To-

Reprinted from 1964 -

SATYENDRANATH BOSE

70th birthday

COMMEMORATION VOLUME

PART II

INTERPRETATION DES ACTIONS ELECTROMAGNETIQUES DES BOSONS GRACE A DES TERMES NON STATIONNAIRES EN RELATIVITE A 5 DIMENSIONS

Jean-Marie Souriau

PROF. S. N. BOSE 70th BIRTHDAY CELEBRATION COMMITTEE
CALCUTTA.

INTERPRETATION DES ACTIONS ELECTROMAGNETIQUES DES BOSONS GRACE A DES TERMES NON STATIONNAIRES EN RELATIVITE A 5 DIMENSIONS

JEAN-MARIE SOURIAU

Faculté des Sciences, Marseille.

(*Received—October 6, 1964*)

SUMMARY

In view of interpreting five-dimensional relativity, we use Bergmann and Einstein's theory as approximation (§§ 1,2).

The results which are obtained here give a confirmation of those which are derived from Jordan and Thiry's approximation (which gives, in particular, a geometrical explanation of the electromagnetic terms in the wave equations, and also of the elementary charge).

We essentially obtain two types of results :

1°) The stationary solutions of the field equations are stable: the non-stationary components of the fundamental metric tensor (which can be interpreted as heavy charged particles of spin 2) can only appear with energies of at least 10^{17} GeV. (§3).

2°) The application of a perturbation method to the study of a field of scalar bosons gives exactly the classical terms of momentum-energy and current-charge of the field, and also gives an explanation of the corresponding formulae of conservation (§4).

In the frame of wave-mechanics, the principle of relativity in five dimensions explains therefore both the active and passive role of these particles in their electromagnetical interactions.

§ 1. INTRODUCTION

La relativité à 5 dimensions utilise une variété riemannienne hyperbolique normale U, de dimension 5, homéomorphe au produit direct d'une variété de dimension 4 par un cercle. Le principe variationnel de la théorie (voir [1]) conduit à associer à chaque phénomène physique un champ de tenseurs symétriques T_{jk} [1]; on peut démontrer que l'équation aux variations du phénomène (que nous appellerons pour abréger *équation d'onde*) entraîne l'identité dite de conservation :

$$\text{div } T = 0 \qquad \dots \quad (1)$$

où le symbole div désigne la divergence riemannienne (voir [1] (30.26)).

Par ailleurs l'équation aux variations du tenseur métrique g_{jk} s'écrit

$$\Theta_{jk} = \frac{-1}{\chi} \{R_{jk} - \tfrac{1}{2}[R_{lm}g^{lm}]\, g_{jk} + \Lambda g_{jk}\} + \Sigma T_{jk} = 0 \qquad \dots \quad (2)$$

où χ et Λ désignent des constantes universelles, R_{jk} les composantés du tenseur de Ricci, et où la somme des T_{jk} est étendue à l'ensemble des phénomènes concomitants.

(1 Les indices *latins* prendront les valeurs 1, 2, 3 4, 5 les indices *grecs* les valeurs 1, 2, 3, 4)

On peut déduire du théorème (1) que l'équation

$$\mathrm{div}\Theta = 0 \qquad \ldots \quad (3)$$

est une conséquence des équations d'onde; l'équation (2) n'est donc pas indépendante de ces dernières.

Il est commode de rendre compte de la topologie de U en choisissant des systèmes de coordonnées (ou *cartes*) tels que la substitution $x^5 \rightarrow x^5+2\pi$ ramène au même point de U (en fait, on obtient ainsi des coordonnées du revêtement universel $\widetilde{U}$ de U); mais il y a évidemment une très grande diversité de cartes ayant cette propriété (nous les appellerons cartes *adaptées*).

Pour rendre compte du caractère naïvement quadridimensionnel de la physique, on a été amené à formuler diverses hypothèses.

—Jordan et Thiry (références [II] et [III]) ont postulé l'existence de cartes adaptées dans lesquelles les g_{jk} sont indépendants de x^5 (condition de *stationnarité*)

—Einstein et Bergmann (référence [IV]) ont supposé l'existence de cartes adaptées où les courbes fermées obtenues en faisant varier x^5 seul sont des géodésiques.

—Nous avons supposé seulement qu'il existe des cartes adaptées où ces courbes fermées $x =$ Cte ont une longueur très petite, ce qui évite de renoncer au principe de relativité à 5 dimensions.

Pour tester la relativité à 5 dimensions, il faut la comparer avec l'expérience; la façon la plus simple est évidemment d'utiliser des approximations, permettant de donner des formules quadri-dimensionnelles.

Ainsi, avec l'approximation de Jordan-Thiry, qui consiste à admettre la condition de stationnarité ci-dessus, la théorie permet de donner une explication à la conservation de l'électricité, à l'électromagnétisme et l'électrodynamique classiques, à l'invariance de jauge, à la conjugaison des particules, à la charge électrique élémentaire, à la violation maximum de la parité dans les interactions leptoniques, etc.... (voirles references [I] et [V]).

Mais il y a des inconvénients graves à utiliser cette seule procédure d'approximation : d'une part il faut vérifier que l'hypothése de stationnarité n'est pas une condition *sine qua non* de l'interprétation de la théorie (ce qui rendrait caduc le principe de relativité à 5 dimensions, et réduirait la théorie à un simple artifice mathématique); d'autre part on constate que la condition de stationnarité empêche de prévoir le rôle *actif* des particules chargées (comme source du champ électromagnétique et gravitationnel); elle permet seulement d'en donner une description *passive* (actions subies en présence du champ).

Nous allons donc lever cette double hypothèque en adoptant une autre approximation; celle de Bergmann-Einstein (existence de géodésiques fermées).

§ 2. La condition de Bergmann-Einstein

Nous adoptons désormais les notations de [I].

Dans l'hypothèse considérée, il passe par chaque point de l'univers U une géodésique fermée du genre espace, sans point anguleux. La longeur ℓ d'une telle courbe, donnée par la formule paramétrique :

$$\ell = \int_{s_0}^{s_1} -g_{jk}\frac{dx^j}{ds}\cdot\frac{dx^k}{ds}\cdot ds \qquad \ldots \quad (4)$$

est par définition stationnaire pour les variations de la courbe avec extrémité(s) fixe(s); on en déduit que la variation de cette longueur quand on passe de la géodésique à une géodésique voisine est donnée par

$$\delta\ell = [p_j\,\delta x^j]_{s_0}^{s_1} \qquad \ldots \quad (5)$$

où les p_j sont les variables conjuguées des x^j, ici les composantes covariantes du vecteur unitaire tangent à la courbe. Puisque la géodésique n'a pas de point anguleux, les p_j prennent les mêmes valeurs aux deux extrémités, cette variation est nulle; par suite *toutes ces géodésiques fermées* ont la méme longeur, que nous désignerons par $2\pi\xi$.

Nous pouvons choisir une carte adaptée telle que la 5ème coordonnée x^5 vari seule sur ces géodésiques—et y soit proportionnelle à l'abscisse curviligne. ... (6)
En portant dans l'équation différentielle des géodésiques, il vient

$$\Gamma^j_{55} = 0 \quad \text{pour } j = 1, 2, 3, 4, 5 \qquad \ldots \quad (7)$$

puis, en portant dans l'équation qui donne les symboles de Christoffel Γ^j_{kl} en fonction des g_{kl}([I] (30.12)) :

$$2\partial_5 g_{j5} - \partial_j g_{55} = 0 \qquad \text{(voir note [1] p.1)} \qquad \ldots \quad (8)$$

et en particulier ($j = 5$) :

$$\partial_5 g_{55} = 0 \qquad \ldots \quad (9)$$

en portant dans (4) il vient

$$\boxed{g_{55} = -\xi^2 = \text{Cte}} \qquad \ldots \quad (10)$$

et en portant dans (8)

$$\boxed{\partial_5 g_{\mu 5} = 0} \qquad \text{(voir note [1] p.1)} \qquad \ldots \quad (11)$$

Réciproquement si ces relations (10) et (11) sont vérifiées, et si les variables de champ dépendent périodiquement de x^5 (avec la période 2π), les courbes $x^\mu = \text{Cte}$ sont des géodésiques fermées de longueur $2\pi\xi$; la vérification est immédiate.

Introduisons, comme dans [I], les notations suivantes[1] :

(1) L'approximation de Jordan-Thiry et celle du § 4 ci-dessous montrent qu'il faut interpréter χ comme la constante de gravitation d'Einstein, e comme la charge électrique élémentaire.

Des valeurs expérimentales de e, h et χ, on tire $\xi = 3{,}782\ 10^{-32}$ cm, ce qui est effectivement très petit, comme on l'avait supposé a priori.

$$\left\{\begin{array}{ll} e = \dfrac{\hbar}{\xi}\sqrt{\dfrac{\chi}{2\pi}} & \\ \mathcal{A}_\lambda = \dfrac{g_{\lambda 5}}{g_{55}} \quad [\lambda = 1, 2, 3, 4] & \mathcal{F}_{\lambda\mu} = \partial_\lambda \mathcal{A}_\mu - \partial_\mu \mathcal{A}_\lambda \\ A_\lambda = \dfrac{\hbar}{e}\mathcal{A}_\lambda & F_{\lambda\mu} = \dfrac{\hbar}{e}\mathcal{F}_{\lambda\mu} \end{array}\right. \quad \ldots (12)$$

on voit que les A_λ (et les $\mathcal{A}_\lambda$) seront des fonctions des x^μ seulement.

Nous pouvons maintenant donner la régle d'interprétation de la théorie : l'ensemble abstrait $\hat{U}$ des géodésiques fermées constitue une variété de dimension 4, que nous interpréterons comme espace-temps; un point de $\hat{U}$ sera repéré, dans la carte ci-dessus, par les coordonnées x^1, x^2, x^3, x^4; les A_λ qui sont donc les composantes d'un champ de covecteurs de $\hat{U}$, s'interpréteront comme *potentiels électromagnétiques*; le tenseur $F_{\lambda\mu}$ est donc le champ électromagnétique.

Les cartes de U qui vérifient (6) s'appelleront *cartes standard.* Lorsque deux cartes standard engendrent la même carte de l'univers quadridimensionnel $\hat{U}$, le passage d'une carte à l'autre s'interprétera comme *transformation de jauge*; on constate immédiatement qu'une telle transformation de jauge est caractérisée par une fonction scalaire u, *définie sur* $\hat{U}$, les formules de passage étant

$$\left.\begin{array}{l} x^\lambda \to x^\lambda \\ x^5 \to x^5 - u \\ g_{\lambda\mu} \to g_{\lambda\mu} + g_{\lambda 5}\partial_\mu u + g_{\mu 5}\partial_\lambda u + g_{55}\partial_\lambda u \partial_\mu u \\ g_{\lambda 5} \to g_{\lambda 5} + g_{55}\partial_\lambda u \\ g_{55} \to g_{55} \\ \mathcal{A}_\lambda \to \mathcal{A}_\lambda + \partial_\lambda u. \end{array}\right\} \quad \ldots (13)$$

En particulier, on pourra par transformation de jauge construire une carte standard, vérifiant, le long d'*une* géodésique fermée

$$\mathcal{A}_\lambda = 0 \quad \ldots (14)$$

une telle carte s'appellera *carte transversale* au point correspondant de $\hat{U}$ (1); les composantes d'un champ dans la carte transversale ainsi construite s'appelleront

(1) Pour l'interprétation des connexions, on est conduit à considérer les cartes 2-*transversales*, qui vérifient en plus la condition (voir [I], 41.44))

$$\partial_\lambda \mathcal{A}_\mu + \partial_\mu \mathcal{A}_\lambda = 0$$

composantes transversales du champ; nous les désignerons en les surmôntant d'un; ce sont évidemment des *invariants de jauge*.

Il existe, dans chaque cas, des formules permettant d'exprimer les composantes du champ en fonction de ses composantes transversales et des $\mathcal{A}_\lambda$ (et, eventuellement des $\partial_\lambda \mathcal{A}_\mu$); on trouve ainsi, pour un champ de tenseurs covariants symetriques T_{jk} :

$$\left.\begin{aligned} T_{\lambda\mu} &= \hat{T}_{\lambda\mu}+\hat{T}_{\lambda 5}\,\mathcal{A}_\mu+\hat{T}_{5\mu}\,\mathcal{A}_\lambda+\hat{T}_{55}\,\mathcal{A}_\lambda\,\mathcal{A}_\mu \\ T_{\lambda 5} &= T_{5\lambda} = \hat{T}_{\lambda 5}+\hat{T}_{55}\,\mathcal{A}_\lambda \\ T_{55} &= \hat{T}_{55} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (15)$$

et pour un champ de connexions :

$$\left.\begin{aligned} \Gamma^{\rho}_{55} &= \hat{\Gamma}^{\rho}_{55} \\ \Gamma^{5}_{55} &= \hat{\Gamma}^{5}_{55}-\hat{\Gamma}^{\rho}{}_{5}\,\mathcal{A}_\rho \\ \Gamma^{\rho}_{\lambda 5} &= \hat{\Gamma}^{\rho}_{\lambda 5}+\hat{\Gamma}^{\rho}_{55}\,\mathcal{A}_\lambda \\ \Gamma^{5}_{\lambda 5} &= \hat{\Gamma}^{5}_{\lambda 5}+\hat{\Gamma}^{5}_{55}\,\mathcal{A}_\lambda-\hat{\Gamma}^{\rho}_{\lambda 5}\,\mathcal{A}_\rho-\hat{\Gamma}^{\rho}_{55}\,\mathcal{A}_\rho\,\mathcal{A}_\lambda \\ \Gamma^{\rho}_{\lambda\mu} &= \hat{\Gamma}^{\rho}_{\lambda\mu}+\hat{\Gamma}^{\rho}_{\lambda 5}\,\mathcal{A}_\mu+\hat{\Gamma}^{\rho}_{5\mu}\,\mathcal{A}_\lambda+\hat{\Gamma}^{\rho}_{55}\,\mathcal{A}_\lambda\,\mathcal{A}_\mu \\ \Gamma^{5}_{\lambda\mu} &= \hat{\Gamma}^{5}_{\lambda\mu}+\hat{\Gamma}^{5}_{\lambda 5}\,\mathcal{A}_\mu+\hat{\Gamma}^{5}_{5\mu}\,\mathcal{A}_\lambda+\hat{\Gamma}^{5}_{55}\,\mathcal{A}_\lambda\,\mathcal{A}_\mu-\hat{\Gamma}^{\rho}_{55}\,\mathcal{A}_\rho\,\mathcal{A}_\lambda\,\mathcal{A}_\mu \\ &\quad -\hat{\Gamma}^{\rho}_{\lambda 5}\,\mathcal{A}_\rho\,\mathcal{A}_\mu-\hat{\Gamma}^{\rho}_{\mu 5}\,\mathcal{A}_\rho\,\mathcal{A}_\lambda+\tfrac{1}{2}[\partial_\lambda\,\mathcal{A}_\mu+\partial_\mu\,\mathcal{A}_\lambda] \end{aligned}\right] \quad \ldots \quad (16)$$

Ainsi qu'on peut le prévoir a priori, les formules réciproques donnant les composantes transversales en fonction des composantes ordinaires se déduisent des précédentes en changeant les $\mathcal{A}_\lambda$ en $-\mathcal{A}_\lambda$, ce qui nous dispense de les écrire.

De même, a côté des dérivations ordinaires ∂_λ, ∂_5 nous introduirons les *dérivations transversales* $\hat{\partial}_j$ définies par :

$$\left.\begin{aligned} \hat{\partial}_\lambda &= \partial_\lambda-\mathcal{A}_\lambda\partial_5 \\ \hat{\partial}_5 &= \partial_5 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (17)$$

il importe de remarquer que ces dérivations transversales *ne commutent* pas deux à deux contrairement aux dérivations ordinaires; il vient

$$\left.\begin{aligned} \hat{\partial}_5\hat{\partial}_\lambda &= \hat{\partial}_\lambda\hat{\partial}_5 \\ \hat{\partial}_\lambda\hat{\partial}_\mu-\hat{\partial}_\mu\hat{\partial}_\lambda &= -\mathcal{F}_{\lambda\mu}\;\hat{\partial}_5 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (18)$$

avec (cf. (12))

$$\mathcal{F}_{\mu\lambda} = \partial_\lambda\mathcal{A}_\mu-\partial_\mu\mathcal{A}_\lambda \quad \ldots \quad (19)$$

On peut utiliser les formules ci-dessus pour interpréter sur la variété à 4 dimensions $\hat{U}$ les champs qui se déduisent de la structure riemannienne de U; on trouve ainsi en interprétant les g_{jk} :

—un tenseur symétrique $\hat{g}_{\lambda\mu} = g_{\lambda\mu} + \xi^2 \mathscr{A}_\lambda \mathscr{A}_\mu$ ... (20)

—le tenseur contravariant inverse du précédent

$$\hat{g}^{\lambda\mu} = g^{\lambda\mu} \qquad \ldots (21)$$

—le covecteur $\mathscr{A}_\lambda$. ... (22)

On a réciproquement

$$\left.\begin{array}{lll} g_{\lambda\mu} = \hat{g}_{\lambda\mu} - \xi^2 \mathscr{A}_\lambda \mathscr{A}_\mu, & g_{\lambda 5} = -\xi^2 \mathscr{A}_\lambda, & g_{55} = -\xi^2 \\ g^{\lambda\mu} = \hat{g}^{\lambda\mu} & , \; g^{\lambda 5} = g^{5\lambda} = -\hat{g}^{\lambda\mu} \mathscr{A}_\mu & g^{55} = -\dfrac{1}{\xi^2} + \hat{g}^{\lambda\mu} \mathscr{A}_\lambda \mathscr{A}_\mu \end{array}\right\} \qquad \ldots (23)$$

de même la connexion *riemannienne* de U s'interprète sur $\hat{U}$ par les quantités suivantes (qui peuvent se calculer à partir des formules (16) et de l'expression classique des symboles de Christoffel) :

Une connexion quadridimensionelle symétrique

$$\hat{\Gamma}^\rho_{\lambda\mu} = \tfrac{1}{2} \hat{g}^{\rho\sigma} [\hat{\partial}_\lambda \hat{g}_{\mu\sigma} + \hat{\partial}_\mu \hat{g}_{\lambda\sigma} - \hat{\partial}_\sigma \hat{g}_{\lambda\mu}] \qquad \ldots (24)$$

un tenseur mixte Φ :

$$\Phi^\rho_\lambda = \hat{\Gamma}^\rho_\lambda = \tfrac{1}{2} \hat{g}^{\rho\sigma} [\partial_5 \hat{g}_{\sigma\lambda} + \xi^2 \mathscr{F}_{\sigma\lambda}] \qquad \text{(voir (19))} \qquad \ldots (25)$$

un tenseur covariant symétrique

$$\hat{\Gamma}^5_{\lambda\mu} = \frac{1}{2\xi^2} \partial_5 \hat{g}_{\lambda\mu} \qquad \ldots (26)$$

notons que l'on a

$$\hat{\Gamma}^\rho_{55} = 0, \quad \hat{\Gamma}^5_{55} = 0, \quad \hat{\Gamma}^5_{\lambda 5} = 0. \qquad \ldots (27)$$

En portant dans (16) on en déduit immédiatement la connexion de U; on peut en déduire le tenseur de Riemann-Christoffel de U, et l'interpréter sur $\hat{U}$ au moyen des ses composantes tranversales; indiquons seulement les composantes transversales du tenseur de Ricci qui définissent respectivement un tenseur symétrique, un covecteur et un scalaire :

$$\left.\begin{array}{l} \hat{R}_{\lambda\mu} = \hat{R}_{\mu\lambda} = \hat{\partial}_\nu [\hat{\Gamma}^\nu_{\lambda\mu}] + \hat{\partial}_\lambda \hat{\Gamma}^\nu_{\nu\mu} + \hat{\Gamma}^\nu_{\nu\rho} \hat{\Gamma}^\rho_{\lambda\mu} - \hat{\Gamma}^\nu_{\rho\lambda} \hat{\Gamma}^\rho_{\nu\mu} \\ \quad + \tfrac{1}{2} [\hat{\Gamma}^\nu_{\lambda 5} \mathscr{F}_{\nu\mu} + \Gamma^\nu_{5\mu} \mathscr{F}_{\nu\lambda} + \hat{\Gamma}^\nu_{\nu 5} \mathscr{F}_{\lambda\mu}] \\ \quad + \partial_5 \hat{\Gamma}^5_{\lambda\mu} + \hat{\Gamma}^\nu_{\nu 5} \hat{\Gamma}^5_{\lambda\mu} - \hat{\Gamma}^\nu_{\lambda\mu} \hat{\Gamma}^5_{\nu\mu} - \hat{\Gamma}^\nu_{\mu 5} \hat{\Gamma}^5_{\nu\lambda} \\ \hat{R}_{\lambda 5} = \hat{R}_{5\lambda} = \hat{\partial}_\nu \hat{\Gamma}^\nu_{\lambda 5} + \hat{\partial}_\lambda \hat{\Gamma}^\nu_{\nu 5} + \hat{\Gamma}^\nu_{\nu\rho} \hat{\Gamma}^\rho_{\lambda 5} - \hat{\Gamma}^\nu_{\lambda\rho} \hat{\Gamma}^\rho_{\nu 5} \\ \hat{R}_{55} = \partial_5 \hat{\Gamma}^\nu_{\nu 5} - \hat{\Gamma}^\nu_{\rho 5} \hat{\Gamma}^\rho_{\nu 5} \end{array}\right\} \qquad \ldots (28)$$

—Il importe de remarquer que toutes les grandeurs ci-dessus (à l'exception des $\mathscr{A}_\lambda$ et des $\mathscr{F}_{\lambda\mu}$) sont fonction, non seulement des x^μ, *mais aussi de* x^5; elles ne définissent donc pas, à proprement parler, des champs sur $\hat{U}$.

§ 3. Interpretation des equations de champ

Nous avons indiqué plus haut quelles étaient les équations de champ de la théorie (voir (1), (2), (3)).

Si nous voulons adopter l'approximation de Bergmann-Einstein, nous serons obligé de *renoncer à certaines de ces équations*, afin d'obtenir un système compatible avec les liaisons (10) et (11).

On peut éviter tout arbitraire dans ce choix en utilisant le calcul des variations : il suffit d'écrire que l'action penta-dimensionnelle est stationnaire *dans les variations des champs compatibles avec ces liaisons.* En introduisant des multiplicateurs de Lagrange répartis α et β^μ, ceci peut s'écrire :

$$\delta\mathscr{A}+\int\{\alpha\delta g_{55}+\beta^\mu\delta[\partial_5 g_{\mu 5}]\}dx^1\,dx^2\,dx^3\,dx^4\,dx^5=0 \qquad \dots \quad (29)$$

$\mathscr{A}$ désignant l'action pentadimensionnelle.

On constate que cette condition n'altère pas les équations d'onde.

Compte tenu de l'identité : (voir [I], (34.13))

$$\delta\mathscr{A}=\int u\,\Theta^{jk}\,\delta g_{jk}\,dx^1\,dx^2\,dx^3\,dx^4\,dx^5 \qquad \dots \quad (30)$$

où u désigne la racine carrée de la valeur absolue du déterminant des g_{jk}, on voit qu'il faut remplacer l'équation (2) par le systéme

$$\Theta^{\mu\nu}=0,\quad u\Theta^{55}+\alpha=0,\quad 2u\Theta^{\mu 5}-\partial_5\beta^\mu=0 \qquad \dots \quad (31)$$

Compte tenu de la périodicité, l'élimination de α et des β^μ est immédiate; il reste

$$\Theta^{\mu\nu}=0 \qquad \dots \quad (32)$$

$$\int_0^{2\pi} u\,\Theta^{\mu 5}\,dx^5=0 \qquad \dots \quad (33)$$

On constate immédiatement que ce système (32, 33) est équivalent aux équations transversales

$$\boxed{\hat{\Theta}^{\mu\nu}=0} \qquad \dots \quad (34)$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi}\hat{u}\,\hat{\Theta}^{\mu 5}\,dx^5=0} \qquad \dots \quad (35)$$

$\hat{u}$ désignant la racine carrée de la valeur absolue du déterminant des $\hat{g}_{\lambda\mu}$; on trouve donc des équations invariantes de jauge, comme il fallait s'y attendre.

Il reste à voir si cette approximation est bonne, c'est à dire si l'équation sans liaisons (2) est suffisamment bien vérifiée.

Or nous savons que les équations d'onde, qui, ne sont pas modifiées par l'approximation, imposent la condition (3) :

$$[\mathrm{div}\ \Theta] = 0 \qquad \ldots (36)$$

Du système (34, 35, 36) on tire, en utilisant les formules du § 1 :

$$\partial_5 [\hat{u}\ \hat{\Theta}^{\mu 5}] + 2\Phi^{\mu}_{\nu} \times \hat{u}\ \hat{\Theta}^{\nu 5} = 0 \qquad \ldots (37)$$

$$\partial_5 [\hat{u}\ \hat{\Theta}^{55}] + \hat{\partial}_\lambda [\hat{u}\ \hat{\Theta}^{\lambda 5}] = 0 \qquad \ldots (38)$$

Le système (35, 37) est linéaire et homogène par rapport à la variable $\hat{u}\ \hat{\Theta}^{\mu 5}$; on peut l'étudier comme problème de Sturm-Liouville; à cause de la périodicité on peut vérifier qu'il n'admet que la solution nulle si l'opérateur Φ(cf. 25) est assez petit (par exemple s'il a une norme inférieure à 0,08); dans les conditions usuelles, ceci a lieu [1], et par conséquent les èquations (34, 35), avec la condition (36) qui est automatiquement vérifiée comme conséquence des équations d'onde, entraînent $\hat{\Theta}^{\mu 5} \equiv 0$, et en portant dans (38), $\partial_5 [u\ \hat{\Theta}^{55}] = 0$.

Par conséquent, on constate que l'approximation des géodésiques fermées sera bonne si la grandeur $u\hat{\Theta}^{55}$ qui ne dépend que des x^μ, n'est pas trop grande—ce qu'on peut tenter de vérifier dans chaque cas.

Pour étudier le systéme (34, 35), il est commode de développer les conposantes du tenseur g en série de Fourier[2]:

$$g_{jk} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \underset{n}{g_{jk}} \exp\,(inx^5) \qquad \ldots (39)$$

Puisque l'un des objectifs de la présente étude est d'évaluer le caractère non stationnaire des g_{jk}, il est indiqué d'utiliser une méthode de perturbations au voisinage de l'état stationnaire : on traitera donc les termes $n \neq 0$ de la série (39) comme des infiniment petits du premier ordre, ce qui fournira des équations linéaires pour les évaluer.

En décomposant l'équation (34) en série de Fourier, et en y portant les valeurs (39) on trouve :

1°) pour $n = 0$, l'équation

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \chi \left[M_{\mu\nu} + \sum \underset{0}{\hat{T}_{\mu\nu}} \right]} \qquad \ldots (40)$$

(1) Un contre-exemple exigerait par exemple un champ magnétique de l'ordre de 10^{34} gauss.

(2) Voir la référence (VI). Les quantités $\underset{n}{g_{jk}}$ sont des fonctions des x^μ seuls; pour $n \neq 0$, ce sont des nombres complexes, qui ne sont pas invariants de jauge.

le premier membre est celui de l'équation classique d'Einstein *dérivée de la métrique stationnaire* $\underset{0}{g}$; au second membre apparaissent les valeurs moyennes (sur x_5), repérées par un indice inférieur 0, des tenseurs $\hat{T}_{\mu\nu}$ des phénoménes divers, ainsi que le tenseur

$$M_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{4}g_{\mu\nu}\, F^{\rho\sigma}\, F_{\rho\sigma} - g^{\rho\sigma}\, F_{\rho\mu}\, F^{\sigma\rho}_{\sigma\nu}\right] \qquad \dots \quad (41)$$

c'est à dire le tenseur d'impulsion-énergie classique du champ électromagnétique $F_{\mu\nu}$.

2°) pour $n \neq 0$, on trouve une équation aux dérivées partielles linéaire concernant le champ de tenseurs $\underset{n}{\hat{g}_{\mu\nu}}$; l'équation sans second membre peut être considérée comme équation d'onde d'une particule de spin 2, de charge ne, de masse $n\frac{\hbar}{\xi} \# n \times 5 10^{17}$ GeV; aucune particule connue n'atteint cette masse [1]; donc, dans le conditions usuelles, on peut réduire l'équation en ne conservant que le terme de masse, dont le coefficient est prépondérant; compte tenu du second membre, il reste

$$\boxed{\underset{n}{g^{\lambda\mu}} \# - \frac{\chi^2\hbar^2}{n^2e^2}\, \underset{n}{T_{\lambda\mu}}} \qquad \dots \quad (42)$$

ce qui permet dan chaque cas particulier d'évaluer si ces termes sont effectivement petits, comme on l'avait supposé a priori; notons que le coefficient $\frac{\chi^2\,\hbar^2}{e^2}$ au second membre de (42) vaut $10^{-124}\,\mathrm{cm}^{-4}$ environ dans les unités quantiques habituelles ($\hbar = c = 1$).

Enfin l'équation (35) s'écrit, en négligeant les infiniment petits du premier ordre

$$\boxed{\operatorname{div} F = 4\pi\Sigma J} \qquad \left[J_\mu = \frac{e}{\hbar}\underset{0}{T}_{\mu 5}\right] \qquad \dots \quad (43)$$

on reconnait le second groupe des équations de Maxwell (le premier a été écrit plus haut en (12)), J désignant le vecteur *courant électrique* des phénomènes.

Le théorème de conservation (1) donne d'ailleurs (en en prenant la valeur moyenne sur x^5) :

$$[\operatorname{div}\, \hat{T}_0] + F_{\nu\mu}J^\nu = 0 \qquad \dots \quad (44)$$

ce qui exprime la conservation de l'énergie et de l'impulsion du champ, compte tenu des efforts électromagnétiques qu'il subit (voir [I]), et

$$\operatorname{div}\, J = 0 \qquad \dots \quad (45)$$

qui exprime la conservation de l'électricité.

(1) Les particules les plus énergiques que l'on ait observées dans les rayons cosmiques atteignent environ 10^{10} GeV.

§ 4. Cas des bosons scalaires

Considérons le cas d'un champ décrit par une variable réelle φ, pourvu de la densité lagrangienne invariante (voir [I], § 42) :

$$p = \tfrac{1}{2}[a\varphi^2 - g^{jk}\partial_j\varphi\, \partial_k\varphi] \qquad (a = \text{constante réelle}) \qquad \ldots (46)$$

Si l'on décompose φ en série de Fourier suivant x^5, l'étude de l'ordre de grandeur des différents termes montre que l'on ne pourra observer qu'une couple de valeurs opposées de l'indice n (voir [I], (42.17)) : nous poserons donc

$$\varphi = \Phi \exp(inx^5) + \bar{\Phi} \exp(-inx^5) \quad (\Phi = \text{fonction complexe des } x^\mu)$$

Appliquons les méthodes de calcul ci-dessus :

a) avec les notations géométriques de ([I]), on trouve l'équation d'onde :

$$\left[\operatorname{div} - \frac{ine}{\hbar}\ \operatorname{Int}(A)\right]\left[\nabla - \frac{ine}{\hbar}\ \operatorname{Ext}(A)\right]\Phi + \frac{m^2}{\hbar^2}\,\Phi = 0$$

$$\left(m = \hbar\sqrt{a + \frac{n^2}{\xi^2}}\right) \qquad \ldots (47)$$

en l'absence de champ gravitationnel (relativité restreinte) elle se réduit à :

$$g^{\mu\nu}\left[\partial_\mu - \frac{ine}{\hbar}\ A_\mu\right]\left[\partial_\nu - \frac{ine}{\hbar}\ A_\nu\right]\Phi + \frac{m^2}{\hbar^2}\,\Phi = 0\,; \qquad \ldots (48)$$

on reconnait l' *équation de Klein-Gordon* pour un boson de spin 0, de masse m, de charge électrique ne, en présence du champ électromagnétique.

b) le tenseur d'impulsion-énergie (1) et le vecteur courant électrique sont donnée par les formules :

$$T_{\mu\nu} = \left[\ \partial_\mu\bar{\Phi} + \frac{ine}{\hbar}\ A_{\mu\mu}\bar{\Phi}\right]\left[\partial_\nu\Phi - \frac{ine}{\hbar}\ A_\nu\Phi\right]$$

$$+ \tfrac{1}{2}g_{\mu\nu}\left\{\frac{m^2}{\hbar^2}\ \bar{\Phi}\cdot\Phi - g^{\rho\sigma}\left[\partial_\rho - \frac{ine}{\hbar}\ A_\rho\right]\bar{\Phi}\cdot\left[\partial_\sigma - \frac{ine}{\hbar}\ A_\sigma\right]\Phi\right\} + \text{conjugué}$$

$$J_\mu = \frac{ine}{\hbar}\left[\partial_\mu\bar{\Phi} + \frac{ine}{\hbar}\ A_\mu\bar{\Phi}\right]\cdot\Phi + \text{conjugué} \qquad \ldots (50)$$

---

(1) Nous écrivons ici $T_{\mu\nu}$ au lieu de $\underset{Q}{\hat{T}_{\mu\nu}}$.

On reconnait là aussi des expressions bien connues (tout au moins dans le cas $A \equiv 0$) invariantes de jauge; le lecteur pourra vérifier sur ces formules le théorème général suivant lequel l'équation d'onde (47) entraine les identités (44) et (45); en adoptant l'approximation de la relativité restreinte, celles-ci s'écrivent

$$g^{\mu\nu}[\partial_\mu T_{\nu\rho} + F_{\mu\rho} J_\nu] \equiv 0. \qquad \ldots \quad (51)$$

$$g^{\mu\nu}\partial_\mu J_\nu = 0. \qquad \ldots \quad (52)$$

cette vérification est bien connue en l'absence de champ; mais c'est surtout la présence du champ qui rend intéressante la formule (51), car elle permet d'apprécier les efforts électromagnétiques, et notamment de comparer les unités mécaniques avec les unités électriques.

c) il reste à écrire l'equation d'Einstein (40)

$$R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu} \qquad \ldots \quad (53)$$

et l'equation de Maxwell

$$\operatorname{div} F = 4\pi J \qquad \ldots \quad (54)$$

qui montrent comment la particule considérée est source du champ de gravitation et du champ électromagnétique.

d) Enfin on peut—bien qu'il n'y ait pas d'interprétation quadridimensionnelle classique—vérifier que l'équation d'onde (47) et les équations d'Einstein (53) et de Maxwell (54) entrainent bien les identites établies au § 3

$$\hat{\Theta}^{\mu 5} = 0, \quad \partial_5[u\hat{\Theta}^{55}) = 0,$$

calculer la valeur de $\hat{\Theta}^{55}$ et des $\underset{n}{g}_{\mu\nu}$.

§ 5, Conclusion

Le test de la théorie que nous venons d'effecteur est donc satisfaisant à deux points de vue :

d'une part, l'existence de termes non stationnaires dans la métrique ne perturbe pas l'interprétation classique tant que l'on se limite au domaine des énergies inférieures à 10^{17} Ge V—ce qui sera longtemps le cas avec les accélérateurs de particules...

d'autre part les prévisions de la théorie concernant le rôle actif des particules chargées coïncident exactement avec les formules postulées en mécanique ondulatoire —au moins dans le cas envisagé ici des bosons scalaires. Les méthodes indiquées permettent d'ailleurs de faire les calculs dans le cas des particules de spin $\frac{1}{2}$ et 1(voir [I], § 45 et note III).

Il manque cependant un axiome de la mécanique ondulatoire : c'est celui qui concerne la *normalisation* de la fonction d'onde Φ. Il semble que l'on ne puisse y parvenir par cette voie qu'en construisant une théorie quantique des champs qui respecte le principe de relativité à 5 dimensions.

References

1. J. M. Souriau (1964) : Géométrie et Relativité (Hermann, Paris).
2. P. Jordan (1947) : *Ann. Phys.*, p. 219.
3. Y. Thiry (1948) : *Comptes Rendus*, **226**, pp. 216 et 1881; Thèse Paris 1951.
4. A. Einstein et P. G. Bergmann (1938) : *An. Math. Princeton*, **39**, p. 683.
5. J. M. Souriau (1963) : *Nuovo Cimento*, **30**, p. 565.
6. W. Pauli (1958) : Theory of Relativity (Pergamon), note 23.