

PHYSIQUE THÉORIQUE. — *Modèles classiques quantifiables pour les particules élémentaires*. Note (*) de M. JEAN-MARIE SOURIAU, présentée par M. Louis de Broglie.

GÉOMÉTRISATION DU FORMALISME HAMILTONIEN. — Soit V l'ensemble des mouvements d'un système dynamique classique, considéré à la Heisenberg (en distinguant, notamment, deux mouvements décalés dans le temps). Dans un certain nombre de cas (en particulier s'il existe un formalisme lagrangien ou hamiltonien), V possède une structure de *variété symplectique*; en d'autres termes, on peut définir sur V une 2-forme σ (introduite, en fait, par Lagrange), dont la dérivée extérieure est nulle; les valeurs de σ ont mêmes dimensions que la constante de Planck $2\pi\hbar$. Il semble indiqué, réciproquement, de considérer une telle structure comme la définition généralisée d'un système dynamique ⁽¹⁾.

MODÈLES DYNAMIQUES ASSOCIÉS A UN GROUPE. — Soit G un groupe de Lie; suivant une suggestion de H. Bacry ⁽¹⁾, on peut chercher à lui associer certaines variétés symplectiques; on y parvient en considérant les *torseurs* du groupe, c'est-à-dire les éléments de l'espace vectoriel A^* dual de l'algèbre de Lie A de G ; puisque G opère canoniquement sur A^* , on peut considérer les orbites de G dans A^* ; ce sont des variétés plongées dans A^* . θ étant un point d'une telle variété V , on constate que tout vecteur tangent à V en θ se met sous la forme $\theta \cdot \text{Ad}(a)$ ($a \in A$); il en résulte qu'on peut définir sur V une 2-forme σ par la formule

$$\sigma(\theta \cdot \text{Ad}(a))(\theta \cdot \text{Ad}(a')) = \theta \cdot [a, a'];$$

on vérifie que σ est régulière (la dimension de V est donc *paire*) et que sa dérivée extérieure est nulle; V est une variété symplectique.

Nous proposons de prendre comme modèles classiques de particules élémentaires les variétés ainsi obtenues lorsque G est le groupe de Lorentz-Poincaré. En classant les orbites de G dans A , on pourra répertorier les candidatures à la description d'une particule élémentaire rencontrée dans la nature; l'interprétation est facilitée par la remarque qu'un torseur θ de G est repérable par le couple d'un vecteur P et d'un tenseur antisymétrique M , qui sont respectivement l'*impulsion* et le *moment* de Lorentz (par rapport à un point donné de l'univers) de la particule dans son mou-

vement 0; la façon dont G opère sur V permet de situer les mouvements dans l'espace-temps.

On peut d'ailleurs faire une première sélection *a priori* des orbites V en postulant la possibilité de les *quantifier*, c'est-à-dire de construire au-dessus de V un espace fibré vérifiant certains axiomes, qui mettent en jeu la structure symplectique de V , et que nous avons proposés dans ⁽³⁾ (axiomes des *espaces fibrés quantifiants*).

EXEMPLES. — On constate aisément que le carré scalaire de P est invariant par G , donc caractéristique d'une orbite; deux cas doivent être notés :

a. P est du genre temps; son carré est égal à m^2 , le nombre positif m étant la *masse* de la particule; les points où le moment M vérifie $M.P = 0$ forment une droite (la *ligne d'univers* de la particule); si M s'annule sur cette droite, la dimension de V est 6, et V décrit une *particule sans spin*; sinon, la dimension de V est 8, et l'on peut poser sur la ligne d'univers $M = j\Omega$, avec $\Omega^3 + \Omega = 0$, le nombre positif j étant le *spin*; le pseudo-vecteur $\star(\Omega).P$ est la *polarisation*. On retrouve des modèles que nous avons proposés antérieurement ⁽⁴⁾; la quantification est possible si $2j$ est multiple de $\hbar$; nous l'avons effectuée pour $j = 0$ et $j = \hbar/2$, ce qui conduit respectivement à l'équation de *Klein-Gordon* et à l'équation de *Dirac* (bien que le groupe initialement choisi ne soit pas le revêtement du groupe de Poincaré).

b. P est isotrope et il existe un point de l'univers où $M.P = 0$. — Alors l'ensemble des points où cette relation a lieu est un 3-plan isotrope, qui tient lieu de ligne d'univers; la polarisation $\star(M).P$ est égale à $\pm jP$, j étant le spin et le signe $\pm$ (qui a la variance d'une orientation) l'*hélicité*; la dimension de V est 6 (pour $j \neq 0$).

On peut quantifier ce modèle pour $j = \hbar$; on trouve un espace d'états qui est celui des solutions des équations de Maxwell (ou, plus précisément, l'espace des quadri-potentiels vérifiant la condition de Lorentz et l'équation des ondes, définis à une transformation de jauge de seconde espèce près); on obtient donc une candidature sérieuse à la description du *photon* [voir ⁽²⁾].

La quantification est aussi possible pour $j = \hbar/2$; l'espace des états est celui des spineurs à deux composantes vérifiant l'équation de Dirac (avec masse nulle), ce qui correspond au cas expérimental des *neutrinos*.

DIFFUSION CLASSIQUE ET QUANTIQUE. — Il est clair que la procédure proposée ne concerne que les particules *libres*; on peut cependant traiter la *diffusion*, en supposant les particules libres « avant » et « après »; le diffuseur définit donc une application s de l'espace V des mouvements libres dans V ; on peut montrer (par exemple s'il existe un hamiltonien d'interaction avec le diffuseur) que s est un *automorphisme* de la structure

symplectique de V . S'il est relevable à l'espace fibré quantifiant, il définit un opérateur *unitaire* sur les états : on retrouve le concept de *matrice* S .

Nous avons donné ailleurs ^(*) des règles pour construire un modèle de *système* de particules sans interactions et pour le quantifier (si les particules sont indiscernables, il y a exactement deux quantifications possibles, celle des bosons et celle des fermions); on caractérisera de même les *collisions élastiques* des particules entre elles au moyen d'un automorphisme s de la structure symplectique du système; en l'absence de champ extérieur, s commute avec le groupe de Poincaré; cela suffit à assurer la conservation, dans les collisions, de la somme des impulsions et des moments; on quantifie par relèvement.

(*) Séance du 21 novembre 1966.

(¹) H. BACRY, *Classical Hamiltonian Formalism for Spin*, Preprint, Argonne Nat. Lab., 1966.

(²) D. KASTLER, *Introduction à l'électrodynamique quantique*, Dunod, Paris, 1961.

(³) J. M. SOURIAU, *Comm. Math. Phys.*, 1, 1966, p. 374.

(⁴) J. M. SOURIAU, *Quantification géométrique*, II, Tirage ronéo, *Relativité*, Fac. Sc. Marseille, 1966.

(Département de Physique mathématique,
Faculté des Sciences, place Victor-Hugo, Marseille, Bouches-du-Rhône.)

