DEFINITION COVARIANTE DES EQUILIBRES THERMODYNAMIQUES

par

Jean-Marie Souriau

Faculté des Sciences de Marseille

Novembre 1965

DEFINITION COVARIANTE DES EQUILIBRES THERMODYNAMIQUES

par Jean-Marie Souriau , Faculté des Sciences de Marseille.

Sommaire :

Nous définissons les équilibres thermodynamiques d'un système mécanique au moyen d'un groupe d'invariance G ; on retrouve la définition classique dans le cas où G est le groupe des translations dans le temps.

Ceci permet de généraliser les notions classiques d'entropie ,de chaleur, de température, de chaleur spécifique. La température généralisée, notamment, appartient à l'algèbre de Lie du groupe.

Des exemples sont étudiés (gaz parfait en mouvement, centrifugeuse) en mécanique classique et en mécanique relativiste. Un effet relativiste est mis en évidence (le fluide tournant en équilibre n'est pas isotherme).

La température apparaît généralement comme un quadrivecteur, qui indique notamment le sens d'écoulement du temps.

Summary.

We define the thermodynamical equilibriums of a mechanical system using an invariance group G of the system. We find the classical definition when G is the group of translations of time.

This allows us to give a generalization of the classical notions of entropy, heat, specific heat, temperature. This generalized temperature in particular lies in the Lie algebra of the group.

Some specific examples are studied (perfect gas in motion, centrifuge) in classical and relativistic mechanics. A relativistic effect is put in light (the rotating fluid in equilibrium is not isotherm).

The temperature is shown to be generally a quadrivector which points toward the future.

§ 1 : Un problème variationnel

On rencontre souvent, en calcul des probabilités, le problème suivant :

Soit V une variété différentiable, sur laquelle est définie une densité positive continue, que nous noterons $d\omega$.

Soient E un espace vectoriel de dimension finie; $x \to U(x)$ une fonction continue, définie sur V, à valeurs dans E ; Q un élément de E.

Trouver une fonction positive $x \to \rho(x)$, continue sur V, telle que

(1) $$\int_V \rho(x)\, d\omega = 1$$

(2) $$\int_V U(x)\, \rho(x)\, d\omega = Q$$

et qui rende extrêmale l'intégrale (appelée <u>entropie</u> de la fonction ρ pour la densité $d\omega$) :

(3) $$s = -\int_V \rho(x)\ \mathrm{Log}(\rho(x))\, d\omega$$

Les techniques usuelles du calcul des variations montrent que l'entropie ne peut être stationnaire que s'il existe un scalaire ψ et un élément Θ du dual de E tels que

(4) $$\rho(x) \equiv \exp(-\psi - \Theta.U(x))$$

(ψ et Θ sont des <u>multiplicateurs de Lagrange</u> associés aux liaisons (1) et (2)).

En portant la valeur (4) de ρ dans ces équations de liaison, on trouve

(5) $$\psi = \mathrm{Log} \int_U \exp\left(-\Theta . U(x) \right) d\omega$$

et

(6) $$Q = \frac{\int_U U(x) \exp(-\Theta . U(x)) \, d\omega}{\int_U \exp\left(-\Theta . U(x)\right) d\omega}$$

Pour que le problème soit possible, il est donc nécessaire que les intégrales écrites soient convergentes, et que ces relations (5) et (6) soient vérifiées; en fait, ces conditions sont aussi suffisantes, car elles entraînent la convergence de l'intégrale (3) de l'entropie; on trouve immédiatement :

(7) $$s = \psi + \Theta . Q$$

On peut montrer de plus que cette valeur <u>constitue un maximum strict</u> de s (compte tenu des liaisons) ; on en déduit facilement que l'égalité (6), considérée comme équation en Θ , possède <u>au plus une solution</u> pour chaque

(8) valeur de Q, sauf dans le cas où l'ensemble de valeurs de U serait contenu dans un sous-espace affine de E, strictement plus petit ([1]).

Supposons de plus que les intégrales qui forment le numérateur et le dénominateur de l'expression (6) de Q soient uniformément convergentes

---

([1]) Ce cas se ramène immédiatement au cas général, en posant

$$V(x) = U(x) - U(x_o)$$

et en travaillant dans l'espace de valeurs de V(x).

dans un voisinage de la valeur trouvée Θ_o de Θ . On peut alors montrer que la fonction $\Theta \to \psi$ définie par (5) est <u>différentiable</u> au voisinage de Θ, et que l'équation (6) peut s'écrire

(9) $$\delta \psi = - \delta\Theta . Q \qquad \forall \delta \Theta$$

ou(si l'on identifie E avec son bidual) :

(10) $$Q = - \frac{\partial\psi}{\partial\Theta}$$

La vérification formelle est très facile, en dérivant (5) sous le signe $\int$.

- Une condition supplémentaire (convergence uniforme de l'intégrale $\int_U U(x) \otimes U(x) \exp(-\Theta . U(x))\, d\omega$ au voisinage de Θ_o) permet de montrer que ψ est deux fois différentiable en Θ , et que la dérivée seconde est

(11) une forme <u>définie positive</u> (toujours sous réserve du cas d'exception signalé en (6)), donc que ψ est une fonction <u>convexe</u> de Θ . Dans ce cas, les deux fonctions $\Theta \to Q$ et $Q \to \Theta$, mutuellement inverses, définies par (6) ou (10) sont toutes deux différentiables.

Il en résulte également que l'entropie s est fonction différentiable de Θ (ou de Q) ; en différentiant (7), compte tenu de (9), il vient

(12) $$\delta s = \Theta . \delta Q$$

Un exemple important de ce processus consiste à prendre pour U un espace vectoriel de dimension finie, et pour U(x) le couple $\begin{pmatrix} x \\ x \otimes x \end{pmatrix}$; la valeur de Q définie par (2) est alors l'ensemble des <u>moments</u> du premier et du second ordre de la loi de probabilité ρ ; l'équation (6)

est résoluble pourvu que les moments soient ceux d'une loi de probabilité quelconque ; (4) définit alors la loi normale (courbe en cloche de Gauss dans le cas de la dimension 1) admettant les moments donnés.

§ 2 : Mécanique statistique classique.

Considérons un système mécanique à n paramètres $q^1, \dots q^n$. On sait que l'on peut repérer un mouvement du système par sa phase à un instant arbitraire t, c'est à dire (à des considérations globales près) par les valeurs des coordonnées canoniques

$$q^1, \dots q^n, p_1 \dots p_n$$

à l'instant t.

On peut donc désigner par $\mathcal{V}$ l'ensemble abstrait des mouvements du système ; les coordonnées q^j, p_j donnent à $\mathcal{V}$ une structure de variété de dimension $2n$ (1) ; le changement de l'instant t définira simplement un changement de coordonnée dans $\mathcal{V}$.

Le théorème de Liouville montre que les changements de coordonnées ainsi définis ont un jacobien égal à 1 ; ceci permet de définir sur $\mathcal{V}$ une densité

$$d\omega = dq^1 \dots dq^n \; dp_1 \dots dp_n$$

dite densité de Liouville, qui ne dépend pas du choix de l'instant t,

---

(1) Voir SOURIAU [V].

ni d'ailleurs du choix des coordonnées q^j.

Un état classique (ou mouvement) du système mécanique est un point x de $\mathcal{V}$; on appelle <u>état statistique</u> du système une <u>loi de probabilité</u> définie sur $\mathcal{V}$; en utilisant la mesure de Liouville $d\omega$, on peut donc définir un état statistique par une fonction positive ρ , définie sur $\mathcal{V}$ (1) , telle que :

(13) $$\int_{\mathcal{V}} \rho(x)\, d\omega = 1$$

Si $U(x)$ est une fonction définie sur $\mathcal{V}$, on appelle <u>valeur moyenne</u> de U dans l'état ρ l'intégrale

(14) $$\int_{\mathcal{V}} U(x)\ \rho(x)\ d\omega$$

(15) Par définition (2), on appelle <u>équilibre thermodynamique</u> un état statistique qui rende maximum l'<u>entropie</u>

(16) $$s = -\int_{\mathcal{V}} \rho(x) \log(\rho(x))\, d\omega$$

parmi tous les états qui donnent une valeur moyenne Q à l'énergie :

(17) $$\int_{\mathcal{V}} H(x)\, d\omega = Q$$

---

(1) On peut, si l'on veut, choisir un instant t, et exprimer $\rho(x)$ en fonction des coordonnées q^j et p_j de l'espace de phases qui sont celles du système, <u>à l'instant</u> t, <u>dans le mouvement</u> x ; on démontre alors que ρ vérifie l'équation d'évolution

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \sum \frac{\partial \rho}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q^j} - \frac{\partial \rho}{\partial q^j} \frac{\partial H}{\partial p_j}$$

H étant la fonction hamiltonienne.

(2) Voir par exemple JAYNES [II] , MACKEY [IV]. Le point de vue de KHINCHIN [III] est un peu différent.

On est donc conduit à un cas particulier du problème traité au § 1. (Comparer 1 et 13, 2 et 17, 3 et 16); ici Q est scalaire, donc aussi le multiplicateur de Lagrange Θ.

Si l'on traite de cette façon un système composé de particules libres, enfermées dans une enceinte, on constate que l'on arrive à la description d'un <u>gaz parfait</u> en équilibre, à condition de poser

(18) $$\Theta = \frac{1}{kT}$$

T étant la <u>température absolue</u> du gaz, k la constante de Boltzmann. Θ
(19) peut donc être considéré comme un repérage de la température (pas plus extraordinaire que l'échelle Fahrenheit). Notons que la formule (12) donne

$$S = \int \frac{dQ}{T}$$

si l'on pose $S = ks$; on retrouve ainsi la définition thermodynamique de l'entropie, puisque la seule énergie d'un gaz parfait au repos est sa chaleur Q ; la fonction ψ s'identifie avec le <u>potentiel thermodynamique</u> ; la formule (4) qui s'écrit

$$\rho(x) = C \cdot \exp\left(-\frac{H}{kT}\right)$$

permet de retrouver la loi de distribution des vitesses de Maxwell ; l'inégalité (11), $\frac{d^2\psi}{d\Theta^2} > 0$, indique ici que la <u>chaleur spécifique</u> $\frac{dQ}{dT}$ est positive.

§ 3: Equilibres permis par un groupe de Lie.

La définition (15) de l'équilibre thermodynamique coïncide avec les données expérimentales ; on peut donc la considérer comme un principe de la Mécanique Statistique. Mais ce principe n'est visiblement pas covariant du point de vue relativiste ; nous allons formuler un énoncé covariant, contenant le principe ci-dessus comme cas particulier, et comparer ses conséquences avec l'expérience.

Notons d'abord que la forme particulière des équations de la dynamique ne joue aucun rôle dans la formulation ci-dessus ; il suffit que le mouvement du système soit défini par un problème variationnel régulier

(21) $$\delta \int_{t_0}^{t_1} \ell(t, q^j, q^{j'})\, dt = 0 \qquad [q^{j'} = \frac{dq^j}{dt}]$$

avec un lagrangien ℓ suffisamment différentiable pour que l'on puisse construire la variété V, et établir le théorème de Liouville ; il suffit de définir les variables p_j par

(22) $$p_j = \frac{\partial \ell}{\partial q^{j'}}$$

On peut d'ailleurs traiter le temps comme les autres variables q^j en représentant le mouvement à l'aide d'un paramètre arbitraire α ; il suffit de poser $t = q^{n+1}$, et le principe (21) s'écrira

(23) $$0 = \delta \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} L(q^J, \dot{q}^J)\, d\alpha \qquad J = 1,2..\ n+1\ ;\ \dot{q}^J = \frac{dq^J}{d\alpha}$$

avec

(24) $$L(q^J, \dot{q}^J) = \ell\left(t, q^j, \frac{\dot{q}^j}{\dot{t}}\right)\dot{t}$$

ce qui ne change pas les variables p_j, et donne en plus

(25) $$p_{n+1} = \ell - \sum_j p_j q^{j'}$$

c'est à dire dans les problèmes classiques :

(26) $$p_{n+1} = -H$$

H étant l'énergie du système.

On sait que le système est conservatif (c'est à dire que H est une intégrale première)si le lagrangien ne dépend pas explicitement de t; ceci est un cas particulier du <u>théorème de Noether</u> :

Si une transformation infinitésimale

(27) $$\delta Q^J = F^J(Q^K)$$

laisse invariant le lagrangien L, la grandeur

(28) $$u = \sum_J p_J \, \delta Q^J$$

est une intégrale première des équations aux variations.

On voit donc que le seul point qui empêche la définition de l'équilibre thermodynamique d'être covariante est le rôle particulier joué par l'énergie, qui n'est que la variable conjuguée du temps (au signe près), ou, de façon plus précise, la grandeur associée par le théorème de Noether à l'invariance du système par translation dans le temps.

Nous proposons donc de le remplacer par l'énoncé suivant :

On considère un système mécanique dont le lagrangien est invariant par un groupe de Lie G .

(29) Nous définirons les <u>états d'équilibre permis par le groupe G</u> comme les états statistiques qui rendent maximum l'entropie, tout en assurant des valeurs moyennes données à <u>toutes</u> les variables associées par le théorème de Noether aux transformations infinitésimales du groupe.

Remarquons d'abord que le théorème de Noether permet d'associer à chaque mouvement x du système une grandeur $U(x)$ prise dans le <u>dual vectoriel de l'algèbre de Lie A du groupe</u> ; il suffit en effet de poser pour toute dérivation δ prise dans cette algèbre de Lie :

(30) $$U(x)(\delta) = \sum p_J \cdot \delta Q^J$$

(31) On peut donc appliquer les résultats du § 1 à la détermination des équilibres permis par G ; il suffit de remarquer que, puisque l'espace E est ici le dual de A , la grandeur Θ appartiendra à cette algèbre de Lie A ; c'est elle que nous appellerons <u>température</u>, par extension de la remarque (19). La grandeur Q , généralisation de la <u>chaleur</u>, appartiendra au dual de A ; la grandeur $-\frac{dQ}{d\Theta}$ sera une forme bilinéaire, symétrique et positive sur A , qui généralise la <u>chaleur spécifique</u>.

Avant de passer aux exemples, indiquons quelques remarques importantes :

(32) - Si G' est un sous-groupe de G , tous les équilibres permis par G' seront permis par G ; autrement dit, l'ensemble des équilibres permis par G est fonction croissante de G . Ceci résulte immédiatement de la

définition (29).

- Il est clair que les éléments du groupe G opèrent sur les mouvements; de même, si δ est une dérivation prise dans l'algèbre de Lie A, et si x est un mouvement, on définit sans ambiguité δx ; δx est un vecteur tangent en x à la variété $\mathcal{U}$ des mouvements.

Nous dirons qu'un état statistique ρ est <u>invariant</u> par δ si $\delta[\rho(x)]$ est nul pour tout x ; dans ce cas, ρ sera invariant par les transformations finies de G engendrées par δ.

On peut alors établir le théorème suivant :

Pour qu'un état d'équilibre permis par un groupe G soit <u>invariant</u> par un élément δ de l'algèbre de Lie A , il faut et il suffit que

(33) $$[\delta , \Theta] = 0$$

Θ désignant la température d'équilibre (1).

Dans le cas thermodynamique classique, où le groupe G est celui des translations dans le temps, et par conséquent abélien, on voit que les états d'équilibres sont tous invariants par G, c'est à dire permanents. Nous

---

(1) On sait en effet définir le <u>crochet de Lie</u> de deux éléments de A, Ce théorème suppose que le groupe G opère effectivement sur l'espace de configuration : le cas contraire s'y ramène en remplaçant G par son quotient par le noyau de sa représentation sur cet espace, ce qui ne change pas les états d'équilibre. La démonstration est facile, si l'on introduit la <u>structure symplectique</u> de $\mathcal{U}$ (voir SOURIAU [V]).

verrons plus loin un exemple d'équilibres qui ne sont pas invariants par le groupe.

- Dans le cas d'un système mécanique composé de plusieurs parties sans actions mutuelles, ou avec des interactions très faibles, on prend comme lagrangien la somme des lagrangiens (exemple : particules d'un gaz parfait, dont on néglige les collisions). L'espace U des mouvements du système est alors le produit direct des espaces U_k des diverses composantes.

Si le groupe G opère séparément sur chacune des parties, c'est à dire sur chacun des U_k, on peut montrer que les états d'équilibre du système complet sont composés d'états d'équilibre des systèmes composants as-
(34) treints à la condition d'avoir tous la même température (dans l'algèbre de Lie de G).

Dans le cas classique, on reconnait la définition empirique de la température, grandeur repérable (thermostats) ; nous interprèterons ce résultat (34) dans les exemples qui suivent.

§ 4 : Exemples.

Pour appliquer la définition (29) des équilibres thermodynamiques, il suffit de se donner un système mécanique et un groupe G de symétries du système ; les équilibres sont dès lors entièrement déterminés par les calculs du § 1.

La température généralisée est un élément Θ de l'algèbre de Lie de G, en fonction duquel on obtient la loi de probabilité de l'équilibre (formules (4) et (5)) ; la condition de convergence uniforme des intégrales (5) et (6) limite l'ensemble des Θ à certaines valeurs (un ensemble ouvert dans l'algèbre de Lie) qu'il faut déterminer. On peut ensuite calculer, en fonction de Θ, la chaleur généralisée Q [(6) ou (10)], et les valeurs moyennes et fonctions de répartition de certaines grandeurs caractéristiques (14), ce qui permettra l'interprétation physique.

Exemple I : Vent.

Considérons un système de particules libres, de masses respectives m_j ; nous prenons le lagrangien

$$-\frac{1}{2}\sum m_j v_j^2$$

et comme groupe celui des translations d'espace et de temps.

La température est ici un vecteur d'espace-temps, dont nous désignerons les composantes par δt, δx, δy, δz.

(35) L'équilibre correspondant, facile à calculer, s'interprète comme l'état d'un gaz parfait, de température absolue $T = \frac{1}{k\delta t}$, immobile dans tout repère de vitesse $\frac{\delta x}{\delta t}$, $\frac{\delta y}{\delta t}$, $\frac{\delta z}{\delta t}$.

Les résultats généraux se vérifient facilement : l'état est permanent et homogène, puisque le groupe est abélien (th. 33) ; deux fluides très dispersés qui s'interpénètrent n'atteindront l'équilibre global que

s'ils acquièrent même température vectorielle (th. 35) ; ils doivent donc avoir non seulement même température absolue, mais aussi même vitesse moyenne; l'expérience et le bon sens se rallient à ce résultat.

Exemple II : Gaz parfait relativiste.

On prend comme lagrangien d'une particule de masse m

(36) $$mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

v désignant la vitesse de la particule, c la vitesse de la lumière. Il est indispensable ici d'introduire toutes les translations d'espace-temps si l'on ne veut pas rompre la symétrie relativiste. G est donc le même groupe que dans l'exemple I.

(37) - La convergence des intégrales (5) et (6) impose au vecteur-température Θ d'être du genre avenir ; il est donc indiqué, pour étudier l'équilibre en question, d'utiliser un laboratoire dont la vitesse unitaire est parallèle à la température.

Les composantes de Θ sont alors δt, 0, 0, 0 ; dans un volume donné du laboratoire, à un instant donné (1), la répartition de vitesses est donnée par la densité de probabilité

(38) $$C \times \exp\left(- \frac{m c^2 \delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) dv_x \, dv_y \, dv_z$$

---

(1) Il s'agit de la simultanéité propre du laboratoire.

Si on suppose c grand devant v ("basses" températures), on trouve comme approximation de cette loi

(39) $$C' \exp\left(-\frac{m v^2 \delta t}{2}\right) dv_x \; dv_y \; dv_z$$

c'est à dire la loi de Maxwell pour un gaz parfait de température absolue

(40) $$T = \frac{1}{k \delta t}$$

Nous pourrons donc prendre cette formule comme définition de la <u>température absolue propre</u> du gaz ; le gaz parfait relativiste est donc caractérisé par sa vitesse unitaire moyenne

(41) $$U = \frac{\Theta}{|\Theta|}$$

et par sa température absolue propre

(42) $$T = \frac{1}{k\,|\Theta|}$$

la loi de répartition dans le repère propre étant (38). ([1])

- On peut bien entendu définir, dans un repère <u>quelconque</u>, le nombre

(43) $$T' = \frac{1}{k \delta t}$$

([1]) On obtient donc, par application du principe (29), les bases de la théorie du gaz parfait relativiste, telles qu'elles sont développées par exemple dans SYNGE [VII].

il sera lié à la température absolue propre par la formule ([1])

(44) $$T' = \frac{T}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$c\beta$ étant la vitesse moyenne dans ce repère

Exemple III : Centrifugeuse

Considérons des molécules libres dans une enceinte à symétrie de révolution ; soit G le groupe des rotations autour de l'axe ($\theta \to \theta$ + Cte en coordonnées polaires) et des translations dans le temps.

On trouve alors, comme champ de vitesses moyennes, celui des vitesses d'un solide en rotation uniforme, avec la vitesse angulaire $\omega = \frac{\delta\theta}{\delta t}$ ($\delta\theta$ et δt étant les composantes de Θ) ; on décrit donc une centrifugeuse à gaz. La répartition de densité en fonction de la distance r à l'axe est

(45) $$\rho = \rho_o \exp\left(\frac{Mr^2\omega^2}{2RT}\right)$$

M désignant la masse moléculaire, R la constante des gaz parfaits. On trouve le même résultat que par application des équations de la mécanique des fluides (une fois que l'on sait que le mouvement est solide!) ; cependant, dans le cas d'un mélange gazeux, la formule (46) doit s'appliquer séparément à chacune des composantes ; on obtient donc ainsi la loi de répartition des concentrations en fonction de r.

Dans le cas d'une enceinte sphérique, on peut augmenter le groupe G en admettant toutes les rotations; comme ce groupe n'est pas abélien, les solutions n'auront pas la symétrie sphérique (th.33); on trouve en effet

---

([1]) Voir ARZELIES [I] et SUTCLIFFE[VI], au sujet de la variance relativiste de la température absolue; il nous semble qu'il n'y a pas de problème si l'on considère, comme ici, la température comme un vecteur.

une rotation uniforme autour d'un axe déterminé par Θ.

Exemple IV : Centrifugeuse relativiste.

(47) Ce cas se traite avec le même groupe que précédemment (ses éléments sont à la fois des transformations de Galilée et des transformations de Lorentz-Poincaré) et avec le lagrangien relativiste (36) pour les particules.

Indiquons la densité de probabilité d'une particule de masse m, sur son espace $\mathcal{V}$ (qui peut être identifié avec l'espace de phases à un instant quelconque , puisque la solution est stationnaire en t).
En utilisant des coordonnées cylindro- polaires r, θ, z, et leurs variables conjuguées respectives

$$(48)\qquad \begin{cases} p_r = -\dfrac{m\,r'}{\sqrt{1-\beta^2}} \\[2ex] p_\theta = -\dfrac{m\,r^2\,\theta'}{\sqrt{1-\beta^2}} \\[2ex] p_z = -\dfrac{m\,z'}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases} \qquad (\beta = v/c)$$

cette densité de probabilité est

$$(49)\qquad C^{te} \times \exp\left(-c\left[m^2c^2+p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}+p_z^2\right]^{\frac{1}{2}}\delta t - p_\theta\,\delta\theta\right)dr\,d\theta\,dz\,dp_r\,dp_\theta\,dp_z$$

δt, $\delta\theta$ désignant les composantes de la "température" Θ ; pour que son

intégrale converge, on trouve aisément les conditions

(50) $$\delta t > 0 , \quad R \left| \frac{\delta\theta}{\delta t} \right| < c$$

R désignant le rayon de la centrifugeuse.

En chaque point M de l'espace-temps, on trouve une répartition de vitesse du même type (39) que dans le cas du vent relativiste, avec un vecteur Θ_M variable ; on peut donc encore attribuer au fluide, en chaque point, une vitesse moyenne

(51) $$U = \frac{\Theta_M}{|\Theta_M|}$$

et une température absolue propre

(52) $$T = \frac{1}{k|\Theta_M|}$$

Le champ de vitesses moyennes coïncide avec celui qui a été trouvé dans le cas précédent (champ des vitesses d'un solide non relativiste tournant avec la vitesse angulaire $\omega = \frac{\delta\theta}{\delta t}$) ;
Compte tenu des conditions de convergence (50), on voit que les paradoxes du solide tournant relativiste sont agréablement évités.

Quant au champ de températures absolues propres, il est donné par la formule

(53) $$T = \frac{T_o}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}}$$

La théorie prévoit donc un nouvel effet, proprement relativiste, suivant lequel la température "physique" du gaz n'est pas constante dans cet équilibre thermodynamique, mais augmente vers les bords.

§ 5 : Localisation de la température vectorielle.

Dans tous les exemples précédents, le groupe G considéré n'est pas un groupe abstrait, mais un groupe de transformations de l'espace-temps. Les éléments de l'algèbre de Lie de G peuvent donc se représenter concrètement comme des champs de vecteurs de l'espace-temps.

La température abstraite définie en (31) sera donc elle aussi un champ de vecteurs (1) ; on pourra donc parler en chaque point M de l'espace-temps de la température vectorielle Θ_M, ou, si l'on préfère, de la vitesse moyenne et de la température absolue propre qui sont reliées à Θ_M par les formules (51) et (52).

Si on inclut dans le système une bulle de gaz parfait, celle-ci pourra servir de thermomètre vectoriel : la répartition des vitesses des molécules déterminera complètement le vecteur Θ_M ; nous avons vu qu'il en était ainsi dans le cas de la centrifugeuse, et il est facile de le démontrer en général.

---

(1) Ici se pose une question d'analyse dimensionnelle ; on peut constater sur les exemples traités que le vecteur Θ_M est en fait le produit d'un vecteur par une action hamiltonienne ; on obtiendra une véritable température vectorielle si l'on divise systématiquement le lagrangien par une constante universelle ayant les dimensions d'une action, que nous laissons au lecteur le soin de choisir.

- Remarquons enfin que le lagrangien (36) que nous avons utilisé pour le fluide relativiste n'est pas invariant dans les transformations de Lorentz antichrones, ce qui exclut son utilisation en relativité générale ; on est donc conduit à introduire un double signe devant le radical, c'est à dire à considérer aussi des particules de masse négative.

On constate que l'équilibre thermodynamique simultané de particules à masses positives et négatives est impossible (les intégrales divergent toujours), et que l'équilibre de particules de masses négatives ne peut avoir lieu qu'avec un vecteur température du genre passé ; c'est à dire, si l'on veut, une température absolue négative (1).

Ceci suggère une façon d'échapper au paradoxe de l'irréversibilité thermodynamique : il suffit d'identifier le sens de la non-décroissance de l'entropie avec le sens d'écoulement du temps indiqué par le vecteur température pour avoir un énoncé invariant par le changement de t en $-t$.

-o-o-o-o-o-

(1) Voir TERLETSKY [VIII].