Commun. math. Phys. 1, 374—398 (1966)

Quantification géométrique*

J. M. Souriau

Faculté des Sciences de Marseille

Reçu le 7 juillet 1965

Abstract. The usual quantization of a system with n degrees of freedom is not independent of the choice of coordinates and treats time on a special footing. In order to obtain an intrinsic quantization procedure, we have first to consider separately the phase space Φ and the set V of classical motions, which are partially set in correspondance, at each time t, by solving an initial values problem, but are nevertheless not identifiable. If the dynamical variables are defined as functions on V, Poisson's theorem defines the Poisson bracket as an internal operation on these dynamical variables; this allows us to equip V with a structure of a $2n$-dimensional symplectic manifold which follows from coordinate independent variational considerations. This symplectic structure allows us, not only to state the quantization program intrinsically (§ 2) but also to give an intrinsic realization (§ 4). With this purpose, we construct a bundle space W with basis V ("the quantizing bundle space"); the physical states are functions defined on W; to each classical dynamical variable corresponds an infinitesimal motion of W, inducing an observable of the states; whence a "quantization" fulfilling the commutation relations and the evolution equations. Since this construction uses merely the symplectic structure of V, the (local) isomorphisms of this structure can be locally lifted (along local isomorphisms of the bundle space W); the invariance groups of the system therefore acts canonically on the states, up to a phase; whence the usual projective representation of these groups, without any supplementary postulate (§ 5).

We compare the results of our geometrical quantization with the usual quantization procedure, taking as examples the harmonic oscillator and the hydrogene atom; one finds wider states spaces (due to the fact that all the dynamic variables are represented); but a general rule related to "quantal measurements" allows to restrict the spectral values e.g. of the energy to the familiar ones. The case of the free relativistic particle is treated in details; our method there provides a state on which the Poincaré group acts projectivally; by reduction of this representation, one gets spaces of complex waves functions, verifying the usual wave equations for all integer spin values. The investigation of momentum, energy and angular momentum yield natural results (§ 7).

We finally sketch the application of our method to field quantization notably of general relativity (§ 8).

---

* Les principaux résultats de cet article ont été exposés pour la première fois au Séminaire de physique mathématique de la Faculté des Sciences de Marseille, en 1960—1961, et publiés en 1962 [7]; le présent exposé, notablement plus simple, est présenté sous forme inductive.

Faute de place, nous n'avons donné ici aucune démonstration; le lecteur les trouvera dans les références [8] et [9].

§ 1. Descriptions classiques d'un système dynamique

Traitons le cas d'une particule de masse m, soumise à un champ de forces dérivant d'un potentiel w (cas non relativiste).

Le mouvement de la particule est donné par la loi de NEWTON qui s'écrit (en coordonnées quelconques q^j) sous la forme

$$m \frac{d}{dt}\left[g_{jk}\frac{dq^k}{dt}\right] + \frac{\partial w}{\partial q^j} = 0\,. \tag{1.1}$$

Le principe d'HAMILTON nous enseigne à écrire cette équation sous la forme

$$\delta a = 0 \tag{1.2}$$

avec

$$a = \int_{t_0}^{t_1} l\, dt\,, \tag{1.3}$$

$$l = \frac{m}{2} g_{jk}\, q'^j\, q'^k - w(q^j) \qquad \left[q'^j = \frac{dq^j}{dt}\right]. \tag{1.4}$$

A priori, le principe d'HAMILTON n'est qu'un aide-mémoire pour former les équations de NEWTON (1.1); en particulier, il donne le même résultat si l'on fait sur le *lagrangien* l une substitution affine

$$l \to A\,l + B\,. \tag{1.5}$$

Mais les formules

$$p_j = \frac{\partial l}{\partial q'^j} \tag{1.6}$$

et

$$e = p_j\, q'^j - l \tag{1.7}$$

qui donnent les composantes p_j de l'impulsion et l'énergie e à partir du lagrangien (1.4) n'admettent pas l'invariance (1.5); elles permettent donc de choisir le lagrangien parmi plusieurs possibilités équivalentes du point de vue des équations du mouvement.

On sait que le théorème de NOETHER montre que la grandeur e définie par (1.6) et (1.7) est conservative dans tout problème variationnel — pourvu que le lagrangien soit invariant par translation de la variable t; le principe expérimental de conservation de l'énergie est donc un argument pour l'existence d'une formulation variationnelle universelle de la physique, plutôt que pour telle mécanique particulière (newtonienne ou relativiste par exemple); le principe variationnel, ainsi que la valeur précise du lagrangien, jouent de même un rôle essentiel dans la formulation de la mécanique quantique.

On sait que pour traiter quantiquement le système donné, on doit construire 7 opérateurs hermitiens P_j, Q^j et H (opérant sur un espace hilbertien E, et dépendant du temps t), vérifiant les *relations de commutation*

$$\left.\begin{array}{l} P_j \cdot P_k - P_k \cdot P_j = 0 \qquad Q^j \cdot Q^k - Q^k \cdot Q^j = 0 \\ P_j \cdot Q^k - Q^k \cdot P_j = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad j \neq k \\ -i\hbar\, 1_E & \text{si} \quad j = k \end{cases} \end{array}\right\} \quad (1.8)$$

et les *équations d'évolution*

$$i\hbar \frac{dP_j}{dt} = P_j \cdot H - H \cdot P_j \qquad i\hbar \frac{dQ^j}{dt} = Q^j \cdot H - H \cdot Q^j \quad (1.9)$$

($j, k = 1, 2, 3$; $2\pi\hbar$ = constante de PLANCK; 1_E = opérateur identique sur E), et à postuler une *correspondance* entre ces opérateurs et les grandeurs classiques p_j, q^j et e respectivement; correspondance précisée notamment par une règle concernant la *mesure* de ces grandeurs (voir ci-dessous § 6).

Bien entendu les équations (1.8) et (1.9) ne constituent pas, à elles seules, une formulation complète du problème, puisqu'il n'y est fait aucune référence à la masse de la particule, ni au potentiel w; on n'y voit transparaître que l'existence d'un problème variationnel à trois dimensions. Mais avant de chercher d'autres relations entre ces opérateurs, nous allons interpréter géométriquement les conditions déjà écrites.

§ 2. Formulation géométrique des conditions quantiques

Posons:

$$\widetilde{p}_j = \frac{-P_j}{i\hbar}, \quad \widetilde{q}^j = \frac{-Q^j}{i\hbar}, \quad \tilde{1} = \frac{-1_E}{i\hbar}. \quad (2.1)$$

Les relations de commutation (1.8) s'écrivent alors

$$\begin{array}{l} [\widetilde{p}_j, \widetilde{p}_k]_- = 0 \quad [\widetilde{q}^j, \widetilde{q}^k]_- = 0 \\ [\widetilde{p}_j, \widetilde{q}^k]_- = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad j \neq k \\ 1 & \text{si} \quad j = k\,. \end{cases} \end{array} \qquad [A, B]_- = A.B - B.A \quad (2.2)$$

Comme d'autre part les opérateurs considérés sont tous supposés linéaires *sur le corps des complexes*, on a aussi:

$$[\widetilde{p}_j, \tilde{1}]_- = 0 \qquad\qquad [\widetilde{q}^j, \tilde{1}]_- = 0\,. \quad (2.3)$$

Le système de ces équations (2.2) et (2.3) nontre que les opérateurs $\widetilde{p}_j$, $\widetilde{q}^j$ et $\tilde{1}$ sont une base d'une *algèbre de* LIE; comme ces opérateurs sont tous antihermitiens, on pressent l'existence d'une *représentation unitaire d'un certain groupe*, groupe dont les équations (2.2) et (2.3) définissent les *relations de structure*.

On voit qu'il n'est pas adroit de postuler la structure complexe de E, ni la C-linéarité des opérateurs P_j et Q^j; en effet, si l'on ajoute aux relations (2.2) et (2.3) la formule

$$[\tilde{\mathrm{I}}]^2 = -\frac{1}{\hbar^2} \tag{2.4}$$

qui est une conséquence immédiate de (2.1), on voit que toute la structure complexe se déduit réciproquement de (2.2), (2.3) et (2.4) en *posant*

$$[a + bi]\, X = aX + b\hbar\tilde{\mathrm{I}}\, X \qquad [\forall a, b \in R, X \in E] \tag{2.5}$$

ce qui ne présente d'ailleurs plus d'intérêt particulier.

Il est commode d'introduire ici — comme l'a fait Dirac — une notion empruntée à la mécanique analytique; on appelle *crochet de* Poisson de u et v l'expression

$$[u, v]_P = \sum_j \frac{\partial u}{\partial p_j}\frac{\partial v}{\partial q^j} - \frac{\partial u}{\partial q^j}\frac{\partial v}{\partial p_j}, \tag{2.6}$$

u et v étant des *variables dynamiques*, c'est à dire des fonctions (suffisamment différentiables) des variables p_j et q^j.

On remarque en effet que toutes les relations de commutation (2.2) et (2.3) s'obtiennent en remplaçant successivement u et v par p_j, q^j et 1 dans la formule:

$$[\tilde{u}, \tilde{v}]_- = \widetilde{[u, v]_P}\,. \tag{2.7}$$

On constate aisément que les variables dynamiques forment une algèbre de Lie pour le crochet de Poisson, et notamment qu'elles vérifient *l'identité de* Jacobi

$$[u, [v, w]_P]_P + [v, [w, u]_P]_P + [w, [u, v]_P]_P = 0\,. \tag{2.8}$$

Les relations de commutation sont donc interprétables comme une *représentation linéaire* $u \to \tilde{u}$ d'une sous-algèbre de Lie de l'«algèbre de Poisson» formée par toutes les variables dynamiques.

Quelle sous-algèbre de Lie faut-il choisir ? Avant de répondre à cette question, il faut se souvenir que les opérateurs $\widetilde{p_j}$ et $\widetilde{q^j}$ dépendent du temps, mais que les relations de commutation sont valables à *chaque instant t*; pour tenir compte de ce fait, il est indiqué de modifier légèrement une définition ci-dessus:

(A) Nous appellerons désormais *variables dynamiques* toutes les fonctions de la trajectoire d'espace-temps de la particule classique [1].

En effet, les théorèmes généraux sur les équations différentielles nous permettent de caractériser une telle trajectoire par les valeurs des p_j et des q^j à un instant arbitraire t; on pourra donc, *à chaque instant*, exprimer une variable dynamique u comme fonction des p_j et des q^j; ce qui s'écrira

$$u = f(t, q^j, p_j)\,, \tag{2.9}$$

f étant une *intégrale première* des équations du mouvement (1.1).

[1] Nous les supposerons de plus *infiniment différentiables* (voir ci-dessous (3.3)).

C'est le *théorème de* POISSON qui nous apprend, si u et v sont des intégrales premières, que l'expression définie par (2.6) est encore une intégrale première; en d'autres termes, que le crochet de deux variables dynamiques (au sens (A)) est encore une variable dynamique $[u, v]_P$, caractérisée par la relation (2.6) valable *à tout instant t*.

Considérons maintenant les *équations d'évolution* (1.9); si l'on pose, par analogie avec (2.1)

$$\tilde{e} = -\frac{H}{i\hbar} \tag{2.10}$$

elles peuvent s'écrire

$$\frac{d}{dt}[\widetilde{p_j}] = [\tilde{e}, \widetilde{p_j}]_- \qquad \frac{d}{dt}[\widetilde{q^j}] = [\tilde{e}, \widetilde{q^j}]_- . \tag{2.11}$$

Or la correspondance $[u \to \tilde{u}]$ a été supposée linéaire; si on la suppose de plus continue (en un certain sens qu'il serait prématuré de préciser ici), on pourra dériver sous le signe $\sim$; si bien que les équations d'évolution s'écriront

$$\frac{d\widetilde{p_j}}{dt} = [\tilde{e}, \widetilde{p_j}]_- \qquad \frac{d\widetilde{q^j}}{dt} = [\tilde{e}, \widetilde{q^j}]_- \tag{2.12}$$

si l'on admet que les variables dynamiques qui coïncident avec les p_j et les q^j *pour toutes les valeurs de t* possèdent chacune un correspondant dans la transformation $[u \to \tilde{u}]$.

Mais les *équations canoniques d'*HAMILTON, applicables dans le cas considéré, peuvent s'écrire

$$\frac{dp_j}{dt} = [e, p_j]_P \qquad \frac{dq^j}{dt} = [e, q^j]_P ; \tag{2.13}$$

en les comparant avec (2.12), on constate donc que l'on peut interpréter les équations d'évolution de la façon suivante:

(B) La correspondance linéaire $[u \to \tilde{u}]$, ainsi que la règle (2.7), s'étend à toutes les variables suivantes:
— les intégrales premières 1 et e (avec la formule (2.10));
— *pour tout t*, les variables dynamiques qui coïncident avec les p_j et les q^j.

En dehors de cas bien particuliers, tels que celui d'un oscillateur linéaire, l'algèbre de LIE engendrée par ces variables dynamiques est un espace vectoriel de dimension infinie; on peut même conjecturer que les propriétés ergodiques du système mécanique peuvent rendre cette algèbre de LIE *partout dense dans l'algèbre de* POISSON *de toutes les variables dynamiques* (en adoptant une topologie convenable); si la correspondance $[u \to \tilde{u}]$ est continue pour cette topologie, on voit que *l'ensemble du formalisme quantique* pourra se formuler comme suit:

(C) *Pour toute* variable dynamique (au sens A), il existe un opérateur $\tilde{u}$, anti-hermitien sur un espace hilbertien *réel* E, tel que

a) la correspondance $[u \to \tilde{u}]$ est linéaire;

b) $[\tilde{u}, \tilde{v}]_- \equiv \widetilde{[u, v]}_P$,
$[u, v]_P$ désignant le crochet de Poisson;

c) $[\tilde{1}]^2 = -\dfrac{1}{\hbar^2}$.

Dans cet énoncé, le principe de correspondance apparaît nettement, puisqu'il met en jeu l'ensemble des variables dynamiques, clest à dire indirectement, l'ensemble des mouvements du système classique; cependant les équations du mouvement n'interviennent que par l'intermédiaire du théorème de Poisson — qui permet de définir le crochet de Poisson de deux variables dynamiques; or ce théorème n'est pas lié à la forme particulière des équations de Newton; il peut se démontrer (avec la définition (1.6) des p_j) pour tous les problèmes variationnels réguliers; on peut même définir le crochet de Poisson pour une classe plus vaste de problèmes variationnels (les problèmes «évolutifs» de [9]) par une méthode intrinsèque qui ne met en jeu ni le système de coordonnées choisi, ni le découpage de l'espace-temps en tranches simultanées.

On voit donc l'avantage de la formulation (C) par rapport aux relations initiales (1.8), (1.9): on dispose d'un énoncé intrinsèque, qui s'appliquera à d'autres problèmes mécaniques: un système plus complexe (une particule polarisée par exemple); un problème relativiste (voir ci-dessous le § 7).

On peut évidemment se demander si les axiomes (C) ne sont pas exorbitants: nous verrons au § 4 qu'ils sont compatibles, en construisant une réalisation effective.

§ 3. Géométrie de l'espace des mouvements

Nous venons de voir comment la mécanique quantique nous amène à considérer l'ensemble «abstrait» V des trajectoires spatio-temporelles (ou *mouvements*) du système classique; quelles structures cet ensemble possède-t-il de façon naturelle ?

(D) Si l'on choisit une valeur de t, on peut repérer un mouvement par les valeurs, à l'instant t, des variables q^j et p_j; ce qui revient à établir une correspondance (que nous noterons F_t) entre *l'espace des phases* (directement repéré par les q^j et les p_j) et l'ensemble V.

Pour cette raison, on confond souvent V avec l'espace de phases; pourtant cette identification n'est pas intrinsèque, puisqu'elle dépend du choix de t; mathématiquement, on pourra seulement *transférer à V les structures* de l'espace de phase dont les transformations $F_{t'} \cdot F_t^{-1}$ seront toutes des isomorphismes (locaux éventuellement).

La vérification de cette condition d'isomorphisme implique les équations du mouvement: en effet, $F_{t'} \cdot F_t^{-1}$ est l'application qui fait passer des coordonnées dynamiques p_j, q^j de la particule à l'instant t à ses coordonnées à l'instant t'.

(E) Ainsi, la *topologie globale* de l'espace de phases n'est pas nécessairement celle de V, parce que les applications $F_{t'} \cdot F_t^{-1}$ ne sont pas toujours définies sur l'espace de phases tout entier: c'est le cas par exemple pour une particule qui se meut dans un potentiel newtonien; les mouvements à moment cinétique nul ne sont pas prolongeables pour toutes les valeurs de t, parce que la particule aboutit toujours (dans le passé ou dans l'avenir) au point origine du potentiel, et que la trajectoire n'est pas prolongeable au delà du choc.

De même, l'espace de phases possède une structure *d'espace fibré vectoriel*, dont la base est *l'espace de configuration* (repéré par les q^j); le lecteur verra facilement pourquoi cette fibration ne passe pas à V.

(F) Par contre, si on suppose (ce que nous ferons ici) que le lagrangien est régulier et infiniment différentiable, les théorèmes généraux sur les équations différentielles montrent que les applications $F_{t'} \cdot F_t^{-1}$ sont elles mêmes infiniment différentiables; par conséquent *V possède une structure de variété infiniment différentiable* (de dimension 6).

Cette structure nous permet en particulier de préciser la définition (2.9): une variable dynamique sera une fonction scalaire $[x \to u]$, *infiniment différentiable* sur V [2].

Considérons enfin la définition (2.6) du crochet de Poisson, dont on peut montrer variationnellement qu'elle est indépendante du choix de coordonnées q^j choisies dans *l'espace de configuration* (Ref. [9]); en utilisant des coordonnées quelconques x^μ de *l'espace de phases*, il existe évidemment pour chaque point, des nombres $\sigma^{\mu\nu}$ telles que cette définition s'écrive

$$[u, v]_P = \sigma^{\mu\nu}\, \partial_\mu u\, \partial_\nu v \quad \left[\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\right]. \tag{3.1}$$

Par changement de coordonnées, on constate que les $\sigma^{\mu\nu}$ sont les composantes d'un *tenseur contravariant* (que nous appellerons tenseur de Poisson); le théorème de Poisson exprime que le champ de Poisson $[x \to \sigma]$ est invariant par les applications $F_{t'} \cdot F_t^{-1}$; par conséquent il passe à l'espace V, et on peut donc définir le crochet de Poisson de deux variables dynamiques par une formule (3.1) écrite en coordonnées *quelconques* de V (et non pas nécessairement en coordonnées simultanées).

Le calcul montre que le tenseur $\sigma^{\mu\nu}$ de V (ou de l'espace de phases) est *régulier*, c'est à dire qu'il existe un *tenseur inverse* $\sigma_{\lambda\mu}$ défini intrin-

[2] On peut aussi considérer les variables dynamiques qui ne sont définies que sur une *partie ouverte* de V.

sèquement par les relations

$$\sum_{\mu} \sigma_{\lambda\mu} \cdot \sigma^{\mu\nu} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \lambda \neq \nu \\ 1 & \text{si} \quad \lambda = \nu . \end{cases} \tag{3.2}$$

Ce tenseur, antisymétrique comme celui de POISSON, et covariant, a été introduit pour la première fois implicitement par LAGRANGE (dans la définition de ce que l'on appelle les *crochets de* LAGRANGE) (Ref. [2]); il définit une forme différentielle extérieure de degré 2 sur V, que nous appellerons naturellement forme de LAGRANGE [3].

On peut vérifier que la *dérivée extérieure* de la forme de LAGRANGE est identiquement nulle; cette propriété s'exprime, en coordonnées quelconques, par la formule

$$\partial_\lambda \sigma_{\mu\nu} + \partial_\mu \sigma_{\nu\lambda} + \partial_\nu \sigma_{\lambda\mu} = 0 \, ; \tag{3.3}$$

cette condition entraîne *localement* l'existence d'un «potentiel» p_μ tel que

$$\sigma_{\mu\nu} = \partial_\lambda p_\mu - \partial_\mu p_\lambda \, . \tag{3.4}$$

(G) On appelle *variété symplectique* (ou variété *canonique*) toute variété infiniment différentiable possédant des champs de tenseurs antisymétriques vérifiant les relations (3.2) et (3.3); on démontre que toutes variété symplectique a une dimension *paire*, et que deux variétés symplectiques V et V' de même dimension sont *localement isomorphes*; ce qui signifie que si x_0 est un point de V, x_0' un point de V', il existe une application F, infiniment différentiable dans les deux sens, d'un ouvert de V sur un ouvert de V', telle que $F(x_0) = x_0'$ et que l'image par F de la forme de LAGRANGE de V soit la forme de LAGRANGE de V' [4].

(H) Il est intéressant d'étudier les *automorphismes* de la structure symplectique de V, c'est à dire l'ensemble Γ des applications de V sur V qui sont infiniment différentiables dans les deux sens, et qui conservent la forme de LAGRANGE [5]; il est évident que Γ est un *groupe*; on montre qu'il opère *transitivement* sur V (voir ci-dessus (G)), et que sa dimension est *infinie* [6].

---

[3] On peut démontrer le théorème de Poisson en établissant que la forme de LAGRANGE de l'espace de phases est un *invariant intégral* (au sens de Poincaré) des équations du mouvement.

[4] On voit en particulier que les applications F_t définies en (D) sont des *isomorphismes locaux* de la structure symplectique de l'espace de phase sur celle de V.

[5] Les automorphismes symplectiques de l'espace de phases s'appellent les *transformations canoniques* (exemple: les $F_{t'} \cdot F_t^{-1}$).

[6] Ici apparaît la principale différence entre les espaces symplectiques et les espaces euclidiens (définis par un tenseur *symétrique* régulier $g_{\mu\nu}$, dont les coordonnées peuvent comme ici être rendus constantes par un choix convenable des coordonnées); les automorphismes de la structure euclidienne (les *déplacements*) forment un groupe de dimension finie.

On peut aussi étudier les *éléments infinitésimaux* du groupe Γ; ce seront les champs de vecteurs $[x \to \delta x]$ de V qui engendreront des automorphismes; la théorie des *dérivées de* Lie par exemple, fournit la condition pour qu'il en soit ainsi:

$$\partial_\mu [\sigma_{\varrho\nu}\, \delta x^\varrho] - \partial_\nu [\sigma_{\varrho\mu}\, \delta x^\varrho] = 0 . \tag{3.5}$$

Cette condition s'intègre *localement* sous la forme

$$\delta x^\varrho = \sigma^{\varrho\mu}\, \partial_\mu u \tag{3.6}$$

u étant une fonction scalaire sur V; nous désignerons par $\underset{u}{\delta}$ la dérivation δ associée par cette formule (3.6) à la variable dynamique u.

L'ensemble des éléments infinitésimaux de Γ forme une algèbre de Lie (pour le *crochet de* Lie des dérivations), dont la dimension est infinie.

§ 4. Résolution effective des equations quantiques

A la fin du § 2, nous avons exprimé les conditions quantiques sous une forme (C) qui ne fait intervenir le système mécanique classique que par l'intermédiaire de la structure symplectique de la variété V de ses mouvements.

Nous allons «quantifier» le problème, c'est à dire construire des opérateurs vérifiant ces conditions (C); on voit que cette opération mettra seulement en jeu la variété V; on pourra légitimement parler de la *quantification d'une variété symplectique*; ce problème ne fait intervenir que la *structure globale* de V, puisque toutes les variétés symplectiques ont même structure locale (G).

Si nous posons, pour toutes variables dynamiques u et ψ

$$\overline{u}\,(\psi) = [u, \psi]_P , \tag{4.1}$$

l'identité de Jacobi (2.8) [7] peut évidemment s'écrire

$$[\overline{u}, \overline{v}]_- = \overline{[u, v]_P} . \tag{4.2}$$

(I) Soit par ailleurs V une variété symplectique de dimension $2n$; on vérifie algébriquement que la puissance extérieure $n^{\text{ème}}$ de la forme σ n'est pas nulle; c'est une forme de degré égal à la dimension de la variété, que nous appellerons *forme de* Liouville [8]. Il en résulte immédiatement que V est une variété *orientée* (donc orientable), et que la forme de Liouville fournit une *densité* permettant d'intégrer sur V les variables dynamiques. Il est clair que les automorphismes de V invarient la forme de Liouville [9]; ils opèrent donc *isométriquement* sur l'espace préhilber-

[7] Cette identité peut se vérifier directement sur toute variété symplectique.

[8] En la multipliant au besoin par un scalaire constant.

[9] Dans le cas de l'espace de phases, cette proposition constitue le *théorème de Liouville.*

tien réel des variables dynamiques à carré sommable pour la forme de LIOUVILLE; par complétion on obtient un espace de Hilbert réel E, et on peut s'attendre à ce que les prolongements à E des opérateurs $\overline{u}$ définis en (4.1) soient anti-hermitiens; car leur définition peut aussi s'écrire

$$\overline{u}(\psi) = \underset{u}{\delta}\,\psi$$

avec la notation établie en (3.6), ce qui montre que ce sont des éléments infinitésimaux de ce groupe d'isométries de E. Une vérification directe montre qu'il en est bien ainsi.

(J) Est-ce à dire que nous ayons résolu le problème de la quantification? Non, parce que la condition (c) de (C) n'est pas vérifiée; en effet, l'opérateur associé par (4.1) ou (I) à la variable dynamique 1 est nul, alors que son carré devrait être égal à $-\frac{1}{\hbar^2}$.

Cependant ce premier essai nous met sur la voie; nous cherchons une représentation linéaire de l'algèbre de LIE-POISSON des variables dynamiques; nous avons essayé la représentation dite *représentation adjointe*; nous constatons qu'elle ne convient pas, parce qu'elle est nulle sur le centre de l'algèbre; pour jouer le rôle que nous avons conjecturé au § 2, le groupe Γ des automorphismes symplectiques de V ne convient pas, mais il peut être un *quotient* d'un groupe convenable.

En d'autres termes, nous avons à construire une *extension* de ce groupe Γ, jouissant des propriétés cherchées.

Or, on sait construire de telles extensions: ce sont les groupes d'automorphismes des *espaces fibrés* de base V; il reste à construire un tel espaces fibré, et une représentation linéaire de ses automorphismes infinitésimaux vérifiant les conditions (C).

Nous allons procéder axiomatiquement à cette construction.

Soit $\mathscr{V}$ une variété différentiable, dont nous désignerons le point générique par ξ.

Nous supposerons défin sur $\mathscr{V}$ un champ de covecteurs, $[\xi \to \varpi]$, vérifiant les conditions suivantes:

(K) — En tout point ξ, le *noyau de la dérivée extérieure* de ϖ est un espace vectoriel de dimension 1 (c'est donc une *direction* tangente à $\mathscr{V}$ en ξ);

— ϖ n'est pas nul dans cette direction;

— les lignes de force de ce champ de directions (que nous appellerons *caractéristiques* de $\mathscr{V}$) sont des ensembles *compacts*.

On démontre alors que la dimension de $\mathscr{V}$ est *impaire* (nous la désignerons par $2n+1$); que les caractéristiques de $\mathscr{V}$ sont des *courbes fermées* (c'est à dire homéomorphes à l'ensemble T des nombres complexes de module 1); que la circulation

$$b = \oint \varpi \cdot d\xi \tag{4.3}$$

du covecteur ϖ sur les caractéristiques est *constante* sur chaque composante connexe de $\mathscr{V}$; que la dérivée extérieure de ϖ est un *invariant intégral* (au sens de Cartan) de l'équation différentielle des caractéristiques.

(L) Il en résulte que $\mathscr{V}$ possède une structure *d'espace fibré*, dont les fibres sont les caractéristiques, et dont la base V est une variété de dimension $2n$; comme la dérivée extérieure $\nabla\varpi$ est un invariant intégral, elle est l'image réciproque d'une 2-forme σ de la base V, dont on constate qu'elle vérifie les axiomes du § 3; V est donc une *variété symplectique*.

Les automorphismes de $\mathscr{V}$ sont les transformations (infiniment différentiables) qui invarient la forme ϖ; il est clair qu'ils respectent les caractéristiques, donc qu'ils opèrent sur V en conservant la forme σ; ces automorphismes de $\mathscr{V}$ se projettent donc suivant des automorphismes symplectiques de V.

Il faut noter qu'il existe un *groupe de jauge*, c'est à dire un ensemble, non réduit à l'identité, d'isomorphismes de $\mathscr{V}$ qui se projettent suivant l'identité de V; si $\mathscr{V}$ est connexe, on vérifie que ce groupe est isomorphe au tore T (groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1, encore noté R/Z ou $U(1)$).

Réciproquement, tout automorphisme F de V est, *localement*, la projection d'un automorphisme local $\mathscr{F}$ de $\mathscr{V}$ (on dit que $\mathscr{F}$ est un *relèvement local* de F); si Γ est un groupe d'automorphismes de V, les éléments de Γ qui possèdent un relèvement *global* forment un sous-groupe Γ_0; l'ensemble des relèvements des éléments de Γ_0 est un groupe $\tilde{\Gamma}_0$; si V est *simplement connexe*, Γ_0 est un sous-groupe *distingué* de Γ, $\tilde{\Gamma}_0$ est une *extension* de Γ_0 par le tore T.

La même étude peut se faire infinitésimalement: les *automorphismes infinitésimaux* de $\mathscr{V}$ sont les champs de vecteurs $[\xi \to \delta\xi]$ qui, *globalement*, peuvent être associés à une variable dynamique *u de la base V* par les relations

$$\left.\begin{aligned} &\varpi \cdot \delta\xi = u \\ \delta x = \underset{u}{\delta} x \quad &[\text{notation } (3.6)\,;\, x \text{ désigne la projection de } \xi] \end{aligned}\right\} \qquad (4.4)$$

nous pouvons encore désigner cette dérivation par la notation $\underset{u}{\delta}$, puisqu'elle constitue un relèvement à $\mathscr{V}$ de celle qui a ainsi été désignée plus haut sur V; il faut noter que le vecteur $\underset{1}{\delta}\xi$ de $\mathscr{V}$ qui est associé par (4.4) à la variable dynamique 1 n'est pas nul; c'est un élément infinitésimal du groupe de jauge.

Notons aussi la formule

$$\underset{u}{\delta}\underset{v}{\delta}\psi - \underset{v}{\delta}\underset{u}{\delta}\psi = \underset{[u,v]_P}{\delta}\psi \qquad (4.5)$$

valable pour toute fonction ψ différentiable sur $\mathscr{V}$, et pour toutes variables dynamiques u et v de V[10].

Les fonctions continues sur $\mathscr{V}$ peuvent se décomposer en série de fonctions propres du carré de la dérivation $\underset{1}{\delta}$ (ce sont simplement des séries de FOURIER sur les caractéristiques); dans le cas où la constante b définie en (4.3) est la même sur chaque composante de $\mathscr{V}$ (en particulier si V est connexe), les espaces propres $\mathscr{E}_0, \mathscr{E}_1, \ldots, \mathscr{E}_N, \ldots$ correspondent aux valeurs propres

$$\frac{-4\pi^2 N^2}{b^2} \tag{4.6}$$

de $[\underset{1}{\delta}]^2$; chacun de ces espaces est globalement invariant par les automorphismes de $\mathscr{V}$.

Si l'on pose, pour tout ψ différentiable dans $\mathscr{E}_1$,

$$\tilde{u}(\psi) = \underset{u}{\delta}\psi \tag{4.7}$$

on voit que $\tilde{u}$ sera un opérateur linéaire (non borné) de $\mathscr{E}_1$; les formules (4.5) et (4.6) donneront respectivement

$$[\tilde{u}, \tilde{v}]_- = \widetilde{[u, v]_P} \tag{4.8}$$

$$[\tilde{1}]^2 = -\left[\frac{2\pi}{b}\right]^2. \tag{4.9}$$

(N) On constate, d'autre part, (comme plus haut dans le cas d'une variété symplectique) qu'il existe une forme non nulle de degré maximum $2n+1$ sur $\mathscr{V}$ qui est invariante par les automorphismes de $\mathscr{V}$; cette forme permet de compléter l'espace fonctionnel $\mathscr{E}_1$ par un espace de Hilbert réel E, tel que les opérateurs u soient *antihermitiens*.

Par conséquent, les conditions quantiques (C) sont vérifiées par la construction (4.7) si la constante b définie en (4.3) est égale à la constante de PLANCK:

(O) Le problème de la quantification d'un système dynamique sera donc résolu par cette formule (4.7) si nous savons construire une variété $\mathscr{V}$ vérifiant les axiomes (K), avec $b = 2\pi\hbar$ dans la formule (4.3), admettant comme base la variété V des mouvements du système; nous dirons dans ce cas que V est une *variété quantifiable*, et que $\mathscr{V}$ est un *espace fibré quantifiant* (en abrégé E.F.Q.) de base V.

Nous avons établi (Ref. [9]), pour ce problème géométrique, les théorèmes d'existence et d'unicité suivants:

[10] Cette formule interprète l'ensemble des variables dynamiques comme algèbre de Lie du groupe des automorphismes de $\mathscr{V}$; elle explique notamment l'identité de Jacobi (2.8).

(P) — Toute variété symplectique est localement quantifiable[11].

(Q) — La variété symplectique des solutions d'un problème variationnel est quantifiable si le lagrangien est d'un certain type (que nous appelons «jacobien» dans la référence [9]); cette classe contient notamment tous les lagrangiens qui admettent globalement une fonction hamiltonienne[12].

(R) — Une variété symplectique V est quantifiable si elle possède une forme potentielle p_μ *globale* (voir (3.4)), en particulier *si son* 2*ème groupe de cohomologie est nul*; dans ce cas, on peut construire l'espace fibré quantifiant comme produit direct de V par le tore T; ceci permet d'identifier l'espace E avec *l'espace des fonctions complexes à carré sommable sur* V; on est alors conduit à la formule explicite[13]:

$$\tilde{u}(\psi) = [u, \psi]_P - \frac{1}{i\hbar} [u - \sigma^{\mu\nu} p_\mu \partial_\nu u] \times \psi . \tag{4.10}$$

(S) — Si V est une variété symplectique *simplement connexe*, et si $\mathscr{V}$ et $\mathscr{V}'$ sont deux E.F.Q. de base V, $\mathscr{V}$ et $\mathscr{V}'$ sont des espaces fibrés de base V *isomorphes* (au sens 7.10 de la référence [8]); il en résulte que les deux réalisations correspondantes des conditions quantiques sont *unitairement équivalentes*: il existe un opérateur unitaire A, appliquant l'espace E associé à $\mathscr{V}$ sur l'espace E' associé à $\mathscr{V}'$ tel que

$$\tilde{u}' = A \cdot \tilde{u} \cdot A^{-1}$$

pour toute variable dynamique u[14].

§ 5. Représentation quantique des groupes d'invariance

Nous avons remarqué que les opérateurs $\tilde{u}$ construits au § précédent représentent les éléments infinitésimaux du groupe des automorphismes de l'E.F.Q. Peut-on atteindre et interpréter les éléments finis de ce groupe? Nous allons traiter quelques exemples.

Considérons d'abord le cas d'un problème mécanique linéaire (par exemple un oscillateur harmonique). La structure globale de la variété V des

---

[11] C'est à dire que tout point de V possède un voisinage qui est une variété symplectique quantifiable.

[12] On peut dans ce cas repérer $\mathscr{V}$ en joignant aux coordonnées de V une $[2n+1]$ ème coordonnée a, qui n'est autre que *l'action hamiltonienne* (1.3) et qui est définie *modulo la constante de* Planck h (on sait d'ailleurs que h a les dimensions d'une action).

[13] Le lecteur pourra en déduire les relations de commutation (C), compte tenu des relations (3.4) vérifiée par les «potentiels» p_μ et des propriétés différentielles des $\sigma_{\mu\nu}$.

[14] Ceci se vérifie directement, dans le cas potentiel, sur la formule (4.10); si V est simplement connexe, deux potentiels p et p' diffèrent par une dérivée: $[p' - p]_\mu = \partial_\mu \varphi$; l'opérateur A correspondant est alors un *déphasage*: $\psi \to \psi \exp(i\varphi/\hbar)$; on sait que c'est ce qui se passe notamment dans le passage du schéma de Schrodinger au schéma de Heisenberg.

trajectoires est particulièrement simple: V possède une structure d'espace vectoriel, pour laquelle la forme de LAGRANGE σ est *constante*; puisque la cohomologie de V est triviale, on peut quantifier par la méthode du potentiel (R); l'E.F.Q. $\mathscr{V}$ ainsi construit (et qui est universel, puisque V est simplement connexe) est donc le produit direct de V par le tore, c'est à dire l'ensemble des couples

$$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \qquad [x \in V, z \in T]\,. \tag{5.1}$$

Les opérateurs classiques P_j Q^j et 1_E sont (à un facteur imaginaire pur près) les générateurs infinitésimaux du relèvement $\tilde{\Gamma}_0$ à $\mathscr{V}$ du groupe Γ_0 des *translations* de V; les éléments finis de $\tilde{\Gamma}_0$, qui ont été étudiés par J. VON NEUMANN et H. WEYL sous la forme $\exp\left(i\left[\nu + \sum_j \lambda^j P_j + \right.\right.$ $\left.\left. + \mu_j Q^j\right]\right)$, peuvent s'étudier directement; si l'on désigne par T_y la translation $[x \to x + y]$ de V, on trouve facilement tous les relèvements de T_y, qui sont les applications

$$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x + y \\ \zeta\, z \exp\left(\dfrac{i\,\sigma_{\mu\nu}\, y^\mu\, x^\nu}{2\hbar}\right) \end{pmatrix}, \tag{5.2}$$

ζ étant un élément fixe de T.

Le groupe Γ_0 est donc bien relevable; en désignant par $F\begin{pmatrix} y \\ \zeta \end{pmatrix}$ l'application (5.2), on trouve immédiatement la loi de composition du relèvement $\tilde{\Gamma}_0$ de Γ;

$$F\begin{pmatrix} y \\ \zeta \end{pmatrix} \cdot F\begin{pmatrix} y' \\ \zeta' \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} y + y' \\ \zeta\,\zeta' \exp(i\sigma_{\mu\nu}\, y'^\mu\, y^\nu/2\hbar) \end{pmatrix}. \tag{5.3}$$

Conformément à un théorème énoncé plus haut, on constate que ce groupe est une extension du groupe des translations de V par le tore T; on voit de plus que c'est une extension *non triviale*, puisqu'elle n'est pas abélienne. La représentation associée sur l'espace E est donc une *représentation projective* du groupe des translations [15].

(T) — Considérons maintenant le cas d'un problème variationnel dont le lagrangien est invariant par un certain groupe de LIE G (par exemple le groupe de POINCARÉ-LORENTZ pour un système relativiste libre).

Il est clair que ce groupe opère sur les mouvements du système classique; il se représente donc comme un groupe Γ d'isomorphismes de la variété symplectique V; la question se pose de savoir si Γ est relevable.

Le théorème de NOETHER permet de répondre partiellement à cette question: il fournit en effet un système d'intégrales permière u_λ du système

[15] Notons que ce groupe a été trouvé par D. KASTLER (réf. [1]) à partir de considérations très différentes.

dynamique, associées aux générateurs infinitésimaux du groupe; les u_λ sont donc des variables dynamiques; on constate que les dérivations associées $\underset{u_\lambda}{\delta}$ (notation (4.4)) sont les relèvements des éléments infinitésimaux correspondants de Γ; en supposant V simplement connexe, on peut en déduire que l'ensemble des éléments de Γ qui sont relevables constitue un sous-groupe invariant Γ_0, qui contient le sous-groupe connexe. Le relèvement de ce sous-groupe connexe est un produit direct; mais on ne sait pas a priori si le relèvement de Γ_0 constituera une extension triviale ou non [16]; il fournira dans tous les cas une représentation projective, sur l'espace E, d'un sous-groupe invariant G_0 de G contenant le sous-groupe connexe de G.

Or en mécanique quantique, on est amené à *postuler* — plus ou moins explicitement — l'existence de telles représentations; comme la construction de l'espace fibré quantifiant donne une réponse directe à ce problème sans ajouter d'axiomes supplémentaires, on voit que la structure d'E.F.Q. est *plus proche d'une réalité quantique éventuelle* que l'algèbre des relations de commutation qui nous a servi à la construire.

§ 6. Mesures quantiques

L'interprétation orthodoxe de la mécanique quantique indique que la mesure d'une grandeur physique liée à un système dynamique — c'est à dire d'une variable dynamique u — doit donner comme résultat une *valeur propre de l'observable associé*, c'est à dire une valeur propre de l'opérateur hermitien

$$\hat{u} = -i\hbar\tilde{u}\ . \tag{6.1}$$

Ainsi, pour un système conservatif, une mesure de l'énergie e, doit donner une valeur propre de *l'epérateur hamiltonien*

$$H(=\hat{e}) = -i\hbar\tilde{e}\ . \tag{6.2}$$

Soit donc λ une valeur propre d'un observable $\hat{u}$; soit ψ un vecteur propre associé («état propre»); la relation postulée

$$\hat{u}\psi = \lambda\psi \tag{6.3}$$

peut s'écrire, avec les notations précédentes

$$\tilde{u}(\psi) = \lambda\tilde{1}(\psi) \tag{6.4}$$

ou encore, grâce à la construction du § 4,

$$\underset{u-\lambda}{\delta}\psi = 0 \quad (\text{notation } (4.4))\ . \tag{6.5}$$

Cette formule indique alors que ψ est constante sur les lignes de force Γ du champ de vecteurs $[\xi \to \underset{u-\lambda}{\delta}\xi]$ de l'E.F.Q.

[16] Nous étudierons au § 7 le cas d'une particule libre sans structure interne.

D'autre part, ψ appartient à l'espace fonctionnel $\mathscr{E}_1$ (où à son prolongement par complétion); ψ est donc un état propre de l'opérateur $[\underset{1}{\delta}]^2$; ces deux conditions sont compatibles, parce que les dérivations $\underset{u-\lambda}{\delta}$ et $\underset{1}{\delta}$ commutent.

On voit donc que ces deux conditions imposent le comportement de ψ sur des variétés S de dimension 2, composées à la fois de caractéristiques et de courbes Γ; chaque surface S est le relèvement d'une courbe C de

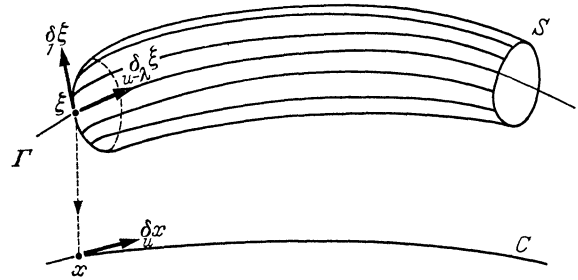

Fig. 1

la base, que l'on peut définir comme ligne de force du champ de vecteurs $x \to \underset{u-\lambda}{\delta} x [= \underset{u}{\delta} x]$.

L'antisymétrie de la forme de Poisson a pour conséquence l'identité $\underset{u-\lambda}{\delta} u = 0$; par conséquent la variable dynamique u est constante sur la courbe C, donc sur S.

Nous allons formuler une condition supplémentaire, dont la nécessité apparaîtra sur les exemples (parce que dans la plupart des cas classiques, l'espace des états considéré habituellement n'est qu'un sous-espace de l'espace E construit ici):

(U) Nous postulerons que, dans une mesure quantique d'une variable dynamique u, la valeur de u sur les courbes C où ψ n'est par nul est précisément égale à la valeur propre λ mesurée de l'observable associée $\hat{u}$.

Il revient d'ailleurs au même de dire que la forme fondamentale ϖ de l'espace fibré quantifiant (K) s'annulle sur les courbes Γ correspondantes.

Cette condition exprime en tous cas que la fonction ψ est nulle en dehors de l'hypersurface de $\mathscr{V}$ d'équation $u = \lambda$, donc en particulier que ψ n'est pas une fonction à carré sommable; on sait qu'une telle circonstance n'est pas exceptionnelle dans la recherche des fonctions propres d'un opérateur hermitien.

Elle est assez naturelle, en ce sens qu'elle associe à la valeur mesurée λ de u des mouvements classiques où la variable u prend effectivement la valeur λ.

Prenons comme exemple le cas de l'énergie e d'un système conservatif; on sait que e est, au signe près, la variable conjuguée du temps; ce qui entraine la relation

$$\underset{e}{\delta} = -\frac{\partial}{\partial t}\,. \tag{6.6}$$

Une fonction propre ψ de l'opérateur hamiltonien $H = \hat{e}$ sera donc une fonction de la forme

$$\psi = e^{i\omega t}\,\psi_0\,, \quad \text{avec} \quad \frac{\partial}{\partial t}\,\psi_0 = 0 \tag{6.7}$$

la valeur propre associée de H étant égale à $\hbar\,\omega$; la règle de sélection (U) proposée s'écrira donc $e = \hbar\,\omega$; on reconnait la *condition de* Bohr

$$e = h\,\nu \tag{6.8}$$

qui lie l'énergie classique et la fréquence quantique.

(V) Revenons à la condition spectrale (6.1); celle-ci est spécialement intéressante dans le cas où la courbe C est fermée — S ayant alors la topologie d'un tore à 2 dimensions.

On constate en effet, dans ce cas, que ψ ne peut vérifier les conditions imposées sur S que si la projection est une correspondance bi-univoque entre une courbe Γ (resp. toutes les courbes Γ tracées sur S) et la courbe C. Cette condition, jointe à la règle de sélection (U) permet alors facilement de calculer les valeurs propres correspondantes de $\hat{u}$.

Dans le cas de l'énergie, les courbes C fermées sont constituées par un *mouvement périodique* du système classique et par tous ses translatées dans le temps.

(W) Par exemple, dans le cas de *l'atome d'hydrogène*, les mouvements classiques ainsi selectionnés sont les *orbites de* Bohr, qui donnent à l'énegie les valeurs négatives bien connues; dans le cas de l'*oscillateur harmonique*, on trouve par ce procédé les valeurs

$$n\,\hbar\,\omega_0 \tag{6.9}$$

pour l'énergie, n étant un entier positif, ω_0 la pulsation propre du système classique; on retrouve un résultat bien connu, à l'omission près d'un terme additif $\frac{1}{2}\hbar\,\omega_0$; mais on sait que ce terme est inobservable, puisque les effets radiatifs ne font apparaître que les différences de deux valeurs de l'énergie; on peut d'ailleurs l'obtenir si on y tient, en ajoutant une constante au lagrangien. On voit donc comment ces considérations expliquent les succès de l'«ancienne théorie des quantas».

(X) Il es intéressant, d'autre part, d'étudier la *mesure simultanée de p variables dynamiques u_j ayant des crochets de* Poisson *nuls*; on recherche les *vecteurs propres communs aux observables $\hat{u}_j$*, dont on sait (C) qu'ils commutent deux à deux.

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres correspondantes de ces opérateurs; on recherche une fonction ψ vérifiant

$$\underset{u_1-\lambda_1}{\delta}\,\psi = 0\,, \quad \underset{u_2-\lambda_2}{\delta}\,\psi = 0, \ldots \quad \underset{u_\sigma-\lambda_\sigma}{\delta}\,\psi = 0\,. \tag{6.10}$$

A cause de la nullité des crochets de Poisson mutuels des u_j, et de la formule (4.5), on voit que le comportement de ψ est déterminé sur des variétés S' dont la dimension est $p + 1$ (si les u_j sont indépendants); l'espace vectoriel tangent à S' est engendré en chaque point par les vecteurs $\underset{1}{\delta}\xi$, $\underset{u_1}{\delta}\xi, \ldots, \underset{u_p}{\delta}\xi$; cette variété se projette sur une variété C' de V, de dimension p, dont l'espace vectoriel tangent est engendré par les vecteurs $\underset{u_1}{\delta}x, \ldots, \underset{u_p}{\delta}x$, et qui est par conséquent *isotrope* (i.e.: la forme symplectique σ s'annulle sur l'espace vectoriel tangent, en tout point).

(Y) On vérifie immédiatement que les fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_p$ sont toutes *constantes* sur C' et S'; ce qui permet évidemment d'étendre à ce cas la *règle* (U): on supposera que ces valeurs constantes coïncident avec les valeurs propres mesurées des observables $\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_p$.

(Z) L'algèbre impose d'ailleurs une borne supérieure à p: on peut en effet montrer que la dimension maximum d'un sous-espace vectoriel isotrope est la *moitié* n de la dimension $2n$ de la variété symplectique V; on ne pourra donc pas trouver plus de n variables dynamiques indépendantes ayant des crochets de Poisson mutuels nuls; la recherche d'un état propre simultané des observables correspondants fournira alors une *observation maximale*; la variété C' correspondante sera une *variété isotrope maximale*; de telles variétés jouent un rôle important dans la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre (voir par exemple [5] et [6]).

Nous rencontrerons un exemple d'observation maximale au § suivant.

§ 7. Application à la particule libre relativiste

Une particule libre, dépourvue de structure interne, est décrite par un point de l'espace, et caractérisée par un seul nombre — sa masse m; en mécanique relativiste, le lagrangien est

$$\pm\, m c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,. \tag{7.1}$$

Ce lagrangien est invariant par le groupe de Poincaré-Lorentz complet, grâce au double signe[17]; malgré ce double signe, le système est «jacobien» (voir 1.29, réf. [9]); les mouvements sont les droites orientées du genre temps; leur ensemble V est une variété symplectique de dimension 6. L'application stricte de la méthode précédente conduit aux résultats (7.2) à (7.6).

---

[17] On peut si l'on veut ne choisir qu'un signe (le signe — pour pouvoir passer à la mécanique classique); mais dans ce cas le lagrangien n'est plus un scalaire, mais un «chrono-scalaire»; les transformations antichrones opèreront de façon anti-canonique sur l'espace des mouvements, et leurs représentations quantiques seront anti-unitaires.

On peut repérer un mouvement par un point q et la quadri-vecteur impulsion p; mais q n'est pas entièrement déterminé, on peut le remplacer par $q + \lambda p (\forall \lambda \in R)$; d'autre part p n'est pas arbitraire, il vérifie l'équation

$$g_{\lambda\mu} p^\lambda p^\mu = m^2; \tag{7.2}$$

qui est celle d'un hyperboloïde à deux nappes H_m («hyperboloïde de masse»).

La forme de LAGRANGE de V se calcule par la formule

$$\sigma_{jk}\, dx^j\, \delta x^k = g_{\mu\nu} [dp^\mu\, \delta q^\nu - \delta p^\mu\, dq^\nu]\,. \tag{7.3}$$

V se compose de deux nappes connexes (chacune d'elle étant symplectiquement isomorphe à un espace vectoriel); la forme de LAGRANGE dérive globalement d'un potentiel, ce qui permet de construire l'espace fibré quantifiant comme produit direct $V \times T$; tous les E.F.Q. de base V sont d'ailleurs isomorphes.

En appliquant la méthode (R), on peut identifier (à une phase près) l'espace E des états avec l'espace des fonctions complexes ψ de q et p qui vérifient

$$\psi(q + \lambda p, p) = e^{-\frac{\lambda m^2}{i\hbar}} \psi(q, p) \quad [\forall \lambda \in R]\,. \tag{7.4}$$

Toute transformation de POINCARÉ

$$[q \to A q + B] \quad (A \in \text{groupe de LORENTZ}) \tag{7.5}$$

se relève globalement par les transformations

$$\begin{gathered} \psi \to \psi^* \\ \psi(q, p) \equiv \psi^*(A q + B, A p)\, e^{i\alpha} \end{gathered} \tag{7.6}$$

la phase α ayant deux déterminations arbitraires (une pour chaque nappe de l'hyperboloide de masse).

Suivant l'usage concernant les particules élémentaires, on peut chercher à décomposer l'espace fonctionnel E en sous-espaces *stables* et *irréductibles* pour le groupe des transformations (7.6); dans ce but on peut représenter ψ par une *intégrale de* FOURIER en q[18]:

$$\psi(q, p) = \int f(\omega, p) \exp(i \omega q)\, d\omega \tag{7.7}$$

la condition (7.4) devient alors

$$\omega_\mu p^\mu = \frac{m^2}{\hbar} \tag{7.8}$$

ou encore

$$[\hbar \omega_\mu - p_\mu]\, p^\mu = 0 \tag{7.9}$$

[18] $d\omega$ désigne l'élement de volume quadrimensionnel parcouru par la quadri-fréquence ω.

elle exprime que le point $\hbar\omega$ (ω désignant la quadri-fréquence) est dans l'hyperplan tangent à l'hyperboloïde de masse au point p:

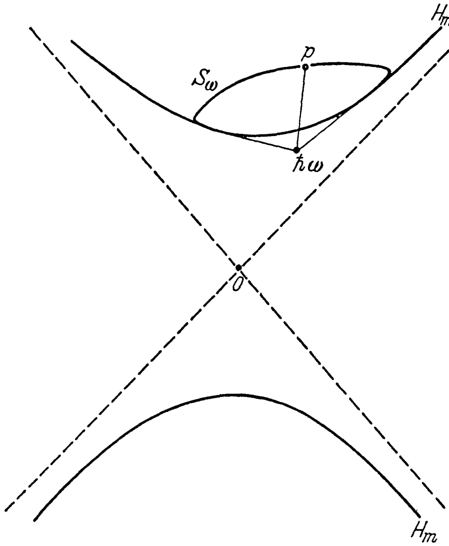

Fig. 2

L'intégrale (7.7) est donc en fait une intégrale triple:

$$\psi(q, p) = \int \theta(\omega, p) \exp(i\omega q)\, d\omega \tag{7.10}$$

où $d\omega$ désigne cette fois-ci l'élement de volume tridimensionnel de l'hyperplan de genre espace défini par l'équation (7.8).

La figure montre que $\theta(\omega, p)$ n'est définie que lorsque $\hbar\omega$ est *extérieur* à l'hyperboloïde de masse, c'est-à-dire si

$$g^{\mu\nu}\,\omega_\mu\omega_\nu \leqq \frac{m^2}{\hbar^2} \tag{7.11}$$

ω étant choisi dans cet ensemble, la fonction $\theta(\omega, p)$ n'est définie que lorsque p appartient à l'ensemble S_ω défini par les équations (7.2) et (7.8); S_ω peut être considérée comme la ligne d'ombre de l'hyperboloïde H_m éclairé par un flambeau placé au point $\hbar\omega$; si ω est un vecteur de temps (cas de la figure), S_ω possède la structure d'une *sphère ordinaire* à 2 dimensions; on peut décomposer $\theta(\omega, p)$ en série de *fonctions sphériques* en p; on montre que le j-ème terme de cette série est la trace, sur S_ω, d'un polynôme $P_\omega(p)$ tel que:

P_ω est un polynôme homogène de degré j;

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial p^\mu}\frac{\partial}{\partial p^\nu} P_\omega(p) &\equiv 0; \\ \omega^\mu \frac{\partial}{\partial p^\mu} P_\omega(p) &\equiv 0 \end{aligned} \tag{7.12}$$

tout polynôme P_ω vérifiant ces conditions est complètement déterminé par ses valeurs sur S_ω.

On obtiendra donc un sous-espace stable de E en choisissant un entier j ($j \geqq 0$) et en se limitant aux $\psi(q, p)$ qui sont de la forme

$$\psi(q, p) = \int P_\omega(p) \exp(i\,\omega q)\, d\omega \tag{7.13}$$

P_ω vérifiant, pour chaque ω de l'ensemble (7.11), les conditions (7.12); l'intégrale est prise, pour chaque p de H_m, sur l'hyperplan (7.8).

L'espace fonctionnel obtenu est donc entièrement caractérisé par les coefficients

$$P^{\nu\varrho\ldots\sigma}(\omega) \tag{7.14}$$

du polynôme P_ω; ce sont des fonctions de ω définies dans (7.12), liées par les seules équations (7.12).

On constate que l'on obtiendra à nouveau un sous-espace stable en se limitant aux fonctions (7.14) qui ne diffèrent de 0 que sur un hyperboloïde

$$g^{\mu\nu}\,\omega_\mu\,\omega_\nu = \frac{\mu^2}{\hbar^2} \tag{7.15}$$

(ou entre deux tels hyperboloïdes très voisins); la condition (7.12) montre que l'on aura

$$\mu \leqq m\,. \tag{7.16}$$

On pourra si l'on veut caractériser cet espace par les fonctions *de q seul*

$$\Phi^{\nu\varrho\ldots\sigma}(q) = \int P^{\nu\varrho\ldots\sigma}(\omega) \exp(i\,\omega q)\, d\omega \tag{7.17}$$

où $d\omega$ désigne l'élément de volume tridimensionnel sur (7.11) (ou quadrimensionnel entre les deux hyperboloïdes voisins).

En étudiant l'effet des substitutions (7.6) sur ces fonctions, on constate que les $\Phi^{\nu\varrho\ldots\sigma}$ peuvent être considérés comme les composantes d'un *champ tensoriel complexe (défini à une phase près)*; l'ensemble des conditions (7.12), (7.13), (7.16) se traduit sur ces composantes par les équations suivantes:

a) $\Phi^{\nu\varrho\ldots\sigma}$ est symétrique en $\nu, \varrho, \ldots, \sigma$,

b) $g_{\nu\varrho}\,\Phi^{\nu\varrho\ldots\sigma} \equiv 0$ (7.18)

c) $\partial_\nu\,\Phi^{\nu\varrho\ldots\sigma} \equiv 0$,

d) $\Box\,\Phi^{\nu\varrho\ldots\sigma} + \frac{\mu^2}{\hbar^2}\,\Phi^{\nu\varrho\ldots\sigma} \equiv 0 \quad [\mu \leqq m]$.

Ces résultats s'interprètent immédiatement: l'espace fonctionnel E contient un *spectre de spin* composé des valeurs entières $j = 0, 1, 2, 3, \ldots$; un *spectre de masse* limité supérieurement par la valeur $\mu = m$; on constate, si l'on choisit les nombres quantiques j et μ, que l'on peut caractériser l'espace fonctionnel associé au moyen de fonctions d'ondes tensorielles complexes $\Phi^{\nu\varrho\ldots\sigma}$, définies à une phase près, qui vérifient les *équations d'onde* (7.18); pour $j = 0$, on obtient *l'équation de* KLEIN-GORDON; pour $j = 1$, les *équations de* PROCA; etc.

Par conséquent la quantification d'une particule classique dépourvue de structure interne par la méthode de l'E.F.Q. conduit à la description correcte de tous les bosons — mais pas des fermions.

— La théorie nous fournit automatiquement les *observables* associés aux *variables dynamiques*; ainsi, dans le cas $j = 1$, le calcul montre que les opérateurs P_λ et $M_{\lambda\mu}$ associés aux composantes de l'impulsion et des moments de LORENTZ opèrent suivant les formules

$$[P_\lambda(\Phi)]_\mu = -i\hbar\, \partial_\lambda \Phi_\mu \tag{7.19}$$

$$[M_{\lambda\mu}(\Phi)]_\nu = -i\hbar\{q_\lambda \partial_\mu \Phi_\nu - q_\mu \partial_\lambda \Phi_\nu + g_{\lambda\nu}\Phi_\mu - g_{\mu\nu}\Phi_\lambda\} \tag{7.20}$$

que l'on a l'habitude de postuler, et qui invarient bien les équations (7.18); la théorie fournit donc notamment *l'interprétation cinétique* du spin, à partir de son interprétation géométrique.

Comme application de (7.19), éudions la *mesure simultanée* des trois composantes spatiales de l'impulsion. Les crochets de POISSON de ces variables dynamiques sont nuls; on se trouve dans le cas d'une *observation maximale*, puisque la dimension de V est 6.

En appliquant la règle de sélection (Y), on voit que le vecteur $p - \hbar\omega$ aura ses trois composantes spatiales nulles; comme c'est un vecteur d'espace grâce à la relation (7.9), il sera nul; on aura donc la relation de BOHR quadrimensionnelle

$$p = \hbar\omega$$

l'état ψ correspondant sera donc aussi un état propre de l'énergie; la fonction d'onde Φ décrira une onde plane monochromatique; on sera dans le cas limite où le point $\hbar\omega$ est sur l'hyperboloide, c'est à dire où $\mu = m$; la théorie explique donc pourquoi la *masse mesurée* coïncide avec le coefficient μ de l'équation de KLEIN-GORDON (7.18d).

On peut aussi calculer, par les formules du § 6, les observables associés à toute autre variable dynamique, par exemple aux *coordonnées spatiales* q^j de la particule à un instant donné; on constate alors que ces opérateurs *ne respectent pas* la décomposition de E en sous-espaces invariants par le groupe de POINCARÉ; ces opérateurs de position *mélangent les masses et les spins*; c'est d'ailleurs une conséquence prévisible des relations de commutation elles-mêmes.

§ 8. Application à la quantification des champs

Il est clair que l'étude des modèles à n paramètres doit pouvoir déboucher un jour sur une théorie cohérente des champs quantifiés, au moins dans le cas des bosons; y a-t-il un espoir raisonnable d'étendre les présentes méthodes à ce cas ?

Nous avons vu que la formulation variationnelle permet, dans le cas des systèmes, de construire la forme de Lagrange; ce calcul peut s'appliquer aussi aux champs, de la façon suivante.

Soit $[x \to \varphi]$ le champ (φ pourra par exemple désigner un scalaire, un tenseur, une connexion affine); supposons qu'il existe une 4-forme lagrangienne

$$l\left(\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right); \tag{8.1}$$

Si C désigne une 4-chaîne (par exemple l'intérieur d'un pavé), *l'action* correspondante sera

$$a = \int_C l\left(\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right). \tag{8.2}$$

En calculant sa variation, et en utilisant la formule de Stokes, on obtient une formule

$$\delta a = \int_{C\nabla} \Pi(\delta \varphi) + \int_C V(\delta \varphi); \tag{8.3}$$

dans cette formule $C\nabla$ désigne le *bord* de C; $[x \to V]$ (resp. $[x \to \Pi]$) est un champ d'opérateurs linéaires, transformant les variations $\delta \varphi$ de φ en 4-formes (resp. en 3-formes), qui est entièrement défini par cette identité (8.3), et qui ne dépend pas du choix de C. V est la *dérivée variationnelle* du lagrangien, les équations de champ s'écrivent donc

$$V \equiv 0. \tag{8.4}$$

Si l'on donne une variation $\delta \varphi$ du champ qui soit *compatible avec ces équations de champ*, on a donc

$$\int_{\Gamma_2} \Pi(\delta \varphi) = \int_{\Gamma_1} \Pi(\delta \varphi) + \delta a \tag{8.5}$$

si Γ_2 et Γ_1 désignent des 3-chaînes dont la différence constitue le bord de C-donc si Γ_2 et Γ_1 sont des 3-chaînes *homologues*.

En choisissant deux variations d et δ, compatibles avec les équations (8.4), et commutantes, on voit que l'intégrale

$$\int_\Gamma d[\Pi(\delta \varphi)] - \delta[\Pi(d \varphi)] \tag{8.6}$$

ne dépend que de la *classe d'homologie* de Γ.

Si on postule — suivant un usage bien établi en théorie des champs — des conditions globales telles que les «surfaces du genre espace» appartiennent à une seule classe d'homologie, l'intégrale (8.6) définit une 2-forme sur les variations des solutions des équations de champ, indépendante du choix de la surface du genre espace Γ, qui constitue la généralisation exacte de la forme de Lagrange.

Dans le cas d'un champ *scalaire*, avec la forme lagrangienne

$$[g^{\lambda\mu}\,\partial_\lambda\varphi\,\partial_\mu\varphi + f(\varphi)]\,\omega$$

où ω désigne l'élément de volume euclidien, on trouve l'équation de champ

$$\square\,\varphi - f'(\varphi) = 0;$$

la forme symplectique (8.6) coïncide avec celle qui a été proposée par SEGAL sur l'espace des solutions de cette équation (réf. [3] et [4]).

La méthode ci-dessus peut, a priori, s'essayer dans le cas de la *relativité générale*; on peut en effet former un *potentiel* (au sens (3.4) ci-dessus) sur l'espace des solutions de l'équation d'EINSTEIN, dans le cas extérieur avec constante cosmologique nulle [19]; ce qui offre une voie pour quantifier ce problème.

Mais si l'on considère le problème général de la formulation d'une théorie quantique des champs, non linéaire et compatible avec la relativité générale, on rencontre deux difficultés notables.

La première est l'existence des *fermions*, dont les champs se quantifient par anti-commutation au lieu de commutation; ils nécessitent, comme chacun sait, une modification profonde de la quantification.

La seconde dérive du *principe de relativité générale* lui-même. On constate en effet que celui-ci entraîne l'existence d'un noyau de la forme de LAGRANGE, constitué par toutes les variations des champs que l'on obtient en effectuant une *dérivée de* LIE (parce qu'une dérivée de LIE donnée sur une hypersurface du genre espace peut être prolongée par une dérivée de LIE nulle sur une autre hypersurface, fait qui ne se produit d'ailleurs pas en relativité restreinte).

Ceci conduit à définir, parmi les variables dynamiques (qui sont ici les fonctions de l'histoire complète de l'Univers), la classe de celles qui sont invariantes par l'action d'un difféomorphisme global de l'univers sur les champs, et que nous appellerons variables *objectives*.

On ne pourra former le crochet de POISSON de deux variables dynamiques que si *l'une d'elles est objective.*

Un exemple de variable objective est donné par la *charge électrique q de l'univers* [20]; on peut facilement construire la dérivation $\underset{q}{\delta}$ associée, au sens (3.6) ci-dessus; $\underset{q}{\delta}$ est simplement le *générateur du groupe de jauge électromagnétique.*

Existe-t-il beaucoup d'autres variables objectives ? le lecteur pourra se convaincre que la fonction u de l'histoire de l'univers, définie comme

[19] Ce potentiel s'obtient en appliquant la forme de LAGRANGE au *vecteur tangent à l'espace des solutions* qui est défini par $\delta g_{\lambda\mu} = g_{\lambda\mu}$.

[20] Dans la mesure où on admet la théorie «provisoire» de l'électromagnétisme en relativité générale, et non une théorie plus raffinée comme la relativité à 5 dimensions.

l'intervalle de temps séparant la mort de JULES CESAR de celle de NAPOLEON en est bien une [21].

De façon moins particulière, on constate que toute mesure physique (parce qu'elle met en jeu des appareils eux-mêmes plongés dans l'espace-temps) définit une variable objective.

Ceci suggère donc deux versions à une application éventuelle des méthodes de quantification.

On peut se contenter, ce qui semble raisonnable, d'associer des observables aux seules variables objectives.

Mais on peut aussi essayer de construire des observables «subjectifs», à condition de les faire opérer sur des «états objectifs» seulement. Il semble que ce point de vue soit nécessaire si on veut construire des *opérateurs de champs*; ceux-ci sont en effet associé aux variables qui mesurent le camp en un point x de l'univers; il est évident que ces variables *ne sont pas objectives.*

Remerciements. J'adresse mes remerciements à MM. R. HAAG, D. KASTLER, M. ZERNER, dont les remarques constructives m'ont beaucoup aidé.

Références

[1] KASTLER, D.: Commun. math. Phys. 1, 16 (1965).
[2] LAGRANGE, J. L.: Mécanique Analytique (1811).
[3] SEGAL, I. E.: Mathematical problems of relativistic physics A. M. S. (1963).
[4] — J. Math. Phys. 5, 2, 269 (1963).
[5] SOURIAU, J. M.: Coll. intern. C.N.R.S., Strasbourg (1953).
[6] — Alger-Mathématiques 1, 2 (1954).
[7] — Quantification canonique. Tirage ronéotypé, Marseille (1962).
[8] — Géométrie et relativité. Paris: Hermann 1964.
[9] — Géométrie de l'espace de phases, calcul des variations et mécanique quantique. Tirage ronéotypé, Marseille (1965).

[21] Mais il est peut-être difficile de construire une topologie raisonnable de l'ensemble des histoires de l'univers où l'espace de définition de u (à savoir le sous-ensemble des histoires où CÉSAR et NAPOLÉON ont vécu chacun une fois et une fois seulement) soit un ensemble ouvert...