tag{3.7}$$

A_0 est infiniment différentiable ;(3.7) montre que

$$D(A_0)(0) = 1_{R^n} , \tag{3.8}$$

donc que A_0 est régulier dans un voisinage de l'origine ; donc $A_0 \in C^\infty(R^n)$.

-D'autre part, si l'on intègre deux fois par parties la formule(3.6), compte tenu des relations (3.1 ✧) , on trouve la formule

$$F(uY) = uX + u^2\,H(u,Y) \tag{3.9}$$

qui est d'ailleurs un cas particulier de la formule de Taylor . En portant dans l'équation différentielle qui définit $A_u(X)$, on en tire

$$u\,A_u(X) = e^{\mathrm{Log}(u)\,F}(X) \tag{3.10}$$

d'où en posant $u = e^{-t}$

$$A_0(X) = \lim_{u\to 0} A_u(X) = \lim_{t\to\infty} e^t[e^{-tF}(X)] \tag{3.11}$$

ce qui montre l'existence de la limite (3.2) , avec $A = A_0$.

Enfin la dérivation de (3.10) donne [voir G.R.(22.31)]:

$$u\ D(A_u)(X)(F(X)) = F(u\ A_u(X))$$

soit grâce à (3.9) :

$$D(A_u)(X)(F(X)) = A_u(X) + u\ H(u, A_u(X))$$

le premier membre est continu pour $u = 0$; il vient donc

$$D(A_o)(X)(F(X)) = A_o(X)$$

ce qui exprime bien que l'image du D-champ $[X \to F(X)]$ par A est le champ $[X \to X]$ [G.R.(15.2)] .

C.Q.F.D.

Nous allons utiliser ce théorème comme lemme pour établir le résultat suivant:

(3.12) Soit V une variété séparée, C^∞ , sur laquelle est défini un champ infiniment différentiable de 2-formes $[X \to \sigma]$ tel que, en tout point:

$$\diamondsuit \quad \begin{cases} \sigma \text{ est régulière} \\ \nabla\sigma = 0 \end{cases}$$

Alors V possède une structure de variété canonique, telle que σ soit sa forme de Lagrange .

Le théorème (1.2) montre que la dimension de V est paire; appelons-là 2n.

Soit X_o un point de V; il existe une carte Φ de V telle que $\Phi(0) = X_o$ [G.R.(19.6 a)]; soit $x \to \hat{\sigma}$ l'image réciproque de $[X \to \sigma]$ par Φ ; ce champ est défini dans un voisinage de l'origine de R^{2n}; il vérifie identiquement [(th.G.R.(27.17)] :

$$\nabla \hat{\sigma} = 0$$

La réciproque du théorème de Poincaré montre qu'il existe un champ de covecteurs [x→p] tel que, dans un voisinage de l'origine

$$\nabla p = \hat{\sigma}$$

c'est à dire [G.R.(27.10)]:

$$\heartsuit \qquad \partial_j p_k - \partial_k p_j = \hat{\sigma}_{jk}$$

En changeant p_j en $p_j + \partial_j \alpha$ (α étant un polynôme du second degré en les x^j) on peut obtenir , <u>au point 0,</u> les relations

$$p_j = 0$$

$$\partial_j p_k + \partial_k p_j = 0$$

sans modifier $\heartsuit$.

Il en résulte que le champ $F[x \to 2\sigma^{-1}(p)]$ vérifie les conditions du théorème (3.1); il existe donc un difféomorphisme A conservant l'origine tel que l'image de F par A soit le champ [x→x]; en désignant par $\tilde{x} \to \tilde{p}$, $\tilde{\sigma}$ les images de p et $\hat{\sigma}$ par A , on a :

$$\clubsuit \qquad \nabla \tilde{p} = \tilde{\sigma}, \quad \text{d'où} \quad \nabla \tilde{\sigma} = 0$$

et

$$\spadesuit \qquad 2\,\tilde{\sigma}^{-1}(\tilde{p}) = \tilde{x}$$

de $\clubsuit$ et $\spadesuit$, il résulte

$$\frac{1}{2} \nabla [\tilde{\sigma}(\tilde{x})] = \tilde{\sigma}$$

soit en développant

$$\tilde{x}^m \partial_m \tilde{\sigma}_{jk} = 0$$

ce qui montre que les $\tilde{\sigma}jk$ sont constants sur les demi-droites issues de l'origine ; ils gardent donc(dans un voisinage ouvert convexe Ω de 0) leurs valeurs au point 0.Il existe donc une base canonique S,constante,

(ici, S est une matrice) telle que l'on ait dans Ω :

$$\tilde{\sigma}\,(d\tilde{x})(\delta\tilde{x}) = \sigma\,(S^{-1}.\,d\tilde{x})\,(S^{-1}.\,\delta\tilde{x})$$

σ désignant la 2-forme canonique (1.3. ∇).

Il en résulte que $F_{X_o} = \Phi.\,A^{-1}\,.\,1_\Omega\,.S$ est un difféomorphisme d'un ouvert de R^{2n} dans V, vérifiant $F_{X_o}(o) = X_o$, et que l'image du champ constant de R^{2n} $[x \to \sigma]$ par F_{X_o} est le champ donné $[X \to \sigma]$ de V ;

Il en résulte que l'ensemble des F_{X_o}, lorsque X_o parcourt V, forme un atlas canonique de V (2.8)

C.Q.F.D.

(3.13) -Ce théorème est une réciproque de la proposition (2.10); il montre que la condition $\nabla\sigma = 0$ est nécessaire et suffisante pour qu'une variété symplectique soit plate (cette condition joue donc le même rôle que la nullité du tenseur de Riemann-Christoffel pour une variété riemannienne).

(3.14) Exercice. Soient V_1 et V_2 deux variétés canoniques; on désigne par $[X_1 \to \sigma]$ et $[X_2 \to \sigma_2]$ leurs formes de Lagrange respectives, par λ_1 et λ_2 deux constantes non nulles .

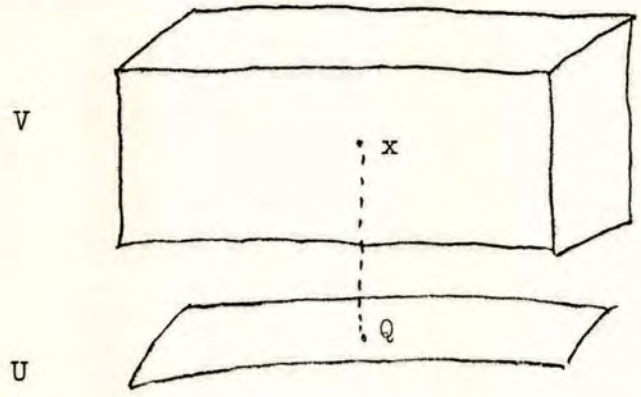
Montrer que le produit direct $V = V_1 \times V_2$ possède une structure de variété canonique , caractérisée par la forme de Lagrange σ :

$$\sigma\begin{pmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta X_1 \\ \delta X_2 \end{pmatrix} \equiv \lambda_1\ \sigma_1(dX_1)(\delta X_1) + \lambda_2\,\sigma_2(dX_2)(\delta X_2)$$

-On suppose maintenant que $V_2 = V_1$, que $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$; soit A un glissement canonique de V_1 .

Montrer que le graphe de A est une variété plongée dans V, dont l'espace vectoriel tangent est en tout point isotrope maximal. Peut-on formuler une réciproque intéressante ?

Espaces de phases.



Soit U une variété C^∞, de dimension n.

On appelle phase de U tout couple

(3.15) $$x = \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix}$$

d'un point Q de U et d'un covecteur P tangent à U en Q.

L'ensemble V des phases de U ("l'espace de phases" de U) possède diverses structures intéressantes :

(3.16) V est un espace fibré de base U, noté U^{D*} [voir G.R.(12.7) et (24.39)].

(3.17) - V peut être muni d'une structure de variété de classe C^∞ de dimension 2n [G.R.(2030)]; la projection [$x \to Q$] est infiniment différentiable [G.R.(20.32)].

Nous allons définir une troisième structure sur V(3.27).On remarque en effet qu'on peut faire correspondre à toute phase $x = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ l'image réciproque par la projection $[x \to Q]$ du covecteur P, que nous noterons p [G.R.(25.33)] ; on définit ainsi un champ

(3.18) $$x \to p$$

de covecteurs de V , par la relation

(3.19) $$p.dx = P.dQ \qquad \text{pour toute dérivation d}$$

-Choisissons une carte de U :

(3.20) $$\begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \\ \cdots \\ q^n \end{pmatrix} \longrightarrow Q$$

Si l'on désigne par

(3.21) $$[p_1 \quad p_2 \quad \cdots\cdots p_n]$$

la ligne qui réprésente un covecteur P dans la carte (3.20), ce qui signifie que

(3.22) $$p \cdot dx = P \cdot dQ = \sum_{j=1}^{n} p_j \, dq^j$$

la correspondance

(3.23) $$\begin{pmatrix} p_1 \\ \cdots \\ p_n \\ q^1 \\ \cdots \\ q^n \end{pmatrix} \longrightarrow x$$

sera une carte de l'espace de phases [G.R.(20.31)],que nous appellerons carte associée à la carte (3.20) de U.

La formule (3.22) nous montre que le champ $[x \to p]$ est infiniment différentiable, et que si l'on pose

(3.25) $$\boxed{\sigma = \nabla p}$$

on aura [cf. G.R.(27.6)] :

(3.26) $$\boxed{\sigma(dx)(\delta x) = \sum_j dp_j \cdot \delta q^j - \delta p_j \cdot dq^j}$$

Théorème:

(3.27) -L'espace de phase d'une variété U possède une structure de variété canonique, dont la forme de Lagrange σ est donnée par (3.19) et (3.25).

-Si on se donne un atlas F_j de U, l'ensemble des cartes associées aux F_j (3.23) est un atlas canonique de V.

En effet, (3.26) montre que la forme σ (3.25) est l'image par la carte (3.23) de la forme σ(1.3) de R^{2n} ; il est clair d'autre part que les cartes associées à un atlas de U forment bien un atlas de V.

C.Q.F.D.

(3.28) Tout espace de phases est potentiel ; en effet , (3.25) montre que p est un potentiel-covecteur (2.18), qui est défini sur V toute entière .

(3.29) Le potentiel-vecteur associé, $\delta x = \sigma^{-1}(p)$ (voir (2.21)) se calcule au moyen de (3.22) et (3.26) ; on trouve $\delta p_j = p_j$, $\delta q^j = 0$; d'où , globalement :

$$\delta P = P \quad , \quad \delta Q = 0$$

C'est un vecteur vertical [G.R.(20.33)]

-En appliquant les définitions (2.31) et (2.35) , on trouve immédiatement les formules

(3.30) $$\boxed{[dx = \text{grad } u] \iff [dq^j = \frac{\partial u}{\partial p_j} \ , \ dp_j = -\frac{\partial u}{\partial q^j}]}$$

(3.31) $$[u,v]_P = \sum_j \frac{\partial u}{\partial p_j}\frac{\partial v}{\partial q^j} - \frac{\partial u}{\partial q^j}\frac{\partial v}{\partial p_j}$$

cette dernière formule est la définition classique du crochet de Poisson (1).

-Soit A un difféomorphisme de U, c'est à dire un glissement de U pourvue de sa structure de variété de classe C^∞ [G.R.(19.17)].

On sait que A se "relève" dans l'espace fibré V par une application régulière $\tilde{A}$, définie par

(3.32) $$\tilde{A}\binom{Q}{P} = \begin{pmatrix} A(Q) \\ P.D(A)(Q)^{-1} \end{pmatrix}$$

[voir G.R.(12.7) et (24.39)].

Si l'on pose

$$\tilde{A}\binom{Q}{P} \equiv \binom{Q^*}{P^*}$$

on constate que $P^*.dQ^* = P.dQ$, ce qui peut s'interpréter en disant que $\tilde{A}$ <u>invarie</u> le champ $[x \to p]$ (3.18) ; il invarie donc aussi le champ $[x \to \nabla p]$;d'où le théorème :

(3.33) Si A est un difféomorphisme d'une variété U, son <u>relèvement</u> $\tilde{A}$ défini par (3.32) est un <u>glissement canonique</u> de l'espace de phase , qui invarie le champ $[x \to p]$.

Théorème:

Soit F un champ de vecteurs infiniment différentiable d'une variété U.

---

(1)On choisit souvent un signe opposé , dans cette formule ainsi que dans celle des "crochets de Lagrange" (3.26) .Le choix qui est fait ici évite un signe - dans la formule (3.25)

(3.34) Il existe un champ de vecteurs $[x \to \delta x]$ de l'espace de phase V de U caractérisé par les relations

$$\Diamond \quad \begin{cases} \delta_L p = 0 \\ \delta Q = F(Q) \end{cases} \qquad \text{pour tout } x = \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} \text{ tel que } Q \in \text{def } (F)$$

-δx est un <u>glissement canonique infinitésimal de</u> V, que nous appellerons <u>relèvement</u> du champ de vecteurs F.

-Si α désigne la variable dynamique $P.F(Q)$, on a

$$\delta x = \text{grad } \alpha$$

En effet, la formule magique (2.22) montre que les conditions $\Diamond$ entra\^inent

$$\nabla p(\delta x) = - \nabla[p(\delta x)] = - \nabla[P.\delta Q], \text{ d'où}$$

$$\sigma(\delta x) = - \nabla\alpha, \text{ ou encore } \delta x = \text{grad } \alpha \text{ (définition (2.31)).}$$

Il en résulte que δx est un glissement infinitésimal (proposition (2.33)). Réciproquement le vecteur $\delta x = \text{grad } \alpha$ vérifie bien $\Diamond$.

C.Q.F.D.

(3.35) <u>Exercice:</u> Si Φ désigne le champ $x \to \delta x$ défini en (3.34), montrer que pour tout t, $e^{t\Phi}$ est le relèvement $\widetilde{e^{tF}}$ de e^{tF} (notation (3.32)).

Variétés symplectiques de dimension impaire .

Soit V une variété (séparée, de classe C^∞) sur laquelle est défini un champ infiniment différentiable de 2-formes , $[x \to \sigma]$, tel que , en tout point :

(3.36)
$$\begin{cases} \dim\ (\text{noy}\ (\sigma)\ ) = 1 \\ \nabla\, \sigma = 0 \end{cases}$$

Sur un sous-espace vectoriel supplémentaire du noyau de σ , σ est régulière ; le théorème (1.2) nous montre donc que la dimension de V est impaire ; notons là $2n+1$.

Désignons, en chaque point x de V , par $\varphi(x)$ le noyau de σ ;
(3.37) nous appellerons caractéristiques de V les lignes de forces du champ φ.

Théorème :

Supposons réalisées les conditions (3.36) et supposons que la variété V soit évolutive pour le champ φ(3.37) .

Alors σ est un invariant intégral de ce champ ; si l'on désigne par $\hat{x}$
(3.38) la caractéristique maximale qui passe par un point x de V , l'ensemble $\hat{V}$ des caractéristiques possède une structure de variété canonique de dimension 2n, définie par :

◇ { la projection $[x \to \hat{x}]$ est infiniment différentiable ;
l'image réciproque par cette projection de la forme de Lagrange $\hat{\sigma}$ de $\hat{V}$ est la forme σ .

En effet, les conditions $\varphi(x) = \text{noyau}(\sigma)$, $\nabla\sigma = 0$ montrent bien que σ est un invariant intégral (theorème (0.12), formule ♡); les théorèmes (0.17),(0.21) et (0.22) montrent que l'ensemble $\hat{V}$ des caractéristiques est une variété de classe C^∞ , de dimension $2n$, et que σ est l'image réciproque d'une 2-forme $\hat{\sigma}$ de $\hat{V}$ par la projection $[x \to \hat{x}]$; la commutation de la dérivation extérieure et de l'image réciproque [G.R.(27.17)] montre $\nabla\hat{\sigma} = 0$; on voit facilement que $[\delta\hat{x} \in \text{noyau } (\hat{\sigma})] \iff [\delta x \in \text{noyau } (\sigma)] \iff [\delta\hat{x}=0]$, donc que $\hat{\sigma}$ est régulière ; le théorème (3.12) montre que $\hat{V}$ est une variété canonique , admettant $\hat{\sigma}$ comme forme de Lagrange .

C.Q.F.D.

Exercice :

Montrer que les conditions (3.36) entraînent l'existence d'un atlas de V, formé de cartes dans lesquelles les composantes de la forme σ sont

(3.39)
$$\sigma_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j+n \ , \ j \leq n \\ -1 & \text{si } k = j-n \ , \ k \leq n \\ 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases}$$

donc que V est <u>plate</u> .

§ 4 : ESPACES FIBRES QUANTIFIANTS (1)

Espaces quantifiants.

Théorème, définition:

(4.1) Soit $\mathcal{V}$ une variété séparée, C^∞, sur laquelle est défini un champ infiniment différentiable $[\xi \to \varpi]$ de 1-formes, tel que, en tout point:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dim (\text{noyau } (\nabla\varpi)) = 1 \\ \varpi \text{ n'est pas nul sur noyau } (\nabla\varpi); \\ \text{les caractéristiques}(2) \text{ maximales du champ } [\xi \to \text{noyau}(\nabla\varpi)]] \\ \quad \text{sont des courbes fermées } (3). \end{cases}$$

Si l'on désigne par $\hat{\xi}$ la caractéristique fermée qui passe par ξ et par h l'intégrale $\left|\int_{\hat{\xi}} \varpi\right|$, h est constant lorsque ξ parcourt une composante connexe de $\mathcal{V}$.

Nous dirons que $\mathcal{V}$ est un espace quantifiant, si pour tout ξ, h est égal à la constante de Planck. La forme ϖ s'appellera forme fondamentale de $\mathcal{V}$.

En effet, si l'on applique la formule

$$\delta \int_c \alpha = \int_{c\nabla} \alpha\,(\delta\xi) + \int_c [\nabla\alpha]\,(\delta\xi)$$

[G.R.(31.48)] qui donne la dérivée de l'intégrale sur une chaîne C

---

(1) Nous utilisons ici le mot "quantification" pour désigner un certain formalisme purement mathématique; c'est au chapitre III ci-dessous que nous indiquerons comment cette notion peut s'utiliser pour "quantifier" les systèmes dynamiques.

(2) Ou lignes de forces ; voir (3.37).

(3) C'est à dire homéomorphes à un cercle.

(de bord $C\mathcal{V}$) d'une forme α , lorsqu'on fait varier la chaîne seule , on trouve $\delta h = 0$, puisque le bord de la chaîne associée à la courbe $\hat{\xi}$ (par une orientation arbitraire) est nul , et que la 1-forme $[\nabla\varpi]\ (\delta\xi)$ est nulle sur cette chaîne ; donc $\nabla h = 0$; h est bien constant sur chaque composante connexe de $\mathcal{V}$[G.R.(27.29)]

C.Q.F.D.

(4.2) La définition ci-dessus des espaces quantifiants pose un problème d'analyse dimensionelle : la valeur de la constante de Planck est $2\pi\hbar$, avec $\hbar = 1{,}0544\ 10^{-27}$ g $\otimes$ cm^2 $\otimes$ sec^{-1} : on doit donc supposer que ϖ est une forme à valeurs dans l'espace vectoriel de dimension 1 des <u>actions</u> (= grandeurs mesurables de dimension $M\ L^2\ T^{-1}$) ; on peut aussi adopter des unités de mesure telles que $\hbar = 1$ (c'est le cas des unités quantiques habituelles , dans lesquelles la vitesse de la lumière est aussi égale à 1) et adopter la valeur 2π pour la circulation de ϖ sur les caractéristiques .

Pratiquement, dans la suite de ce paragraphe,il suffira de considérer h comme une constante donnée ; nous continuerons à poser $\hbar = h/2\pi$.

Théorème :

(4.3) Soit $\mathcal{V}$ un espace quantifiant ; soit ϖ sa forme fondamentale ,

a)Il existe un champ de vecteurs f,infiniment différentiable sur $\mathcal{V}$, défini par :

(4.3) $\heartsuit$ $\begin{cases} f(\xi) \in \text{noyau}(\nabla\varpi) \\ \varpi.f(\xi) = 1 \end{cases}$ pour tout ξ

b) L'application

$$t \to e^{tf}(\xi)$$

est, pour tout ξ, une fonction périodique de période h, dont l'ensemble de valeurs est la caractéristique $\hat{\xi}$ passant par ξ.

c) $\mathcal{V}$ est une variété évolutive pour le champ $[\xi \to \text{noyau}(\nabla\varpi)]$.

Les hypothèses (4.1 $\diamondsuit$) montrent que les conditions (4.3$\heartsuit$) définissent bien un champ de vecteurs f ; puisque ϖ , et par conséquent $\nabla\varpi$ sont infiniment différentiables, il en est de même du champ f (on peut le vérifier par exemple en étudiant les composantes de f dans une carte) ; puisque $f(\xi) \in$ noyau $(\nabla\varpi)$, l'application $t \to e^{tf}(\xi)$ prend ses valeurs dans la caractéristique $\hat{\xi}$; comme celle -ci est homéomorphe à un cercle et que le champ f ne s'y annule pas , on voit que , pour chaque ξ, l'application $t \to e^{tf}(\xi)$ est une application périodique de R sur $\hat{\xi}$; soit ω sa période ; en calculant l'intégrale $\int_{\hat{\xi}} \varpi$ à l'aide du paramètre t , il vient

$$h = \int_{\hat{\xi}} \varpi = \int_0^{\omega} \varpi \, \frac{d\xi}{dt} \, dt = \int_0^{\omega} \varpi . f(\xi) \, dt = \int_0^{\omega} dt$$

par suite ω est bien constante et égale à h .

-Si l'on choisit une hypersurface Γ, non tangente à $f(\xi)$, et si l'on définit un champ $\xi \to t$ par $[e^{-tf}(\xi) \in \Gamma, |t| < h/2]$ on constate que t est un champ paramétrisant (0.14) ; il en résulte immédiatement que $\mathcal{V}$ est évolutive (0.15).

C.Q.F.D.

-Il résulte de ce théorème que l'ensemble G des e^{tf} est un groupe de permutations de U, et que l'on a

$$[e^{tf} = e^{t'f}] \iff [e^{t/i\hbar} = e^{t'/i\hbar}]$$

donc que ce groupe est isomorphe au groupe multiplicatif T des nombres complexes de module 1 .

Nous désignerons par $\hat{z}$ l'élément de G correspondant au nombre complexe z (de module 1) par cet isomorphisme ; on aura donc

(4.4)
$$\begin{cases} [e^{\frac{t}{i\hbar}} = z] \iff [\hat{z} = e^{tf}] & [\forall\, t \in R] \\ \widehat{z.z'} = \hat{z}.\hat{z}' & [\forall z, z' \in T] \end{cases}$$

Théorème :

Soit U un espace quantifiant.

Soit $\mathcal{R}$ l'ensemble des difféomorphismes A de U tels que

$$\begin{cases} A \text{ invarie la forme fondamentale } [x \to \varpi] \\ \text{def } (A) \text{ est une réunion de caractéristiques .} \end{cases}$$

-$\mathcal{R}$ est un <u>recueil</u>, dont les éléments commutent avec les éléments du groupe G des $\hat{z}$.

(4.5)

U possède donc une structure d'<u>espace fibré principal</u> [G.R.(9.1)] de recueil $\mathcal{R}$, de groupe principal G, dont les fibres sont les caractéristiques $\hat{\xi}$.

-La <u>base</u> de cet espace fibré est la variété canonique $\hat{U}$ des caractéristiques (th.(3.38)), munie du recueil de ses glissements canoniques.

Soit A un élément de $\mathcal{R}$, ξ un point de def(A) .Puisque def(A) est une réunion de caractéristiques, on a pour tout t réel

♤ $\quad \therefore e^{tf}(\xi) \in \mathrm{def}(A)$

Puisque A invarie le champ $[\xi \to \varpi]$, A invarie aussi le champ $[\xi \to \nabla\varpi]$, et par conséquent le champ f qui est défini à l'aide de $\overset{*}{\varpi}$ et $\nabla\varpi$ (4.3♡) ; si donc on pose $\xi^* = A(e^{tf}(\xi_o))$, on aura pour tout t (grâce à ♤) $\frac{d\xi^*}{dt} = f(\xi^*)$, d'où $\xi^* = e^{tf}(\xi^*_o) = e^{tf}(A(\xi_o))$; d'où $A.e^{tf} = e^{tf}.A$; les éléments de $\mathcal{R}$ commutent avec ceux de G . Réciproquement, on vérifie immédiatement que les difféomorphismes qui invarient le champ $[\xi \to \dot{\varpi}]$ et qui commutent avec les éléments de G appartiennent à $\mathcal{R}$; $\mathcal{R}$ est donc le <u>commutant</u> de G dans le recueil [G.R.(15.12)] des difféomorphismes qui invarient le champ $[\xi \to \varpi]$ $\mathcal{R}$ est donc un recueil [G.R.(9.3)], qui fait de U un espace fibré principal, dont les fibres sont les orbites[1] de G, c'est à dire les caractéristiques.

Désignons par P la projection $\xi \to \hat{\xi}$; pour tout $A \in \mathcal{R}$, le transmuté $\hat{A}$ de A par la projection P est défini par

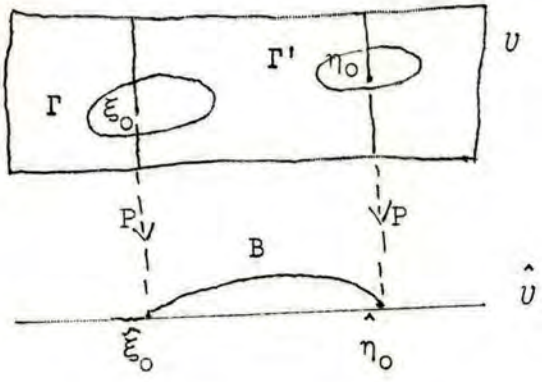
$$\hat{A}(\hat{\xi}) = \overbrace{A(\xi)} \qquad [\forall\, \xi \in \mathrm{def}(A)]$$

et vérifie $\quad P.A = \hat{A}.P$ [G.R.(6.11),(6.10)]

([1]) Orbite = classe de transitivité

Si l'on pose d'autre part , $\nabla\varpi \equiv \sigma$, on sait que U est une variété évolutive pour le champ [$\xi \to$ noyau (σ)] (th.(4.3 c)) , donc que l'ensemble $\hat{U}$ des caractéristiques possède une structure de variété canonique , telleque la projection P soit infiniment différentiable et que le champ [$\xi \to \sigma$] soit l'image réciproque par P du champ de Lagrange [$\hat{\xi} \to \hat{\sigma}$] de $\hat{U}$ (th.(3.38)); la formule ci-dessus P.A = $\hat{A}$.P montre donc que l'image réciproque par $\hat{A}$ de $\hat{\sigma}$ est une restriction de $\hat{\sigma}$ [G.R.(25.48)], donc que $\hat{A}$ invarie la forme de Lagrange , donc que $\hat{A}$ est un glissement canonique de U (ci-dessus (2.11)) .

Réciproquement, soit B un glissement canonique de $\hat{U}$, ξ_o un point de U tel que $\hat{\xi}_o \in$ def(B), η_o un point de U tel que $\hat{\eta}_o = B(\hat{\xi}_o)$



Choisissons un champ paramétrisant [$\xi \to \theta$] au voisinage de ξ_o ; la variété θ = Cte qui passe par ξ_o est une <u>section</u> Γ de l'espace fibré U , ce qui signifie que Γ ne rencontre aucune caractéristique en plus d'un point et que la restriction $P.1_\Gamma$ de P à Γ est difféomorphisme de Γ sur un

ouvert de $\hat{\mathcal{V}}$ contenant $\hat{\xi}_o$ (cf.(0.17)) .On construit de même une section Γ' passant par η_o .

Posons

$$A_o = [P.1_{\Gamma'}]^{-1} .B.P.1_{\Gamma}$$

A_o est un difféomorphisme d'un ouvert de Γ sur un ouvert de Γ', qui vérifie

$$\begin{cases} A_o(\xi_o) = \eta_o \\ P.A_o < B.P \end{cases}$$

Du fait que les applications $t \to e^{tf}(\xi)$ ont toutes la période h , on déduit l'existence d'un prolongement unique A_1 de A_o qui commute avec tous les e^{tf} ; on constate que A_1 est un difféomorphisme de $\mathcal{V}$, que $A_1(\xi_o) = \eta_o$, et que $P.A_1 < B.P$, d'où l'on déduit que A_1 invarie le champ $\xi \to \sigma$ (puisque B invarie $\hat{\xi} \to \hat{\sigma}$) . D'autre part, du fait que A_1 commute avec les e^{tf}, on déduit que A_1 invarie le champ f [on peut utiliser à cet effet G.R.(22.15)] .

Soit $[\xi \to \varpi_1]$ l'image de $[\xi \to \varpi]$ par A_1 ; puisque A_1 invarie σ , on voit que $\nabla \ddot{\varpi}_1 = \nabla \ddot{\varpi}$, donc qu'il existe un champ scalaire $[\xi \to u]$, défini au voisinage de ξ_o, tel que $\varpi_1 - \varpi = \nabla u$ (réciproque du théorème de Poincaré); du fait que A_1 invarie f, on tire $\dot{\varpi}_1.f(\xi) \equiv 1$ (voir (4.3 ♡)) , d'où $\nabla u.f(\xi) \equiv 0$; u est donc une intégrale première (i.e. u est constante sur les caractéristiques); ce qui permet de prolonger u sur toutes les caractéristiques qu'elle atteint en conservant les propriétés ci-dessus .

si on pose $\varphi(\xi) \equiv u\, f(\xi)$ on peut vérifier [par exemple à l'aide de G.R.(15.3),(24.39),(12.2)] que l'image du champ $[\xi \to \omega_1]$ par e^{φ} est $[\xi \to \varpi]$, et que e^{φ} commute avec les e^{tf} ;

si l'on pose

$$A = e^{\varphi} . A_1$$

on constate donc que A invarie le champ $[\xi \to \varpi]$ [G.R.(15.12)], que $P.A < B.P$ et que A commute avec les éléments de G; en utilisant la constante additive dont on dispose dans le choix de u , on peut même avoir $A(\xi_o) = \eta_o$.

Il en résulte immédiatement que le transmuté $\hat{A}$ de A par P coïncide avec B dans un voisinage de $\hat{\xi}_o$, et que A appartient au recueil $\mathcal{P}$; ainsi B est borne supérieure d'opérateurs qui peuvent se relever par des opérateurs du recueil $\mathcal{R}$; B est donc un glissement de la base [G.R.(7.6)] .

C.Q.F.D.

(4.6) -La démonstration ci-dessus montre que $\mathcal{U}$ est un <u>univers</u> fibré principal(c'est à dire que le recueil $\mathcal{R}$ y opère transitivement) ; on en déduit [G.R.(9.4)] que le groupe structural de chaque fibre coïncide avec la restriction à cette fibre du groupe principal , et qu'il est isomorphe(comme G) au groupe T (puisque G est abélien).

Exercice.

(notations (4.3),(4.5)).

Soit $\mathcal{U}$ un espace quantifiant de dimension 2n+1 .

On définit une forme ω par :

(4.7)
$$\omega = \frac{[-1]^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!} \underbrace{\varpi \wedge \nabla \varpi \wedge \ldots \wedge \nabla \varpi}_{n \text{ termes}}$$

a)Montrer que le champ $[\xi \to \omega]$ est infiniment différentiable et invariant par le recueil $\mathcal{R}$.

b)Montrer que le produit intérieur $\omega(f(\xi))$ est l'image réciproque, par la projection, de la forme de Liouville (2.12) de la base $\hat{U}$.

c)Montrer que ω ne s'annulle pas .

d)Montrer que tout champ de [2n+1]-formes de U invariant par $\mathcal{R}$ est proportionnel à ω.

e)Montrer que la propriété (b) caractérise ω .

Quantification d'une variété canonique.

Définition:

(4.8) Nous dirons qu'une variété canonique V est quantifiable, s'il existe un espace fibré quantifiant (déf.(4.1)) de base V (th.(4.5)).

Nous allons établir, pour ce problème de la quantification d'une variété canonique, un théorème d'existence et un théorème d'unicité :

Théorème:

(4.9) Toute variété canonique potentielle (définition (2.18)) est quantifiable.

Soit V une variété canonique potentielle; désignons par T le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1 ("tore") ;

soit U le produit direct $V \times T$; soit

(4.10)
$$\xi = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$$

une variable qui parcourt U ($x \in V$, $z \in T$).

Par hypothèse, il existe un potentiel-covecteur p de V (2.18) ; posons

(4.11) $$\varpi\, d\,\xi = p.dx + i\hbar\,\frac{dz}{z} \qquad [2\pi\hbar = \text{constante de Planck}]$$

Puisque, sur V, on a $\nabla p = \sigma$, on trouve :

(4.12) $$\nabla\varpi(d\xi)\ (d'\xi) = \sigma(dx)\ (d'x)$$

On voit que $[d\,\xi \in \text{noyau}\ (\nabla\varpi)] \Longleftrightarrow [dx = 0]$, que $[d\,\xi \in \text{noyau}(\nabla\varpi) \cap \text{noyau}(\varpi)] \Longleftrightarrow [d\,\xi = 0]$, donc que les conditions ◇ de la définition (4.1) sont vérifiées; il est clair que les caractéristiques sont les produits ~~d'un produit~~ d'un point dy de V par T ;

La circulation de $\overline{\omega}$ sur une de ces caractéristiques est

$$\left| \int_{x\times T} \overline{\omega} \right| = \left| i\hbar \int_T \frac{dz}{z} \right| = 2\pi\hbar = h \ ;$$

$\mathcal{U}$ est bien un espace quantifiant de forme fondamentale $\overline{\omega}$ (4.1).

Enfin il est clair que si l'on pose $P(\xi) \equiv x$, P est une application de $\mathcal{U}$ sur V , dont les fibres sont les caractéristiques, et que l'image réciproque par la projection P de la forme de Lagrange σ de V est la forme $\nabla\varpi$ (formule (4.11)) ; $\mathcal{U}$ est donc un espace fibré quantifiant de base V (th.(4.5)) .

C.Q.F.D.

*Exercice (hypothèses et notations (4.9)) :

Soit $\mathcal{A}$ un élément du recueil $\mathcal{R}$ de V × T ($\mathcal{A}$ invarie $\overline{\omega}$, def($\mathcal{A}$) est une réunion de caractéristiques); soit A son transmuté par la projection P.

(4.13) ◊ Montrer qu'il existe une application infiniment différentiable $[x \to \zeta]$ de def(A) dans T telle que

$$\begin{cases} \mathcal{A}\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} A(x) \\ \zeta \times z \end{pmatrix} \\ p^* \equiv p - i\hbar \dfrac{\nabla\zeta}{\zeta} \end{cases}$$

$[x \to p^*]$ désignant l'image réciproque du champ $[x \to p]$ par A.

-Réciproquement, A étant un glissement canonique de V, montrer que la condition suivante est nécessaire et suffisante pour que A soit relevable à l'espace fibré construit en (4.13) :

◊ Sur chaque composante connexe de def(A), les périodes [G.R.(27.32)] de la forme $p^* - p$ sont toutes des multiples entiers de la constante de Planck.

-En déduire que les glissements définis sur un ouvert simplement connexe sont relevables .

-Nous donnerons plus loin (12.17) un autre exemple de variété quantifiable.

Notons que :

(4.14) Toute partie ouverte U d'une variété canonique quantifiable V est une variété canonique quantifiable .

En effet, si $\mathcal{V}$ désigne un espace fibré quantifiant de base V, l'image réciproque de U par la projection de $\mathcal{V}$ sur V est un espace fibré quantifiant de base U .

C.Q.F.D.

Théorème:

(4.15) Soit V une variété canonique quantifiable et simple[G.R.(10.10)], en particulier simplement connexe .

Si $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}^*$ sont deux espaces fibrés quantifiants de base V , il existe un difféomorphisme F de $\mathcal{V}$ sur $\mathcal{V}^*$, qui est un isomorphisme d'espace fibré de base V [G.R.(7.10)] ; l'image réciproque par F de la forme fondamentale de $\mathcal{V}^*$ est la forme fondamentale de $\mathcal{V}$.

Soit x_o un point de V.

Dans un voisinage de x_o, on peut définir un potentiel-covecteur $[x \to p]$ de V (2.18) ; soit $\tilde{p}$ son image réciproque par la projection de $\mathcal{V}$ sur V , et ϖ la forme fondamentale de $\mathcal{V}$.

Comme $\tilde{p}$ et ϖ ont même dérivée extérieure (à savoir l'image réciproque de la forme de Lagrange de V) , si ξ_o est un point de $\mathcal{V}$ qui se projette en x_o, il existe dans un voisinage de ξ_o un champ scalaire $[\xi \to \alpha]$ tel que $\varpi - \tilde{p} = \nabla\alpha$.

$\nabla\alpha$ n'est pas nul, puisque $\tilde{p}\, f(\xi) = 0$ (notation(4.3)) , donc que $\nabla\alpha . f(\xi) = \varpi . f(\xi) = 1$.

L'équation $\alpha = \alpha_o$ (= valeur de α en ξ_o) définit donc une variété U plongée dans $\mathcal{V}$, de dimension égale à celle de V , sur laquelle ϖ et et $\tilde{p}$ coïncident [voir G.R.(25.49)]; la condition $\nabla\alpha . f(\xi) \equiv 1$ montre que l'on peut , en diminuant au besoin l'ensemble de définition de α, obtenir que cette variété U ne rencontre les caractéristiques de $\mathcal{V}$ qu'en un seul point, c'est à dire qu'elle soit une section de $\mathcal{V}$.

Alors, pour chaque ξ de $\mathcal{V}$ qui se projette dans un certain voisinage de x_o, on peut définir un champ à valeurs dans le tore T, $[\xi \to z]$, par la formule

$$\widehat{z^{-1}}(\xi) \in U \qquad \text{(notation (4.4))}$$

en dérivant, on peut en déduire la formule

(4.16)
$$\varpi . \, d\xi = p.dx + i\hbar \frac{dz}{z}$$

(comparez avec (4.11)) .

Si nous recommençons avec le second espace fibré quantifiant $\mathcal{V}^*$, nous aurons associé à chaque point ξ^* de $\mathcal{V}^*$ un couple $\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$ tel que $\varpi^* . \, d\xi^* = p\,dx + i\hbar \frac{dz}{z}$; en faisant correspondre au point ξ de $\mathcal{V}$ le point ξ^* de $\mathcal{V}^*$ associé au même couple $\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$, nous obtenons une application régulière F_o, qui applique la partie de $\mathcal{V}$ qui est au dessus d'un certain voisinage U_o de x_o sur la partie correspondante de $\mathcal{V}^*$, qui donne du champ $[\xi \to \varpi]$ l'image $[\xi^* \to \overline{\varpi}^*]$, et qui est un isomorphisme d'espace fibré de base U_o [G.R.(7.10)] .

En recommençant pour suffisamment de points x_j de V (tous par exemple), on voit que l'on peut construire des F_j ayant les mêmes propriétés au dessus d'ouverts U_j qui recouvrent V.

On vérifie immédiatement que, pour tout couple d'indices(j,k), $F_j^{-1} . F_k$ est un élément du recueil $\mathcal{R}$ de $\mathcal{V}$ (4.5 $\frac{1}{2}$), et plus précisément un <u>glissement de jauge</u>[G.R.(8.7)], défini au dessus de l'ouvert $U_j \cap U_k$; il existe un champ(à valeurs dans T) $[\xi \to z]$, tel que $F_j^{-1} . F_k(\xi) = \hat{z}(\xi)$; en écrivant que $[\xi \to \hat{z}(\xi)]$

invarie la forme fondamentale $[\xi \to \varpi]$, on constate que $\frac{\partial z}{\partial \xi} = 0$; par consèquent l'ensemble $[j,z,k]$ défini par $\{x \in [j,z,k]\} \iff \{F_j^{-1} \cdot F_k(\xi) = \hat{z}(\xi)$ si ξ se projette sur V en $x\}$ est un ouvert ; en faisant varier j,z et k, on vérifie aisément les relations $\heartsuit$ du théorème [G.R.(10.16)]; l'application du théorème [G.R.(10.17)] et la définition des espaces simples [G.R.(10.20)] montrent qu'il existe des z_j dans T tels que

$$[\, x \in U_j \cap U_k \,] \iff [F_j^{-1} \cdot F_k(\xi) = \widehat{z_j/z_k}(\xi)\,]$$

il en résulte que les opérateurs $F_j.\widehat{z_j}$ sont compatibles ; leur borne supérieure F [G.R.(1.14)] a bien les propriétés annoncées .

C.Q.F.D.

Problème de relèvement.

-Donnons nous une variété canonique quantifiable V ; soit $\mathcal{V}$ un espace fibré quantifiant de base V.

Si Ω est une partie ouverte de V, l'opérateur identique sur Ω, 1_Ω , est un glissement canonique de V ; les relèvements de tels glissements s'appellent glissements de jauge de $\mathcal{V}$ [G.R.(8.7)].

Théorème(notations précédentes) :

On obtient tous les relèvements J du glissement 1_Ω en associant un nombre complexe z_j, de module 1, à chaque composante connexe Ω_j de Ω, et en posant

(4.17) $$J(\xi) = \widehat{z_j}(\xi) \quad \text{si } \xi \text{ se projette dans } \Omega_j$$

$[\hat{z}_j$: voir (4.4)].

J, par hypothèse, doit appartenir au recueil $\mathcal{R}$ de $\mathcal{V}$, donc commuter avec les e^{tf} ; on en déduit l'existence, pour chaque ξ qui se projette dans Ω, d'un élément z du tore T tel que $J(\xi) = \hat{z}(\xi)$, et on vérifie que z ne dépend que de la projection x de ξ. En posant $\hat{z} = e^{tf}$, et en écrivant que J invarie la forme fondamentale , on voit immédiatement que $\frac{\partial t}{\partial x} = 0$; d'où le résultat énoncé (la réciproque est immédiate).

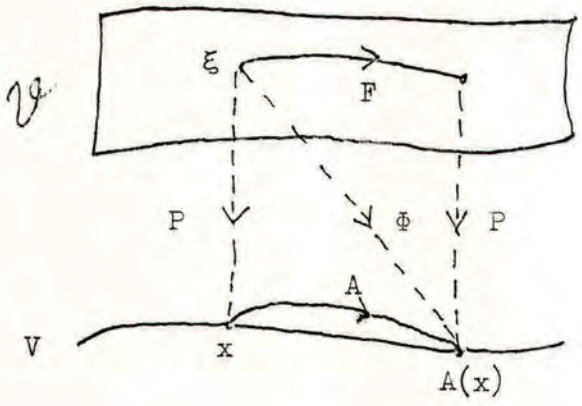
C.Q.F.D.

(4.18) - On voit que le groupe de jauge [G.R.(8.9)] est identique au groupe structural, c'est à dire isomorphe au tore T ; ce qui explique que certains glissements puissent n'être pas relevables, et que leurs relèvements soient multiples [G.R.(8.11)] .

Théorème:

(4.19) Soit $\mathcal{V}$ un espace fibré quantifiant de base V.
L'ensemble $\mathcal{G}$ des éléments du recueil $\mathcal{R}$ de $\mathcal{V}$ qui appliquent $\mathcal{V}$ sur $\mathcal{V}$ est un groupe .
L'ensemble $\hat{\mathcal{G}}$ des transmutés des éléments de $\mathcal{G}$ par la projection est le groupe de glissements canoniques globaux de V qui possèdent un relèvement.
-Si Γ désigne un groupe de glissements canoniques globaux de la base V, l'ensemble Γ_o des éléments de Γ qui possèdent un relèvement est le sous-groupe $\Gamma \cap \hat{\mathcal{G}}$.
-L'ensemble $\tilde{\Gamma}_o$ des relèvements des éléments de Γ_o est un sous-groupe de $\mathcal{G}$.
-Si V est simple, Γ_o est un sous-groupe distingué de Γ; si V est connexe, $\tilde{\Gamma}_o$ est une extension de Γ_o par le tore T .

Seule, la dernière propriété n'est pas immédiate. Pour l'établir, considérons un glissement canonique global quelconque A de V ; P désignant la projection de $\mathcal{V}$ sur V, posons $\Phi = A.P$.
On constate immédiatement que l'on donne à $\mathcal{V}$ une seconde structure d'espace fibré quantifiant de base V en remplaçant la projection P par Φ ; si V est simple , le théorème (4.15) montre qu'il existe un isomorphisme F d'espace fibré transformant la seconde structure en la première ; F est un <u>isomorphisme d'espace</u> [G.R.(7.10)] , il transmute donc en lui-même le recueil $\mathcal{R}$ (sans nécessairement appartenir à $\mathcal{R}$) [G.R.(3.2)] .



Le transmuté $P^*(F)$ de F par P est égal à A .
Par suite, si $B \in \Gamma_o$, B possède un relèvement $\tilde{B}$ tel que $P^*(\tilde{B}) = B$, $F.\tilde{B}.F^{-1}$ est un élément du recueil $\mathcal{R}$, donc de $\mathcal{G}$, on a [grâce à G.R.(6.17), (6.18)] $P^*(F.\tilde{B}.F^{-1}) = P^*(F).P^*(\tilde{B}).\overset{*}{P}(F)^{-1} = A.B.A^{-1}$, ce qui montre que $A.B.A^{-1}$ possède le relèvement $F.B.F^{-1}$ dans le recueil $\mathcal{R}$, donc que le transmuté de tout élément B de Γ_o par un élément de Γ appartient à Γ_o : Γ_o est bien distingué .

Il est clair d'autre part que P* est un homomorphisme du groupe $\tilde{\Gamma}_o$ sur le groupe Γ_o ; son noyau est l'ensemble des relèvements de l'opérateur identique 1_V , ensemble que nous avons déterminé en (4.17), et qui se réduit à G si V est connexe ; le noyau de cet homomorphisme est alors isomorphe à T ; $\tilde{\Gamma}_o$ est donc une extension de Γ_o par T(par définition du mot "extension").

C.Q.F.D.

Théorème:

(4.20) Soit V une variété canonique, $\mathcal{V}$ un espace quantifiant de base V, de forme fondamentale ϖ .

1°) Si F [$\xi \to d\xi$] est un élément infinitésimal du recueil $\mathcal{R}$ (4.5) (ce qui signifie que, pour tout t , $e^{tF} \in \mathcal{R}$), il existe une variable dynamique u, définie sur un ouvert de V, telle que

$$\Diamond \quad \begin{cases} dx \equiv \text{grad } u & [x \equiv \text{projection de } \xi] \\ \omega . d\xi \equiv u \end{cases}$$

2°)Réciproquement, si u est une variable dynamique définie sur un ouvert de V, il existe un élément infinitésimal F du recueil $\mathcal{R}$, et un seul tel que $\Diamond$.

Démonstration:

1°)Si e^{tF} appartient à $\mathcal{R}$ pour tout t , son ensemble de définition est une réunion de caractéristiques (4.5) ; la réunion de ces ensembles, à savoir def(F),est donc une réunion de caractéristiques .

D'autre part la dérivée de Lie $d_L\varpi$ est nulle [G.R.(23.15)];

si l'on pose $\varpi.d\xi = u$, la formule magique [G.R.(27.13)] donne

(4.21) $$[\nabla\varpi](d\xi) + \nabla u = 0$$

d'où, puisque le vecteur $\delta\xi = f(\xi)$ appartient au noyau de $\nabla\varpi$ (4.3),

$$0 = \nabla\varpi(\delta\xi)(d\xi) = -\nabla\varpi(d\xi)(\delta\xi) = \nabla u(\delta\xi) = \delta u$$

u est donc une intégrale première des caractéristiques , c'est à dire une fonction de x : c'est une variable dynamique de la base (2.29) .

La formule (4.21) donne alors,pour tout vecteur d'ξ :

$$d'u = -[\nabla\varpi](d\xi)(d'\xi)$$

soit,d'après (3.38 $\Diamond_V$) :

$$d'u = -\sigma(dx)(d'x)$$

σ désignant la forme de Lagrange de V ; ou encore, vu l'arbitraire de d' :

$$\nabla u = -\sigma(dx)$$

c'est à dire (cf.(2.31)) dx = grad u ; $\Diamond$ est vérifiée .

2°)Soit u une variable dynamique de V.

Si l'on prend un point ξ dont la projection x appartient à l'ensemble de définition de u, le système d'équations linéaires

(4.22) $$\begin{cases} \nabla\varpi(d\xi) = -\nabla u \\ \varpi(d\xi) = u \end{cases}$$

définit un vecteur $d\xi$ tangent à $\mathscr{D}$ en ξ ; ceci résulte aisément des conditions (4.1 $\Diamond$). On définit ainsi un champ infiniment différentiable $F[\xi \to d\xi]$; def(F) est une réunion de caractéristiques ; on vérifie immédiatement que

(4.23) $$d_L\varpi = 0$$

c'est à dire que les e^{tf} invarient le champ $[\xi \to \omega]$ [G.R.(23.15)].

D'autre part, en prenant la dérivée de Lie δ_L des formules (4.22), on trouve

$$[\nabla\omega](\delta_L\, d\xi) = 0$$

$$\varpi\,(\delta_L\, d\xi) = 0$$

d'où grâce à (4.1)

$$\delta_L\, d\xi = 0$$

Ainsi le champ de vecteurs F est invariant par les e^{tf} [G.R.(23.15)]; il en résulte que pour tout t, e^{tf} est défini sur une réunion de caractéristiques ; par consèquent e^{tF} appartient au recueil $\mathcal{R}$, F est bien un élément infinitésimal de $\mathcal{R}$; il est immédiat de déduire (4.20 $\diamondsuit$) de (4.22) .

C.Q.F.D.

(4.24) -Si $[x \to \delta x]$ est une transformation canonique infinitésimale de V, ce théorème nous montre que δ sera relevable à $\mathcal{V}^\infty$ si (et seulement si) il existe une variable dynamique u telle que $\delta x = \text{grad } u$; on sait que cette condition est toujours vérifiée localement (2.33).

(4.25) Notation, théorème:

Désignons par $[\xi \to \overset{u}{\delta}\, \xi]$ le glissement infinitésimal [de l'espace fibré quantifiant $\mathcal{V}^\infty$] associé par l'algorithme (4.20) , à une variable dynamique u de V .

Alors:

$1^\circ)$ $\overset{1}{\delta}\, \xi \equiv f(\xi)$ (notation(4.3)) ;

$2^{\circ})\quad [\delta_u , \delta_v]_L = \delta_{[u,v]_P}$

La vérification du $1^{\circ})$ est immédiate ; pour établir le $2^{\circ})$, remarquons

que $[\delta_u , \delta_v]_L\, x = [\text{grad } u , \text{grad } v]_L = \text{grad}\,[\,[u,v]_P\,]$

grâce à (2.46) , et que $\varpi\, [\delta_u , \delta_v]_L\, \xi = \varpi\, \delta_u \left[\delta_v \xi\right]$ [G.R.(23.31)]

$= \delta_u\, [\varpi .\, \delta_v\, \xi]$ (puisque $\delta_u \varpi = 0$)

$= \delta_u\, v$ (4.20)

$= \nabla v . \delta_u x = \nabla v .\, \text{grad } u = [u,v]_P$. (2.35)

Ainsi, si l'on pose $w = [u,v]_P$, on a

$$\begin{cases} [\delta_u , \delta_v]_L\, x = \text{grad } w \\ \varpi\, [\delta_u , \delta_v]_L\, \xi = w \end{cases}$$

ceci montre que $[\delta_u , \delta_v]_L\, \xi = \delta_w\, \xi$ (après que l'on ait vérifié que ces deux champs de vecteurs ont même ensemble de définition).

C.Q.F.D.

(4.26) Ce théorème fournit donc l'interprétation du fait, remarqué en (2.47) que les variables dynamiques définies sur une variété canonique V, forment une <u>algèbre de Lie</u> pour le crochet de Poisson : c'est l'algèbre de Lie du groupe des glissements globaux d'un espace fibré quantifiant de base V.

Quantification d'un espace vectoriel symplectique .

(4.27) Traitons comme exemple, le cas où V est un espace vectoriel symplectique de dimension 2n, de forme de Lagrange (constante) σ.

V est potentielle(2.16), donc quantifiable(4.9) ; la quantification est unique, à un isomorphisme près(4.15), puisque V est simplement connexe [G.R.(10.30),(10.25)].

Nous pouvons donc choisir comme espace fibré quantifiant celui qui a été construit en (4.10) , à savoir le produit direct $\mathcal{V} = V \times T$ en choisissant le potentiel-covecteur $p = \frac{1}{2}\sigma(x)$ (2.16),

la forme fondamentale ϖ de $\mathcal{V}$ est donnée par la formule (df.(4.11)) :

(4.28) $$\varpi.\delta\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\ \sigma(x)(\delta x) + i\hbar\ \frac{\delta z}{z}$$

Parmi les glissements canoniques de V, il est intéressant de considérer le groupe Γ des <u>translations</u> T_y :

(4.29) $$T_y(x) \equiv y + x$$

On vérifie immédiatement que les translations sont relevables, et que les divers relèvements de T_y sont les applications

(4.30) $$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x+y & \frac{i\sigma(y)(x)}{2\hbar} \\ \zeta\, e & z \end{pmatrix} \qquad [\zeta \in T]$$

Conformément à (4.19) , ces transformations (4.30) forment un groupe $\tilde{\Gamma}$, qui est une <u>extension</u> du groupe des translations par le tore T ; ceci peut se vérifier en notant $F\begin{pmatrix} y \\ \zeta \end{pmatrix}$ la substitution (4.30) et en remarquant que

(4.31) $$F\begin{pmatrix} y \\ \zeta \end{pmatrix} \cdot F\begin{pmatrix} y' \\ \zeta' \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} y + y' & \frac{i\sigma(y')(y)}{2\hbar} \\ \zeta\,\zeta' & e \end{pmatrix}$$

(4.32) -Cette formule montre que le groupe $\tilde{\Gamma}$ n'est pas abélien ; il constitue donc une extension non triviale de Γ par T .

Exercice (notations de (4.25)).

1°) Soit u une variable dynamique de V ; montrer qu'il existe un champ de vecteurs de $\mathcal{V} : [\xi \to \frac{d}{u}\xi]$, défini par

$$\frac{d}{u}\, x = \text{grad}\ u \tag{4.33}$$

$$\overleftarrow{\omega}\ \frac{d}{u}\xi = 0$$

Ce champ de vecteurs est-il un élément infinitésimal du recueil $\mathcal{R}$? Est-il invariant par $\mathcal{R}$?

2°) Montrer que

$$\left[\frac{d}{u}\ ,\ \frac{\delta}{v}\right]_L = \frac{d}{[u,v]_p} \tag{4.34}$$

3°) Montrer que

$$\{\ [u,v]_p = 0\ \} \Rightarrow \{\ [\tfrac{d}{u}\ ,\ \tfrac{d}{v}\ ]_L = 0\ \} \tag{4.35}$$

-o-o-o-o-o-o-o-

CHAPITRE II

CALCUL DES VARIATIONS

§ 5-PROBLEMES VARIATIONNELS REGULIERS.

Soit U une variété,différentiable,séparée, C^∞, de dimension n :(figure 1) ([1])

Nous appellerons <u>lagrangien</u> une fonction

(5.1)
$$\ell \begin{pmatrix} t \\ Q \\ Q' \end{pmatrix}$$

où t désigne une variable réelle , Q un point de U, Q' un vecteur tangent à U en Q .

(5.2) ℓ peut donc être considérée comme une fonction définie sur une partie de la variété de classe C^∞ $R \times U^D$, où U^D désigne l'espace fibré des vecteurs tangents à U [G.R.(12.7),(20.1),(21.3)] ; nous supposerons ℓ définie sur un ouvert Ω de cette variété, et infiniment différentiable .

(5.3) Par abus de notation, désignons aussi par ℓ la variable $\ell \begin{pmatrix} t \\ Q \\ Q' \end{pmatrix}$.

Si l'on se donne t et Q, $[Q' \to \ell]$ est une application différentiable de D_Q [espace vectoriel tangent à U en Q] dans R ; on peut calculer sa dérivée [G.R.(18.2),(21.10)] :

(5.4)
$$P = \frac{\partial \ell}{\partial Q'},$$

([1]) Les diagrammes sont expliqués dans l'introduction.

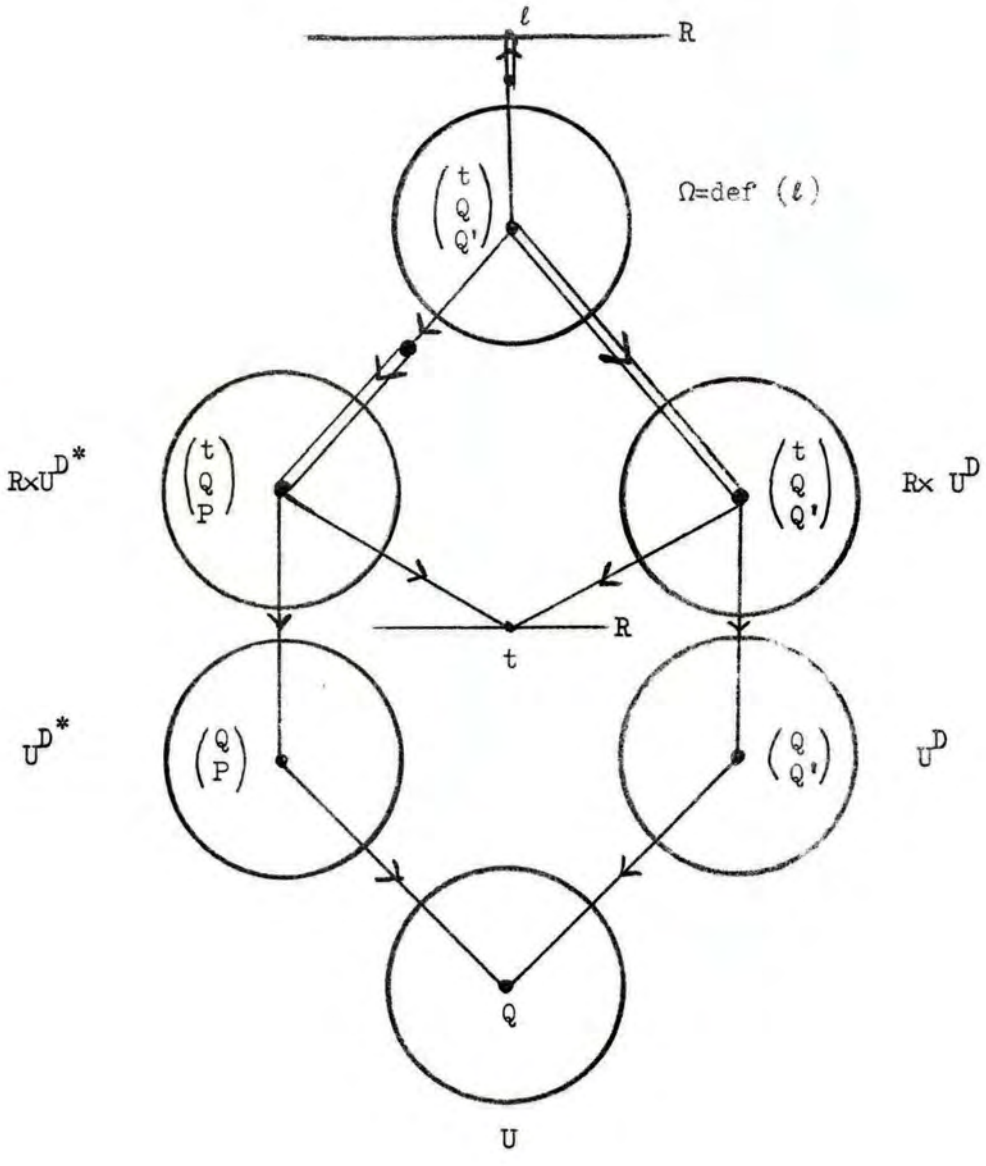


Figure 1

P est un covecteur tangent à U en Q, fonction de t, Q, Q' définie sur Ω.

(5.5) Soit maintenant $[t \to Q]$ une application infiniment différentiable d'un intervalle réel sur U, définissant une <u>courbe tracée sur U</u> (nous ne supposons pas ici, comme en (0.9), que cette courbe possède une structure de variété; la dérivée $\frac{dQ}{dt}$ peut s'annuller).

Si le triplet $\begin{pmatrix} t \\ Q \\ dQ/dt \end{pmatrix}$ appartient à Ω, on peut, en faisant $Q' = \frac{dQ}{dt}$ calculer en fonction de t les variables $\ell = \ell \begin{pmatrix} t \\ Q \\ \frac{dQ}{dt} \end{pmatrix}$ et P.

<u>Théorème:</u>

Il existe un covecteur Π, appelée <u>dérivée variationnelle</u> du lagrangien ℓ sur la courbe $t \to Q$, caractérisée par la formule

(5.6) $$\delta \ell - \frac{d}{dt} [P . \delta Q] = \Pi . \delta Q$$

dans toute <u>variation</u> (1) δ de l'application $[t \to Q]$ $(\delta t \equiv 0)$.

Choisissons en effet une carte $[q \to Q]$ de U $(q \in R^n)$; le calcul montre immédiatement que P est représenté dans la base naturelle $\frac{dQ}{dq}$ de la carte par la ligne

(5.7) $$p = \frac{\partial \ell}{\partial q'}$$

q' étant l'élément de R^n qui représente Q' dans cette base ; c'est à dire en développant :

---

(1) On suppose que Q dépend de t et d'une <u>variable auxiliaire</u> θ, et que l'application $\begin{pmatrix} t \\ \theta \end{pmatrix} \to Q$ est infiniment différentiable. On pose $\delta = \frac{\partial}{\partial \theta}$; on a $[\delta, \frac{\partial}{\partial t}]_L = 0$ [G.R.(21.33)] .

(5.8) $$p = [\, p_1 \;\; p_2 \;\cdots\; p_n]$$

avec

(5.9) $$p_j = \frac{\partial \ell}{\partial q'^j} \qquad (1)$$

On trouve alors

$$\delta \ell = \frac{\partial \ell}{\partial q} \cdot \partial q + \frac{\partial \ell}{\partial q'} \cdot \delta \left[\frac{\partial q}{\partial t} \right] = \frac{\partial \ell}{\partial q} \cdot \delta q + p \cdot \frac{d}{dt} \left[\delta q \right]$$

$$= \frac{d}{dt} \left[p . \delta q \right] + \left[\frac{\partial \ell}{\partial q} - \frac{dp}{dt} \right] \delta q$$

c'est à dire (5.6), si l'on désigne par Π le covecteur représenté par la ligne

(5.10) $$\left[\frac{\partial \ell}{\partial q} - \frac{dp}{dt} \right] ;$$

Si on préfère , on peut définir Π par ses composantes

(5.11) $$\Pi_j = \frac{\partial \ell}{\partial q^j} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \ell}{\partial q'^j} \right]$$

C.Q.F.D.

(5.12) -Il importe de remarquer que les covecteurs représentés par les lignes $\frac{\partial \ell}{\partial q}$ et $\frac{dp}{dt}$ dépendent en général du choix de la carte ; alors que leur différence Π n'en dépend pas .

-Si l'on choisit deux valeurs t_o et t_1 de t , et si on calcule l'intégrale (appelée <u>action</u>) :

(5.13) $$a = \int_{t_o}^{t_1} \ell \begin{pmatrix} t \\ Q \\ \frac{dQ}{dt} \end{pmatrix} dt$$

---

(1) Chaque p_j s'appelle traditionnellement <u>variable conjuguée</u> de la variable q_j correspondante.

on peut calculer toute variation δa par dérivation sous le signe $\int$ la formule (5.6) donne alors :

(5.14)
$$\delta a = \left[P.\delta Q \right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \Pi.\ \delta\, Q \quad dt$$

Si le covecteur Π n'est pas identiquement nul, il est facile de construire pour toute courbe $[t \to Q]$ une variation δ telle que δQ soit nul au voisinage de t_0 et t_1, que $\Pi.\ \delta\, Q$ soit ≥ 0, et non identiquement nul ; on a alors $\delta a > 0$ (lemme fondamental du calcul des variations) ; d'où l'énoncé :

(5.15) On appelle <u>extrêmales</u> d'un lagrangien les courbes telles que la dérivée variationnelle Π soit identiquement nulle .

(5.16) -Pour que l'action a (formule (5.13)) vérifie $\delta a = 0$ dans toute variation δ nulle aux extrémités t_0 et t_1 de l'intervalle d'intégration il faut et il suffit que la courbe soit une extrêmale .

(5.17) -Si la courbe est une extrêmale, on a pour toute variation δ :
$$\delta\, a = \left[P.\delta\, Q \right]_{t_0}^{t_1}$$

Les extrêmales sont les solutions des équations $\Pi \equiv 0$, c'est à dire (en choisissant une carte) des <u>équations d'Euler-Lagrange</u>:

(5.18)
$$\frac{\partial \ell}{\partial q} - \frac{dp}{dt} = 0$$

ou

(5.19)
$$\frac{\partial \ell}{\partial q^j} - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \ell}{\partial q'^j} \right] = 0 \qquad [j = 1,2,....n]$$

Définition:

Nous dirons que le lagrangien est de type I (ou encore que le problème variationnel (5.16) est régulier) si l'opérateur linéaire

(5.20) $$\frac{\partial P}{\partial Q'}$$

est régulier dans tout l'ensemble de définition Ω de ℓ .

(5.21) -On peut remarquer que $\frac{\partial P}{\partial Q'}$, est une application linéaire de D_Q (espace vectoriel tangent à U en Q) sur son dual D_Q^* , ou encore un opérateur bi-linéaire sur D_Q ; cet opérateur est d'ailleurs symétrique , parce que c'est une dérivée seconde [G.R.(18.11)] .

Théorème:

Si le lagrangien est de type I, des "conditions initiales"

(5.22) $$\begin{pmatrix} t_o \\ Q_o \\ Q'_o \end{pmatrix}$$

qui sont un point de Ω, déterminent une extrêmale, qui possède un prolongement maximal unique, et qui est une application infiniment différentiable d'un intervalle dans U .

En effet, moyennant la condition (5.20), l'équation de Lagrange(5.18) peut s'écrire

(5.23) $$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} t \\ q \\ q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ q' \\ \left[\frac{\partial p}{\partial q'}\right]^{-1} \left[\frac{\partial \ell}{\partial q} - \frac{\partial p}{dt} - \frac{\partial p}{\partial q} \cdot q'\right] \end{pmatrix} \qquad [s \equiv t + Cte]$$

ce qui fournit un champ de vecteurs infiniment différentiable f sur Ω tel que l'équation des extrêmales s'écrive

$$\frac{dX}{ds} = f(X) \ ;$$

Il suffit d'appliquer les théorèmes généraux sur les équations différentielles [G.R.(22.25)]

C.Q.F.D.

-On sait de plus que, pour toute valeur t_1 de t, la valeur de X(donc de Q) est fonction infiniment différentiable des conditions initiales t_o, Q_o, Q'_o (même référence) . Il en résulte que :

(5.24) L'ensemble V des extrêmales (prolongées maximalement) est une variété C^∞ de dimension 2n.

On peut en effet choisir une valeur t_o de t, une carte $[q \to Q]$ de U et considérer l'application F qui fait passer de l'élément $\begin{pmatrix} q_o \\ q'_o \end{pmatrix}$ de R^{2n} à l'extrêmale ayant ces conditions initiales pour $t = t_o$; les théorèmes précédents montrent que F est régulier, et que si F_1 et F_2 sont construits de cette façon , $F_2^{-1} \cdot F_1 \in C^\infty(R^{2n})$ [G.R.(18.19)]; les F constituent un atlas de V.

C.Q.F.D.

Théorème:

(5.25) -Désignons par x un point de la variété V, c'est à dire une extrêmale du lagrangien donné .Soit $F_t(x)$ la valeur pour t(si elle existe) de la phase $\begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix}$ sur l'extrêmale x .

- Si le lagrangien ℓ est de type I , V possède une structure de <u>variété canonique</u> de dimension 2n.
- On obtient une carte canonique F de V en choisissant une carte canonique G de l'espace de phase (par exemple (3.23)) , une valeur $t \in R$, et en posant

$$F = [G^{-1} . F_t]^{-1} \qquad \text{si} \qquad G^{-1} . F_t \qquad \text{est régulier.}$$

- Les cartes ainsi construites forment un atlas.
- La forme de Lagrange de V prolonge l'image réciproque par tous les F_t de la forme de Lagrange de l'espace de phases U^{D^*} ; en d'autres termes , on a

$$\sigma(dx)(\delta x) = dp_o . \delta q_o - \delta p_o . dq_o$$

si p_o et q_o désignent les valeurs de p , q (notations (5.7)) pour une valeur arbitraire t_o de t.

Le lecteur pourra démontrer directement ce résultat ; nous l'établirons de façon indirecte au § suivant (6.28) .

Nous pouvons donc appliquer à V tous les résultats du chapitre I : définition de la forme de Liouville , existence locale (ou globale) de potentiels-vecteurs ; crochet de Poisson de deux variables dynamiques ; éventualité d'une quantification ; etc...

§ 6 - PROBLEMES VARIATIONNELS HOMOGENES

Reprenons les notations du début du § 5 .

Définition:

(6.1)

Soit ℓ un lagrangien infiniment différentiable .

Nous dirons que ℓ est un lagrangien de type II , s'il vérifie les trois conditions suivantes :

a) ℓ ne dépend pas de la variable t ; nous écrirons donc

$$\ell \equiv \ell\begin{pmatrix} Q \\ Q' \end{pmatrix}$$

b) ℓ est homogène du premier degré en Q' :

$$[\lambda \in R,\ \lambda \neq 0] \Rightarrow \left[\ell\begin{pmatrix} Q \\ \lambda Q' \end{pmatrix} = \lambda\ \ell\begin{pmatrix} Q \\ Q' \end{pmatrix}\right] \qquad (1)$$

c) L'opérateur linéaire

$$\frac{\partial P}{\partial Q'}$$

a un noyau de dimension 1 (2)

---

(1) ℓ ne peut être défini pour Q' = 0 que s'il est linéaire en Q', ce qui est incompatible avec la condition(c).-Certains auteurs supposent seulement que ℓ est positivement homogène , c'est à dire que la condition(b) n'est valable que pour $\lambda > 0$(Voir GELFAND et FOMIN); il ne semble pas que cette généralisation soit utile(voir ci-dessous (7.29)).

(2) $\frac{\partial P}{\partial Q'}$ ne peut être régulier parceque la condition d'homogénéité(b) entraîne Q' $\in$ noyau $(\frac{\partial P}{\partial Q'})$(identité d'Euler) ; P est homogène de degré 0 en Q' ; les types I et II sont donc disjoints .

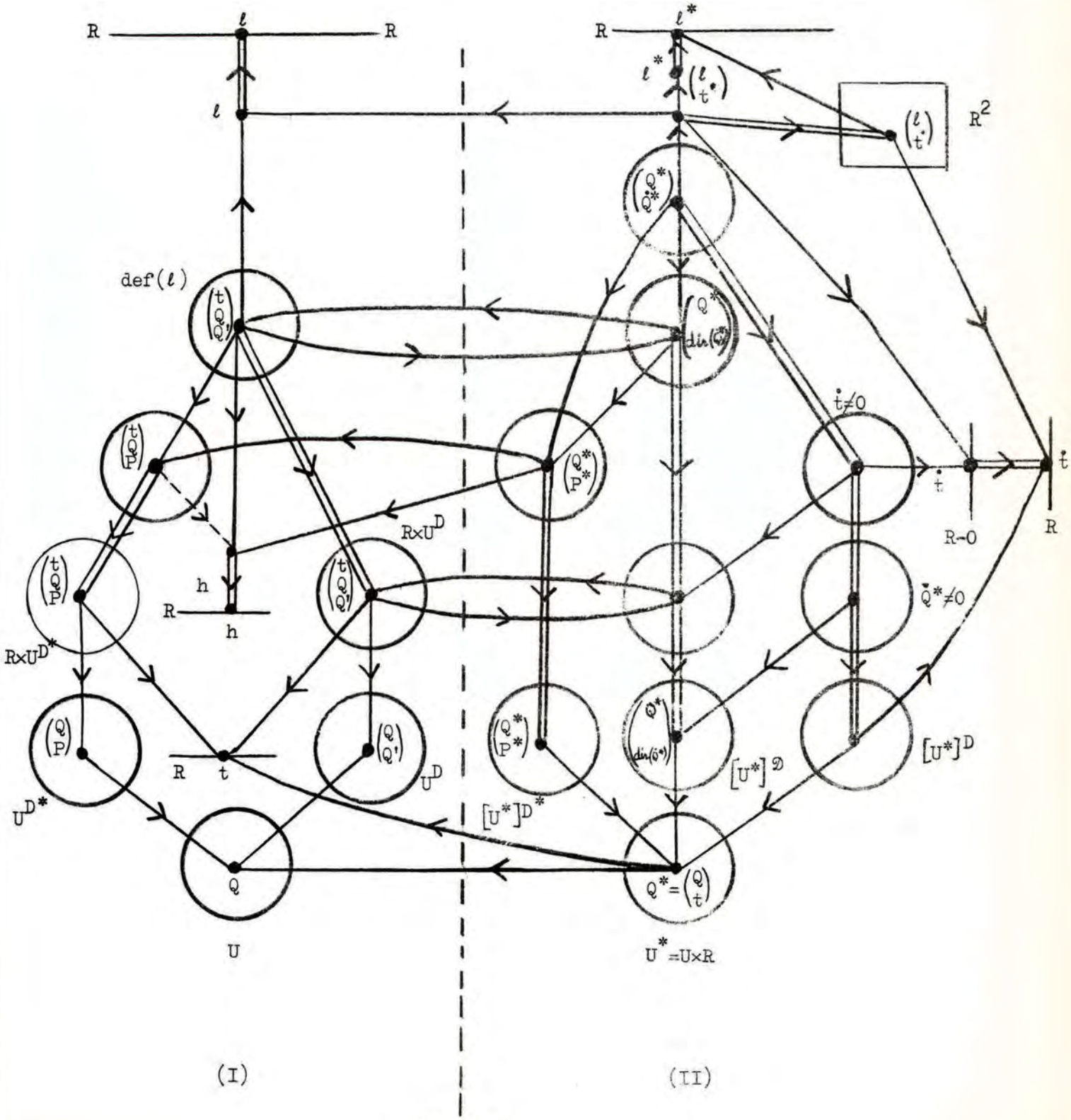

R
ℓ
R
ℓ
def(ℓ)
R×U^D
h
R
h
R×U^D*
R
t
U^D*
U^D
Q
U
(I)
R
ℓ*
ℓ*
R^2
ṫ≠0
R-0
R
Q̇*≠0
[U*]^D
[U*]^D*
Q*=(Q t)
U*=U×R
(II)

Figure 2

Passage du type I au type II (paramétrisation).

Supposons donné un lagrangien du type I sur une variété U(notation du § 5).

(Voir figure 2).

Considérons une variable Q^* qui parcourt la variété produit $U^* = U \times R$, et posons

$$Q^* = \begin{pmatrix} Q \\ t \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

Nous désignerons par $\dot{Q}^*$ un vecteur tangent à U^* en Q^*, et nous poserons

$$\dot{Q}^* = \begin{pmatrix} \dot{Q} \\ \dot{t} \end{pmatrix} \tag{6.3}$$

Dans le cas $\dot{t} \neq 0$, nous poserons

$$Q' = \frac{\dot{Q}}{\dot{t}} \tag{6.4}$$

et

$$\ell^* \begin{pmatrix} Q^* \\ \dot{Q}^* \end{pmatrix} = \ell \begin{pmatrix} t \\ Q \\ Q' \end{pmatrix} \times \dot{t} \tag{6.5}$$

On constate immédiatement que ℓ^* peut être pris comme lagrangien sur U^*, et qu'il vérifie les conditions (a) et (b) de (6.1).

Un calcul élémentaire donne

$$P^* = \frac{\partial \ell^*}{\partial \dot{Q}^*} = [P \quad \ell - P.Q'] \tag{6.6}$$

en posant, comme en (5.4) , $P = \frac{\partial \ell}{\partial Q'}$.

On constate ensuite que le noyau de $\frac{\partial P^*}{\partial \dot{Q}^*}$ est l'ensemble des $\delta\dot{Q}^*$ tels que $\delta Q' = 0$, ce qui s'écrit aussi $\delta\dot{Q} = Q' \times \delta\dot{t}$, et montre que

ce noyau a la dimension 1 : la condition(c) de (6.1) est satisfaite, ℓ^* est un lagrangien du type II.

Le calcul de la dérivée variationnelle Π^* de ce lagrangien ℓ^* peut se faire en utilisant (5.10) et en remarquant que l'on a identiquement :

$$\frac{d}{dt}\ [\ \ell - P.Q'\ ] = \frac{\partial \ell}{\partial t} + \Pi.\ Q'$$

Π désignant la dérivée variationnelle de ℓ . Il vient

$$\Pi^* = \dot{t}\ [\ \Pi\ - \Pi.Q'] \tag{6.7}$$

ce qui montre que

$$[\ \Pi^* = 0\ ] \iff [\ \Pi = 0\ ] \quad \text{pour} \quad \dot{t} \neq 0\ ;$$

d'où le <u>théorème:</u>

(6.8) -Si ℓ est un lagrangien de type I sur une variété U de dimension n, la formule (6.5) définit un lagrangien ℓ^* de type II sur la variété $U^* = U \times R$ (dont la dimension est n+1).

- Les courbes extrêmales de ℓ^* sont les <u>graphes</u> des extrêmales de ℓ .

Ce résultat pouvait se prévoir à priori:en effet,si on se donne une courbe $t^* \to Q^*$ tracée sur U^* (t^* = paramètre auxiliaire; on suppose que $\frac{dt}{dt^*} \neq 0$) , on trouve par une formule classique de changement de variable

$$\int_{t_o^*}^{t_1^*} \ell^*\ (Q^*,\ \frac{dQ^*}{dt^*}\ )\ dt^* = \int_{t_o}^{t_1} \ell(t,\ \frac{dQ}{dt}\ )\ dt \tag{6.9}$$

ce qui montre l'équivalence des deux problèmes variationnels ;

on dit que le second se déduit du premier par <u>paramétrisation .</u>

La règle pratique est la suivante :

(6.10) Pour paramétriser un problème variationnel correspondant à l'action

$$a = \int_{t_o}^{t_1} \ell(t,q^1,\ldots q^n,q'^1,\ldots q'^n)\, dt \qquad (q'^j = \frac{dq^j}{dt})$$

on suppose que les q^j et t sont exprimés en fonction d'un paramètre auxiliaire s ; on pose

$$\dot{q}^j = \frac{dq^j}{ds} \ , \quad \dot{t} = \frac{dt}{ds}$$

d'où

$$a = \int_{s_o}^{s_1} \ell(t,q^1,\ldots q^n, \frac{\dot{q}^1}{\dot{t}}, \ldots \frac{\dot{q}^n}{\dot{t}})\dot{t}\, ds$$

et le nouveau lagrangien

$$\ell^* = \ell(t,q^1,\ldots q^n, \frac{\dot{q}^1}{\dot{t}},\ldots \frac{\dot{q}^n}{\dot{t}}) \times \dot{t}$$

dans lequel on peut poser $t \equiv q^{n+1}$.

Si ℓ est un lagrangien du type I, ℓ^* est un lagrangien du type II.

<u>Résolution des problèmes du type II.</u>

Revenons au cas général (6.1)

En dérivant la formule d'homogénéité(b) par rapport à λ et Q', on trouve les deux identités :

(6.11) $$P.Q' = \ell$$ (identité d'Euler des fonctions homogènes)

(6.12) $$\left.\begin{matrix} Q \to Q \\ Q' \to \lambda\, Q' \end{matrix}\right\} \Rightarrow \{P \to P\} \qquad \text{pour } \lambda \neq 0$$

cette dernière propriété exprime que P ne dépend que de Q et de dir(Q') (voir(0.1)); autrement dit la relation

(6.13) $$P = \frac{\partial \ell}{\partial Q'}$$

permet de calculer

(6.14) $$\tilde{x} = \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix}$$

en fonction de

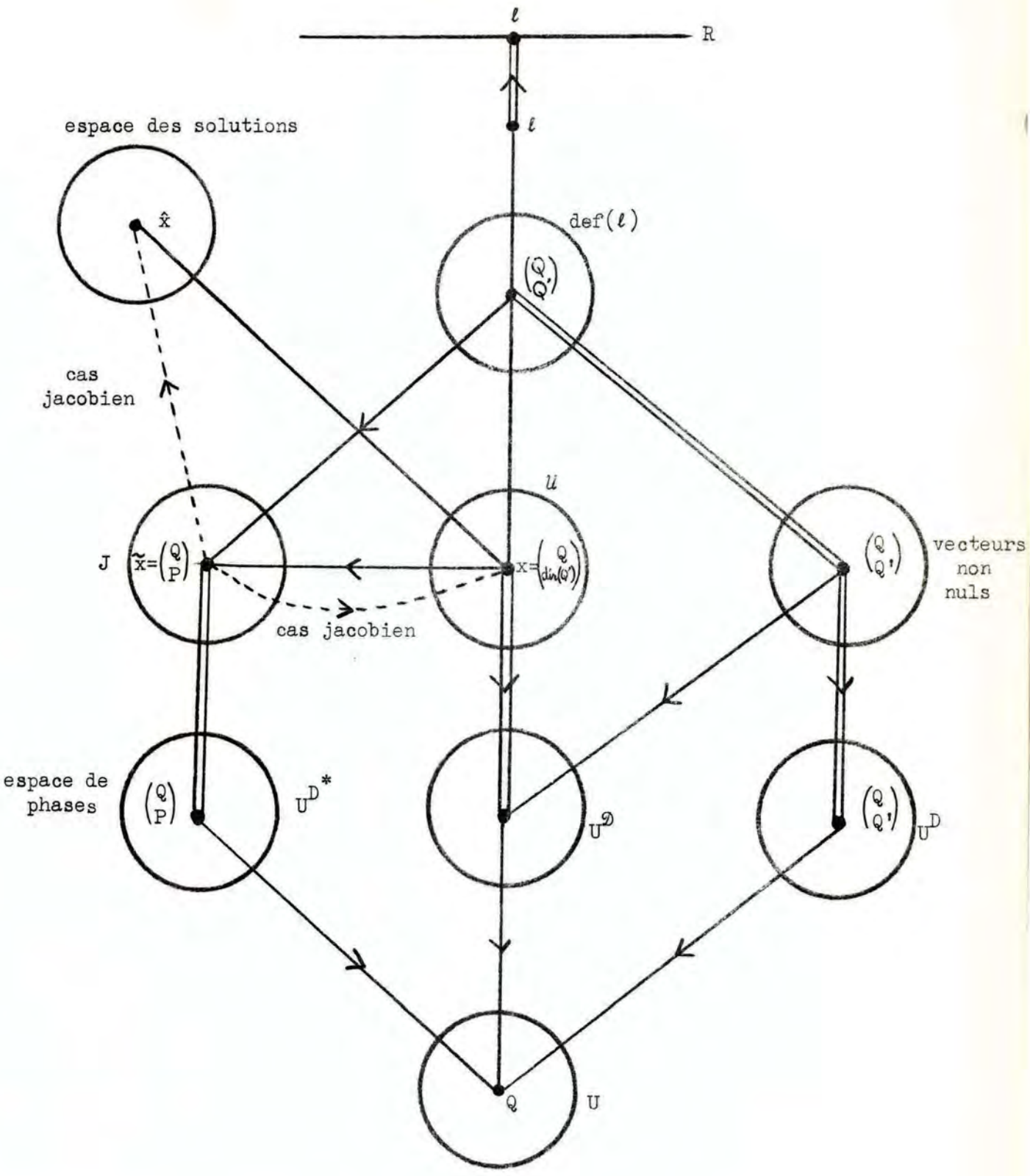
(6.15) $$x = \begin{pmatrix} Q \\ \mathrm{dir}(Q') \end{pmatrix}$$

(6.16) En d'autres termes, (6.13) définit une application d'un ouvert $\mathcal{U}$ de l'espace fibré différentiable $U^{\mathcal{D}}$ des directions tangentes à U(voir (0.7)) dans l'espace de phases U^{D*} de U (figure 3). L'ensemble $\mathcal{U}$ est celui des couples $\begin{pmatrix} Q \\ \mathrm{dir}(Q') \end{pmatrix}$ tels que $\ell \begin{pmatrix} Q \\ Q' \end{pmatrix}$ existe .

-Notons que les dimensions respectives de $U^{\mathcal{D}}$ et U^{D*} sont 2n - 1 et 2n; la condition (6.1,c) montre que $\frac{\partial \tilde{x}}{\partial x}$ est régulier, donc son rang est égal à 2n-1.

(6.17) -U^{D*} est <u>l'espace de phases</u> de U ; il possède donc une structure de <u>variété canonique</u> (3.27); soit $[\tilde{x} \to \tilde{\sigma}]$ sa forme de Lagrange ; désignons par $[x \to \sigma]$ l'image réciproque de $\tilde{\sigma}$ par l'application $[x \to \tilde{x}]$, c'est à dire :

(6.18) $$\sigma(dx)(\delta x) = \tilde{\sigma}(d\tilde{x})(\delta\tilde{x}) = dp.\delta q - \delta p.dq \qquad \text{(notations(5.7))}$$
$$= d[P.\,\delta Q] - \delta\,[P.dQ] \qquad \text{si } d \text{ et } \delta \text{ commutent}$$



ℓ
R
ℓ
espace des solutions
x̂
def(ℓ)
(Q Q')
cas
jacobien
𝒰
J
x̃=(Q P)
x=(Q dir(Q'))
(Q Q')
vecteurs
non
nuls
cas jacobien
espace de
phases
(Q P)
U^D*
U^𝒟
(Q Q')
U^D
Q
U

Figure 3

(6.19) -Du fait que $\frac{\partial \tilde{x}}{\partial x}$ est régulier, on déduit que la dimension du noyau de σ est 1 ; le champ $[x \to \sigma]$ donne donc à $\mathcal{U}$ la structure de variété symplectique de dimension impaire étudiée en (3.36) (au changement près de 2n+1 en 2n-1) . En particulier, par tout point x de $\mathcal{U}$ passe une <u>caractéristique</u> (3.37), c'est à dire une ligne de force du champ de directions $[\ x \to \text{noyau}(\sigma)]$.

(6.20) Notons que les <u>caractéristiques de $\mathcal{U}$ ne sont jamais verticales</u>, c'est à dire que l'on ne peut avoir $dq = 0$, lorsqu'on se déplace sur une caractéristique, que pour $dx = 0$; en effet la première ligne de(6.18) montre que

$$[\sigma(dx) = 0,\ \ dQ = 0] \Rightarrow [dp = 0]$$

$$\Rightarrow [dQ' \in \text{noyau}\ \frac{\partial P}{\partial Q'},] \Rightarrow [\text{dir}(dQ') = \text{dir}(Q')]$$

d'où $d\,[\text{dir}(Q')] = 0$, et par suite $dx = 0$.

(6.21) Soit E un arc de courbe tracé sur U.

L'ensemble des <u>éléments de contact</u> de la courbe E(c'est à dire des couples x d'un point Q de E et de l'espace vectoriel tangent à E en Q) est une courbe tracée sur $U^{\mathcal{D}}$, qui se projette sur la courbe E, et que nous appellerons <u>relèvement</u> de la courbe donnée.

Si on se donne une courbe tracée sur $U^{\mathcal{D}}$, elle se projette suivant une courbe de U, mais elle n'est pas nécessairement le relèvement de sa projection .

Théorème:

(6.22) Soit E une courbe tracée sur U.

Les trois conditions suivantes sont équivalentes:

(a)E est une extrêmale du lagrangien

(b)Le relèvement de E est un arc de caractéristique

(c)E est la projection d'un arc de caractéristique

Démonstration:

-(a) ⇒ (b) :

Donnons nous une carte $[t \to Q]$ de la courbe E.

La définition (5.6) de la dérivée variationnelle Π s'écrit, compte tenu de l'identité d'Euler(6.11) :

(6.23) $$\left[\begin{array}{l} Q' = \dfrac{dQ}{dt} \\ \\ d \text{ et } \delta \text{ commutent} \end{array}\right] \Rightarrow \left[\delta\left[P.\frac{dQ}{dt}\right] - \frac{d}{dt}\left[P.\delta Q\right] = \Pi(\delta Q)\right]$$

soit, grâce à (6.18):

(6.24) $$Q' = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow \Pi(\delta Q) = -\sigma\left(\frac{dx}{dt}\right)(\delta x)$$

d'où aussi:

$$\left[Q' = \frac{dQ}{dt}\ ,\ \Pi = 0\right] \Rightarrow \left[\sigma\left(\frac{dx}{dt}\right) = 0\right]$$

ce qui exprime que le relèvement d'une extrêmale est un arc de caractéristique.

-(b) ⇒ (c)

C'est évident .

(c) ⇒ (a) :

Supposons que E soit la projection d'un arc de caractéristique, c'est à dire que l'on puisse exprimer $x = \begin{pmatrix} Q \\ \mathrm{dir}(Q') \end{pmatrix}$ en fonction de t de sorte que $\frac{dx}{dt} \neq 0$, $\sigma\left(\frac{dx}{dt}\right) = 0$.

En choisissant $\delta q = 0$ dans la formule (6.18), il vient $\delta p . \frac{dq}{dt} = 0$; soit $\frac{\partial P}{\partial Q'} (\delta Q') (\frac{dQ}{dt}) = 0$; compte tenu de la symétrie de $\frac{\partial P}{\partial Q'}$ (qui est la dérivée seconde de ℓ par rapport à Q'), on a donc $\frac{dQ}{dt} \in$ noyau $(\frac{\partial P}{\partial Q'})$; $\frac{dQ}{dt}$ n'est pas nul puisque $\frac{dx}{dt}$ ne l'est pas et que la caractéristique n'est pas verticale (6.20) ; on a donc, puisque le noyau de $\frac{\partial P}{\partial Q'}$ est de dimension 1 et contient Q' :

$$\text{dir} (\frac{dQ}{dt}) = \text{dir} (Q').$$

Par suite $[t \to x]$ est le <u>relèvement</u> dans $U^{\mathcal{D}}$ de $[t \to Q]$, c'est à dire l'image du relèvement de la courbe E dans l'espace fibré U^D

$$t \to \begin{pmatrix} Q \\ \frac{dQ}{dt} \end{pmatrix}$$

par l'homomorphisme d'espace fibré [voir (0.6) et G.R. (13.1),(7.10)]

$$\begin{pmatrix} Q \\ Q' \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} Q \\ \text{dir}(Q') \end{pmatrix}$$

Compte tenu de (6.24), la formule $\sigma(\frac{dx}{dt}) = 0$ donne donc $\Pi = 0$, E est une extrêmale.

C.Q.F.D.

(6.25) Ce théorème nous permet donc de définir de façon précise une <u>solution</u> du problème variationnel comme une caractéristique de U, que nous supposerons maximale ; le théorème (0.10) nous montre qu'il y a une solution unique passant par un élément de contact donné x .

(6.26) Dans le cas où la variété U est <u>évolutive</u> (0.15), l'ensemble des solutions du problème variationnel possède donc une structure de variété canonique de dimension $2n-2$ (th. (3.38)) de forme de Lagrange $\hat{\sigma}$, caractérisée par la formule

(6.27) $$\hat{\sigma}(d\hat{x})(\delta\hat{x}) = \tilde{\sigma}(d\tilde{x})(\delta\tilde{x})$$

où $\hat{x}$ désigne la caractéristique maximale qui passe par x, et $\tilde{x}$ la phase correspondant à x (6.14).

(6.28) Dans le cas où le problème est issu d'un problème du type I (voir (6.9)), la dérivée du scalaire t dans la direction du noyau de σ ne s'annule jamais, puisqu'on peut exprimer Q en fonction de t sur les extrêmales ; t est donc paramétrisant sur U ; U est évolutive (théorème (0.14)); l'application des formules (6.6) et (6.18) montre que cette structure canonique est bien celle qui avait été indiquée en (5.25); mais nous savons de plus que cette structure fait intervenir symétriquement les variables $q^1, q^2, \ldots q^n$ <u>et</u> t.

<u>Cas jacobien</u>.

Nous dirons qu'un problème du type II est <u>jacobien</u> si :

a) L'application $[x \to \tilde{x}]$ définie en (6.16) est régulière (1) ;

---

(1) Puisque $\frac{\partial \tilde{x}}{\partial x}$ est régulière (6.16), cette application constitue donc un <u>plongement</u> de U dans U^{D*} [G.R.(20.12)].

(6.29) b) La variété J de dimension 2n-1 parcourue par $\tilde{x}$ dans l'espace de phase (fig. 3) possède une équation $\varphi(\tilde{x}) = 0$ (1).

Nous dirons alors que J est la <u>variété de Jacobi</u> du problème, et que $\varphi\begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} = 0$ est <u>l'équation de Jacobi</u>.

(6.30) - Cette condition est seulement globale : tout problème du type II devient jacobien si l'on restreint convenablement l'ensemble $\mathcal{U}$.

(6.31) - Par construction, la forme de Lagrange de $\mathcal{U}$ est l'image réciproque de celle de J (elle-même induite par la forme de Lagrange de l'espace de phase) par le plongement $[x \to \tilde{x}]$; par suite les caractéristiques de $\mathcal{U}$ et J se correspondent dans cette application.

(6.32) D'autre part, en tout point $\tilde{x}$ de J, $\nabla\varphi$ n'est pas nul dans l'espace de phases, son noyau est l'espace vectoriel tangent à J en $\tilde{x}$ [G.R.(20.19)].

On en déduit immédiatement que l'espace vectoriel tangent à la caractéristique qui passe par $\tilde{x}$ est engendré par le vecteur non nul

$$\text{grad } \varphi$$

[notation (2.30) appliquée à l'espace de phases U^{D^*}] ;

d'où, grâce à (6.31) et (6.22), le théorème :

(6.33) - Dans le cas jacobien (6.29), les caractéristiques de la variété de Jacobi sont les courbes intégrales du système différentiel

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} = \lambda \text{ grad } \varphi \qquad [\lambda = \text{scalaire arbitraire}]$$

pour lesquelles l'intégrale première

$$\varphi\begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix}$$

prend la valeur 0.

---

(1) On suppose que la variable réelle φ est infiniment différentiable, et que $\nabla\varphi$ ne s'annule pas sur J [voir R.R. (20.20)].

Elles se projettent sur la variété U suivant les extrêmales.

- En choisissant une carte $[q \to Q]$ de U, on en déduit les formules pratiques de résolution des problèmes jacobiens (Cf.(3.30)) :

Si ℓ est un lagrangien du type II, et si l'on pose ([1])

(6.34) $$p_j = \frac{\partial \ell}{\partial q'^j}$$

on peut (au moins localement) éliminer les q'^j entre les équations (6.34); on obtient ainsi l'équation de Jacobi

(6.35) $$\varphi(q^j, p_j) = 0$$

on obtient alors les extrêmales en résolvant le système différentiel

(6.36) $$\frac{dq^1}{\frac{\partial \varphi}{\partial p_1}} = \frac{dq^2}{\frac{\partial \varphi}{\partial p_2}} = \dots = \frac{dq^n}{\frac{\partial \varphi}{\partial p_n}} = \frac{-dp_1}{\frac{\partial \varphi}{\partial q^1}} = \frac{-dp_2}{\frac{\partial \varphi}{\partial q^2}} = \dots = \frac{-dp_n}{\frac{\partial \varphi}{\partial q^n}} \quad [= \lambda\, ds \neq 0]$$

compte tenu de l'intégrale première (6.35).

Pour rechercher une extrêmale en fonction de conditions initiales données q^j, q'^j, on peut si l'on veut tirer les valeurs initiales des p_j de (6.34) ; ces valeurs vérifient évidemment la condition (6.35).

(6.37) - Cette méthode est particulièrement intéressante dans le cas où le lagrangien ℓ ne dépend que des q'^j et d'un seul des q^j (q^1 par exemple), appelé <u>paramètre principal</u>.

([1]) Notations (5.9)

Alors l'équation de Jacobi ne met en jeu que q^1 et les p_j ; l'équation (6.36) montre que $p_2, \ldots p_n$ sont des intégrales premières; leurs valeurs constantes se déduisent des conditions initiales par les formules (6.34); l'équation de Jacobi (6.35) devient alors une relation liant q^1 et p_1, dépendant de ces n-1 paramètres ; en la résolvant par rapport à p_1 (ou en prenant une représentation paramétrique de q^1 et p_1) les premières égalités (6.36) donnent :

$$(6.38)\quad \left\{ q^2 = \int \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial p_2}}{\frac{\partial \varphi}{\partial p_1}} dq^1, \ \ldots\ldots\ldots\ q^n = \int \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial p_n}}{\frac{\partial \varphi}{\partial p_1}} dq^1 \ ; \right.$$

l'intégration des équations du problème est ainsi ramenée aux quadratures.

En particulier, si l'équation de Jacobi est algébrique, on est amené à des intégrales abéliennes, qui peuvent éventuellement être elliptiques ou rationnelles (exemples respectifs : problème de Lagrange, mouvement des planètes).

Il faut traiter à part les cas où p_1 et q^1 sont constants ; on voit qu'on les obtient en étudiant le système (1)

$$(6.39)\quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi = 0 \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial p_1} = 0 \ , \dfrac{\partial \varphi}{\partial q^1} = 0 \end{array} \right.$$

qui fournit les relations que doivent vérifier les conditions initiales.

---

(1) C'est le seul cas où l'on ait besoin de calculer $\dfrac{\partial \varphi}{\partial q^1}$.

Dans ce cas, le système (6.36) montre que les variables $q^2,\ldots q^n$ sont des fonctions <u>affines</u> (= linéaires non homogènes) les unes des autres .

<u>Cas hamiltonien</u>.

(6.40) C'est le cas d'un système du type I , que l'on a ramèné au type II par paramétrisation (6.9). Puisque la dernière composante de Q^* , soit t , n'est pas constante sur les extrêmales, le système (6.36) montre que la dérivée de φ par rapport à la dernière composante p^*_{n+1} de P n'est pas nulle ; on peut donc, localement, résoudre l'équation de Jacobi en p^*_{n+1} , donc la mettre sous la forme

$$p^*_{n+1} + H\,(q^1,\ldots q^n,\ t\ ,\ p^*_1,\ldots p^*_n\ ) = 0 \tag{6.41}$$

En appliquant les formules (6.6),(6.35),(6.36), on obtient l'énoncé suivant (où l'on a introduit, suivant la tradition,la variable $h = -p^*_{n+1}$):

Soit $\ell\begin{pmatrix} t \\ Q \\ Q' \end{pmatrix}$ un lagrangien du type I ; choisissons une carte

$[\ q \to Q\ ]$ $(q \in R^n)$.

Pour résoudre le problème variationnel régulier correspondant, on peut procéder comme suit :

En posant

$$p_j = \frac{\partial \ell}{\partial q'^j}\ ,\quad h = \sum_j\ p_j \cdot q'^j - \ell \tag{6.42}$$

on peut, au moins localement, trouver une fonction H (appelée <u>fonction hamiltonienne</u>) telle que

$$h - H\,(t,q^1,\ldots q^n,p_1,\ldots p_n) \equiv 0 \tag{6.43}$$

Alors on obtient les extrêmales en résolvant le système différentiel

$$(6.44)\qquad \frac{dq^1}{\frac{\partial H}{\partial p_1}} = \dots = \frac{dq^n}{\frac{\partial H}{\partial p_n}} = dt = \frac{-dp_1}{\frac{\partial H}{\partial q^1}} = \dots = \frac{-dp_n}{\frac{\partial H}{\partial q^n}} = \frac{dh}{\frac{\partial H}{\partial t}}$$

compte tenu de l'intégrale première (6.43) ([1])

On reconnaît les <u>équations canoniques d'Hamilton</u> ; si X désigne un point de l'espace de phases de la variété initiale, elles peuvent s'écrire (cf.(3.30)) :

$$(6.45)\qquad \frac{dX}{dt} = \text{grad}\,[H(t,X)]$$

Dans les problèmes pratiques, elles sont souvent moins simples que les équations (6.36) du lagrangien de type II associé, à cause de la nécessité de résoudre l'équation de Jacobi par rapport à h .

Exercice :

Chercher les extrêmales des intégrales :

$$(6.46)\qquad \begin{cases} (a)\quad \int \sqrt{1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2 + \left[\frac{dz}{dx}\right]^2}\, dx & \text{(plus court chemin d'un point à un autre)} \\ (b)\quad \int \left[Cy + \sqrt{1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2}\right] dx & \text{(courbes isopérimètres)} \\ (c)\quad \int \left[\frac{C}{r} + \frac{1}{2}\left[\frac{dr}{dt}\right]^2 + \frac{r^2}{2}\left[\frac{d\theta}{dt}\right]^2\right] dt & \text{(mouvement des planètes)} \end{cases} \quad [C=\text{Cste}]$$

au moyen de celle des trois méthodes : (5.19), (6.10) et (6.36), (6.44) qui conduit aux calculs les plus simples.

([1]) Cette intégrale première peut remplacer la dernière des égalités (6.44).

§ 7 - PROBLEMES VARIATIONNELS CONIQUES .

Dualité des cônes.

Soit E un espace vectoriel de dimension n (figure 4). On suppose $n \geq 3$.

(7.1) - Nous appellerons cône de E une variété K de dimension n - 1, plongée dans E , ne contenant pas l'origine 0, telle que

$[\ \lambda \in R\ ,\lambda \neq 0\ ,\ X \in K\ ] \Rightarrow [\ \lambda X \in K\ ]$

Il existe donc une partie $\tilde{K}$ de l'espace projectif $\tilde{E}$ de E (0.2) telle que

(7.2) $$[X \in K\ ] \Leftrightarrow [\mathrm{dir}\ (X) \in \tilde{K}\ ]$$

- On peut toujours, localement, trouver une équation du cône K

(7.3) $$[\ X \in K\ ] \Leftrightarrow [\ f(X) = 0\ ] \qquad \left(\begin{array}{l} \mathrm{val}(f) \subset R \\ f \ \text{infiniment différentiable} \end{array} \right)$$

- On a évidemment :

(7.4) $$\left[\begin{array}{l} f(X) = 0 \\ \lambda \neq 0 \\ \lambda X \in \mathrm{def}(f) \end{array} \right] \qquad \left[\begin{array}{l} \\ f(\lambda X) = 0 \\ \\ \end{array} \right]$$

(7.5) - En choisissant une carte de l'espace projectif $\tilde{E}$ de E (0.4) , on en déduit que $\tilde{K}$ est une variété de dimension n - 2 , plongée dans $\tilde{E}$ (dont la dimension est n - 1).

- Soit P un élément non nul du dual E^* de E , et X un point de K . Nous dirons que P est normal au cône K en X si

(7.6) $$[\ \delta X \ \text{tangent au cône en}\ X\ ] \Rightarrow [P.\ \delta X = 0\ ]$$

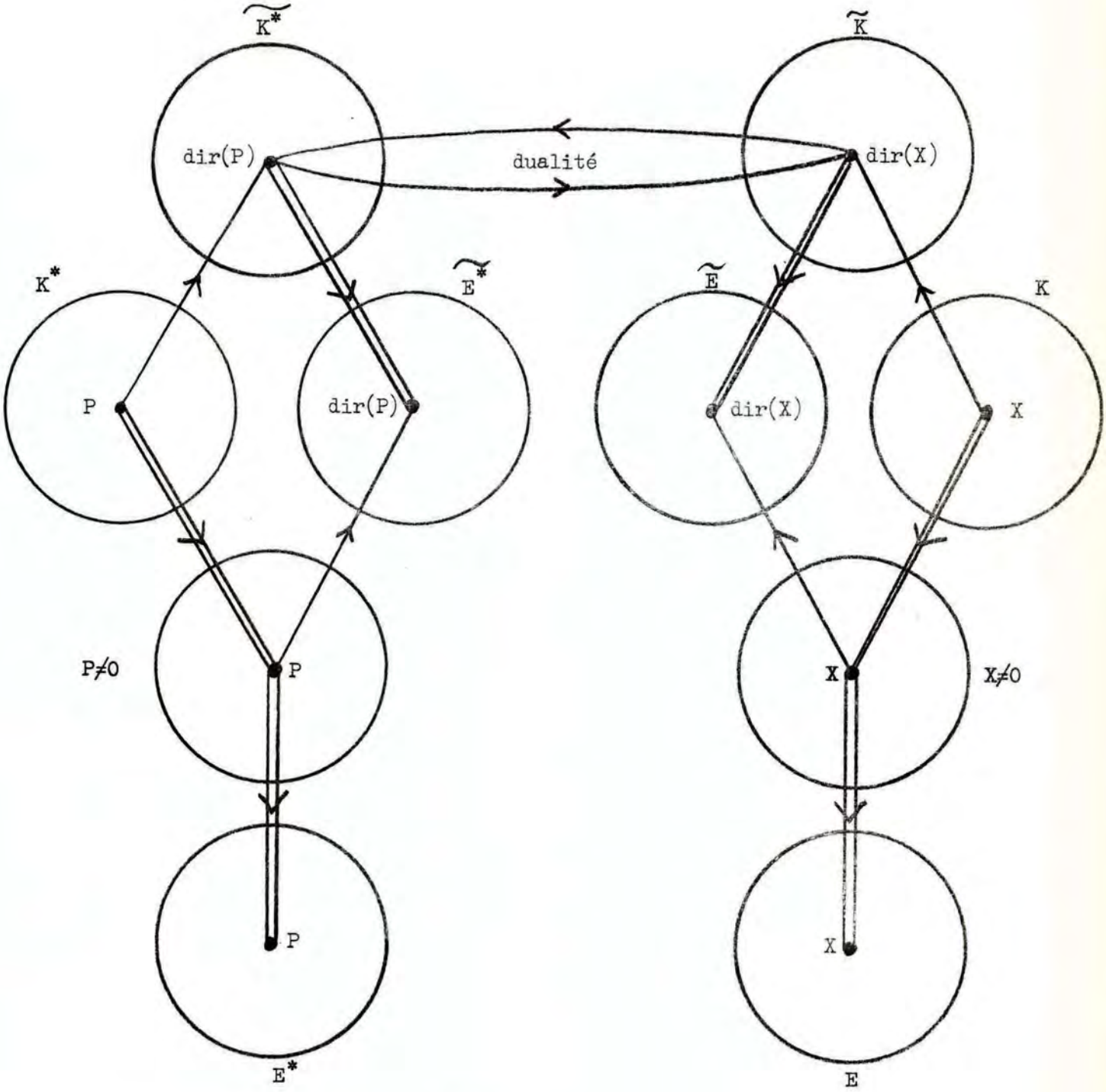

$\widetilde{K^*}$
$\widetilde{K}$
dir(P)
dualité
dir(X)
K^*
$\widetilde{E^*}$
$\widetilde{E}$
K
P
dir(P)
dir(X)
X
P≠0
P
X
X≠0
P
X
E^*
E

Figure 4

En utilisant l'équation du cône, on voit que ceci est équivalent à

(7.7) $$P = \lambda D(f)(X) \qquad (P \neq 0)$$

Par suite on voit que la propriété de normalité définit seulement la direction de P, et que si P est normal en X, il est aussi normal en λX ($\lambda \neq 0$) ; la condition (7.6) définit donc une application

(7.8) $$\mathrm{dir}(X) \to \mathrm{dir}(P)$$

de la variété $\tilde{X}$ dans l'espace projectif $\widetilde{E^*}$ associé au dual E^* de E. On vérifie que cette application est infiniment différentiable.

Définition :

(7.9) Nous dirons qu'un cône K est <u>régulier</u> si l'application (7.8) est un <u>plongement</u> de $\tilde{K}$ dans $\widetilde{E^*}$.

(7.10) S'il en est ainsi, (figure 4), l'ensemble de valeurs $\widetilde{K^*}$ de cette application possède une structure de variété de dimension $n - 2$ [G.R.(20.12)] ; son image réciproque K^* par dir, qui est l'ensemble des covecteurs normaux au cône en ses divers points, est un <u>cône</u>, qui s'appelle <u>cône dual</u> de K (ou cône supplémentaire).

Une équation éventuelle du cône dual K^*

(7.11) $$\varphi(P) = 0$$

s'appelle <u>équation tangentielle</u> du cône K ; par définition, on l'obtient à partir de l'équation "ponctuelle" (7.3) de K en éliminant λ et X entre les relations

(7.12) $$f(X) = 0 \,,\; P = \lambda D(f)(X) \,,\; P \neq 0$$

Théorème :

(7.13) Si K est un cône régulier, son cône dual K^* est régulier. Le cône dual de K^* est alors K (à condition d'identifier E avec son bi-dual $[E^*]^*$) ([1])

([1]) Voir [G.R.(25.33)]

En effet, si l'on dérive (7.4) par rapport à λ , il vient

(7.14) $\quad P.X = 0 \qquad$ si P est normal au cône en X

En dérivant (7.14), compte tenu de (7.6) , on trouve :

(7.15) $\quad [\ \delta P\ ] \ . \ X = 0$

ce qui montre que les vecteurs normaux au cône dual en P sont les vecteurs proportionnels à X , qui appartiennent tous à K .

C.Q.F.D.

On obtient donc une équation du cône à partir d'une équation tangentielle $\varphi(P) = 0$ par élimination de P et entre les relations

(7.16) $\quad \varphi\ (P) = 0 \quad , \quad X = \lambda D(\varphi)(P)$ (1) , $X \neq 0$

Exercice : cônes du second degré.

On appelle ainsi tout cône K solution d'une équation

(7.17) $\quad F(X)(X) = 0 \ , \ X \neq 0$ (F opérateur bi-linéaire symétrique à valeurs réelles, hyperbolique)

- Montrer que K est régulier si l'opérateur F est régulier.
- Montrer que le cône dual K* possède alors l'équation

(7.18) $\quad P.\ F^{-1}(P) = 0 \qquad P \neq 0$

et que K* est un cône du second degré.

- Effectuer l'élimination (7.16) et vérifier qu'on retrouve bien l'équation du cône.

- Champs de cônes.

Soit U une variété de dimension n (figure 5)

Nous appellerons champ de cônes de U une variété K , de dimension

---

(1) Cette formule suppose l'identification [G.R.(25.53)]de X avec un co-co-vecteur.

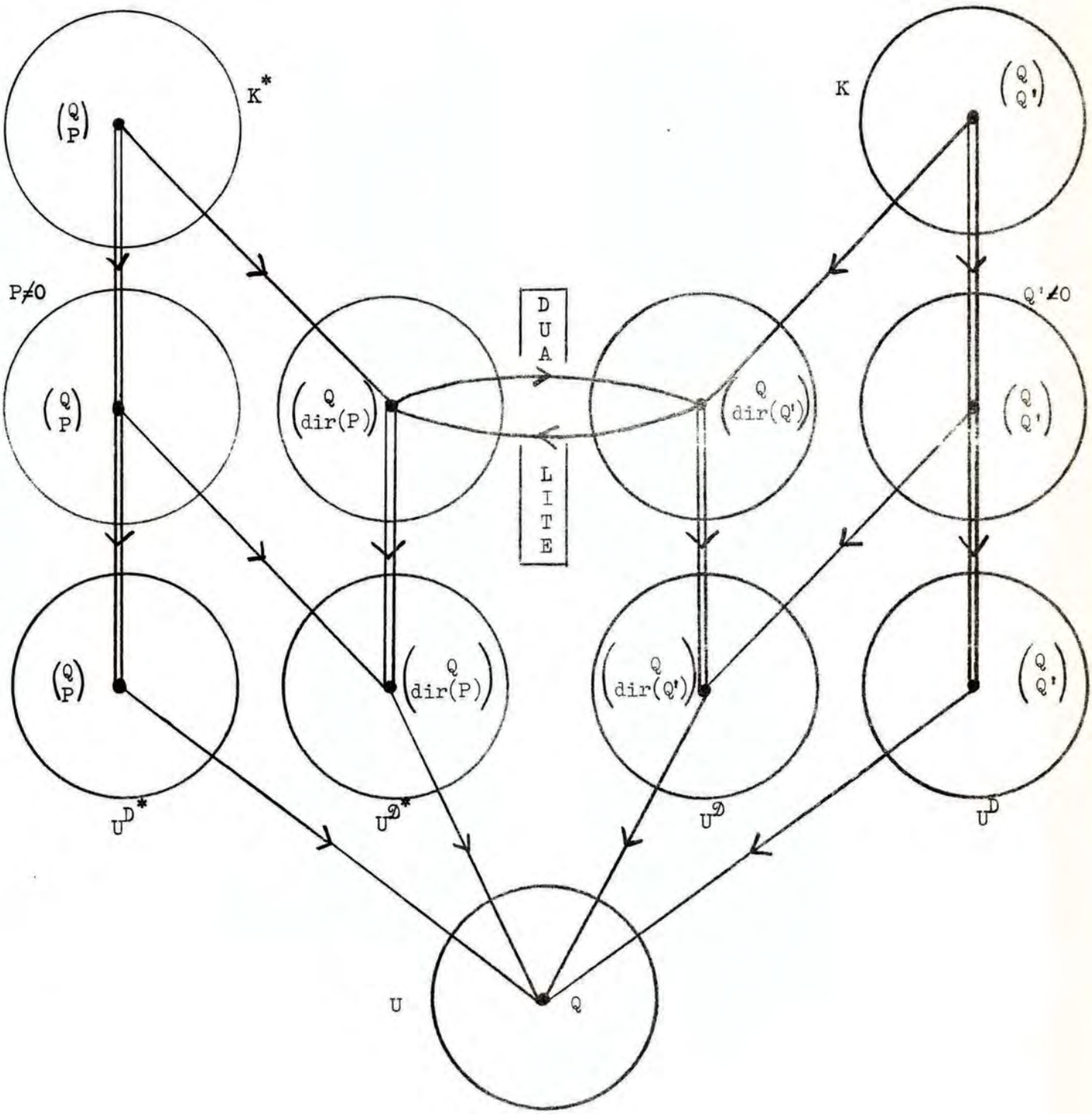


Figure 5

$2n - 1$, plongée dans l'espace U^D des vecteurs tangents telle que , pour chaque $Q \in U$, l'ensemble K_Q :

$$(7.19) \qquad \left[[Q' \in K_Q] \Longleftrightarrow \left[\begin{pmatrix} Q \\ Q' \end{pmatrix} \in K \right] \right]$$

soit un cône de l'espace vectoriel tangent à U en Q (1).

Supposons que les cônes Q_K soient tous réguliers (7.9) ; soit K^* l'ensemble de couples $\begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix}$ défini par :

$$(7.20) \qquad \left[\begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} \in K^* \right] \Longleftrightarrow \left[P \in K_Q^* \qquad [= \text{cône dual de } K_Q] \right]$$

K^* est une partie de l'espace de phases U^{D^*} de U ; si K^* est une variété plongée, de dimension $2n - 1$, elle possède une structure induite de variété symplectique de dimension impaire (Cf.(3.36)); nous pouvons définir ses caractéristiques, que nous appellerons <u>caractéristiques du champ de cônes</u> ; leurs projections sur U s'appelleront <u>extrêmales du champ de cônes</u>.

Théorème (<u>figure 6</u>).

(7.21)

Soit $\ell \begin{pmatrix} Q \\ Q' \end{pmatrix}$ un lagrangien de type II, jacobien, sur une variété U (6.29).

Si on désigne par a une variable réelle, les courbes décrites sur la variété $U \times R$ par la variable $\begin{pmatrix} Q \\ a \end{pmatrix}$, telles que

$$\begin{cases} \text{(I)} & Q \text{ décrit une extrêmale du lagrangien ;} \\ \text{(II)} & a' = \ell \begin{pmatrix} Q \\ Q' \end{pmatrix} \end{cases}$$

sont les extrêmales du champ de cônes défini sur $U \times R$ par la relation (II).

---

(1) On dit aussi que K est un <u>conoïde</u>.

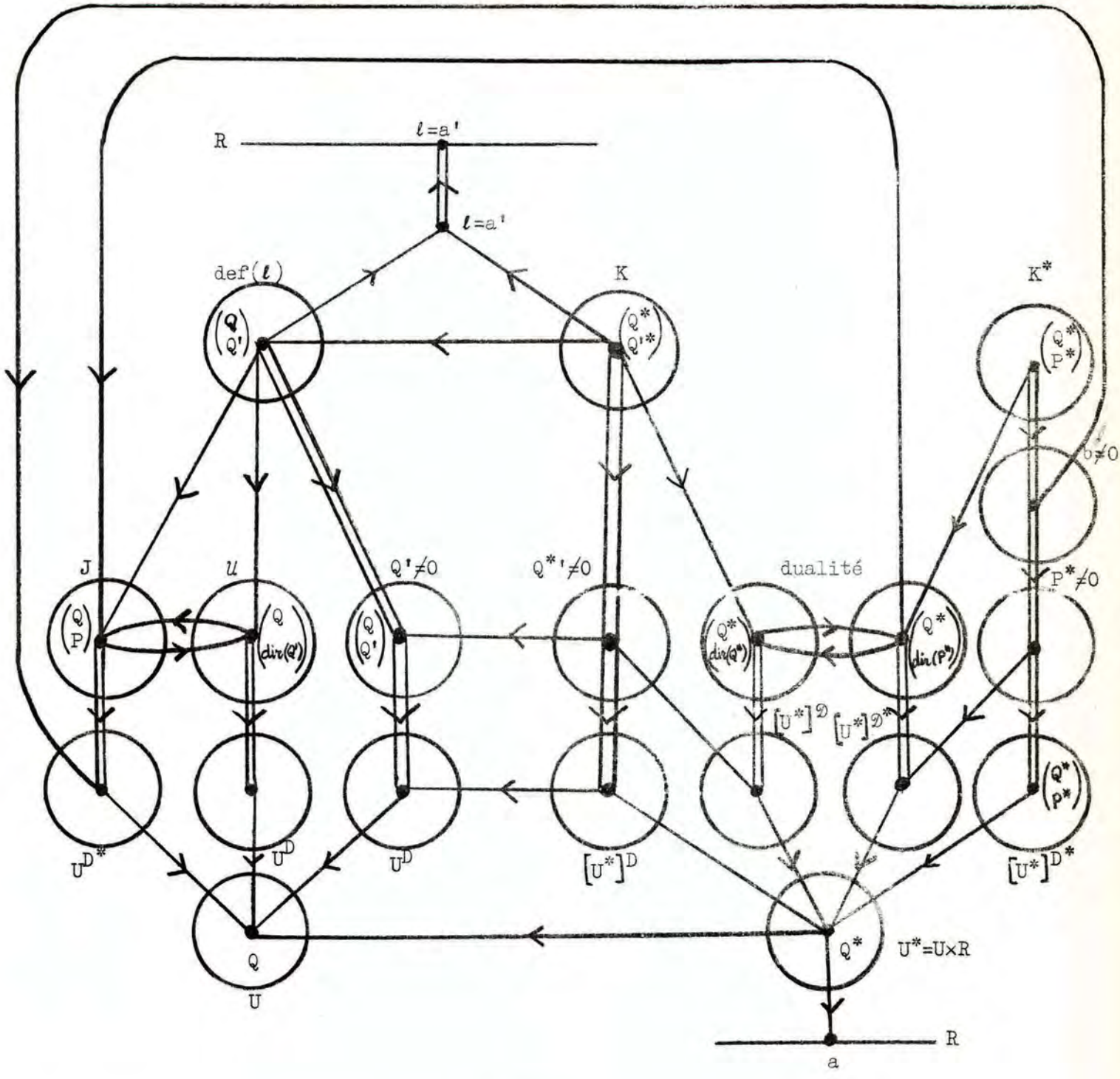

R
ℓ=a'
ℓ=a'
def(ℓ)
K
K*
J
u
Q'≠0
Q*'≠0
dualité
b≠0
P*≠0
[U*]^D
[U*]^D*
U^D*
U^D
U^D
[U*]^D
[U*]^D*
Q
U
Q*
U*=U×R
R
a

Figure 6

En écrivant qu'un covecteur $P^* = [\ \Pi\ b\ ]$, non nul , est ~~tangent~~ normal au cône associé au point $Q^* = \begin{pmatrix} Q \\ a \end{pmatrix}$, cône dont l'équation est $a' - \ell \begin{pmatrix} Q \\ Q' \end{pmatrix} = 0$,

on trouve

$$b \neq 0 \quad , \qquad \Pi = - b \frac{\partial \ell}{\partial Q'} \tag{7.22}$$

On peut donc caractériser la direction de P^* par la variable

$$P = - \frac{\Pi}{b} = \frac{\partial \ell}{\partial Q'} \tag{7.23}$$

Par hypothèse, la correspondance $\mathrm{dir}(Q^{*\prime}) \rightarrow \mathrm{dir}(P^*)$ est un <u>plongement</u> (6.29 a , note 1) : le cône est donc régulier ; le cône dual possède une équation globale

$$\varphi \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} = 0 \tag{7.24}$$

ou encore

$$\varphi \begin{pmatrix} Q \\ -\frac{\Pi}{b} \end{pmatrix} = 0 \tag{7.25}$$

qui est d'ailleurs l'équation de Jacobi.

Cette équation définit bien une variété plongée dans l'espace de phases de $U \times R$, formée par les couples $\begin{pmatrix} Q^* \\ P^* \end{pmatrix}$ vérifiant (7.25) ; on forme ses extrêmales, comme en (6.36) , en choisissant une carte et en formant les équations différentielles

$$\frac{-b\ dq^1}{\frac{\partial \varphi}{\partial p_1}} = \ldots = \frac{-b\ dq^n}{\frac{\partial \varphi}{\partial p_n}} = \frac{-b\ da}{\sum_j p_j \frac{\partial \varphi}{\partial p_j}} = \frac{-d[-b\ p_j]}{\frac{\partial \varphi}{\partial q^1}} = \ldots = \frac{-d[-b\ p_n]}{\frac{\partial \varphi}{\partial q^n}} = \frac{-db}{0} \tag{7.26}$$

auxquelles il faut joindre l'équation (7.25).

On constate immédiatement que ce système est équivalent à l'équation des caractéristiques de la variété de Jacobi J du lagrangien (écrite en (6.36)), assortie des conditions

(7.27) $$b = \text{Cte} \neq 0 \; ; \quad a' = \sum_j p_j \; q'^j \qquad \left[= \ell \quad \text{d'après l'identité d'Euler (6.11)} \right]$$

C.Q.F.D.

(7.28) - On voit que la variable a peut s'interpréter comme l'intégrale d'action, fonction de sa limite supérieure (Cf.(5.13)), puisque sa dérivée a' est égale au lagrangien ℓ ; c'est vrai même dans le cas d'un problème issu par paramétrisation d'un problème régulier (voir (6.9)).

La résolution du problème variationnel par les champs de cônes traite symétriquement les variables q^j (y compris t , si le problème est obtenu par paramétrisation) et l'action a ; cette plus grande symétrie permet de traiter de nouvelles classes de problèmes :

(7.29) - Ceux dans lequel le lagrangien ℓ est multiforme , et où par conséquent l'équation du cône $a' = \ell \begin{pmatrix} Q \\ Q' \end{pmatrix}$ ne se présente plus sous forme résolue par rapport à a' ; nous en verrons des exemples ci-dessous (7.31),(7.35).

(7.30) - Ceux dans lequel le lagrangien dépend de l'action. Nous n'étudierons pas ici de problèmes de cette classe.

- La méthode cônique est spécialement intéressante dans le cas des problèmes de type quadratique, c'est à dire quand les cônes sont du second degré (voir (7.17)). Ceci arrive lorsqu'on a affaire à un lagrangien de type I ou II ayant l'une des formes suivantes :

(7.31) $$\ell = x + A(Q') \pm \sqrt{y + 2B(Q') + C(Q')(Q')}$$

(7.32) $$\ell = \tfrac{1}{2} \; \frac{y + 2B(Q') + C(Q')(Q')}{x + A(Q')}$$

x et y étant scalaires, A et B linéaires, C bi-linéaire ; x , y , A , B , C peuvent dépendre de Q et de la variable t .

On rencontre de tels lagrangiens dans la recherche des <u>géodésiques</u> d'une variété riemannienne, du mouvement d'un <u>système mécanique</u> holonome avec fonction de forces, du mouvement d'une <u>particule chargée dans un champ électromagnétique</u> (en mécanique classique aussi bien qu'en relativité restreinte ou générale), etc.

Il suffit alors d'inverser une matrice symétrique pour former les équations aux variations (voir ci-dessus (7.18)).

(7.33) - Il faut remarquer que, contrairement au cas traité au § 6, chaque extrémale est la projection d'une <u>infinité</u> de caractéristiques , que l'on obtient en donnant à l'intégrale première b toutes les valeurs non nulles. Notons aussi que le champ de cônes et son système de caractéristiques sont invariants par le groupe [à 2 paramètres λ et μ] des substitutions

(7.34) $$P^* \to \lambda P^* \qquad \begin{pmatrix} Q \\ a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} Q \\ a+\mu \end{pmatrix} \qquad (\lambda \neq 0)$$

Donnons enfin la règle pratique :

(7.35) Soit $\ell\,(q^1,\ldots q^n\,,\,q'^1,\ldots q'^n)$ un lagrangien du type II (par exemple celui qu'on obtient par la règle de paramétrisation (6.10)).

Pour le traiter par la méthode cônique, on écrit l'équation

$$a' = \ell\,(q^1,\ldots q^n\,,q'^1,\ldots q'^n)\;;$$

on la met sous la forme

$$\Lambda\,(q^1,\ldots q^n,\ q'^1,\ldots q'^n, a') = 0$$

homogène par rapport aux q'^j et a' .

On calcule les variables conjuguées des q^j et de a :

$$\diamondsuit \qquad P_j = \frac{\partial \Lambda}{\partial q'^j} \qquad\qquad b = \frac{\partial \Lambda}{\partial q'}$$

et on cherche à éliminer les q'^j et a' dans ces équations $\diamondsuit$; si le problème est jacobien, on arrive à une équation

$$\oint \qquad \varphi(q^1,\ldots q^n\ ,\ p_1,\ldots p_n\ ,\ b) = 0$$

que l'on traite par la méthode (6.35),(6.36) : on résout les équations différentielles

$$\frac{dq^1}{\frac{\partial \varphi}{\partial p_1}} = \ldots = \frac{dq^n}{\frac{\partial \varphi}{\partial p_n}} = \frac{da}{\frac{\partial \varphi}{\partial b}} = \frac{-dp_1}{\frac{\partial \varphi}{\partial q^1}} = \ldots = \frac{-dp_n}{\frac{\partial \varphi}{\partial q^n}} = \frac{-db}{\frac{\partial \varphi}{\partial a}} \neq 0$$

compte tenu de l'intégrale première $\oint$.

- On retrouvera les variables p_j usuelles en faisant $b = -1$.

Exercice :

(7.36) Etudier le problème du plus court chemin d'un point à un autre (6.46a) par la méthode précédente .

- On mettra l'équation du cône sous la forme

$$a'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0$$

en mettant, ce qui est loisible, un double signe devant le radical de

(6.46 a) et en permettant à x' de s'annuler.

- Montrer que le problème est évolutif, et que l'on peut interpréter la variété V de ses solutions comme l'ensemble des droites orientées de l'espace euclidien classique.

- Former un atlas de V, et calculer sa forme de Lagrange.

- * Montrer que V est simplement connexe (on pourra utiliser la méthode [G.R., note II]).

- Montrer que la transformation T qui consiste à changer l'orientation des droites est une involution anticanonique.

- En déduire que la variété à 4 dimensions V' des droites de l'espace admet V comme revêtement universel [G.R.(10.26)] ; quel est le groupe de Poincaré de V' ?

- Interpréter les sous-variétés isotropes de dimension maximale 2 (th. (1.2)) de la variété V' (congruences de normales).

- On considère un milieu réfringent $\mathcal{R}$ qui occupe une certaine région de l'espace ; un rayon lumineux A pénètre dans le milieu, un rayon B en ressort ; en considérant les droites A et B, orientées par le sens de

propagation de la lumière, comme des éléments de V, montrer que la tranformation $[A \to B]$ est un glissement canonique (on utilisera le principe de Fermat, suivant lequel les rayons lumineux parcourent des

extrêmales de l'intégrale $\int n(x,y,z)\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, l'indice de réfraction n étant égal à 1 en dehors de $\mathcal{R}$).

- * Ce résultat peut-il s'étendre au cas d'un système catadioptrique, c'est à dire qui contient des miroirs et des dioptres (surfaces de discontinuité de n) ?

- * Montrer que l'on peut interpréter la <u>photométrie</u> en associant à chaque rayon lumineux une <u>intensité</u> scalaire w , telle que la puissance transportée par un faisceau (= ouvert de V) Ω soit égale à

$$\int_{\Omega} w\rho$$

ρ étant la <u>densité de Liouville</u> de la variété V (déf.(2.14)).

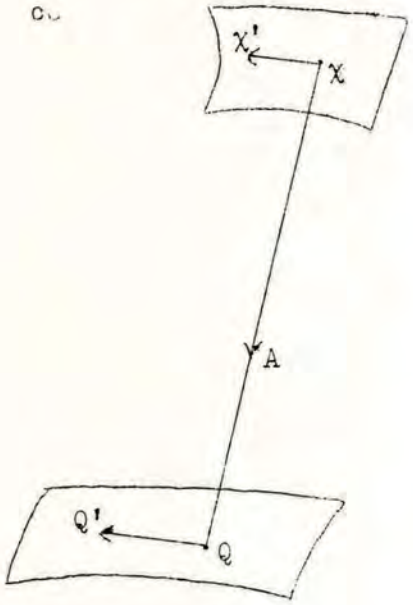
Application : comment voit-on un fond uniformément brillant à travers un milieu réfringent ?

§ 8 - THEOREME DE NOETHER .

Considérons un lagrangien ℓ , que nous supposerons indépendant de t :

(8.1) $$\ell = \ell \begin{pmatrix} Q \\ Q' \end{pmatrix}$$ (hypothèses (5.2))

Pour chaque point Q de la variété U où est défini ℓ , la correspondance $Q' \to \ell$ définit un <u>opérateur covariant d'ordre 1</u> [G.R.(25.1)] ; le lagrangien définit donc un <u>champ d'opérateurs covariants sur U</u> ; on peut donc définir l'image réciproque du lagrangien par toute application différentiable A [$\chi \to Q$] à valeurs dans U [G.R.(25.33) et (25.47)].



En notant $\lambda \begin{pmatrix} \chi \\ \chi' \end{pmatrix}$ le lagrangien ainsi défini, les formules indiquées donnent :

(8.2) $$\lambda \begin{pmatrix} \chi \\ \chi' \end{pmatrix} = \ell \begin{pmatrix} A(\chi) \\ D(A)\ (\chi)\ (\chi') \end{pmatrix}$$

que l'on peut si l'on veut prendre comme définition de l'image réciproque par A du lagrangien ℓ .

(8.3) Il en découle quelques propriétés évidentes : on peut définir le <u>lagrangien induit</u> par ℓ sur une sous-variété Υ de U comme l'image réciproque de Υ par le plongement 1_Υ de Υ dans U [G.R.(25.49)] ;

l'image réciproque de ℓ par A.B est l'image réciproque par B de l'image réciproque par A [G.R.(25.48)].

On vérifie immédiatement la formule

(8.4)
$$\int_{t_0}^{t_1} \ell\left(\begin{matrix} Q \\ \frac{dQ}{dt} \end{matrix}\right) dt = \int_{t_0}^{t_1} \lambda\left(\begin{matrix} \chi \\ \frac{d\chi}{dt} \end{matrix}\right) dt$$

[λ = image réciproque de ℓ par A ; $Q \equiv A(\chi)$]

qui montre, grâce à (5.16), que :

(8.5) Si l'image par A d'une courbe $[t \to \chi]$ est une extrêmale de ℓ, la courbe $[t \to \chi]$ est une extrêmale de λ.

En remplaçant dans ce théorème A par A^{-1}, on en déduit :

(8.6) Si A est un <u>difféomorphisme</u>, en particulier un <u>glissement</u> de U, l'image par A d'une extrêmale de λ est une extrêmale de ℓ.

- Il ne faut pas oublier la condition relative à A ; ainsi, si Υ est une sous-variété plongée dans U, de dimension inférieure, les extrêmales de λ sont des courbes tracées dans Υ, qui ne sont pas, en général, des extrêmales de ℓ.

(8.7) Soit ℓ un lagrangien indépendant de t, défini sur une variété U ; nous dirons qu'un glissement A de U <u>invarie</u> ℓ si l'image réciproque de ℓ par A est une restriction de ℓ (ou ℓ, bien entendu).

(8.8) Les glissements qui invarient ℓ forment un recueil; ceci peut se déduire du théorème [G.R.(15.12)].

Nous dirons de même qu'un champ de vecteurs infiniment différentiable

(8.9) $$f \quad [Q \to \delta Q]$$

invarie un lagrangien ℓ si les glissements $e^{\theta f}$ invarient ℓ ($\forall\, \theta \in R$) .

Théorème de Noether :

(8.10) Si un glissement infinitésimal $Q \to \delta Q$ invarie un lagrangien ℓ, indépendant de t, la grandeur

$$P.\,\delta Q \qquad \left[P = \frac{\partial \ell}{\partial Q'}\right]$$

est constante sur les extrêmales .

Soit en effet $[t \to Q]$ un arc d'extrêmale ; si on prend l'image de cette extrêmale par $e^{-\theta f}$, la formule (8.4) donne ici $(\ell = \lambda)$:

$$a = \int_{t_o}^{t_1} \ell(\chi, \frac{d\chi}{dt})dt = \int_{t_o}^{t_1} \ell(Q, \frac{dQ}{dt})\,dt$$

$$[\,\chi = e^{-\theta f}(Q)]$$

(8.11) La dérivée δa de a par rapport à θ est donc nulle ; en appliquant la formule (5.17), on trouve

$$0 = \delta a = [P.\delta Q]_{t_o}^{t_1} \;;$$

comme cette propriété est indépendante des valeurs t_o et t_1 choisies, $P.\delta Q$ est bien une constante sur l'extrêmale choisie.

C.Q.F.D.

En considérant les lagrangiens comme champs d'opérateurs covariants (8.1), on peut définir la dérivée de Lie $\delta_L \ell$ d'un lagrangien ℓ pour un champ de vecteurs $[Q \to \delta Q]$; en appliquant les méthodes de calcul de [G.R. § 23](1), on arrive à l'énoncé :

---

(1) Les fibres de la racine des opérateurs covariants [G.R.(25.36),(25.37)] possèdent une structure invariante d'espace vectoriel [G.R.(12.15)]; le fait que sa dimension soit infinie n'entraîne pas ici de difficulté particulière.

La dérivée de Lie $\delta_L \ell$ d'un lagrangien ℓ (indépendant de t) par un champ de vecteurs $[\, Q \to \delta Q \,]$ est donnée à l'aide d'une carte $q \to Q$ par la formule

(8.12) $$\delta_L \ell = \frac{\partial \ell}{\partial q^j}\ \delta q^j + \frac{\partial \ell}{\partial q'^j}\ \partial_k [\delta q^j]\ q'^k \qquad \text{(convention d'Einstein);}$$

(8.13)' - Pour que ℓ soit invariant par $[Q \to \delta Q]$, il faut et il suffit que $\delta_L \ell = 0$

On peut aussi, sans se référer à la théorie des dérivées de Lie, prendre (8.12) comme définition de $\delta_L \ell$ (après avoir vérifié que cette définition est indépendante du choix de la carte) et vérifier directement (8.13).

En joignant cette formule (8.12) à la formule (5.11), on voit immédiatement que

(8.14) Si l'on désigne par Π la dérivée variationnelle d'un lagrangien ℓ (indépendant de t) sur une courbe $[t \to Q\ ,\ Q' \equiv \frac{dQ}{dt}\ ]$, on a pour tout champ de vecteur $[Q \to \delta Q\ ]$:

$$\delta_L \ell = \Pi . \delta Q + \frac{d}{dt} [P . \delta Q] \qquad \left[P = \frac{\partial \ell}{\partial Q'}\ \right]$$

Cette formule fournit une nouvelle démonstration du théorème de Noether : elle montre en effet que si la courbe est une extrêmale $[\, \Pi \equiv 0\ ]$ et si $\delta_L \ell \equiv 0$, $\frac{d}{dt}\ [P . \delta Q]$ est nul.

Elle fournit aussi une

Réciproque du théorème de Noether :

(8.15) Soit $[Q \to \delta Q\ ]$ un champ de vecteurs défini sur une variété U ; s'il existe une famille d'extrêmales d'un lagrangien ℓ, qui recouvrent U, et sur chacune desquelles $P . \delta Q$ est constant, $[Q \to \delta Q]$ invarie ℓ.

Cas des lagrangiens dépendant de t .

On se ramène immédiatement au cas précédent par paramétrisation [(6.8),(6.10)] ; en appliquant notamment (6.5) , (6.6) , (6.42) et (8.12) on obtient une deuxième forme du théorème de Noether :

- L'image réciproque d'un lagrangien de type I

$$\ell \begin{pmatrix} t \\ Q \\ Q' \end{pmatrix}$$

par une application

$$\begin{pmatrix} \theta \\ \chi \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} t \\ Q \end{pmatrix}$$

est le lagrangien λ défini par

(8.16)
$$\lambda \begin{pmatrix} \theta \\ \chi \\ \chi' \end{pmatrix} = \ell \begin{pmatrix} t \\ Q \\ \dfrac{\frac{\partial Q}{\partial \theta} + \frac{\partial Q}{\partial \chi}\chi'}{\frac{\partial t}{\partial \theta} + \frac{\partial t}{\partial \chi}\chi'} \end{pmatrix} \times \left[\frac{\partial t}{\partial \theta} + \frac{\partial t}{\partial \chi}\chi' \right]$$

- Si un champ de vecteurs f :

$$f \begin{pmatrix} t \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta t \\ \delta Q \end{pmatrix}$$

invarie un lagrangien ℓ (^{1}) , la quantité

(8.17)
$$P.\,\delta Q - h\,\delta t \qquad [h = P.Q' - \ell\,]$$

est constante sur les extrêmales.

- Il est pour cela nécessaire et suffisant que, dans un atlas, on ait

(8.18)
$$\frac{\partial \ell}{\partial t}\,dt + \frac{\partial \ell}{\partial q^j}\,\delta q^j + \frac{\partial \ell}{\partial q'^j} \times \left[\frac{\partial}{\partial t} + q'^k\,\partial_k \right] \left[\delta q^j \right] - k \times \left[\frac{\partial}{\partial t} + q'^k\,\partial_k \right] \left[\delta t \right] \equiv 0$$

(^{1}) C'est à dire si l'image réciproque de ℓ par les e^{sf} est une restriction de ℓ .

On voit en particulier , si $\frac{\partial \ell}{\partial t} \equiv 0$, que le lagrangien est invariant par $\delta t = 1$, $\delta q^j \equiv 0$, donc que $-h$ est constant sur les extrêmales ; le théorème de Noether permet aussi de retrouver les intégrales premières $p_2, \ldots p_n$ dans le cas du paramètre principal (6.37).

- Notons enfin que le théorème de Noether peut aussi s'appliquer au formalisme cônique (§7) , avec l'énoncé suivant que le lecteur précisera aisément :

(8.19) Si un champ de vecteurs $Q \to \delta Q$ invarie un champ de cônes (7.20) , la quantité $P.\delta Q$ est constante sur les caractéristiques de ce champ.

En appliquant ce résultat à un problème cônique déduit d'un lagrangien jacobien du type II par la méthode (7.21) , (7.35) , on en déduit l'énoncé suivant, facile à vérifier directement :

Théorème de Noether généralisé :

(8.20) Soit ℓ un lagrangien du type II sur une variété U .

- Pour qu'un champ de vecteurs de $U \times R$

$$\begin{pmatrix} Q \\ a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \delta Q \\ \delta a \end{pmatrix}$$

invarie le champ de cônes

(8.21) $$a' = \ell \begin{pmatrix} Q \\ Q' \end{pmatrix}$$

il faut et il suffit que , dans les cartes d'un atlas :

(8.22) $$\frac{\partial \ell}{\partial q^j}\ \delta q^j + \frac{\partial \ell}{\partial q'^j}\ \partial_k [\ \delta q^j]\ q'^k - \ell \frac{\partial}{\partial a} [\delta a] - \partial_k [\delta a]\ q'^k = 0$$

- Alors la grandeur

(8.23) $$P.\ \delta\ Q - \delta\ a$$

est constante sur les extrêmales (moyennant la condition (8.21)).

Le théorème de Noether explique pourquoi la variable b conjuguée de l'action a est une intégrale première ; notons que nous avons fait $b = -1$, dans l'énoncé précédént , pour retrouver les p_j habituels (voir (7.35)).

Indiquons les deux cas particuliers suivants:

(8.24) Si un champ de vecteurs $[\, Q \to \delta Q]$ est tel que

$$\delta_L \ell = C \ell \qquad (C = \text{Cte} \; ; \; \delta_L \ell \text{ est donné par (8.12)})$$

$P . \delta Q - C a$ est constant sur les extrêmales (moyennant (8.21)).

(8.25) - S'il existe un champ de vecteurs $[\, Q \to \delta Q]$ et un champ scalaire $[\, Q \to \alpha \,]$ tels que

$$\delta_L \ell = \nabla^{\alpha} . Q' \quad , \qquad \text{(voir (8.12))}$$

$P . \delta Q - \alpha$ est constant sur les extrêmales.

On vérifie immédiatement que ce dernier théorème fournit toutes les intégrales premières qui sont fonctions affines ou linéaires de P .

- Soit ℓ un lagrangien du type II sur une variété U (voir la figure 3).

Si A est un difféomorphisme de U , A se relève par un glissement A^D de l'espace fibré U^D des vecteurs tangents à U , défini par

(8.26)
$$A^D \begin{pmatrix} Q \\ Q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(Q) \\ D(A)(Q)(Q') \end{pmatrix} \qquad \text{[G.R. (12.7)]}$$

et l'on a

(8.27)
$$\left[A^{-1}\right]^D = \left[A^D\right]^{-1}$$

et pour tout autre difféomorphisme B

(8.28)
$$\left[A.B\right]^D = A^D . B^D$$

[G.R. (12.9), (12.8)].

- L'ensemble des difféomorphismes globaux de U qui invarient le lagrangien ℓ forme un groupe [(8.8), G.R. (3.4)]; soit G un de ses sous-groupes .

-Si A $\in$ G, on a par hypothèse (8.2) :

$$(8,29) \qquad \ell\left(A^D\begin{pmatrix} Q \\ Q' \end{pmatrix}\right) = \ell\begin{pmatrix} Q \\ Q' \end{pmatrix}$$

ce qui montre que A^D opère sur l'espace def(ℓ) (figure 3).

-Du fait que l'application $\begin{pmatrix} Q \\ Q' \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} Q \\ \mathrm{dir}(Q') \end{pmatrix}$ est un homomorphisme d'espace fibré [(0.6); G.R.(13.2)] , on déduit [G.R.(7.9)] que le relèvement $A^{\mathcal{D}}$ de A à l'espace fibré $U^{\mathcal{D}}$ des directions tangentes à U laisse invariant l'ensemble $\mathcal{U}$ (fig.3).

Nous savons que A conserve les extrêmales du lagrangi n (8.5); le théorème (6.22) montre que $A^{\mathcal{D}}$ conserve les caractéristiques de $\mathcal{U}$, c'est-à-dire que $A^{\mathcal{D}}$ opère sur l'espace $\hat{\mathcal{U}}$ de ces caractéristiques, dessiné fig.3.

ù Le relèvement A^{D*} est un glissement canonique de l'espace de phases U^{D*} (3.33). Le calcul montre immédiatement que l'application $f\left[\begin{pmatrix} Q \\ Q' \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix}\right]$, définie sur def($\ell$) par la relation $p = \frac{\partial \ell}{\partial Q'}$ et dessinée sur la figure 3, vérifie $f.A^D = A^{D*}.f$; il en résulte que A^D opère sur l'ensemble J (= variété de Jacobi si le problème est jacobien), et que l'application $A^{\mathcal{D}}$ conserve la forme σ de la variété $\mathcal{U}$ (notation (6.18)), ce qui

montre à nouveau que cet opérateur conserve les caractéristiques ; si la variété $\mathcal{U}$ est <u>évolutive</u> , nous voyans de plus que $A^{\mathcal{D}}$, qui opère sur la <u>variété canonique</u> $\hat{\mathcal{U}}$ des solutions (6.26), conserve sa forme de Lagrange $\hat{\sigma}$ (6.27) .

On obtient ainsi un <u>glissement canonique</u> de $\hat{\mathcal{U}}$ (2.11) .

On peut résumer l'étude précédente en disant que tout difféomorphisme global A de U , s'il invarie ℓ , définit avec ses relèvements A^{D} , $A^{\mathcal{D}}$, A^{D*} un <u>foncteur, qui applique la catégorie définie par le diagramme 3 sur elle même</u>; ou , si l'on préfère , un <u>endomorphisme</u> de cette catégorie.

Mais les formules (8.27),(8.28) et les formules analogues valables pour les deux autres relèvements montrent en fait que ce foncteur est <u>inversible</u> et que l'on obtient par ce procédé un <u>homomorphisme du groupe G dans le groupe des automorphismes de la catégorie</u> ; nous savons de plus que les foncteurs obtenus conservent notamment la structure canonique de la variété des solutions, donc que nous avons représenté le groupe G dans le groupe $\hat{G}$ des glissements canoniques globaux de cette variété .

-Etudions maintenant cette représentation du point de vue infinitésimal . Il peut arriver que le groupe G soit un groupe de Lie, et que son algèbre de Lie puisse être définie par des champs de vecteurs $F[Q \to \delta Q]$ de U qui invarient le lagrangien, au sens (8.9) ; s'il est connexe le groupe G est alors engendré par les $e^{\theta F}$, lorsque θ parcourt R et F l'algèbre de Lie .

En représentant comme plus haut, $e^{\theta F}$ par un foncteur, et en dérivant par rapport à θ les opérateurs obtenus, nous pourrons effectuer cette étude infinitésimale ; on voit notamment que le glissement infinitésimal de

l'espace de phases U^{D*} est le gradient (au sens (2.30)) de la variable dynamique $P.\delta Q$ (théorème (3.34)) .

Le théorème de Noether, suivant lequel $\alpha = P.\delta Q$ est une intégrale première des caractéristiques peut s'exprimer en disant que α, qui est aussi définie sur u, est l'image réciproque par la projection $[x \to \hat{x}]$ (fig.3) d'une variable dynamique $\hat{\alpha}$ de $\hat{u}$; nous obtenons ainsi une <u>interprétation simple du théorème de Noether</u> : $\hat{\alpha} = P.\delta Q$ est le générateur du relèvement $[\hat{x} \to \delta\hat{x}]$ du champ de vecteur $Q \to \delta Q$, c'est à dire que l'on a :

(8.30) $$\delta\hat{x} = \text{grad}\ \hat{\alpha}$$

le gradient étant pris sur $\hat{u}$.

(8.31) Si la variété $\hat{u}$ est <u>quantifiable</u> , il en résulte notamment que ce glissement infinitésimal sera <u>relevable</u> à tout espace fibré quantifiable de base $\hat{u}$ (voir la remarque (4.24)).

Si le groupe G est connexe, on pourra donc relever sur l'espace quantifiant sa représentation $G_{\hat{u}}$ sur $\hat{u}$; si $\hat{u}$ est <u>connexe</u>, on sait que l'on obtiendra ainsi une extension de $G_{\hat{u}}$ par le <u>tore</u> (théorème (4.19)).

CHAPITRE III

QUANTIFICATION DES PROBLEMES DYNAMIQUES

§9 : QUANTIFICATION A LA HEISENBERG.

Considérons le système dynamique simple constitué par une particule de masse m, soumise à un champ de forces dérivant d'une fonction de forces -w et que l'on se propose de traiter en mécanique non relativiste .

Le principe d'Hamilton nous indique que le mouvement de la particule est décrit par l'une des extrêmales du lagrangien

(9.1) $$\ell\ (t,q^j,q'^j) \equiv \frac{m}{2}\ g_{jk}\ q'^j\ q'^k - w(t,q^j)$$

(on désigne par q^j trois coordonnées d'espace , par g_{jk} les composantes du tenseur métrique euclidien).

Appliquons (5.9) : on a

(9.2) $$p_j = m\ g_{jk}\ q'^k$$

ce qui montre que l'opérateur $\frac{\partial P}{\partial Q'}$ est représenté par la matrice des g_{jk}, donc qu'il est régulier : on se trouve donc en face d'un problème variationnel régulier (5.20). On voit aussi que les p_j sont les composantes covariantes de l'impulsion de la particule .

On est d'ailleurs dans le cas hamiltonien (6.40) ; on trouve en effet, en faisant le calcul [(6.42),(6.43)] :

(9.3) $$h = \frac{1}{2m}\ g^{jk}\ p_j\ p_k + w(t,q^j) \quad [= H(t,q^j,p_j)]$$

expression dans laquelle les g^{jk} sont les composantes contravariantes du tenseur métrique [G.R.(29.12)].

On peut appliquer les équations d'Hamilton (6.44) ; on trouve ainsi l'équation différentielle des caractéristiques de la variété de Jacobi :

$$\frac{d\,q^j}{dt} = \frac{1}{m}\; g^{jk}\, p_k \quad ; \qquad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial w}{\partial q^j}$$

et par élimination des p_j , celle des extrêmales :

$$m\;\frac{d^2 q^j}{dt^2} = g^{jk}\cdot\frac{\partial w}{\partial q^k}$$

on reconnait bien l'équation de Newton $m\,\vec{\Gamma} = \vec{F}$ (= -grad w)

Dans le cas où w ne dépend pas de t, on sait que $H(t,q^j,p_j)$ est une intégrale première (8.18,19) : on voit qu'elle s'interprète comme l'énergie totale de la particule, somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle .

Pour quantifier ce problème , le procèdé habituel consiste à construire un formalisme hamiltonien , c'est à dire :

(9.4)

a) Un espace vectoriel E ;

b) des opérateurs linéaires P_j, Q^j et H, opérant sur E, dépendant de t , tels que :

$$P_j.P_k - P_k.P_j = 0 \qquad Q^j.Q^k - Q^k.Q^j = 0$$

c)
$$P_j.Q^k - Q^k.P_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ -i\hbar\, 1_E & \text{si } j = k \quad (1) \end{cases}$$

(1) Constante de Planck = $2\pi\hbar$.

d) $i\hbar \dfrac{dP_j}{dt} = P_j.H - H.P_j \quad ; \quad i\hbar \dfrac{dQ^j}{dt} = Q^j . H - H.Q^j$

(9.5) Si la dimension de E était finie, la relation(c), avec j=k :

$$P_j . Q^j - Q^j . P_j = -i\hbar \, 1_E$$

serait contradictoire : en effet, la trace du premier membre devrait être nulle, et la trace du second membre serait $-i\hbar$ dimension (E) .

On doit donc supposer que E est un espace de dimension infinie ;

on fait en général les hypothèses suivantes :

E est un espace de Hilbert ;

Les opérateurs P_j, Q^j, H sont hermitiens .

En fait, on est amené à construire des opérateurs qui ne sont pas bornés, donc qui ne sont pas définis sur E tout entier ; le sens précis à donner aux relations de commutation (c) et (d) nécessite donc quelques éclaircissements .

On souhaite,d'autre part, que ce système possède une correspondance avec le système classique défini par le lagrangien ℓ ; dans le cas du problème (9.1) , on exprime cette correspondance en sauvegardant formellement la formule (9.3) , c'est à dire en posant

(9.6) $$H = \frac{1}{2m} \, g^{jk} \, P_j . P_k + w(t, Q^j)$$

L'expression $w(t,Q^j)$ peut se calculer sans ambiguité, si les opérateurs Q^j et la fonction w s'y prêtent , parceque les Q^j commutent deux à deux (9.4 c) ; pour donner un sens à l'expression $g^{jk} P_j . P_k$, on est amené à choisir des coordonnées cartésiennes, afin que les g^{jk} ne dépendent pas

des q^j, et qu'on puisse les traiter comme des nombres et non comme des opérateurs .

En général, pour vérifier les relations (9.4), on commence par choisir des valeurs initiales (pour $t = t_o$) $P_{j\,o}$ et $Q^j{}_o$ des opérateurs P_j et Q^j vérifiant les relations (9.4 c) ;on utilise ensuite les conditions (9.4 d) comme équations différentielles d'évolution, ce qui permet -peut-être- d'obtenir les P_j et Q^j en fonction de t ; on peut ensuite porter ces valeurs dans les équations (9.4 d) , et constater qu'elles restent vérifiées pour toutes les valeurs de t .

Il reste évidemment à vérifier dans quelle mesure les résultats obtenus dépendent des choix successifs qui ont été faits : le choix d'un système de coordonnées cartésiennes de l'espace d'une part ; d'autre part le choix des valeurs initiales des P_j et des Q_j .

Enfin, il faut évidemment chercher de quelle façon cette méthode peut s'étendre à d'autres lagrangiens, en particulier à un lagrangien relativiste.

Pour conserver la substantifique moëlle de cette quantification,en essayant d'éviter les difficultés mathématiques qu'elle soulève(notamment le caractère factice de la formule (9.6)), nous allons chercher une interprétation moins formelle des relations (9.4) et de la construction de H.

§ 10 QUANTIFICATION A LA DIRAC

Suivant l'idée originale de Dirac, on peut chercher à rapprocher les relations de commutation (9.4) des propriétés des crochets de Poisson.

(10.1) Reportons-nous en effet à (5.25) : on sait que les extrêmales du lagrangien (ici les trajectoires d'espace-temps possibles de la particule) forment une variété canonique V de dimension 2n (ici 6) ; nous avons désigné par F_t l'opération qui fait correspondre à chaque extrêmale x la valeur $F_t(x)$ de la phase $\begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix}$, à l'instant t, sur l'extrêmale x ; pour tout t, F_t est une application de V sur U^{D*}, U désignant la variété des q^j (ici l'espace d'Euclide); nous savons que F_t transforme la forme de Lagrange de V en celle de U^{D*} (5.25).

(10.2) -Par définition, les <u>variables dynamiques</u> du problème seront les fonctions scalaires (infiniment différentiables) sur cette variété V (2.29) ; on constate donc que si l'on se donne une fonction scalaire α sur $R \times U^{D*}$ (figure 1) :

(10.3)
$$\alpha \equiv \alpha \begin{pmatrix} t \\ Q \\ P \end{pmatrix}$$

et si l'on pose

(10.4)
$$\overset{t}{\alpha}(x) = \alpha \begin{pmatrix} t \\ F_t(x) \end{pmatrix}$$

on définit pour chaque valeur de t, une variable dynamique $\overset{t}{\alpha}$.

-On a défini le crochet de Poisson de deux variables dynamiques (2.34) et calculé celui-ci sur un espace de phases (3.31); du fait que F_t conserve la forme de Lagrange, on tire immédiatement la formule

(10.5)
$$\left[\overset{t}{\alpha}, \overset{t}{\beta} \right]_P = \overset{t}{\left[\frac{\partial \alpha}{\partial p_j} \frac{\partial \beta}{\partial q^j} - \frac{\partial \alpha}{\partial q^j} \frac{\partial \beta}{\partial p^j} \right]}$$

- D'autre part la dérivée par rapport à t de la variable dynamique $\overset{t}{\alpha}$ est encore une variable dynamique (puisque la correspondance $t \to \overset{t}{\alpha}$ prend ses valeurs dans l'espace fonctionnel des variables dynamiques) , que nous allons noter $\frac{d}{dt}\left[\overset{t}{\alpha}\right]$.

Les équations d'Hamilton (6.44)) montrent que les composantes de $\frac{d}{dt} F_t(x)$ dans la carte (3.23) sont

$$\frac{dq^j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j} \; , \; \frac{dp_j}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q^j} \tag{10.6}$$

En dérivant (10.4) par rapport à t , on a donc

$$\frac{d}{dt}\left[\overset{t}{\alpha}(x)\right] = \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \alpha}{\partial q^j} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial \alpha}{\partial p_j} \cdot \frac{\partial H}{\partial q^j} \tag{10.7}$$

(convention d'Einstein)

ce qui peut s'écrire grâce à (10.5) et (10.4) :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\overset{t}{\alpha} = \overset{t}{\frac{\partial \alpha}{\partial t}} + \left[\overset{t}{h} \; , \; \overset{t}{\alpha}\right]_P} \tag{10.8}$$

On tire finalement de (10.5) et de (10.8) , en remplaçant successivement α et β par p_j et q^j , le système d'identités

$$\boxed{\begin{array}{l} \left[\overset{t}{p_j} \; , \; \overset{t}{p_k}\right]_P = 0 \quad ; \quad \left[\overset{t}{q^j} \; , \; \overset{t}{q^k}\right]_P = 0 \quad ; \\ \\ \left[\overset{t}{p_j} \; , \; \overset{t}{q^k}\right]_P = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ 1 & \text{si } j = k \end{cases} \end{array}} \tag{10.9}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\overset{t}{p_j} = \left[\overset{t}{h} \; , \; \overset{t}{p_j}\right]_P \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial t}\overset{t}{q^j} = \left[\overset{t}{h} \; , \; \overset{t}{q^j}\right]_P}$$

En comparant ces formules classiques avec les formules quantiques du § précédent (9.4), on est conduit naturellement à poser le problème suivant, que nous appellerons "problème de Dirac" :

(10.10)

Construire un espace hilbertien E, et associer à chaque variable dynamique u du problème mécanique un opérateur $\hat{u}$(1) tel que :

a) Pour toute u, $\hat{u}$ est un opérateur hermitien sur E ;

b) La correspondance $[u \to \hat{u}]$ est linéaire (2) ;

c) $\hat{u}.\hat{v} - \hat{v}.\hat{u} = -i\hbar\,\widehat{[u,v]_P}$

d) $\hat{1} = 1_E$

En effet, si ce problème est résolu, il suffira de prendre le $\widehat{\ }$ des formules (10.9) pour trouver les formules quantiques d'Heisenberg (9.4) si l'on a posé

(10.11)

$$P_j = \widehat{\lceil p_j \rceil}\ , \quad Q^j = \widehat{\lceil q^j \rceil}\ , \quad H = \widehat{\lceil h \rceil}$$

(10.12) Bien entendu, le problème (10.10) n'est pas encore un problème mathématique bien posé, en particulier parce que le commutateur $\hat{u}.\hat{v} - \hat{v}.\hat{u}$ de deux opérateurs linéaires n'est pas nécessairement défini si ces opérateurs ne sont pas bornés ; d'autre part parce que la dérivation sous le signe $\widehat{\ }$ que l'on effectue dans le passage de (10.9) à (9.4) suppose des hypothèses de continuité sur l'opérateur $[u \to \hat{u}]$ qu'il faudrait pouvoir préciser.

---

(1) Ces opérateurs $\hat{u}$ s'appellent des observables.

(2) Il s'agit ici de linéarité sur le corps des réels ; cette propriété est nécessaire si l'on veut pouvoir dériver sous le signe .

(10.13) Cependant, en tant que formalisme, (10.10) présente des avantages importants sur (9.4) ; il est d'abord indépendant du choix du système de coordonnées ; puisqu'il ne met en jeu que la structure canonique de l'ensemble V des extrêmales du problème, il s'adapte de lui-même à tous les problèmes variationnels, en particulier aux problèmes du type II (voir(6.28)) ; l'opérateur hamiltonien H devient une observable "comme les autres", le temps perd son rôle privilégié:la méthode est donc applicable à la mécanique relativiste.

(10.14) On peut évidemment se demander si l'on n'a pas été trop gourmand, et s'il ne suffirait pas de choisir un ensemble restreint de variables dynamiques u aux seules quelles seraient associées un opérateur $\hat{u}$; ce qui serait à priori plus facile que de les prendre toutes, comme en (10.10).

Notons toutefois,si l'on veut conserver les résultats précédents, que cet ensemble doit constituer une algèbre de Lie pour le crochet de Poisson (voir (2.47)), qu'il doit contenir la variable 1 ,et, pour chaque t, les variables dynamiques $\overset{t}{p_j}$, $\overset{t}{q^j}$ et $\overset{t}{h}$.

§ 11 . QUANTIFICATION CANONIQUE.

Considérons le problème de Dirac (10.10) .Nous pouvons évidemment formuler le problème en introduisant, au lieu des opérateurs $\hat{u}$, les opérateurs

$$\tilde{u} = -\frac{1}{i\hbar}\,\hat{u} \tag{11.1}$$

Les conditions (a),(b),(c),(d) de (10.10) deviennent respectivement :

$$\left[\begin{array}{l} \text{a') pour tout } u \text{ , } \tilde{u} \text{ est anti-hermitien} \\ \text{b') la correspondance } [u \to \tilde{u}] \text{ est linéaire} \\ \text{c') } \tilde{u}\,.\,\tilde{v} - \tilde{v}\,.\,\tilde{u} = \widetilde{[u,v]_P} \\ \text{d') } 1 = -\frac{1}{i\hbar}\,1_E \end{array}\right. \tag{11.2}$$

Les conditions (a') (b') et (c') s'interprètent immédiatement : elles expriment que la correspondance cherchée $[u \to \tilde{u}]$ est une <u>représentation linéaire</u> de l'algèbre de Lie des variables dynamiques (pour le crochet de Poisson, voir (2.47)) au moyen d'opérateurs anti-hermitiens .

Cherchons maintenant à interprèter la condition (d') .

Nous voyons d'abord que les variables dynamiques constantes qui constituent le centre de l'algèbre de Lie (2.40) , n'ont pas leurs images nulles dans la représentation ; ceci montre que la représentation ne se réduit pas à une représentation de l'algèbre adjointe (c'est à dire de l'algèbre de Lie des glissements canoniques infinitésimaux ; voir (2.47)) .

(11.3) Mais nous avons trouvé plus haut une interprétation géométrique de l'algèbre de Lie des variables dynamiques : c'est celle des glissements infinitésimaux d'un espace fibré quantifiant de base V , s'il en existe (voir (4.25),(4.26)).

Supposons donc la variété V quantifiable, au sens de (4.8) ; soit $\mathcal{V}$ un espace fibré quantifiant de base V [(4.1),(4.5)] .

Soit $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles, infiniment différentiables sur l'espace fibré $\mathcal{V}$; désignons par ξ un point variable de $\mathcal{V}$, par x sa projection sur V, et reprenons la notation (4.25) : pour toute variable dynamique u , il existe un glissement infinitésimal de $\mathcal{V}$, $[\xi \to \overset{\delta}{\underset{u}{}}\xi]$, défini par les formules (4.20 ◇) :

(11.4)
$$\begin{cases} \overset{\delta}{\underset{u}{}} x = \text{grad } u & (\text{grad} = \text{gradient symplectique de V}) \\ \varpi \overset{\delta}{\underset{u}{}} \xi = u & (\varpi = \text{forme fondamentale de } \mathcal{V}) \end{cases}$$

et l'on a (th.(4.25)) :

(11.5)
$$\begin{cases} \overset{\delta}{\underset{1}{}} \xi = f(\xi) & (f = \text{champ de vecteurs défini en (4.3)}) \\ \left[\overset{\delta}{\underset{u}{}}, \overset{\delta}{\underset{v}{}}\right]_L = \overset{\delta}{\underset{}{}}_{[u,v]_P} \end{cases}$$

On réalisera donc bien les relations (11.2 b',c') si l'on pose pour tout $\varphi \in \mathcal{E}$:

(11.6)
$$\boxed{\tilde{u}(\varphi) = \overset{\delta}{\underset{u}{}} \varphi}$$

On sait en effet que $\delta_u [\delta_v \varphi] - \delta_v [\delta_u \varphi] = [\delta_u , \delta_v]_L \varphi$

[G.R.(21.29)]

$$= \delta_{[u,v]_P} \varphi$$

(11.5)

d'où (11.2, c') ; la vérification de (b') est immédiate .

Notons d'autre part que les fonctions φ de $\mathcal{E}$ peuvent se décomposer en série de Fourier sur les caractéristiques , qui sont des courbes fermées ; de façon précise, on peut introduire les sous-espaces vectoriels $\mathcal{E}_n$ de $\mathcal{E}$ définis pour $n = 0,1,2,\ldots$ par

(11.7)
$$\left[\varphi \in \mathcal{E}_n\right] \iff \left[\begin{array}{l} \text{Il existe une fonction complexe infiniment différentiable } \psi, \text{ définie sur } \mathcal{T}, \text{ telle que} \\ \qquad \varphi(\xi) = \mathcal{R}e\,(\psi(\xi)) \qquad (= \text{partie réelle de } \psi(\xi)) \\ [z \in T] \Rightarrow \psi(\hat{z}(\xi)) = z^{-n}\,\psi(\xi) \quad \text{(notation (4.4))} \end{array}\right]$$

et l'on peut montrer que toute fonction de $\mathcal{E}$ peut effectivement se décomposer en une série $\varphi_0 + \varphi_1 + \ldots$ dont les termes φ_n appartiennent respectivement aux espaces $\mathcal{E}_n$, et sont donnés par les formules

(11.8)
$$\begin{cases} \varphi_0(\xi) = \dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_T \varphi(\hat{z}(\xi)) \dfrac{dz}{z} \\ \varphi_n(\xi) = \dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_T [z^n + z^{-n}]\, \varphi(\hat{z}(\xi)) \dfrac{dz}{z} \qquad [n = 1,2\ldots] \end{cases}$$

Notons que les espaces $\mathcal{E}_n$ sont chacun invariant par le recueil $\mathcal{R}$ des glissements globaux de $\mathcal{V}$, c'est à dire que

$$(11.9) \qquad [\ \varphi \in \mathcal{E}_n\ ,\ A \in \mathcal{R}\ ] \Rightarrow [\ \varphi \,.\, A \in \mathcal{E}_n]$$

celà se vérifie immédiatement en partant de la définition (4.5) de $\mathcal{R}$.

Par suite les $\mathcal{E}_n$ sont invariants par les éléments infinitésimaux de $\mathcal{R}$, c'est à dire les $\tilde{u}$ (u étant définie sur V toute entière) ; ceci se vérifie d'ailleurs directement à partir du fait que les opérateurs $\hat{z}$ invarient le champ $[\ \xi \to \delta_u \xi\ ]$ (ci-dessus (4.23)).

On peut donc conserver la définition (11.6), en imposant à φ d'appartenir à l'un des espaces $\mathcal{E}_n$; les relations (10.10 b',c') resteront vérifiées; on aura de plus

$$\delta_1 \varphi = \mathcal{R}e\ (D\ (\psi)\ (\xi)\ (f(\xi)\ )\ ) \qquad \text{notation(11.7),formule(11.5)}$$

$$= \mathcal{R}e\ (\frac{d}{dt}\ \psi(e^{tf}(\xi)\ )\ )_{t\,=\,0}$$

$$= \mathcal{R}e\ (\frac{d}{dt}\ \psi(\hat{z}(\xi))\ )_{t\,=\,0}\ , \quad \text{avec} \quad z = e^{\frac{t}{i\hbar}} \qquad (\text{déf.}(4.4)\ )$$

$$= \mathcal{R}e\ (\frac{d}{dt}\ [z^{-n}\ \psi(\xi)]\ )_{t\,=\,0} \qquad (\text{déf.}(11.7)\ )$$

$$= \mathcal{R}e\ (\frac{-n}{i\hbar}\ \psi\ (\xi))$$

ce qui montre que, sur l'espace $\mathcal{E}_n$, la définition (11.6) conduit à la formule

$$(11.10) \qquad \tilde{\imath}^{\,2} = -\frac{n^2}{\hbar^2}$$

Ceci permet d'interprèter les espaces $\mathcal{E}_n$ comme les espaces de fonctions propres de cet opérateur $\tilde{1}^2$, associés aux valeurs propres 0 , $\frac{-1}{\hbar^2}$, $\frac{-4}{\hbar^2}$, ...

Si donc on choisit n = 1, on voit que l'on aura $\tilde{\hbar}^2 = -1$; on pourra donc donner une structure complexe à l'espace vectoriel $\mathcal{E}_1$ en posant

(11.11) $$i\,\psi = \tilde{\hbar}(\psi)$$

comme $\tilde{\hbar}$ commute avec les $\tilde{u}$ [Cf.(2.40) et (11.2c')], on voit que les $\tilde{u}$ seront linéaires sur le corps des complexes ; la relation (11.2 d') sera évidemment vérifiée, comme conséquence de (11.11) ([1]).

(11.12) Considérons maintenant le sous-espace vectoriel $\mathcal{E}'_1$ dont les éléments sont les fonctions de $\mathcal{E}_1$, nulles en dehors d'un compact .

On vérifie immédiatement que cet espace est invariant par les éléments globaux du recueil $\mathcal{R}$(l'image d'un compact par un homéomorphisme est un compact), et par les opérateurs $\tilde{u}$, u étant définie sur V toute entière (en effet, dans tout ouvert où φ est identiquement nulle , $\tilde{u}(\varphi) = \delta_u \varphi$ est aussi nulle).

Posons, pour φ_1 et φ_2 dans $\mathcal{E}'_1$:

(11.13) $$(\varphi_1, \varphi_2) = \int_V \varphi_1\, \varphi_2\, \rho$$

ρ désignant la densité positive associée à la forme invariante ω définie en (4.7) [voir G.R. (31.63) à (31.70)].

Ce produit scalaire réel (φ_1, φ_2) donne à $\mathcal{E}'_1$ une structure euclidienne positive.

Si l'on désigne par u une variable dynamique définie sur V, et par f le

---

([1])Ainsi s'explique l'introduction de la constante de Planck dans la construction mathématique (4.1) .

champ $[\xi \to \underset{u}{\delta}\xi]$, ω est invariante par les e^{tf}, puisqu'elle est invariante par le recueil $\mathcal{R}$[(4.7 a) et (4.20)] ; on a donc $[\underset{u}{\delta}]\ \omega = 0$ [G.R.(23.15)]; L

la formule magique donne donc

$$0 = [\nabla\omega]\ (\underset{u}{\delta}\ \xi) + \nabla\ [\omega(\underset{u}{\delta}\ \xi)] ;$$

$\nabla\omega$ étant nulle comme force de degré supérieur à la dimension, on a donc

$\nabla\ [\ \omega(\underset{u}{\delta}\ \xi)\ ] = 0$; par suite, pour toute fonction φ de $\mathcal{E}$, on a

$$\nabla\left[\omega(\frac{\varphi^2}{2}\ \underset{u}{\delta}\ \xi)\right] = \left[\nabla\ \frac{\varphi^2}{2}\right] \wedge\ \omega\ (\underset{u}{\delta}\ \xi) \quad \text{[G.R.(27.15 a)]}$$

$$= \varphi\ \nabla\ \varphi \wedge \omega\ (\underset{u}{\delta}\ \xi)$$

$$= \varphi\ \underset{u}{\delta}\ \varphi\ \ \omega \qquad \text{[G.R.(26.33)]}$$

En utilisant la définition de l'intégrale d'une densité [G.R.(31.70)] et la formule de Stokes [G.R.(31.41)], on en déduit, si φ est une fonction à support compact, que

$$\int_V \varphi\ \ \underset{u}{\delta}\ \varphi\ \rho = 0 \tag{11.14}$$

En particulier, on a pour tout $\varphi \in \mathcal{E}'_1$:

$$(\varphi,\ \underset{u}{\delta}\ \varphi) = 0 \tag{11.15}$$

En faisant $u = \hbar$, on a donc (cf.(11.11),(11.6))

$$(\varphi\ ,\ i\ \varphi) = 0 \tag{11.16}$$

ce qui montre que l'on donne à $\mathcal{E}'_1$ une structure pré-hilbertienne en introduisant le produit scalaire complexe, à symétrie hermitienne :

(11.17) $$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = (\varphi_1, \varphi_2) + i\,(i\,\varphi_1, \varphi_2)$$

On déduit alors de (11.15) et de (11.16) que l'on a (pour φ_1 et $\varphi_2 \in \mathcal{E}'_1$):

(11.18) $$\langle \tilde{u}(\varphi_1), \varphi_2 \rangle + \langle \varphi_1, \tilde{u}(\varphi_2) \rangle = 0$$

c'est à dire que les opérateurs $\tilde{u}$ sont <u>anti-hermitiens</u> .

On résout donc le problème (11.2) en prenant pour E le <u>complété</u> de l'espace préhilbertien $\mathcal{E}'_1$; d'où l'énoncé :

Supposons qu'un problème dynamique variationnel soit évolutif, et que la variété V de ses solutions soit quantifiable, au sens (4.8) ; soit $\mathcal{V}$ un espace fibré quantifiant de base V .

(11.19) Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles, à carré sommable sur $\mathcal{V}$ pour la densité invariante ρ déduite de la forme ω (4.7) , telles que :

$$\diamondsuit \begin{cases} \varphi(\xi) \equiv \mathrm{Re}\,(\psi(\xi)) & (\psi \text{ complexe}) \\ z \in T \Rightarrow \psi(\hat{z}(\xi)) = z^{-1} \times \psi(\xi) & (\text{notation (4.4)}) \end{cases}$$

-Les règles (11.11) et (11.17) font de E un espace hilbertien complexe.

-Si l'on pose, pour toute variable dynamique u définie sur V et pour $\varphi \in E$:

$$\hat{u}(\varphi) = -i\hbar\,\delta_u \varphi$$

le champ de vecteur $[\xi \to \delta_u \xi]$ étant défini par (11.4), l'opérateur $\hat{u}$ est <u>hermitien</u> , et défini sur l'espace vectoriel $\mathcal{E}'_1$ (dense dans E) des éléments de E infiniment différentiables et nuls en dehors d'un compact.

-La correspondance $[u \to \hat{u}]$ est linéaire sur le corps des réels .

-On a

$$\hat{u} \cdot \hat{v} - \hat{v} \cdot \hat{u} = -i\hbar\,\widehat{[u,v]_P}$$

-On a

$$\hat{1} = 1_{\mathcal{E}'_1}$$

Ainsi se trouve donc résolu le problème de Dirac (10.10) (1)

(11.20) Dans cette méthode de quantification, le seul choix arbitraire est celui de l'espace fibré quantifiant $\mathcal{V}$ de base V ; mais le théorème (4.15) nous montre que ce choix n'intervient pas dans les résultats obtenus, si la variété V est simple (2).

Nous pouvons donc appeler <u>quantification canonique</u> cette méthode ; cette terminologie a l'avantage de rappeler qu'elle ne met en jeu que la <u>structure canonique</u> de V , au sens (2.7).

On vérifie aisément le théorème :

(11.21) La dimension des espaces $\mathcal{E}'_1$ et E est infinie.

---

(1) A part le changement de E en $\mathcal{E}'_1$, dans la formule (10.10 d).

(2) De façon précise, si on a fait deux choix différents d'espaces fibrés quantifiants $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}^*$, ce qui conduit à des opérateurs $\hat{u}$ et $\hat{u}^*$ définis respectivement dans des espaces hilbertiens E et E^*, l'opérateur F construit en (4.15) permet de construire aisément un opérateur <u>unitaire</u> U , appliquant E <u>sur</u> E^*, tel que pour tout u

$$\hat{u}^* = U.\ \hat{u}.\ U^{-1}$$

CHAPITRE IV

EXEMPLES ET APPLICATIONS

§ 12 - QUANTIFICATION DES PROBLEMES JACOBIENS.

(12.1) Considérons un problème variationnel évolutif de type jacobien [(6.26), (6.29)]. On a vu (th.(7.21), dont nous adoptons les notations) qu'on peut lui associer un problème cônique ; on définit ainsi une variété K^* d'équation

(12.2) $$b \neq 0 \ , \qquad \varphi \left(\begin{matrix} q \\ -\Pi \\ \hline 2 \end{matrix} \right) = 0$$

plongée dans un espace de phases (fig.6). L'ensemble V' de ses caractéristiques se projette sur l'ensemble V des caractéristiques de la variété de Jacobi J du problème (voir (7.26), (7.27)).

(12.3) Par hypothèse (12.1), J est évolutive ; l'ensemble V possède donc une structure de variété canonique de dimensions $2n-2$ (notations (7.26)); c'est cette variété V que nous nous proposons de quantifier au sens (4.8) : s'il s'agit d'un problème dynamique, le théorème (11.19) nous permettra alors de construire les opérateurs quantiques.

On a vu que l'on obtient les caractéristiques de K^* en joignant à l'équation des caractéristiques de J les conditions (7.27) :

(12.4) $$b = \text{Cte} \ , \qquad a' = \ell$$

Il en résulte immédiatement que tout champ paramétrisant de J (0.14) se relève sur K^* par un champ paramétrisant ; K^* est donc évolutive : V' possède une structure de variété canonique de dimension $2n$ (figure 7).

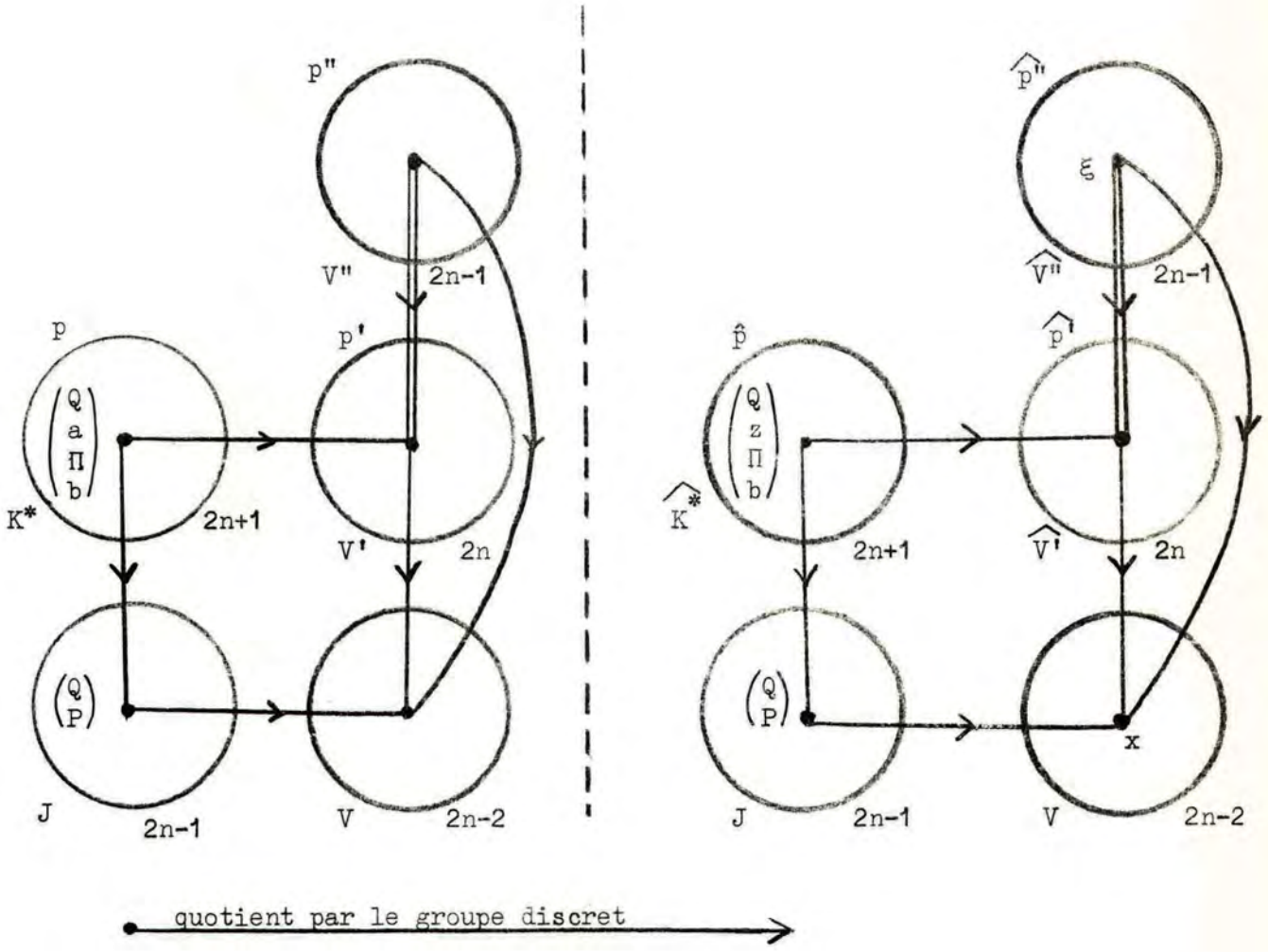

p"
V"
2n-1
p
p'
K*
2n+1
V'
2n
J
2n-1
V
2n-2
quotient par le groupe discret
p̂"
ξ
V̂"
2n-1
p̂
p̂'
K̂*
2n+1
V̂'
2n
x
J
2n-1
V
2n-2

Figure 7

Du fait que K^* est plongée dans un espace de phases, il existe sur K^* un champ de 1-formes p, défini par

$$(12.5) \qquad p \begin{pmatrix} dQ \\ da \\ d\Pi \\ db \end{pmatrix} = P^* \, dQ^* = \Pi \, d\,Q + b \; da$$

(voir (3.19) et (7.21,22)).

D'autre part, grâce à sa construction, K^* est invariant par le groupe des substitutions

$$(12.6) \qquad \begin{cases} Q \to Q \\ a \to a \\ \Pi \to \lambda\, \Pi \\ b \to \lambda\, b \end{cases} \qquad (\lambda \neq 0)$$

(K^* est un conoïde) ; on peut en déduire que la forme 1-forme p, est un invariant intégral de Cartan de l'équation de ses caractéristiques :

(12.7) Vérifions-le à l'aide des conditions (12.14), qui donnent sur ces caractéristiques :

$$\Pi \; dQ + b \; da = b \; [da - P.dQ] \qquad \text{(notation (7.23))}$$
$$= b \; [da - d\,\ell \;] = 0$$

ce qui montre que p s'annule sur la direction tangente aux caractéristiques ; comme cette direction est par définition celle du noyau de ∇p, p est bien un invariant intégral de Cartan (critère (0.12 ♡)).

(12.8) Il en résulte que p est l'image réciproque d'une 1-forme p' de V' par la projection de K^* sur V' (0.22) ; on voit immédiatement que

p' est un <u>potentiel-covecteur</u> pour la structure symplectique de V' (2.18).

D'autre part, K^* est aussi invariant par le groupe de substitutions:

(12.9) $$a \to a + \text{Cte}$$

qui invarient la forme p : il suffit de constater que a n'intervient pas dans son équation (12.2).

(12.10) Le théorème de Noether (8.19) permet d'en déduire que b est constant sur les caractéristiques, ce que nous avons déjà remarqué (12.4).

En faisant $b = -1$, ce qui entraîne $\Pi = p$ (7.23), on définit ainsi une variété V" , de dimension $2n-1$, plongée dans V', qui se projette <u>sur</u> V par l'intermédiaire de son injection dans V' (fig. 7) ; la forme p" induite par p' admet comme dérivée extérieure $\nabla p"$ l'image réciproque de la forme de Lagrange de V.

Puisque le groupe (12.9) invarie la forme p, il invarie aussi ∇p ; il opère donc aussi sur V' et, visiblement, sur V". Remarquons d'autre part que, dans les problèmes dynamiques, l'action a et la constante de Planck ont la même dimension (on dit parfois que h est le <u>"quantum d'action"</u> ; on pourra donc définir un sous-groupe du groupe (12.9), isomorphe à Z , en se limitant aux substitutions

(12.11) $$a \to a + n\,h \qquad (n \text{ entier}, \ h = \text{constante de Planck});$$

on voit immédiatement que ce sous-groupe opère <u>discrètement</u> [G.R.(10.1)] sur K^*, V' et V", et **trivialement** sur J et V (puisque la variable a n'y intervient pas).

On peut donc faire le quotient de K^*, V', V'' par ce groupe (12.9) ; on obtiendra des variétés $\widehat{K^*}$, $\widehat{V'}$, $\widehat{V''}$ (figure 7), admettant les précédentes comme <u>revêtements</u> respectifs, et ayant donc mêmes dimensions. Il est d'ailleurs très facile de construire ces quotients : il suffit de remplacer partout la variable a par la variable

$$z = e^{ia/\hbar} \tag{12.12}$$

La projection de K^* sur $\widehat{K^*}$ sera par exemple :

$$\begin{pmatrix} Q \\ a \\ \Pi \\ b \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} Q \\ e^{ia/\hbar} \\ \Pi \\ b \end{pmatrix} \tag{12.13}$$

le groupe étant discret, la forme p passera au quotient, et l'on trouvera la forme $\hat{p}$:

$$\hat{p} \begin{pmatrix} d\varphi \\ dz \\ \Pi \\ b \end{pmatrix} = \Pi \; dQ + \frac{b\hbar}{i} \frac{dz}{z} \tag{12.14}$$

Soit ξ un point de $\widehat{V''}$, c'est à dire la caractéristique de $\widehat{K^*}$ qui passe par un point

$$\begin{pmatrix} Q \\ z \\ P \\ -1 \end{pmatrix} \tag{12.15}$$

de K^* ; l'image de la forme p" de V" sera la forme $\widehat{p''}$ définie par :

$$\widehat{p''} \; d\xi = P \, dQ + i\hbar \frac{dz}{z} \tag{12.16}$$

Puisque le groupe (12.11) opère trivialement sur V , et que V" se projette sur V , V" se projette aussi sur V : la formule (12.16) montre que V" est un espace fibré quantifiant, de base V , de forme fondamentale p" [voir (4.1),(4.5)] ; nous avons donc montré que

(12.17) **Tout problème jacobien évolutif est quantifiable.**

Exercice.

On considère le lagrangien

$$\ell = \frac{m}{2}\,[x'^2+y'^2+z'^2] + \frac{e^2}{r} \quad \left[r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ ;\ x' = \frac{dx}{dt}\ \ldots\right] \tag{12.18}$$

(atome d'hydrogène simplifiée ; e est la charge élémentaire, m la masse de l'électron). On désigne par p_x,p_y,p_z,p_t les variables conjuguées de x,y,z,t.

1°) Par application du théorème de Noether, montrer que ce lagrangien admet les intégrales premières

$$\begin{cases} \dot{w} = -p_t\ ;\ m_x = y\,p_z - z\,p_y\ ;\ m_y = z p_x - x\,p_z\ ;\ m_z = x\,p_y - y\,p_x\ ; \\ \\ \alpha = a + 3\,ht - 2[x\,p_x + y\,p_y + z\,p_z] \end{cases} \tag{12.19}$$

(a désigne l'action ; cette dernière intégrale première résulte (8.19) de l'invariance par les similitudes : $a \to \lambda\, a$; $x,y,z \to \lambda^2 x,\ \lambda^2 y,\ \lambda^2 z$; $t \to \lambda^3 t$).

2°) Montrer que le mouvement est périodique, de période

$$T = e^2\,\sqrt{m/-2w^3} \tag{12.20}$$

si $w < 0$.

3°) Montrer que la dimension de la variété V" (12.10) est 7, et qu'on peut repérer un point de V" par les valeurs de α, W, M (= moment cinétique, vecteur de composantes m_x, m_y, m_z), U (direction du passage au périhélie, c'est à dire du minimum de r ; U est un vecteur unitaire orthogonal à M), t_o (date du passage au périhélie).

4°) On quantifie le problème par la méthode précédente ; montrer que l'espace $\mathcal{E}_1$(11.7) est celui des fonctions

(12.21) $$\mathcal{R}_e \left(F\,(t_o, w, M, U)\; e^{\frac{\alpha}{i\hbar}} \right)$$

[appliquer (12.16), (4.3), (4.4)] et que la complexification (11.11) revient à supprimer le signe $\mathcal{R}e$ devant cette formule (12.21).
Montrer que F est périodique en t_o, de période T, pour les valeurs négatives de w.

5°) On suppose que la fonction considérée est <u>fonction propre</u> de l'observable $\hat{w}$ associé à l'énergie w (11.19), la valeur propre correspondante étant notée E.

Montrer que pour $w < 0$, la fonction F (12.21) est de la forme

(12.22) $$G(w,M,U)\; e^{-2i\,\pi\, n t_o / T}$$

la fonction G étant nulle en dehors des points où

(12.23) $$3w + \frac{n\hbar}{e^2}\sqrt{-8w^3/m} = E$$

(n = entier algébrique).

§ 13 . PARTICULE LIBRE RELATIVISTE.

Les éléments de la mécanique relativiste font connaître que le mouvement d'une particule libre est obtenu en résolvant le problème variationnel dérivant du lagrangien :

(13.1) $$\ell = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

[v = vitesse de la particule
c = vitesse de la lumière]

lagrangien qui se réduit , à des termes en $1/c^2$ près, à

$$1/2\ m\ v^2 - mc^2$$

c'est à dire au lagrangien classique (9.1) , avec une énergie potentielle constante égale à mc^2 .

Si l'on effectue la paramétrisation (6.10) , on trouve le lagrangien du type II

(13.2) $$\ell = -mc\ \text{signe}(\dot{t}) \sqrt{c^2\ \dot{t}^2 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2}$$

(13.3) L'invariance de ce lagrangien par le groupe de Lorentz-Poincaré est évidente, si on se restreint au groupe <u>orthochrone</u> ; trois choix sont donc possibles pour étudier la covariance relativiste complète du problème :

1°) Se restreindre effectivement au groupe orthochrohe, donc renoncer à la symétrie du temps.

2°) Mettre un double signe devant le radical : nous savons en effet traiter les problèmes à lagrangien multiforme (7.29).

3°) Considérer que le lagrangien (et par conséquent l'action) n'ent pas la <u>variance</u> des scalaires, mais sont des grandeurs qui changent de

signe dans les transformations de Lorentz-Poincaré antichrones ([1]). Nous effectuerons ici le choix N°2 , qui semble être le seul compatible avec la relativité générale (voir cependant ci-dessous (13.36)).

En appliquant la méthode (7.21) , on forme l'équation du champ de cônes associé au problème

$$\frac{\dot{a}^2}{m^2 c^2} + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 - c^2 \dot{t}^2 = 0 \tag{13.4}$$

En faisant désormais $c = 1$, nous écrirons cette équation sous la forme

$$\frac{\dot{a}^2}{m^2} - g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0 \qquad \text{(signature + - - -)} \tag{13.5}$$

Les cônes sont du second degré ; leur équation tangentielle (équation de la variété K*) est

$$m^2 b^2 - g^{\mu\nu} \pi_\mu \pi_\nu = 0 \tag{13.6}$$

L'équation des caractéristiques s'obtient en joignant à (13.6) l'équation (7.26) qui s'écrit ici :

$$\mathrm{d} \quad \frac{da}{m^2 b} = \frac{-dx^\mu}{\pi_\mu} = \frac{db}{\theta} = \frac{d\pi_\nu}{0} \neq 0 \tag{13.7}$$

et s'intègre en :

([1]) Suivant la méthode générale [G.R.(24.23)], appliquée à la géométrie de la relativité restreinte [G.R.(38.15)] , on peut considérer ces grandeurs comme des fonctions sur les bases de Lorentz, à valeurs réelles, telles que $f(S.M) = f(S)\ \chi(M)$, $\chi(M)$ étant le caractère chronologique de la matrice de Lorentz M , la <u>racine</u> correspondante est définie en [G.R.(24.23)] .

(13.8) $\quad b = \text{Cte}\ ,\ \pi_\mu = \text{Cte}\ ,\ x^\mu - a\frac{p^\mu}{m^2} = \text{Cte} \qquad \left(p^\mu = -\frac{\pi^\mu}{b}\right)$

Suivant la méthode (12.10) , on obtient la variété V" (figure 7 , avec n = 4) en faisant b = -1 ; on pourra donc repérer un point de V" par les 8 grandeurs

(13.9) $\quad p^\mu \quad , \quad y^\mu = x^\mu - a\frac{p^\mu}{m^2}$

les p^μ étant reliés par l'équation de Jacobi (obtenue en faisant b = -1 dans (13.6)) :

(13.10) $\quad m^2 - g_{\mu\nu}\, p^\mu\, p^\nu = 0 \ ;$

le vecteur p de composantes p^μ est donc situé sur un hyperboloïde à deux nappes, dit <u>hyperboloïde de masse</u> <u>(figure 8)</u> .

Conformément à (12.7) , la 1-forme p.dx - da définie naturellement sur K* doit provenir d'une forme de V" ; en effet :

(13.11) $\quad p_\mu\, dx^\mu - da = p_\mu\, dy^\mu \qquad$ (grâce à (13.10))

Le groupe de Lorentz-Poincaré se relève à toutes ces variétés ; un élément de ce groupe :

(13.12) $\quad x \to A.x + B$

$\left[\begin{array}{l} x = \text{vecteur de composantes } x^\mu; \\ A = \text{affineur de Lorentz ;} \\ B = \text{vecteur} \end{array}\right]$

se relève par

(13.13) $\quad p \to A.p \ ,\ x \to A.x + B \ ,\ a \to a + \lambda$

c'est à dire , sur V" , par

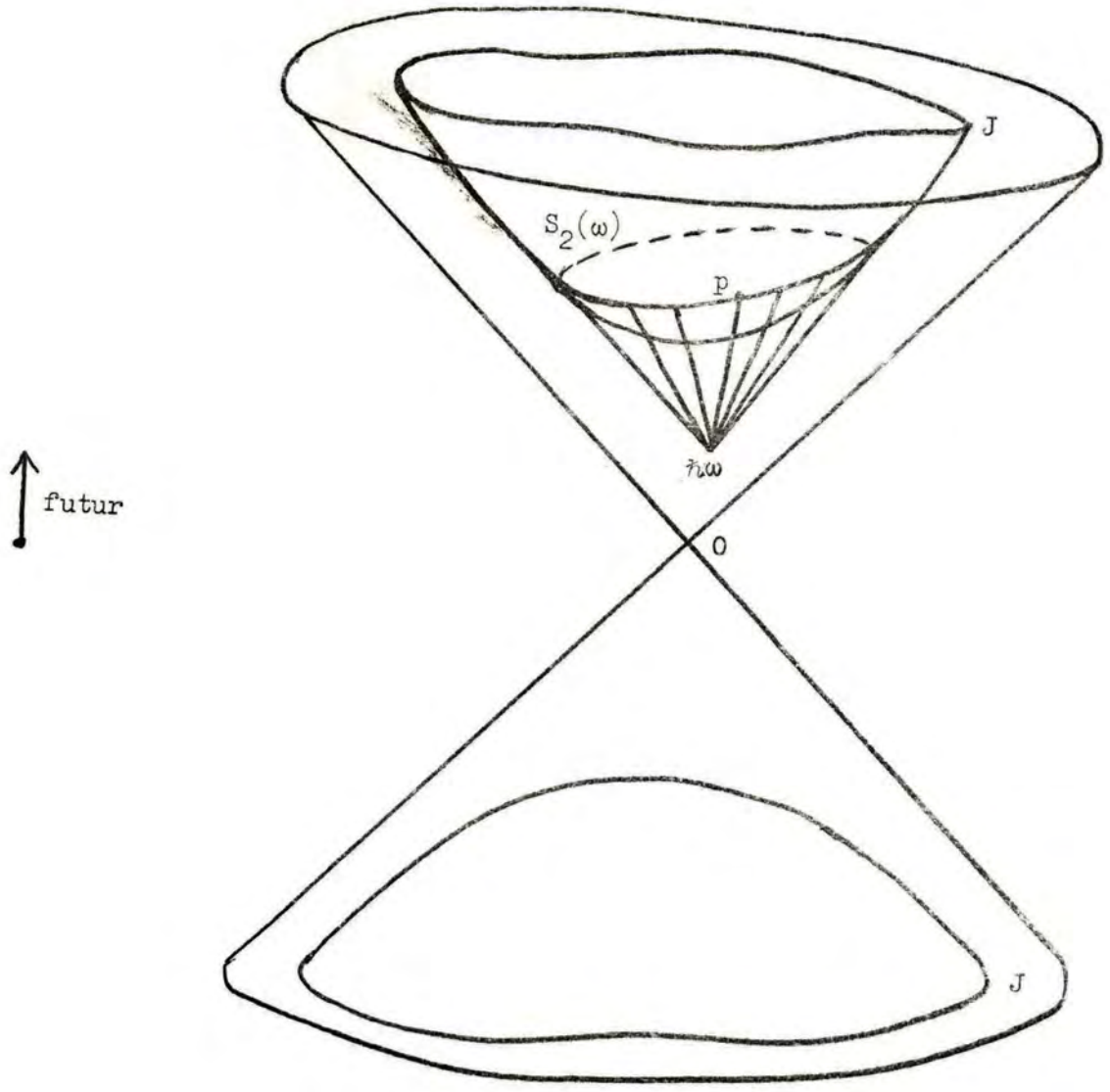


Figure 8

(13.14) $$p \to A.p \quad , \quad y \to A.y + B - \frac{\lambda}{m^2} A.p \; ;$$

on vérifie immédiatement que l'on obtient une extension triviale du groupe de Lorentz-Poincaré , à savoir son produit direct par le groupe additif réel.

On forme ensuite la variété quantifiante V" en passant au quotient par le groupe (12.11) , ce qui donne ici :

(13.15) $$p \to p \; , \; y \to y - \frac{2\pi n \hbar}{m^2} p$$

la forme fondamentale ϖ étant définie par

(13.16) $$\varpi \, \delta \xi = p_\mu \, \delta y^\mu$$

En appliquant les résultats du § 4 , on trouve l'opérateur $\hat{z}$:

(13.17) $$\left[z = e^{\frac{t}{ik}} \right] \quad \Rightarrow \quad \hat{z} : \left[\begin{array}{l} p \to p \\ y \to y + \frac{t}{m^2} p \end{array} \right]$$

On peut donc interpréter l'espace fonctionnel $\mathcal{E}_1$ (11.19) comme celui des fonctions φ de p et y telles que

(13.18) $$\varphi\begin{pmatrix} p \\ y \end{pmatrix} = \mathcal{R}e \left(\psi \begin{pmatrix} p \\ y \end{pmatrix} \right) \quad , \quad \psi\begin{pmatrix} p \\ y + \frac{tp}{m^2} \end{pmatrix} = e^{\frac{-t}{i\hbar}} \psi\begin{pmatrix} p \\ y \end{pmatrix}$$

et l'on constate que la règle de complexification (11.11) revient à identifier φ avec ψ .

Le groupe de Lorentz-Poincaré (ou plutôt son produit direct par le tore) opère sur $\widehat{V''}$, donc sur l'espace $\mathcal{E}_1$, d'une façon qui se déduit immédiatement des formules (13.14). Mais l'espace $\mathcal{E}_1$ (ou $\mathcal{E}'_1$) n'est pas irréductible pour ce groupe ; et il est d'autant plus souhaitable de le

décomposer en sous-espaces irréductibles, que c'est généralement par une telle condition que l'on définit les particules élémentaires.

Il est commode de donner, au moins formellement, une représentation de la fonction ψ au moyen d'une intégrale de Fourier portant sur la variable y :

$$\psi\begin{pmatrix} p \\ y \end{pmatrix} = \int f\begin{pmatrix} p \\ \omega \end{pmatrix} \; e^{i<\omega, y>} \, d\omega \; ; \tag{13.19}$$

en écrivant la condition (13.18) vérifiée par ψ, on trouve

$$<\omega, p> = \frac{m^2}{\hbar} \tag{13.20}$$

La "fonction" $f\begin{pmatrix} p \\ \omega \end{pmatrix}$ est donc en fait une distribution en ω nulle en dehors de (13.20).

Cette relation exprime que le vecteur $\hbar\omega$ est dans l'hyperplan tangent à l'hyperboloïde de masse passant par p (figure 8) ; elle entraîne donc [1]

$$<\omega, \omega> \leq \frac{m^2}{\hbar^2} \tag{13.21}$$

En portant dans (13.19) la valeur (13.15) de y, on trouve aussi, grâce à (13.20) :

$$\psi = e^{\frac{ia}{\hbar}} \int f\begin{pmatrix} p \\ \omega \end{pmatrix} \; e^{i<\omega, x>} \, d\omega \tag{13.22}$$

([1]) Algébriquement, on trouve cette relation en écrivant que le vecteur $p - \hbar\omega$, qui est orthogonal au vecteur de temps p, est un vecteur d'espace.

Dans la substitution (13.13), cette formule (13.22) montre qu'il faut faire sur f la substitution

$$(13.23) \qquad f \to f^* : \qquad f^*\begin{pmatrix} p \\ \omega \end{pmatrix} \equiv e^{-i\langle \omega, B\rangle} e^{\frac{-i\lambda}{\hbar}} f\begin{pmatrix} A^{-1}p \\ A^{-1}\omega \end{pmatrix}$$

En effectuant les translations infinitésimales, les méthodes habituelles de recherche d'invariants montrent que , dans un sous-espace irréductible, la grandeur $\langle \omega, \omega \rangle$ devra être constante ; nous en connaissons une borne supérieure (13.21) .

Supposons que $\langle \omega, \omega \rangle$ soit positif :

$$(13.24) \qquad \langle \omega, \omega \rangle \frac{\mu^2}{\hbar^2} \qquad \mu \leq m$$

la figure 8 nous montre que p appartient à la variété $S_2(\omega)$ de contact du cône circonscrit à l'hyperboloïde de sommet $\hbar\omega$, et que $S_2(\omega)$ est compacte ; en fait, en prenant des coordonnées, on constate que $S_2(\omega)$ possède la structure d'une sphère ordinaire à 2 dimensions. Pour ω donné , on pourra donc dédomposer $f(\frac{p}{\omega})$ en série de fonctions sphériques en p [1]; on constate que ces fonctions sphériques sont les traces , sur $S_2(\omega)$ des polynômes $P_{\omega,j}(p)$ tels que :

---

[1] Pour sortir du cadre purement formel de la présente étude , il faut traiter f comme une distribution à support contenu dans une sous-variété; en dehors des distributions superficielles que nous considérons ici, il pourrait s'introduire des distributions en couches multiples (voir L.SCHWARTZ, chapitre III , § 10).

$$(13.25)\qquad \begin{cases} P_{\omega,j} \text{ est un polynôme homogène de degré } j\ ; \\ \Box\, P_{\omega,j} = 0 \\ D(P_{\omega,j})\,(p)\,(\omega) = 0 \end{cases}$$

et que les polynômes P_j sont entièrement déterminés par ces conditions et par leurs valeurs sur la sphère $S_2(\omega)$, si celle-ci n'est pas réduite à un point, c'est à dire si $\mu < m$.

Pour le vérifier, il suffit de prendre une base de Lorentz dont le vecteur de temps est parallèle à ω, et de transcrire ces relations (13.25): on trouve un polynôme homogène P qui ne contient que les variables d'espace x, y, z, qui est <u>harmonique</u> pour ces variables et qui est donc défini par ses valeurs sur $S_2(\omega)$, dont l'équation s'écrit $x^2 + y^2 + z^2 = \text{Cte}\ [\ >0\ ]$.

Nous pouvons donc décomposer l'espace des ψ en sous-espaces numérotés 0, 1, ... j ... où $f\binom{p}{\omega}$ se réduira à un polynôme $P_\omega(p)$ vérifiant les conditions (13.25) ; on écrira :

$$(13.26)\qquad \left[\begin{array}{l} \psi\binom{p}{y} = \int P_\omega(p)\ e^{i\langle\omega,y\rangle}\ d\omega \\ \qquad\quad = e^{\frac{ia}{\hbar}} \int P_\omega(p)\ e^{i\langle\omega,x\rangle}\ d\omega \end{array}\right. \qquad \heartsuit \begin{cases} \langle\omega,\omega\rangle = \dfrac{\mu^2}{\hbar^2} \\ \langle\omega, p\rangle = \dfrac{m^2}{\hbar} \end{cases}$$

La notation $d\omega$ désigne ici la mesure définie sur l'ensemble des ω qui vérifient $\heartsuit$, mesure invariante par le "petie groupe" des transformations de Lorentz conservant p (cet ensemble $\heartsuit$ a lui aussi la structure d'une sphère à 2 dimensions, il est donc compact).

Nous pouvons associer à cette fonction ψ la fonction

$$(13.27) \qquad \Theta\begin{pmatrix} p \\ x \end{pmatrix} = \int P_\omega(p)\ e^{i\langle\omega,x\rangle}\ d'\omega \qquad \diamondsuit\ \{\langle\omega,\omega\rangle = \frac{p^2}{\hbar^2}\}$$

$d'\omega$ désignant cette fois une mesure invariante sur l'hyperboloïde $\diamondsuit$ (mesure de la géométrie de Lobatchevski défini à un facteur constant près). Le passage de ψ à Θ laisse donc le choix d'un facteur multiplicatif, choix qui importe peu.

En supposant que cette intégrale (13.24) converge convenablement, on peut écrire

$$(13.28) \qquad \Theta\begin{pmatrix} p \\ x \end{pmatrix} = \Theta^{\lambda\mu\ldots\rho}(x)\ p_\lambda\ p_\mu \cdots p_\rho$$

ce qui nous permettra de repérer ψ au moyen de <u>fonctions d'onde</u> $\Theta^{\lambda\mu\ldots\rho}$, qui peuvent être considérées comme définissant une <u>fonction d'onde tensorielle</u>. Les conditions (13.23) montrent que

$$(13.29) \qquad \begin{cases} \Theta^{\lambda\mu\ldots\rho} \text{ est symétrique en } \lambda, \mu \ldots \rho \\ g_{\lambda\mu}\,\Theta^{\lambda\mu\ldots\rho} = 0 \\ \partial_\lambda\ \Theta^{\lambda\mu\ldots\rho} = 0 \end{cases}$$

et la condition $\diamondsuit$ donne

$$(13.30) \qquad \Box\ \Theta^{\lambda\mu\ldots\rho} + \frac{\mu^2}{\hbar^2}\ \Theta^{\lambda\mu\ldots\rho} = 0$$

Réciproquement, si des fonctions $\Theta^{\lambda\mu\ldots\rho}$ vérifient ces équations (13.29, 30) et possèdent des distributions transformées de Fourier, celles-ci vérifient (13.27), $P_\omega(p)$ étant un polynôme en p de degré j, distribution en ω sur l'hyperboloïde (13.27 $\diamondsuit$); si par exemple $P_\omega(p)$ est

continue en ω, on pourra définir une fonction $\psi\left(\frac{p}{y}\right)$ par (13.26), et celle-ci vérifiera la condition (13.18).

(13.31) Il est facile de trouver comment le groupe complet de Lorentz opère sur les fonctions d'onde, en partant des formules (13.13), (13.14) ; on constate que c'est le produit direct de ce groupe par le tore qui opère (à cause de la variable λ), donc que le groupe opère "à une phase près"; en dehors de la phase, on obtient la variance habituelle des champs de tenseurs contravariantes [G.R. (15.2), (25.65)].

Cas $j = 0$.

On obtient alors une seule fonction d'onde complexe Θ, soumise à la seule équation d'onde

$$\Box\,\Theta + \frac{\mu^2}{\hbar^2}\,\Theta = 0 \tag{13.32}$$

On reconnait donc la description usuelle d'une particule libre de masse μ, de spin 0, caractérisée par l'équation de Klein-Gordon (13.32) ; la "pseudo-masse" μ est inférieure ou égale à m ; elle peut d'ailleurs, dans ce cas, être prise égale à m (masse de la particule classique que l'on a quantifiée); alors le point $\hbar\,\omega$ est sur l'hyperboloïde, la sphère $S_2(\omega)$ se réduit à ce point ; on a donc la relation de Bohr

$$p = \hbar\,\omega \tag{13.33}$$

entre l'énergie-impulsion classique p et la quadri-fréquence ω.

Cas $j = 1$.

Les équations s'écrivent

$$(13.34)\qquad \begin{cases} \Box\, \Theta^{\lambda} + \dfrac{\mu^2}{\hbar^2}\,\Theta^{\lambda} = 0 \\ \partial_{\lambda}\,\Theta^{\lambda} = 0 \end{cases}$$

on reconnait les équations proposées pour décrire une particule de masse μ, de spin 1(équations de Proca). Si μ est très voisin de m, la relation de Bohr (13.33) est très bien vérifiée.

Cas $j = 2$.

On trouve les équations

$$(13.35)\qquad \begin{cases} \Theta^{\nu\rho} = \Theta^{\rho\nu} \\ g_{\nu\rho}\;\Theta^{\nu\rho} = 0 \\ \partial_{\nu}\;\Theta^{\nu\rho} = 0 \\ \Box\;\Theta^{\nu\rho} + \dfrac{\mu^2}{\hbar^2}\;\Theta^{\nu\rho} = 0 \end{cases}$$

qui décrivent une particule de masse μ, de spin 2.

Etc...

- On voit donc que la quantification canonique conduit à un spectre de masse continu limité supérieurement par la masse classique m, et à un spectre de spin contenant tous les entiers ≥ 0. Les spins demi-impairs ne sont pas représentés : ce qui est évident, parce que la méthode nous conduit à une extension triviale par le toredu groupe de Lorentz-Poincaré, qui ne fournit pas de représentation de son revêtement.

Exercice.

- Calculer les champs de vecteurs $\underset{u}{\delta}$ (11.4), définis sur la variété V^n, associés aux variables dynamiques suivantes :

$$u = p_\rho \ ?$$

(13.36) (réponse : $\underset{u}{\delta} p_\mu = 0$; $\underset{u}{\delta} y_\mu = g_{\mu\rho}$)

$$u = x_\rho p_\sigma - x_\sigma p_\rho \ ?$$

(13.37) (réponse : $\underset{u}{\delta} p_\mu = g_{\mu\sigma} p_\rho - g_{\mu\rho} p_\sigma$; $\underset{u}{\delta} y_\mu = g_{\mu\sigma} y_\rho - g_{\mu\rho} y_\sigma$)

- Comment les observables $\hat{u}$ associés (notés respectivement P_ρ , $M_{\rho\sigma}$ et définis en (11.19)) opèrent-ils sur les fonctions d'onde Θ^μ (cas $j = 1$) ?

réponse :

(13.38)

$$P_\rho (\Theta^\lambda) = -i\hbar \, \partial_\rho \Theta^\lambda$$

$$[M_{\rho\sigma} (\Theta)]^\lambda = -i\hbar \{ [x_\rho \partial_\sigma \Theta^\lambda - x_\sigma \partial_\rho \Theta^\lambda] + [{}^\lambda|_\rho \Theta_\sigma - {}^\lambda|_\sigma \Theta_\rho] \}$$

[notation G.R. (17.8)]

(13.39) - On peut vérifier que ces opérateurs conservent, ainsi qu'il se doit, les solutions du système différentiel (13.32), et que leurs relations de commutations sont bien celles prévues par (10.10c).

Les deux termes entre crochets que l'on trouve au second membre de $M_{\rho\sigma} (\Theta)$ correspondent respectivement aux moments orbitaux et moments propres. On retrouve les formules habituelles de la mécanique quantique, et l'interprétation cinétique du spin.

(13.40) - On voit que la quantification canonique fournit automatiquement l'expression des P_ρ et des $M_{\rho\sigma}$ pour des particules de spin entier quelconque. Mais on voit pourquoi on ne peut pas définir sur les fonctions d'ondes d'autres observables, tels par exemple que les $\hat{x}$ (opérateur associé à l'abscisse de la particule à l'instant t ; voir (10.4)); ces opérateurs existent, bien entendu, sur les espaces fonctionnels $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}'_1$ ou E, mais ils ne respectent pas la décomposition en sous-espaces irréductibles pour le groupe de Lorentz-Poincaré ; en d'autres termes, ils mélangent les masses et les spins.

(13.41) - Les fonctions ψ (13.29) que nous avons trouvées dans la décomposition ci-dessus n'appartiennent pas à l'espace E : elles ne sont pas a carré sommable pour la densité ρ (voir (11.13)) ; ce sont leurs valeurs moyennes sur la"pseudo-masse" μ et le spin j qui peuvent l'être. Ce sont là des circonstances usuelles quand on fait une décomposition spectrale.

(13.42) - Si on adopte la convention N° 3 de (13.3), on supprime l'une des deux nappes de l'hyperboloïde de masse ; le vecteur p et le vecteur ω sont du genre avenir (après décomposition) : on a, comme on dit, des énergies et des fréquences positives.

Mais la variance de p n'est plus celle d'un vecteur : il faut changer son signe (en plus de la variance vectorielle) dans les transformations antichrones (on definit ainsi une racine pour la géométrie de la relativité restreinte ; voir la note de (13.3)).

De même, la formule (13.16) montre que la forme ω est changée de signe dans une transformation antichrone : on doit modifier la structure de l'espace fibré quantifiant et de la variété des solutions (où l'on doit

notamment admettre les transformations anti-canoniques) ; la représentation des éléments antichrones du groupe de Lorentz-Poincaré n'est plus linéaire, mais anti-linéaire.

(13.43) La topologie de la variété V des solutions du problème classique (droites orientées de l'espace temps) se trouve facilement : elle se compose de deux nappes homéomorphes à R^6, et même isomorphes à R^6 comme variétés canoniques (il reste une seule des deux nappes si on fait la convention (13.42)). V est simple, parce que chacune de ses composantes connexes est simplement connexe ; il en résulte [(4.15) , (11.20)] que toute autre construction de l'espace fibré quantifiant conduit nécessairement aux mêmes résultats que ci-dessus.

§ 14 . PROBLEMES POTENTIELS .

(14.1) Considérons un problème dynamique évolutif , tel que la variété V de ses solutions soit potentielle (2.18).

Nous savons alors que le problème est quantifiable, et nous avons construit effectivement un espace fibré quantifiant U de base V ; U est le produit direct $V \times T$ (4.9).

En utilisant les formules (4.3) , (4.4) , (4.10) , on trouve

(14.2) $$\hat{z} \begin{pmatrix} x \\ z_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & \\ z & z_o \end{pmatrix}$$

ce qui permet de condenser la formule (11.19) qui définit les éléments de l'espace fonctionnel $\mathcal{E}_1$ en :

(14.3) $$\varphi \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \mathcal{R}e\left(\frac{\psi(x)}{z}\right)$$

$\psi(x)$ étant une fonction complexe de l'extrêmale x . On vérifie immédiatement que la structure complexe définie sur $\mathcal{E}_1$ (11.11) coïncide avec la structure habituelle de l'espace des fonctions ψ . Nous pourrons donc remplacer l'espace $\mathcal{E}_1$ par l'espace des fonctions complexes sur V , ce qui entraîne une traduction de l'énoncé (11.19) de la quantification canonique. En utilisant notamment (4.7) , (4.11) , (4.20) , (2.35) , il vient :

(14.4) - Soit un problème dynamique évolutif ; soit V la variété de ses extrêmales x ; supposons que V soit potentielle , c'est à dire qu'il existe un potentiel-covecteur global de V

◇ $x \to p$ (2.18)

- Soit E l'espace vectoriel complexe des fonctions complexes sur V , à module carré sommable pour la densité ρ déduite de la forme de Liouville de V (2.12) ; si l'on pose , pour ψ_1 et ψ_2 dans E

♡ $$< \psi_1 , \psi_2 > = \int_V \bar{\psi}_1 \ \psi_2 \ \rho$$

on fait de E un espace de Hilbert.

- Si l'on pose, pour toute variable dynamique u définie sur V et tout $\psi \in E$:

♣ $$\hat{u} (\psi) = [u - p.\text{grad } u] \times \psi - i\hbar \ [u, \psi]_P$$

l'opérateur $\hat{u}$ (observable) est <u>hermitien</u> , et défini sur l'espace vectoriel $\mathcal{E}_1$ (dense dans E) des éléments de E infiniment différentiables et nuls en dehors d'un compact.

- La correspondance

$$u \to \hat{u}$$

est linéaire sur le corps des réels.

- On a :

♧ $$\hat{u} \cdot \hat{v} - \hat{v} \cdot \hat{u} = -i\hbar \ \widehat{[u,v]}_P$$

et

♭ $$\hat{1} = 1_{\mathcal{E}_1}$$

(14.5) Exercice : verifier directement les formules ♧ et ♭ à partir de la définition ♣ (voir (2.51)).

(14.6) - Nous appellerons schéma quantique la construction (14.4) ci-dessus; la formule montre que l'on change de schéma quantique si l'on choisit un autre potentiel covecteur p^* , bien que l'espace fonctionnel E n'ait pas changé.

Si la variété V est simple , nous savons qu'il doit y avoir équivalence unitaire entre tous les schémas quantiques (11.20) ; vérifions-le directement.

Si p et p^* sont deux potentiels vecteurs, $\nabla[p-p^*] = 0$; par suite , si V est simple , il existe une variable dynamique α telle que $p - p^* = \nabla \alpha$ [G.R.(27.31)] ; posons :

(14.7) $$U(\psi)(x) = \psi(x) \times e^{\frac{\alpha}{i\hbar}}$$

Il est évident que U est un opérateur unitaire sur E , qui conserve le sous-espace $\mathcal{E}_1$; si l'on désigne par $\widehat{u}^*$ l'opérateur associé à une variable dynamique u par (14.4 bis) où l'on a remplacé p par p^* , les formules (2.35) , (2.38) , (2.39) permettent de vérifier

(14.8) $$\widehat{u}^* = U \cdot \widehat{u} \cdot U^{-1} \qquad \text{pour tout } u$$

U fournit bien l'équivalence unitaire prévue en (11.20) ; on vérifie bien que les résultats de la quantification ne dépendent pas du schéma quantique adopté.

§ 15 . PROBLEMES LINEAIRES .

(15.1) Nous dirons qu'un problème variationnel est linéaire lorsqu'on peut donner à la variété V de ses solutions une structure d'espace vectoriel symplectique (pour sa forme de Lagrange).

Nous savons que les variétés canoniques sont toutes localement plates (voir (3.13)) ; la définition (15.1) est donc purement globale ; cependant, en pratique , on ne parle de problème linéaire que lorsque l'addition de deux extrêmales n'est pas une opération trop bizarre.

(15.2) Soit par exemple un problème hamiltonien (notations (6.42)) , défini sur un espace vectoriel E , tel que la fonction hamiltonienne H soit , pour chaque t , forme quadratique des p_j et q^j .

Alors les équations d'Hamilton (6.44) sont linéaires ; il en résulte qu'elle peuvent se résoudre par une formule

(15.3)
$$\begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix}_t = F_t \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix}_{t_o}$$

F_t étant , pour chaque t , un opérateur linéaire sur $E \times E^*$ [G.R.(22.20)].

On peut alors prendre comme structure vectorielle de la variété V des solutions celle de $E \times E^*$, pour les conditions initiales ; cette structure ne dépend pas du choix de t_o . D'autre part , le th.(5.25) nous montre que la forme de Lagrange σ de V est bien constante pour cette structure (en d'autres termes , F_t appartient au groupe symplectique (1.5) de l'espace $E \times E^*$, muni de la structure (1.15)).

En considérant $E \times E^*$ comme espace de phases de E , on sait qu'il possède un potentiel-covecteur p défini par

(15.4) $$P\begin{pmatrix}\delta Q\\ \delta P\end{pmatrix} = P.\,\delta Q \qquad (3.28)$$

On obtient donc ainsi un schéma quantique (14.6) que nous appellerons schéma de Schrödinger ; l'espace fonctionnel des solutions est celui des fonctions complexes à carré sommable sur $E \times E^*$; à toute variable dynamique u (considérée comme fonction des valeurs des p_j et q^j à l'instant initial t_o) correspond l'observable u défini par la formule (14.4 ++) , ici :

(15.5) $$\hat{u}(\psi) = \left[\left[u - p_j \frac{\partial u}{\partial p_j}\right]\psi - i\hbar\left[\frac{\partial u}{\partial p_j}\frac{\partial \psi}{\partial q^j} - \frac{\partial u}{\partial q^j}\frac{\partial \psi}{\partial p_j}\right]\right.$$

On a en particulier [(9.4) et (10.11)] :

(15.6) $$P_j(\psi) = -i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial q^j} \quad ; \quad Q^j(\psi) = q^j\psi + i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial p_j}$$

L'espace fonctionnel n'est pas irréductible pour le système des opérateurs P_j et Q^j (c'est à dire pour le système des observables associées aux variables dynamiques linéaires); pour le décomposer , donnons de ψ une représentation de Fourier en P , sous la forme

(15.7) $$\psi\begin{pmatrix}Q\\ P\end{pmatrix} = \int_E \theta_\Omega\,(Q - \hbar\,\Omega)\,e^{iP\Omega}\,d\Omega$$

θ_Ω étant , pour chaque Ω , une fonction de $X = Q - \hbar\,\Omega$, définie sur E.

On constate immédiatement que les opérateurs P_j et Q^j opèrent séparément sur chaque composante de Fourier θ_Ω , suivant la formule :

(15.8) $$P_j(\theta_\Omega) = i\hbar\frac{\partial \theta_\Omega}{\partial x^j} \quad ; \quad Q^j(\theta_\Omega) = x^j\,\theta_\Omega \ ;$$

L'espace fonctionnel est donc décomposé en sous-espaces tous isomorphes, sur lesquels les P_j et les Q^j opèrent suivant les formules traditionnelles de Schrödinger.

Bien entendu , les espaces disjoints ne sont plus à carré sommable pour la structure hilbertienne initiale.

(15.9) - Le schéma de Schrödinger dépend de l'instant t_o choisi . On peut construire un autre schéma (Heisenberg) qui n'a pas cet inconvénient : il suffit de partir du potentiel covecteur V $p = \frac{1}{2}\sigma(x)$ [cf (2.16)]. Nous avons déjà effectué la quantification correspondante de V en (4.27).

(15.10) - On sait d'ailleurs qu'on passe du schéma de Heisenberg au schéma de Schrödinger à l'instant t_o par un déphasage (14.7).

(15.11) - On peut , avec J.Von Neumann et H.Weyl , étudier les exponentielles d'opérateurs $e^{i\lambda P_j}$, $e^{i\lambda Q^j}$; ceci revient (voir (4.20)) à étudier les relèvements à l'espace fibré quantifiant du groupe des translations de V ; nous avons déjà fait cette étude (4.30).

Exercice :

On considère un oscillateur harmonique de masse m, de pulsation propre ω, caractérisée par le lagrangien

(15.12) $$\ell = \frac{m}{2}\left[q'^2 - \omega^2 q^2\right] \qquad \left(q' = \frac{dq}{dt}\right)$$

En désignant par p la variable conjuguée de q , on introduit les coordonnées polaires r et φ

(15.13) $$r\, e^{i\varphi} = m\,\omega\, q + ip$$

1°) Montrer que la fonction hamiltonienne est égale à

$$\frac{r^2}{2m}$$

2°) Quantifier le problème par la méthode des §§ 11 et 12. Montrer que l'espace fonctionnel E est l'ensemble des fonctions de la forme

$$\text{(15.14)} \qquad \mathcal{R}e\left(e^{\frac{1}{i\hbar}\left[a - \frac{r^2 \sin 2\varphi}{4m\omega}\right]} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \psi_n(r)\, e^{-in[\omega t+\varphi]} \right)$$

avec la condition

$$\text{(15.15)} \qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} |\psi_n(r)|^2 \, r \, dr < \infty$$

3°) Montrer que l'observable H associé à l'énergie opère sur cet espace fonctionnel en multipliant chaque ψ_n par $n\omega\hbar$.

§ 16 : SUR LA NOTION DE MESURE QUANTIQUE.

Le lecteur habitué à la Mécanique Quantique aura constaté, dans ce dernier chapitre, que les espaces fonctionnels considérées sont en général plus vastes que ceux dont a l'habitude ; ceci étant lié au fait que l'on peut associer des opérateurs à <u>toutes</u> les variables dynamiques.

On a l'habitude de postuler, en mécanique quantique, que la mesure d'une variable dynamique u donnera comme résultat des <u>valeurs propres</u> de <u>l'observable associé</u> $\hat{u}$; ici, nous devrons compléter cette règle par une "règle de sélection", pour tenir compte du fait que l'espace fonctionnel est plus grand que d'habitude ; on peut proposer la règle suivante :

(16.1) La mesure d'une variable dynamique u conduit à une valeur propre de l'opérateur $\hat{u}$, telle que la fonction propre associée φ vérifie

$$\frac{d}{u}\varphi = 0$$

$\frac{d}{u}$ étant la dérivation définie en (4.33).

Pour le mathématicien, il s'agit d'une simple convention, de caractère intrinsèque (parce que le champ de vecteurs $[\xi \to \frac{d}{u}\xi]$ est un champ <u>invariant</u> sur l'espace fibré quantifiant).

On recherche des fonctions propres communes à deux opérateurs $\hat{u} = -i\hbar\frac{\delta}{u}$ et $\frac{d}{u}$ <u>qui commutent</u> (4.34).

Le physicient préfèrera peut-être formuler cette règle (16.1) sous le forme suivante :

La mesure d'une variable dynamique u conduit à une valeur propre de l'opérateur $\hat{u}$, telle que la fonction propre associée φ vérifie

(16.2) $$\hat{u}\ (\varphi) = u \times \varphi$$

En effet, la comparaison de (4.25) et (4.33) montre que $\delta_u - d_u = u \times \delta_1$; (11.19) montre que, dans l'espace fonctionnel choisi, $\delta_1 \varphi = -\frac{1}{i\hbar}\varphi$; d'où l'on tire, en utilisant à nouveau (11.19) : $\hat{u}(\varphi) = -i\hbar\left[d_u \varphi - \frac{u}{i\hbar}\varphi\right]$; (16.1) et (16.2) sont donc bien équivalentes.

Il semble, sur les exemples, que cette règle de sélection conduise à des résultats"raisonnables" ; ainsi, dans le cas de l'atome d'hydrogène (exercice (12.18)) les valeurs mesurables de l'énergie w s'obtiennent en faisant $w = E$ dans la formule (12.23), ce qui fournit

(16.3) $$E = -\frac{me^4}{2\hbar^2} \times \frac{1}{n^2}$$

On trouve les valeurs propres bien connues de l'énergie de l'atome d'hydrogène (la partie positive du spectre étant continue) ; notons que les fonctions propres correspondantes peuvent se trouver par la formule (15.14); on trouve des distributions sur la variété canonique des mouvements classiques de l'électron, distributions qui sont nulles sauf sur les orbites de Bohr : on obtient donc ainsi une justification a postériori de l'ancienne théorie des quantas.

De même, l'application de la règle de sélection (16.2) au cas de l'oscillateur harmonique (15.12) conduit à l'équation

$$\frac{r^2}{2m} \bullet \psi_n = n\omega\hbar\ \psi_n$$

[(voir le 1°) et le 3°) de l'exercice (15.12)] ; on trouve donc comme spectre d'énergie permis l'ensemble des valeurs $n\omega\hbar$, n étant un entier

positif ; on retrouve là aussi un résultat bien connu, à la différence toutefois qu'il manque la constante additive $1/2\ \omega\ \hbar$; mais cette constante n'est pas significative, car elle disparaît dans les problèmes radiatifs ; on peut d'ailleurs la retrouver si l'on veut en ajoutant une constante - comme il est loisible - au lagrangien classique.

-o-o-o-o-o-o-

REFERENCES

E.CARTAN : - " Leçons sur les invariants intégraux " - Hermann ,Paris (1958)

I.M. GELFAND et S.V. FOMIN : - "Calculus of variations" (trad.angl.) - Prentice-Hall ,(1963)

D.KASTLER : - " The C*-algebras of a free boson field " - (à publier) , (1964)

L.SCHWARTZ : - "Théorie des distributions " - Hermann , Paris (1957)

J.M.SOURIAU: - Coll. Intern. du C.N.R.S. , Strasbourg (1953)

- Alger-Mathématiques , I , 2 (1954)

- " Quantification canonique " - Faculté des Sciences de Marseille , ronéotypé (1962)

- " Géométrie et Relativité " - Herman,Paris (1964)

I N D E X

ACTION (5.13)
(7.28)

ANTI-CANONIQUE (2.0)

BOHR(relation de) (13.30)

CANONIQUE
- base c. (1.2)
- transformation c. (2.2)
- " " infinitésimale (2.26)
- variété c. (2.7)
- équations c. (6.44)
- quantification c. § 11.

CARACTERISTIQUE (3.37)
- c.d'un champ de cônes (7.20)

CONE (7.1)
- c.dual (7.10)
- champ de c. (7.19)

CONJUGUE(variable) (5.9)

CONOIDE (7.19)

CONTACT(élément de) (0.8)

CROCHET
- c.de Poisson (2.34)
- c.de Lagrange (3.26)

DERIVEE VARIATIONNELLE (5.6)

DIRAC
- quantification à la D. §10
- problème de D. (10.10)

DIRECTION (0.1)
- racine des directions (0.6)

DYNAMIQUE(variable) (2.29)

EULER
- équations d'E-Lagrange (5.18)

EVOLUTIF (0.15)

EXTREMALE (5.15)
- e.d'un champ de cônes (7.20)

FONCTION D'ONDE (13.25)

FORCE(ligne de) (0.9)

GRADIENT(symplectique) (2.30)

HAMILTON
- Equations d'H. (6.44)
- Principe d'H. (9.1)

HAMILTONIEN
- Problème h. (6.40)
- fonction h. (6.43)
- formalisme h. (9.4)
- opérateur h. (9.6)

HEISENBERG
Quantification à la H. §9
Schéma de H. (15.9)
HYPERBOLOIDE DE MASSE (13.10)
INVARIANT INTEGRAL (0.12)
ISOTROPE (1.1)
JACOBI
Identité de J. (2.43)
Variété, équation de J. (6.29)
JACOBIEN
problème j. (6.29)
quantification des problèmes j. §12
KLEIN-GORDON(équation de) (13.29)
LAGRANGE
forme de L. (2.9)
crochet de L. (3.26)
Equation d'Euler-L. (5.18)
LAGRANGIEN (5.1)
LIOUVILLE
forme de L. (2.11)
densité de L. (2.14)
MASSE
hyperboloïde de m. (13.10)
pseudo-m. (13.29)
MOMENTS (13.36)
NOETHER(théorèmes de) (8.10)
(8.16)
(8.20)
réciproque du th.de N. (8.15)
OBSERVABLE (0.10)
PARAMETRISANT (0.14)
PARAMETRISATION (6.9)
PHASE(espace de) (3.15)
PLANCK(constante de) (4.2)
POISSON
forme de P. (2.20)
crochet de P. (2.34)
POTENTIEL
p.covecteur (2.19)
p.vecteur (2.21)
variété p. (2.18)
PRINCIPAL(paramètre) (6.37)
PROCA(équation de) (13.31)
PROJECTIF(espace, groupe) (0.2)
QUANTIFIABLE(variété) (4.8)
QUANTIFIANT(espace) (4.1)
QUANTIFICATION
q. à la Heisenberg §9
q. à la Dirac §10
q. canonique §11
QUANTIQUE(schéma) (14.6)

REGULIER (problème variat.) (5.20)

RELEVEMENT (4.17)

(6.21)

SCHEMA

s. quantique (14.6)

s. de Schrödinger (15.4)

s. de Heisenberg (15.9)

SCHRODINGER

schéma de S. (15.4)

formules de S. (15.8)

SYMPLECTIQUE

espace s. (1.1)

groupe s. (1.5)

variété s. (2.10)

TANGENTIELLE (équation) (7.11)

TYPE

problèmes de t.I (5.20)

problèmes de t.II (6.1)

VARIABLE DYNAMIQUE (2.29)

VARIATIONNELLE (dérivée) (5.6)

TABLE DES MATIERES

Introduction. 1

§0. Directions et lignes de force. .8

Chapitre I: GEOMETRIE CANONIQUE

§ 1 :groupe canonique 16

§ 2 :variétés canoniques 20

§ 3 :construction de variétés canoniques .30

§ 4 :espaces fibrés quantifiants.... 42

Chapitre II : CALCUL DES VARIATIONS

§ 5 :Problèmes variationnels réguliers.. 64

§ 6 :Problèmes variationnels homogènes .. 72

§ 7 :Problèmes variationnels côniques ...87

§ 8 :Théorème de Noether 100

Chapitre III : QUANTIFICATION DES PROBLEMES DYNAMIQUES.

§ 9 :Quantification à la Heisenberg.....110

§ 10 :Quantification à la Dirac..... 114

§ 11 :Quantification canonique 118

Chapitre IV : EXEMPLES ET APPLICATIONS.

§ 12 :Quantification des problèmes jacobiens...126

§ 13 :Particule libre relativiste ...133

§ 14 :Problèmes potentiels.....147

§ 15 :Problèmes linéaires.....150

§ 16 :Sur la notion de mesure quantique...154

Références : 156

Index - Table des Matières 157

-o-o-o -o-o-