ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

JEAN-MARIE SOURIAU

Quantification géométrique. Applications

Annales de l'I. H. P., section A, tome 6, nº 4 (1967), p. 311-341.
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1967__6_4_311_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section A :
Vol. VI, n° 4, 1967, p. 311-341. *Physique théorique.*

Quantification géométrique.
Applications

par

Jean-Marie SOURIAU
Faculté des Sciences de Marseille.

ABSTRACT. — We develop the previously proposed geometrical quantization method [9] and apply it to several typical cases.

In order to be able to treat also problems for which there is no hamiltonian or lagrangian formalism, we introduce the notion of *dynamical structure* relevant to classical or relativistic dynamics, statistical mechanics and quantization. Every dynamical structure allows amongst other things the assignement to each invariance group of a conjugate momentum with values in the conjugate space of the Lie algebra of the group (section 2).

Following a suggestion of R. Haag, we systematize a condition on quantal measures, thus getting a formalization of the Planck condition $e = h\nu$ for all translationally invariant systems.

The notion of dynamical structures allows the construction of a *classical model for polarized particles.* Such particles possess an intrinsic momentum of constant length j oriented by the polarization. This model turns out to be quantizable for $j =$ half integer. For $j = 0$ (non polarized particles) one finds under the Planck condition a state space identifyable with the set of solutions of the *Schrödinger equation;* and in the relativistic case one finds the set of *positive energy solutions of the Klein Gordon equation.*

For $j = \frac{1}{2}$ the system is quantizable by means of spinors; Planck condition leads to the space of *positive energy solutions of the Dirac equation;* this removes the paradox of the non existence of quantal representations of the Poincaré group but instead of its covering group: this fact stems from the

global topology of the dynamical structure of the corresponding particles (section 4).

The case $j \geq 1$ leads to a construction which reminds the « méthode de fusion » of L. de Broglie (section 5).

We finally treat the systems of non interacting particles (interactions are in fact incompatible with the existence of a relativistic dynamical structure). In the case of distinghisable particles the state space of the system is the tensor product of one-particle spaces. In the case of identical particles the new situation arises that quantization is possible in either of *two ways* one of them leading to symmetric and the other to antisymmetric states (section 6). Thus one finds *a priori* the existence of bosons and fermions, parastatistics beeing excluded- at least for the envisaged dynamical structure. At this stage of the theory the relation of spin with statistics remains unexplained.

Most of these results follow from theorems in *global differential geometry*, notably from *homotopic properties* which are collected in section 1.

§ I. — QUELQUES RÉSULTATS DE GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE GLOBALE

N. B. — Toutes les variétés considérées ici sont supposées séparées, de classe C^∞ ; tous les champs sont infiniment différentiables.

Structures feuilletées.

Soit V une variété de dimension n ; on appelle *structure feuilletée* de V la donnée d'un champ $x \to E$ de sous-espaces vectoriels (de dimension q) tangents à V vérifiant la condition

$$[\forall x, dx \in E, \delta x \in E] \Rightarrow [\forall x, (d, \delta)_L\, x \in E] \tag{1.1}$$

où $x \to dx$ et $x \to \delta x$ sont des champs de vecteurs sur E, et où $[d, \delta]_L$ désigne leur crochet de Lie.

Cette condition (1.1) est nécessaire pour que le champ $[x \to E]$ soit *intégrable*, c'est-à-dire qu'il existe une application f de V sur une variété V′ de dimension $n - q$ telle que

$$\{ dx \in E \} \Leftrightarrow \{ d[f(x)] = 0 \}. \tag{1.2}$$

Elle est *localement suffisante*, en ce sens que (1.1) entraîne l'existence d'ouverts, recouvrant V, dans chacun desquels le champ est intégrable.

— Soit $[x \to \omega]$ un champ de p-formes défini sur une variété feuilletée ; si l'on pose pour tout x [notation [*6*]]

$$E' = \mathrm{noy}\,(\omega) \cap \mathrm{noy}\,(\nabla \omega) \tag{1.3}$$

la condition

$$E \subset E' \tag{1.4}$$

est nécessaire et suffisante pour que ω soit l'image réciproque, par l'application f, d'un champ de p-formes de la variété V′ (dans tout ouvert où E est intégrable) ; notons d'ailleurs que le champ $x \to E'$ définit aussi une structure feuilletée, à la seule condition que dim (E′) soit constante.

Variétés symplectiques.

On appelle *variété symplectique* une variété V, munie d'un champ de 2-formes $x \to \sigma_V$, vérifiant pour tout x de V les conditions :

(1.5) *a)* $\nabla \sigma_V = 0$

b) σ_V régulière.

(1.6) Pour construire une variété symplectique, on peut aussi définir une 2-forme σ_{V*} sur une variété V*, vérifiant seulement la condition $\nabla \sigma_{V*} = 0$; si le sous-espace vectoriel $E = \mathrm{noy}\,(\sigma_{V*})$ a une dimension constante, nous venons de voir qu'il donne une structure feuilletée à V ; si cette structure est intégrable (ce qui a toujours lieu localement) σ_{V*} est l'image réciproque d'une 2-forme σ_V d'une variété « quotient » ; on vérifie aisément, pour σ_V, les axiomes (1.5) des variétés symplectiques.

(1.7) De la condition (1.5 *b*) résulte algébriquement que la dimension d'une variété symplectique est *paire*, soit $2n$; on montre que la puissance extérieure *n ième* de σ est une $2n$-forme non nulle ; on appelle *forme de Liouville* son quotient par $[-1]^{n(n-1)/2}\, n!$; la forme de Liouville donne à toute variété symplectique une orientation, et y définit une densité positive (« densité de Liouville »).

Espaces fibrés quantifiants.

Nous appelons *espace fibré quantifiant* (E. F. Q.) une variété $\mathcal{Y}$ munie d'un champ de 1-formes $\xi \to \varpi_{\mathcal{Y}}$, vérifiant les axiomes suivants :

(1.8) *a)* $\dim(\text{noy}(\nabla\varpi_{\mathcal{Y}})) = 1$

b) $\dim[\text{noy}(\nabla\varpi_{\mathcal{Y}}) \cap \text{noy}(\varpi_{\mathcal{Y}})] = 0$

c) les lignes de force du champ de directions $\xi \to \text{noy}(\nabla\varpi_{\mathcal{Y}})$ sont des courbes fermées, sur lesquelles la circulation de $\varpi_{\mathcal{Y}}$ est égale à 2π.

La dimension d'un E. F. Q. est impaire — soit $2n + 1$; l'ensemble abstrait des lignes de force est une variété V de dimension $2n$ — qu'on appelle *base* de l'E. F. Q. ; les considérations ci-dessus montrent que $\nabla\varpi_{\mathcal{Y}}$ est l'image réciproque, par la projection de $\mathcal{Y}$ sur la base, d'une 2-forme σ_{V}, qui donne à V une structure de *variété symplectique*.

(1.9) Inversement, nous appellerons *quantification* d'une variété symplectique V la construction d'un E. F. Q. $\mathcal{Y}$ de base V ; si cette opération est possible, V sera *quantifiable*.

Une condition suffisante pour qu'une variété symplectique V soit quantifiable est l'existence d'une 1-forme ϖ_{V} telle que $\sigma_{\mathrm{V}} = \nabla\varpi_{\mathrm{V}}$; (ce qui a lieu en particulier si le 2^{e} groupe de cohomologie de V est nul).

Il suffit en effet de prendre $\mathcal{Y} = \mathrm{V} \times \mathrm{S}_1$ et de poser

$$(1.10) \qquad \varpi_{\mathcal{Y}}\begin{pmatrix} dx \\ dz \end{pmatrix} = \varpi_{\mathrm{V}}(dx) + \frac{dz}{iz} \qquad (z = \text{nombre complexe de module } 1).$$

Transformations canoniques.

(1.11) Soient V et V′ deux variétés symplectiques de même dimension ; x et x' deux points respectifs.

On montre qu'il existe un difféomorphisme A d'un ouvert de V sur un ouvert de V′, tel que $\mathrm{A}(x) = x'$, et que l'image réciproque par A de la forme $\sigma_{\mathrm{V}'}$ soit la forme σ_{V} ; A s'appelle une *transformation canonique* de V à V′.

En d'autres termes, les variétés symplectiques de dimension $2n$ sont toutes *localement isomorphes*.

Les transformations canoniques de V sur V (resp. d'un ouvert de V sur un ouvert de V) seront les automorphismes (resp. les automorphismes locaux) de la structure symplectique de V.

(1.12) De même, si $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ sont deux espaces fibrés quantifiants, un isomorphisme local de $\mathcal{U}$ à $\mathcal{U}'$ est une application d'un ouvert de $\mathcal{U}$ sur un ouvert de $\mathcal{U}'$, transformant les lignes de force (ci-dessus (1.8) *c*) en lignes de force, et tel que l'image réciproque de $\varpi_{\mathcal{U}'}$ soit $\varpi_{\mathcal{U}}$.

C'est le recueil des isomorphes locaux d'un E. F. Q. qui lui confère sa structure d'espace fibré (au sens (7.1) de [*6*]).

(1.13) Deux espaces fibrés quantifiants $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ *de même base* V sont isomorphes (au sens (7.10) de [*6*]) s'il existe un isomorphisme global A de $\mathcal{U}$ à $\mathcal{U}'$ qui se projette suivant l'identité de V :

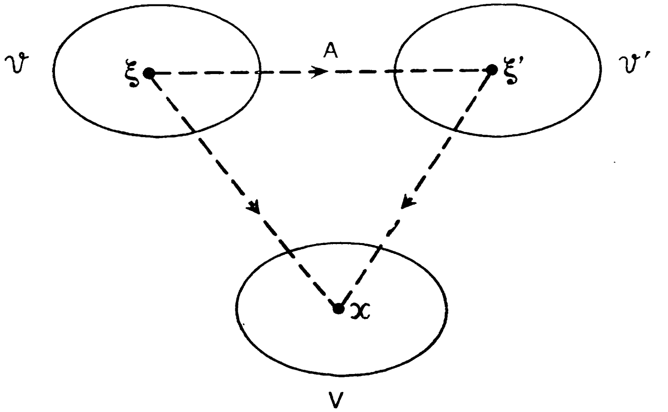

FIG. 1.

nous dirons dans ce cas que $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ définissent des *quantifications isomorphes* de V.

(1.14) Si V est une variété quantifiable, et $\mathcal{U}$ un E. F. Q. de base V, nous dirons qu'une transformation canonique A de V se *relève* à $\mathcal{U}$ lorsque A est la projection d'un isomorphisme local de $\mathcal{U}$; toute transformation canonique est localement relevable ; les relèvements de l'application identique 1_V forment un groupe isomorphe à T, si V est connexe, ce que nous supposerons désormais [1] ; si Γ est un groupe de transformations canoniques de V, l'ensemble Γ_0 de celles qui se relèvent à $\mathcal{U}$ forment un sous-groupe (Γ_0 est un sous-groupe *invariant* si V est *simplement connexe*); l'ensemble Γ_0 des relèvements des éléments de Γ_0 est une *extension* de Γ_0 par T ; nous dirons que Γ_0 *se relève trivialement* si cette extension est un

[1] Nous désignerons par T le tore à 1 dimension, c'est-à-dire le groupe de Lie R/Z, encore isomorphe à SO(2) ou à U(1).

produit direct par T, c'est-à-dire si l'on peut extraire de Γ_0 un sous-groupe dont la projection constitue un isomorphisme avec Γ_0. On passe d'un tel isomorphisme A à tout autre A* par la formule

$$A^{*-1}(\gamma)(\xi) = \chi(\gamma)(A^{-1}(\gamma)(\xi)) \qquad \begin{array}{l}\xi \in \mathcal{V} \\ \gamma \in \Gamma_0\end{array}$$

χ étant une représentation de Γ_0 dans T, c'est-à-dire un *caractère* de Γ_0.

Transformations canoniques infinitésimales.

(1.15) Un champ de vecteurs $[x \to \delta x]$ d'une variété symplectique V s'appelle *transformation canonique infinitésimale* si les transformations finies associées $e^{t\delta}$ sont, pour tout t, des transformations canoniques.

Il est pour cela nécessaire et suffisant que la dérivée de Lie $\delta_L \sigma_V$ de la forme σ_V soit nulle (Cf. (23.15) [*6*]) ce qui peut s'écrire (Cf. (27.13) [*6*])

$$\nabla[\sigma_V(\delta x)] = 0 \tag{1.16}$$

et ce qui s'intègre, *localement*, sous la forme

$$\sigma_V(\delta x) = -\nabla u \tag{1.17}$$

$[x \to u]$ étant un champ scalaire.

(1.18) Soit $\mathcal{V}$ un E. F. Q. de base V. Désignons par ξ un point de $\mathcal{V}$ qui se projette en x sur V. Soit $[x \to u]$ un champ scalaire défini sur un ouvert de V.

On peut définir un champ de vecteurs $\xi \to \underset{u}{\delta}\xi$ de $\mathcal{V}$ par les deux conditions

$$\left\{\begin{array}{lll}\varpi_{\mathcal{V}}(\underset{u}{\delta}\xi) = u & & \text{sur } \mathcal{V} \\ \sigma_V(\underset{u}{\delta}x) = -\nabla u & & \text{sur } V\end{array}\right. \tag{1.19}$$

$\underset{u}{\delta}$ est un automorphisme infinitésimal de l'E. F. Q. (i. e. : les $e^{t\underset{u}{\delta}}$ sont des automorphismes locaux de $\mathcal{V}$, au sens (1.12) ; la dérivée de Lie $\underset{u}{\delta}_L \varpi_{\mathcal{V}}$ est nulle). Réciproquement, tout automorphisme infinitésimal de $\mathcal{V}$ est associé à un scalaire u, défini sur un ouvert de V, par les formules (1.19).

(1.20) On voit en particulier que l'existence d'une solution *globale* u à l'équation (1.17) est nécessaire et suffisante pour qu'une transformation canonique infinitésimale soit *relevable*.

Notons aussi que le champ de vecteurs $\xi \rightarrow \underset{1}{\delta}\xi$ est tangent en chaque point ξ à la ligne de force du noyau de $\nabla\varpi_{\mathcal{U}}$ passant par ξ, et que l'application

$$(1.21)\qquad t \rightarrow e^{t\underset{1}{\delta}}(\xi)$$

est périodique, de période 2π ; les $e^{t\underset{1}{\delta}}$ sont les éléments du groupe T considéré en (1.14).

Notons enfin la formule donnant le *crochet de Lie* de $\underset{u}{\delta}$ et $\underset{v}{\delta}$:

$$(1.22)\qquad [\underset{u}{\delta}, \underset{v}{\delta}]_L = \underset{[u,v]_p}{\delta}$$

$[u, v]_p$ étant le *crochet de Poisson* de u et v défini par

$$(1.23)\qquad [u, v]_p = \underset{u}{\delta}v = -\underset{v}{\delta}u$$

Quantification d'un revêtement.

(1.24) Soit V une variété quantifiable connexe, V* un revêtement de V (voir § 10 [*6*]), $\mathcal{U}$ un E. F. Q. de base V.

Désignons par $\mathcal{U}^*$ l'ensemble des couples $\eta = \begin{pmatrix}\xi \\ y\end{pmatrix}$ d'un point ξ de $\mathcal{U}$ et d'un point y de V* qui se projettent en un même point x de V (figure 2). $\mathcal{U}^*$ est un revêtement de $\mathcal{U}$; les formes $\varpi_{\mathcal{U}}$ et σ_V se relèvent naturellement à $\mathcal{U}^*$ et à V* respectivement, suivant les formules

$$(1.25)\qquad \varpi_{\mathcal{U}^*}(d\eta) = \varpi_{\mathcal{U}}(d\xi) \quad ; \quad \sigma_{V^*}(dy)(\delta y) = \sigma_V(dx)(\delta x)$$

il en résulte immédiatement que $\mathcal{U}^*$ est un espace fibré quantifiant ayant pour base la variété symplectique V* ; ainsi tout revêtement d'une variété quantifiable est quantifiable.

Soit Γ le *groupe principal* du revêtement V (voir § 10 [*6*]) qui permute les divers points y se projetant sur V en x. Si $\gamma \in \Gamma$, on peut poser

$$(1.26)\qquad \hat{\gamma}\begin{pmatrix}\xi \\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\xi \\ \gamma(y)\end{pmatrix}$$

On constate que $\hat{\gamma}$ est un *relèvement* (1.14) de la transformation canonique γ, et que la correspondance $\gamma \rightarrow \hat{\gamma}$ est un isomorphisme ; le groupe Γ est donc trivialement relevable à $\mathcal{U}^*$.

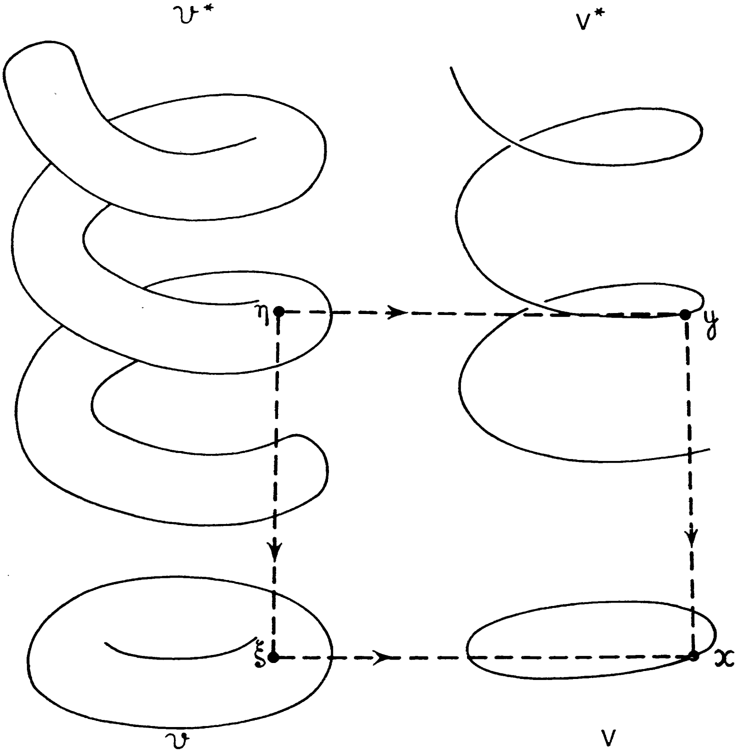

FIG. 2.

(1.27) Réciproquement, si V* est une variété symplectique, $\mathcal{V}^*$ un E. F. Q. de base V*, et si V* possède un groupe *discret* Γ de transformations canoniques qui soit *trivialement relevable*, l'espace quotient V = V*/Γ est une *variété symplectique quantifiable*, admettant pour E. F. Q. le quotient $\mathcal{V}^*$ par un relèvement de Γ isomorphe à Γ.

On obtient donc *a priori* autant de quantifications de la variété quotient qu'il existe de caractères du groupe Γ.

(1.28) Appliquons ceci au cas où V* est le *revêtement universel* d'une variété connexe quantifiable V.

Alors Γ est le *groupe de Poincaré* (que nous appellerons *groupe d'homotopie* afin d'éviter des confusions) de V ; V* est *simplement connexe* (voir § 10 [*6*]). Un théorème démontré dans la référence [*7*] montre qu'il existe une seule quantification $\mathcal{V}^*$ de V*, à un isomorphisme près (1.13). Par suite *les divers caractères du groupe d'homotopie sont associés à toutes les quantifications possibles de* V ; à deux caractères distincts correspondent des quantifications non isomorphes.

Quantification d'un produit direct.

Soient V_1, V_2, ... V_p des variétés symplectiques de dimensions quelconques. L'ensemble $V = V_1 \times \ldots \times V_p$ des systèmes

$$(1.29) \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \qquad [x_j \in V_j]$$

est le produit direct des variétés V_j ; il possède une structure de variété différentiable (Cf. (20.21) [*6*]) ; on en fait une variété symplectique en posant

$$(1.30) \qquad \sigma_V(dx)(\delta x) = \sum_{j=1}^{p} \sigma_{V_j}(dx_j)(\delta x_j)$$

Supposons maintenant que les V_j soient quantifiables, au moyen d'E. F. Q. respectifs $\mathcal{Y}_j$. Nous pouvons former le produit direct $\mathcal{Y}$ des $\mathcal{Y}_j$, et y définir une 1-forme $\varpi_{\mathcal{Y}}$ par l'expression

$$(1.31) \qquad \varpi_{\mathcal{Y}}(\delta\xi) = \sum \varpi_{\mathcal{Y}_j}(\delta\xi_j)$$

en posant

$$(1.32) \qquad \xi' = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_p \end{pmatrix} \quad , \quad \xi_j \in \mathcal{Y}_j.$$

$\mathcal{Y}$ *n'est pas* un espace fibré quantifiant ; mais nous pouvons faire le quotient de $\mathcal{Y}$ par le groupe, isomorphe à T^{p-1}, des substitutions

$$(1.33) \qquad \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_p \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 \delta_1}(\xi_1) \\ \\ e^{\lambda_p \delta_1}(\xi_p) \end{pmatrix} \qquad [\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_p = 0]$$

$\underset{1}{\delta}$ désignant, sur chaque $\mathcal{V}_j$, la dérivation associée à la constante 1 par les formules (1.19) ; l'espace vectoriel tangent E aux orbites du groupe, en chaque point ξ, donne à $\mathcal{V}$ une structure feuilletée intégrable (voir (1.1)) ; comme on en a en tout point

$$(1.34) \qquad E = \text{noy}\,(\varpi_{\mathcal{V}}) \cap \text{noy}\,(\nabla\varpi_{\mathcal{V}})$$

$\varpi_{\mathcal{V}}$ est l'image réciproque par l'application canonique, d'une 1-forme $\varpi_{\mathcal{V}'}$ du quotient $\mathcal{V}'$ de $\mathcal{V}$ par le groupe (1.33) (Cf. (1.4)) ; on peut définir $\varpi_{\mathcal{V}'}$ par :

$$(1.35) \qquad \varpi_{\mathcal{V}'}(\delta\xi) = \sum_j \varpi_j(\delta\xi_j)$$

ξ désignant la classe de ξ' (1.32) dans l'équivalence définie par le groupe (1.33). Il est alors facile de voir que $\mathcal{V}'$ est un espace fibré quantifiant ayant pour base $V_1 \times \ldots \times V_p$: *tout produit direct de variétés quantifiables est quantifiable.*

Quantification d'une sphère.

Une sphère ordinaire S_2 plongée dans l'espace euclidien R^3 possède une 2-forme invariante par le groupe SO(3), définie à un facteur multiplicatif par la formule

$$(1.36) \qquad \sigma_{S_2}(dx)(\delta x) = \lambda \,\text{vol}\,(x)(dx)(\delta x) \qquad [\,|x| = 1]$$

vol désignant la jauge de R^3 (Cf. (29.25 *c*) [*6*]).

La dérivée extérieure de σ_{S_2} est nécessairement nulle, comme 3-forme d'une variété de dimension 2 ; pour chaque λ, la formule (1.36) donne à S_2 une structure symplectique.

(1.37) On peut caractériser λ, en valeur absolue, par l'*aire* de la sphère, c'est-à-dire par l'intégrale sur S de la densité de Liouville (voir (1.7) et ((31.69), [*6*]), qui vaut $4\pi\,|\,\lambda\,|$.

Comme la forme σ_{S_2} *n'est pas* une dérivée extérieure, on ne peut pas affirmer que la sphère soit quantifiable, pour toutes les valeurs de λ ; nous allons quantifier la sphère d'aire 2π.

Il suffit en effet de considérer la sphère S_3 plongée dans l'espace hermitien complexe C^2, constituée des couples

$$(1.38) \qquad \xi = \begin{bmatrix} z \\ z' \end{bmatrix} \quad z, z' \in C\,; \qquad |z|^2 + |z'|^2 = 1$$

et de poser

(1.39) $$\varpi_{S_3}(d\xi) = \mathcal{R}\left(\frac{\bar{\xi}d\xi}{i}\right) \qquad \bar{\xi} = [\bar{z}\ \bar{z}']$$

On constate alors que S_3 devient un espace fibré quantifiant, dont la dérivation $\underset{1}{\delta}$ est donnée par la formule

(1.40) $$\underset{1}{\delta}\xi = i\xi$$

et dont la base peut être identifiée à S_2, la projection $\xi \to x$ étant donnée par la formule

(1.41) $$x^j = \bar{\xi}\sigma^j\xi$$

les σ^j étant les trois matrices de Pauli $\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right.$ respectivement) ; la forme σ_{S_2} est donnée par l'expression (1.36) *avec* $\lambda = 1/2$.

(1.43) Notons que le groupe SO(3) qui est canonique sur S_2 est *relevable non trivialement* sur S_3 par le groupe U(2) ; que la quantification ainsi obtenue pour $\lambda = 1/2$ est unique (à un isomorphisme près), puisque la sphère S_2 est simplement connexe (voir note II (6) [*6*]).

Un théorème d'homotopie.

(1.44) Soit V un ensemble ; nous appellerons *diagonale* de V^p l'ensemble des p-uples

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

dans lesquels deux au moins des points $x_1, \ldots x_p$ de V sont égaux.

Nous aurons besoin du théorème suivant :

(1.45) Si V est une variété simplement connexe de dimension ≥ 4, V^p privée de sa diagonale est une variété simplement connexe.

§ II. — LA NOTION DE STRUCTURE DYNAMIQUE

Axiomes des structures dynamiques.

Un système dynamique *(non quantique)* est un dispositif quelconque, susceptible de prendre divers mouvements ; désignons par V l'ensemble de ces mouvements possibles.

Nous allons formuler des « principes » relatifs à cet ensemble V :

(2.1) V possède une structure de *variété*, que nous appellerons *structure cinématique* du système ;

(2.2) En tout point x de V est définie une 2-forme régulière σ_V, dont les valeurs ont la dimension ML^2T^{-1}, et que nous appellerons *forme de Lagrange* [*3*] ;

(2.3) La forme de Lagrange σ_V vérifie en tout point la condition $\nabla[\sigma_V] = 0$
que nous appellerons *condition de Maxwell.*

L'ensemble V est donc ainsi muni d'une structure de *variété symplectique* (voir ci-dessus (1.5)) que nous appellerons *structure dynamique* du système.

La structure dynamique et les équations du mouvement.

(2.4) Il peut arriver que l'on caractérise un mouvement par des variables surabondantes, notamment au moyen des conditions initiales mettant en jeu une date t arbitraire.

La correspondance entre le système x' de ces conditions initiales et le mouvement de x qu'il détermine définit une application $[x' \to x]$ d'une certaine variété V′ sur la variété V ; l'image réciproque de la forme de Lagrange σ_V sera une forme $\sigma_{V'}$ de V′, elle aussi de dérivée extérieure nulle (voir (27.17), [*6*]) ; ainsi que nous l'avons vu en (1.6), le champ

$$x' \to \text{noy}\,(\sigma_{V'})$$

donne une structure feuilletée intégrable à V′, qui fournira par intégration la variété V et la forme de Lagrange σ_V ; en d'autres termes, les *équations du mouvement* pourront s'écrire sous la forme

$$\sigma_{V'}(dx') = 0 \tag{2.5}$$

que nous appellerons *principe des travaux virtuels.*

Exemple I. — Considérons un système de p points matériels X_j, de masses m_j, de vitesses V_j, soumis à des forces F_j ; nous définirons un point x' de la variété V′ par le système d'une date t, des X_j et des V_j (supposant que les forces F_j sont fonctions de ces variables) et nous poserons :

$$(2.6) \quad \sigma_{V'}(dx')(\delta x') = \sum_j \langle m_j dV_j - F_j dt, \delta X_j - V_j \delta t \rangle - \langle m_j \delta V_j - F_j \delta t, dX_j - V_j dt \rangle$$

on constate que les équations du mouvement fournies par le « principe des travaux virtuels » $\sigma_{V'}(dx') = 0$ s'écrivent

$$(2.7) \qquad m_j dV_j - F_j dt = 0 \quad ; \quad dX_j - V_j dt = 0$$

ce qui constitue bien la loi de Newton ; la « condition de Maxwell » $\nabla \sigma_{V'} = 0$, développée, exprime que les forces F_j ne dépendent pas des vitesses V_j, et que leurs dérivées par rapport aux X_j vérifient les conditions

$$\frac{\partial F_j}{\partial X_k} \text{ est symétrique de } \frac{\partial F_k}{\partial X_j}$$

qui expriment la *loi de réciprocité* de Maxwell.

La variété V des mouvements a la dimension $6p$.

Exemple II. — Nous pouvons traiter un système du même genre, mais en prenant une date indépendante t_j pour chaque point matériel, et en posant :

$$(2.9) \quad \sigma_{V'}(dx')(\delta x') = \sum_j \langle m_j dV_j - F_j dt_j, \delta X_j - V_j \delta t_j \rangle - \langle m_j \delta V_j - F_j \delta t_j, dX_j - V_j dt_j \rangle$$

le principe des travaux virtuels donne les équations du mouvement

$$(2.10) \qquad m_j dV_j - F_j dt_j = 0 \quad ; \quad dX_j - V_j dt_j = 0 \; ;$$

malgré la présence de nouvelles variables t_j, on constate que la variété V des mouvements a *encore* la dimension $6p$. Quant aux relations de Maxwell, elles indiquent que F_j ne dépend ni des vitesses, *ni des* X_k *et des* t_k (pour $k \neq j$), et que $\dfrac{\partial F_j}{\partial X_j}$ est symétrique ; on obtient donc la description d'un *système de particules sans interactions ;* et l'on constate que la variété symplectique V des mouvements est le *produit direct* (au sens (1.29), (1.30)) des variétés correspondant à la description de chaque particule isolée. Cette structure se retrouve d'ailleurs avec la formulation « simultanée » (2.6), dans le cas où il n'y a pas d'interaction.

Exemple III. — Pour traiter le cas d'une particule polarisée X de masse m, de vitesse V, libre, nous supposerons que la polarisation est caractérisée par un (pseudo) vecteur unitaire S ; nous adopterons la forme de Lagrange

$$(2.11) \quad \sigma_{V'}(dx')(\delta x') = \langle m dV, \delta X - V\delta t \rangle - \langle m\delta V, dX - V dt \rangle \\ - j \operatorname{vol}(S)(dS)(\delta S) \text{ (notation (1.36))},$$

j désignant une constante que nous interpréterons ultérieurement (2.19).

Le principe des travaux virtuels donne les équations du mouvement qui s'intègrent en

$$(2.12) \qquad V = Cte, \qquad X - Vt = Cte, \qquad S = Cte.$$

La structure dynamique peut d'ailleurs être considérée comme le *produit direct* de la structure correspondant au cas $j = 0$ (particule non polarisée) par la sphère (1.36) ; la variété des mouvements est homéomorphe au produit direct $R^6 \times S_2$; elle est donc simplement connexe, de dimension 8.

La structure dynamique et les grandeurs cinétiques.

(2.13) On appelle *groupe dynamique* tout groupe de Lie d'isomorphismes d'une structure dynamique.

Soit donc Γ un tel groupe ; désignons par L son *algèbre de Lie.*

A tout élément l de L, correspondra une transformation canonique infinitésimale $x \to \underset{l}{\delta x}$ de la variété V des mouvements. En appliquant (1.17) on voit qu'il existera, au moins localement ([2]), une fonction $x \to M(x)$ à valeurs dans le dual L* de l'algèbre de Lie, tel que

$$(2.14) \qquad \sigma_V(\underset{l}{\delta x}) = - \nabla[M(x).l]$$

M(x), qui est caractérisé par cette équation à une constante additive près, s'appellera *moment* du mouvement x pour le groupe Γ.

(2.15) Le groupe Γ opère, par hypothèse, sur les points x de V ; il opère aussi de façon canonique sur le *dual* de l'algèbre de Lie (représentation duale de la représentation adjointe) ; *il ne faudrait pas en conclure que l'application* $x \to$ M(x) *est invariante par* Γ ; il est des cas où l'on peut utiliser l'hypothèse de l'invariance de cette application dans un *sous-groupe* de Γ pour préciser la constante d'intégration qui figure dans M(x).

([2]) L'intégration est possible globalement si V est simplement connexe, ou encore si les éléments du groupe d'homotopie de V sont tous d'ordre fini (voir (27.32 *c*), [*6*]).

Dans le cas où le groupe Γ opère sur la variété V′ (2.4) en conservant la forme $\sigma_{V'}$, on déduit de (2.14) par image réciproque la formule

$$(2.16) \qquad \sigma_{V'}(\underset{l}{\delta x'}) = -\nabla[M(x).l]$$

autrement dit, par quadrature de la 1-forme $\sigma_{V'}(\underset{l}{\delta x'})$, on pourra calculer $M(x)$, dont les composantes seront des intégrales premières des équations du mouvement : on généralise ainsi le *théorème de Noether.*

Exemple. — Le groupe de Galilée opère infinitésimalement sur l'univers suivant les formules :

$$(2.17) \qquad \delta X = \Omega \times X + At + B, \qquad \delta t = r.$$

Si un système mécanique est invariant par ce groupe, on en déduira trois grandeurs vectorielles $\mathcal{M}$, $\mathcal{G}$, P, et un scalaire e tels que

$$(2.18) \qquad \sigma_{V'}(dx')(\delta x') = d[\langle \mathcal{M}, \Omega \rangle + \langle \mathcal{G}, A \rangle + \langle P, B \rangle - er] \qquad \forall dx'$$

En faisant le calcul sur l'exemple (2.6), on constate que $\mathcal{M}$ est le *moment cinétique* par rapport à l'origine, P l'*impulsion, e* l'*énergie* ; $\mathcal{G}$ est la position initiale du *centre de gravité* (au facteur $-m$ près) [3].

Nous pouvons prendre, en général, ces formules (2.17), (2.18) comme définition de *grandeurs cinétiques* pour tous les systèmes admettant l'invariance galiléenne. Ainsi, pour une particule polarisée, la *dynamique* (2.11) conduit à la *cinétique* suivante :

$$(2.19) \qquad e = \frac{1}{2} m \,|\, V \,|^2 \ , \ P = mV \ , \ \mathcal{G} = m[Vt - X] \ , \ \mathcal{M} = mX \times V + jS$$

On voit que la polarisation n'intervient que par l'addition au moment cinétique « orbital » $mX \times V$ d'un *moment cinétique propre* jS (que l'on interprétera comme le *spin*), parallèle à la polarisation, de longueur constante $|\, j \,|$.

La structure dynamique et la mécanique statistique.

(2.20) On peut définir un *état statistique* d'un système dynamique comme étant une *loi de probabilité* sur la variété V des mouvements. Grâce à l'existence de la densité de Liouville (1.7), on peut caractériser cette loi par un champ scalaire $[x \to \rho]$; on peut définir les *équilibres thermodynamiques*

---

[3] Cette grandeur $\mathcal{G}$ échappe au théorème de Noether classique, parce que le lagrangien d'Hamilton n'est pas invariant par le groupe de Galilée.

permis par un groupe dynamique Γ donné comme étant les états statistiques qui rendent maximum l'*entropie* $S = -\int_V \rho \log \rho$, avec la liaison $\int_V \rho\, M(x) = \text{Cte}$, $M(x)$ étant le moment suivant le groupe défini en (2.14). On trouve une loi de *Maxwell-Boltzmann* généralisée

$$\rho = Ce^{-M(x).\Theta} \tag{2.21}$$

C étant une constante de normalisation [4] et Θ un élément de l'algèbre de Lie du groupe qui généralise la *température*. Le lecteur trouvera des applications de ces notions aux gaz parfaits, en particulier aux centrifugeuses, tant en mécanique classique qu'en mécanique relativiste, dans la référence [*10*].

La structure dynamique et la mécanique quantique.

Pour réaliser les relations quantiques, on peut prendre comme point de départ la variété V sur laquelle est définie la structure dynamique d'un système. On effectue alors les opérations suivantes :

(2.22) On choisit des unités telles que la constante de Planck soit égale à 2π [5].

On *quantifie* la variété V, au sens géométrique (1.19) [6].

On construit l'espace préhilbertien E des fonctions complexes Ψ, à support compact sur l'espace fibré quantifiant $\mho$, vérifiant (voir (1.21)) :

$$\underset{1}{\delta}\Psi = i\Psi \tag{2.23}$$

muni de la norme [7]

$$|\Psi|^2 = \int_V \overline{\Psi}\Psi \tag{2.24}$$

et son complété hilbertien E'.

---

(4) La présence de cette constante fait disparaître l'ambiguïté due au terme additif dans la définition (2.14) de $M(x)$.

(5) Il revient au même de diviser la forme de Lagrange σ_V par $\hbar$.

(6) Ceci suppose que la variété V est *quantifiable* (1.9). Deux quantifications *isomorphes* (au sens (1.13)) conduiront à des constructions d'observables *unitairement équivalents*.

(7) L'intégrale est prise selon la *densité de Liouville* (1.7). Notons qu'en vertu de (2.23) la grandeur $\overline{\Psi}\Psi$ ne dépend que de la projection x sur V du point ξ de $\mho$ où est défini Ψ.

A toute variable dynamique u (i. e. champ scalaire défini sur V) on associe un *opérateur hermitien* $\overline{u}$ de E′, appelé *observable*, défini par

$$(2.25) \qquad \overline{u}(\Psi) = -i\underset{u}{\delta}\Psi$$

pour tout $\Psi \in$ E (8).

On a alors les relations de commutation quantiques

$$(2.26) \qquad \begin{cases} \overline{u}\,.\,\overline{v} - \overline{v}\,.\,\overline{u} = i\overline{[u, v]_p} \\ \overline{1} = 1_E \end{cases}$$

dont on peut également déduire les relations d'évolution.

Nous dirons qu'une variable dynamique u est *mesurable* (9) dans un état Ψ si on a la relation

$$(2.27) \qquad \overline{u}\,\Psi = u\Psi$$

qui peut encore s'écrire

$$(2.28) \qquad \underset{u}{\delta}\Psi = iu\,\Psi$$

ou encore

$$(2.29) \qquad \left[\underset{u}{\delta} - u\underset{1}{\delta}\right]\Psi = 0$$

(2.30) Si p variables dynamiques u_j ont des crochets de Poisson mutuels nuls, il est facile de vérifier que le champ d'espaces vectoriels tangents à $\mathcal{U}$ engendré par les vecteurs $\underset{u_j}{\delta}\xi - u_j\underset{1}{\delta}\xi$ donne à $\mathcal{U}$ une structure feuilletée (1.1) ; dans le cas où celle-ci est (globalement) intégrable, l'espace vectoriel des états où les u_j sont *simultanément mesurables* s'obtient immédiatement par relèvement de fonctions définies sur la variété quotient.

(2.31) En particulier, nous aurons à considérer la *condition de Planck* (10) suivant laquelle les variables conjuguées des translations spatio-temporelles seront simultanément mesurables ; nous rencontrerons ci-dessous des exemples où cette condition est intégrable.

---

(8) La dérivation $\underset{u}{\delta}$ est définie en (1.19).

(9) Voir [9], § 6.

(10) L'énergie e est, au signe près, la variable conjuguée de la translation infinitésimale dans le temps (2.18) ; la condition (2.28) correspondante s'écrit donc $\frac{i\,\partial\Psi}{\partial t} = e\Psi$; on reconnaît bien la relation de Planck (« $e = h\nu$ ») entre énergie classique et fréquence quantique.

§ III. — QUANTIFICATION D'UNE PARTICULE NON POLARISÉE

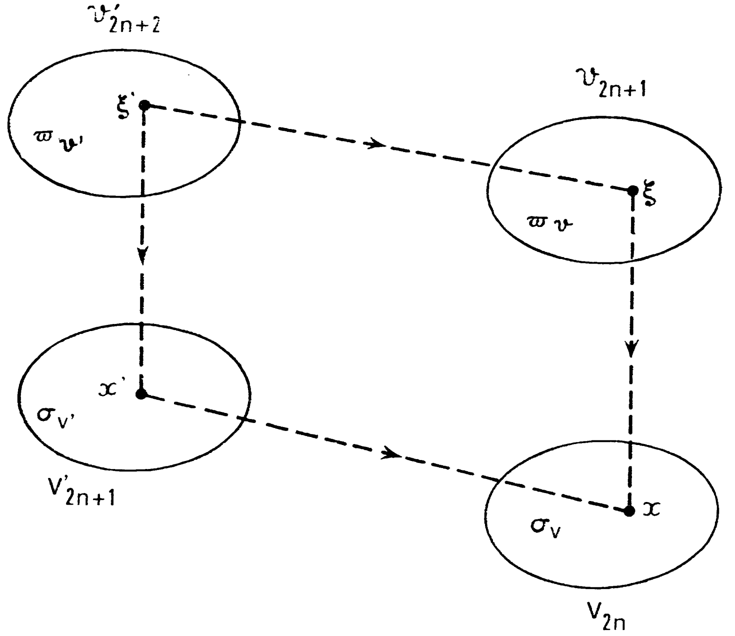

FIG. 3.

Nous emploierons, dans ce paragraphe et le suivant, la même méthode de quantification :

La structure dynamique de la particule étant définie sur la variété des mouvements V à l'aide d'une variété des conditions initiales V′ (comme en (2.4)), nous construirons d'abord une variété $\mathcal{V}'$, parcourue par une variable ξ' se projetant sur V′, et munie d'une 1-forme $\varpi_{\mathcal{V}'}$. Nous définirons un groupe G à un paramètre λ opérant sur $\mathcal{V}'$, tel que la forme $\varpi_{\mathcal{V}'}$ passe au quotient ; ce qui veut dire que, posant

(3.2) $$\xi = \text{Classe (suivant le groupe G) de } \xi'$$

les ξ décriront une variété $\mathcal{V}$ et qu'il existera une 1-forme $\varpi_{\mathcal{V}}$ de $\mathcal{V}$ définie par

(3.3) $$\varpi_{\mathcal{V}}(\delta\xi) = \varpi_{\mathcal{V}'}(\delta\xi')$$

Il restera ensuite à vérifier que $\mathcal{V}$ est un espace fibré quantifiant de base V, ce que le lecteur pourra faire dans chaque cas particulier.

L'espace des états est un espace fonctionnel sur $\mathcal{V}$ ((2.23), (2.24)) ; il pourra donc se relever par un espace fonctionnel sur $\mathcal{V}'$, que nous pourrons caractériser par des identités particulières.

Particule non relativiste.

— *Variété* V' : $x' = \begin{pmatrix} t \\ \mathrm{X} \\ \mathrm{V} \end{pmatrix}$ (t = date, X = point de l'espace, V = vitesse).

— *Forme de Lagrange* (donnée en (2.6)) :

(3.4) $\sigma_{\mathrm{V}'}(dx')(\delta x') = \langle\, m d\mathrm{V},\, \delta\mathrm{X} - \mathrm{V}\delta t \,\rangle - \langle\, m\delta\mathrm{V},\, d\mathrm{X} - \mathrm{V}dt \,\rangle.$

— *Variété* $\mathcal{V}'$: $\xi' = \begin{pmatrix} x' \\ z \end{pmatrix}$ (z = nombre complexe de module 1) :

(3.5) $$\varpi_{\mathcal{V}'}(\delta x') = \langle\, m\mathrm{V} \,,\, \delta\mathrm{X} \,\rangle - \frac{1}{2}\, m\mathrm{V}^2\delta t + \frac{\delta z}{iz}$$

— *Groupe* G :

(3.6) $$\mathrm{V} \to \mathrm{V}\,,\ t \to t + \lambda\,,\ \mathrm{X} \to \mathrm{X} + \mathrm{V}\lambda\,,\ z \to z e^{-i\lambda m \mathrm{V}^2/2}$$

— *Espace des états :*

(3.7) $$\begin{cases} \xi' \to \Psi(t, \mathrm{X}, \mathrm{V})z \\ \Psi(t + \lambda\,,\, \mathrm{X} + \mathrm{V}\lambda\,,\, \mathrm{V}) = \Psi(t, \mathrm{X}, \mathrm{V})e^{i\lambda m \mathrm{V}^2/2} \end{cases}$$

La *condition de Plank* (2.31) est intégrable ; il suffit d'ailleurs d'écrire que les trois composantes de l'impulsion sont mesurables pour constater que l'énergie l'est aussi (grâce à (3.7)) ; l'espace des états est réduit aux fonctions

(3.8) $$\xi' \to \Psi(\mathrm{V})e^{im[\langle \mathrm{V},\mathrm{X}\rangle - \mathrm{V}^2 t/2]}\, z$$

$\Psi(\mathrm{V})$ étant une fonction arbitraire de V. On peut bien entendu associer à cette fonction sa valeur moyenne sur V ([11]), soit

(3.9) $$\tilde{\Psi}(t, \mathrm{X}) = \int \Psi(\mathrm{V})e^{im[\langle \mathrm{V},\mathrm{X}\rangle - \mathrm{V}^2 t/2]} d\mathrm{V}$$

([11]) Ces états n'appartiennent pas à l'espace E', parce que leur carré n'est pas sommable sur V.

et l'on constate immédiatement sur cette formule que $\tilde{\Psi}$ est une solution de l'*équation de Schrödinger*

$$\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial t} = \frac{i}{2m} \Delta \tilde{\Psi} \tag{3.10}$$

Comme la formule (3.9) est une intégrale de Fourier, on voit que l'on pourra — avec quelques précautions — identifier l'espace fonctionnel (3.8) avec l'espace des solutions de l'équation de Schrodinger, ce qui établit le lien avec la théorie habituelle [12].

Particule relativiste.

La modification — très classique — de la structure dynamique conduit aux formules suivantes :

— *Variété* V′ :

$$x' = \begin{pmatrix} Q \\ U \end{pmatrix}$$

Q = point de l'espace-temps ; U = vecteur unitaire du genre avenir (qui est la vitesse unitaire, ainsi que le montrent les équations du mouvement).

— *Forme de Lagrange :*

$$\sigma_{V'}(dx')(\delta x') = - \langle m dU, \delta Q \rangle + \langle m \delta U, dQ \rangle \tag{3.11}$$

(les $\langle\ \rangle$ désignent ici le produit scalaire quadridimensionnel, avec la métrique $+ - - -$) ;

— *Variété* $\mathcal{V}'$:

$$\xi' = \begin{pmatrix} x' \\ z \end{pmatrix} \qquad |z| = 1$$

$$\varpi_{\mathcal{V}'}(\delta \xi') = - \langle mU , \delta Q \rangle + \frac{\delta z}{iz} \tag{3.12}$$

[12] On peut faire opérer divers observables, par la formule (2.25). On trouve notamment

$$\overline{p_{x_j}} \tilde{\Psi} = - i \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial x_j} ; \qquad H\tilde{\Psi} (= \overline{e} \tilde{\Psi}) = i \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial t} = \frac{1}{2m} [\overline{p_x}^2 + \overline{p_y}^2 + \overline{p_z}^2] \Psi$$

comme on en a l'habitude.

— *Groupe* G :

$$U \to U, \quad Q \to Q + \lambda U, \quad z \to z e^{i\lambda m} \tag{3.13}$$

— *Espace des états :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi \to \Psi(Q\,,\,U)z \\ \Psi(Q + U\lambda\,,\,U) = \Psi(R\,,\,U)e^{-im\lambda} \end{array} \right. \tag{3.14}$$

De la forme de Lagrange (3.11) résulte l'expression de l'impulsion qui vaut, bien entendu, mU ; on peut donc écrire la condition de Planck ([13]), qui réduit l'espace des états à

$$\xi \to \Psi(U)e^{-im\langle U\,,\,Q\rangle}.z \tag{3.15}$$

En prenant la moyenne (invariante de Lorentz) sur l'hyperboloïde décrit par U (qui est un quadrivecteur unitaire) on trouve une fonction d'onde

$$\tilde{\Psi}(Q) = \int \Psi(U)e^{-im\langle U\,,\,Q\rangle}dU \tag{3.16}$$

qui vérifie — quelle que soit $\Psi(U)$ — l'*équation de Klein-Gordon*

$$\square\tilde{\Psi} + m^2\tilde{\Psi} = 0 \tag{3.17}$$

Comme l'intégrale de Fourier (3.16) n'est prise que sur la nappe d'avenir de l'hyperboloïde, l'espace fonctionnel (3.15) doit être identifié à l'ensemble des solutions à *énergie positive* de l'équation de Klein-Gordon.

§ IV. — QUANTIFICATION D'UNE PARTICULE POLARISÉE DE SPIN 1/2

Cas non relativiste.

Nous partons de la structure dynamique proposée en (2.11); la variation V des mouvements est le produit symplectique direct de la variété précédente par la sphère, ce qui montre que le problème est quantifiable pour $j = 1/2$; comme V est simplement connexe, cette quantification est unique (1.28). Nous allons l'effectuer par la méthode précédente.

A cet effet, nous désignerons par Φ un élément de C^2 (« spineur de Pauli ») :

$$\Phi = \begin{bmatrix} z \\ z' \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

([13]) Dans ce cas aussi, on constate que l'énergie est mesurable si l'impulsion l'est.

vérifiant

(4.2) $$\bar{\Phi}.\Phi = |\, z\,|^2 + |\, z'\,|^2 = 1 \qquad (\bar{\Phi} = [\bar{z}\ \bar{z}']).$$

A côté de la polarisation, qui est un pseudo-vecteur unitaire S, nous introduirons le tenseur antisymétrique de rang 2 associé (voir [*6*], § 30)

(4.3) $$\Omega = {}^*(\mathrm{S}).$$

La quantification s'effectue comme suit :

Variété V' :

$$x' = \begin{pmatrix} t \\ \mathrm{X} \\ \mathrm{V} \\ \mathrm{S} \end{pmatrix}$$

(4.4) $$\sigma_{\mathrm{V}'}(dx')(\delta x') = \langle\, m d\mathrm{V} \,,\, \delta \mathrm{X} - \mathrm{V}\delta t \,\rangle - \langle\, m\delta \mathrm{V} \,,\, d\mathrm{X} - \mathrm{V} dt \,\rangle + \frac{1}{2}\,\mathrm{vol}\,(\mathrm{S})(d\mathrm{S})(\delta \mathrm{S})$$

ce dernier terme pouvant aussi s'écrire

(4.5) $$\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,(\Omega . d\Omega . \delta\Omega)$$

Variété $\mathcal{V}'$:

$$\xi' = \begin{pmatrix} t \\ \mathrm{X} \\ \mathrm{V} \\ \Phi \end{pmatrix}$$

le « spineur » Φ définissant la polarisation S par les formules (1.41), ici

(4.6) $$\mathrm{S}^j = \bar{\Phi}\sigma^j\Phi$$

les σ^j étant les trois matrices de Pauli ;

(4.7) $$\varpi_{\mathcal{V}'}(\delta\xi') = \langle\, m\mathrm{V} \,,\, \delta\mathrm{X} \,\rangle - \frac{1}{2}\, m\mathrm{V}^2\delta t + \mathcal{R}e\left(\frac{\bar{\Phi}\delta\Phi}{i}\right)$$

Groupe G :

(4.8) $$\mathrm{V} \to \mathrm{V} \,,\, t \to t + \lambda \,,\, \mathrm{X} \to \mathrm{X} + \mathrm{V}\lambda \,,\, \Phi \to \Phi e^{-i\lambda m \mathrm{V}^2/2}$$

Espaces des états :

$$(4.9)\quad \begin{cases} \xi \to \Psi(t, X, V, \Phi) \\ \Psi(t+\lambda\,, X+V\lambda\,, V\,, \Phi e^{i\mu}) = \Psi(t, X, V, \Phi)e^{i[\mu+\lambda m V^2/2]} \end{cases}$$

D'après la relation (4.2), Φ décrit la sphère S_3 plongée dans l'espace à 4 dimensions réelles C^2 ; on peut donc décomposer les états vérifiant (4.9) suivant les sous-espaces E_r ($r = 1, 2, \ldots$), mutuellement orthogonaux, dont le premier, E_1, est obtenu en prenant les fonctions *linéaires* par rapport à Φ ; soit :

$$(4.10)\quad \begin{cases} \xi \to \overline{\Psi(t, X, V)}.\Phi \\ \Psi(t+\lambda\,, X+V\lambda\,, V) = \Psi(t, X, V)e^{-i\lambda m V^2/2} \end{cases}$$

Cet espace E_1 est le *produit direct* de deux espaces des états de la particule non polarisée ; on peut lui appliquer la condition de Planck, et identifier le sous-espace correspondant à l'ensemble des couples de deux solutions de l'équation de Schrödinger.

(4.11) On peut aussi remarquer que l'*observable* $\widehat{J^3}$ associé à la troisième composante du spin $J = \frac{1}{2}S$ (voir (2.19)) admet, sur E_1, les valeurs propres $1/2$ et $-1/2$, les fonctions Ψ (4.10) correspondantes ayant respectivement la seconde et la première composante nulles.

On reconnaît la description usuelle d'un électron non relativiste ; mais on doit noter que la condition pour que la variable dynamique J^3 soit mesurable *n'est pas intégrable ;* ceci étant à rapprocher du fait que cette variable n'a pas de véritable définition physique, car elle n'admet pas d'extension *relativiste* naturelle [14].

Quant aux espaces E_r, on peut les construire au moyen des fonctions

$$(4.12)\qquad \xi' \to \Psi_{t,X,V}(\Phi)\ldots(\Phi)(\overline{\Phi})\ldots(\overline{\Phi})$$

r fois linéaires par rapport à Φ, $r-1$ fois linéaires par rapport à $\overline{\Phi}$, ayant un laplacien nul dans l'espace à 4 dimensions réelles des Φ, et vérifiant la condition (4.9) relative à λ ; on peut les obtenir par produit tensoriel à partir de l'espace E_1 ; mais l'existence de ces espaces pose évidemment un problème d'interprétation.

---

[14] Les trois composantes du spin sont les moments du groupe qui opère sur la particule en faisant tourner sa polarisation, sans changer la trajectoire ; ce groupe n'existe plus en relativité, ainsi que le montre la suite de ce §.

Cas relativiste.

La question se pose de donner un équivalent relativiste à la structure dynamique précédente.

Nous commencerons par postuler, suivant l'usage [*1*], [*2*], que la polarisation S est un *quadrivecteur*, de carré scalaire — 1, orthogonal à la quadrivitesse U ; nous poserons cette fois-ci

$$(4.13) \qquad \Omega = {}^*(\mathrm{U} \wedge \mathrm{S}) \; ;$$

ce tenseur peut s'interpréter comme la projection sur le 2-plan orthogonal à U et S, suivie d'une rotation de $\pi/2$ dans ce 2-plan.

La variété V′ définissant la structure dynamique sera celle des triplets

$$x' = \begin{pmatrix} \mathrm{Q} \\ \mathrm{U} \\ \mathrm{S} \end{pmatrix}$$

avec la forme de Lagrange

$$(4.14) \qquad \sigma_{\mathrm{V}'}(dx')(\delta x') = -\langle m d\mathrm{U}\,,\, \delta\mathrm{Q}\rangle + \langle m\delta\mathrm{U}\,,\, d\mathrm{Q}\rangle + \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,(\Omega.d\Omega.\delta\Omega)$$

(Cf. (3.11) et (4.5)) ; on peut vérifier que cette forme $\sigma_{\mathrm{V}'}$, a bien une dérivée extérieure nulle, et qu'elle donne bien (4.4) par une judicieuse limite non relativiste.

(4.15) Le principe des travaux virtuels donne les équations correspondantes du mouvement (trajectoire rectiligne avec la quadrivitesse U, polarisation S constante) ; les moments du groupe de Poincaré (2.14) sont les mêmes que dans le cas de la particule non polarisée, sauf que le moment cinétique de Lorentz orbital $m\mathrm{Q} \wedge \mathrm{U}$ est augmenté d'un moment propre (spin) $\frac{1}{2}\,\Omega = \frac{1}{2}\,{}^*(\mathrm{U} \wedge \mathrm{S})$ qui coïncide avec celui proposé par Bacry [*1*].

La variété des mouvements a la même structure topologique que précédemment, celle de $\mathrm{R}^6 \times \mathrm{S}_2$; elle est donc simplement connexe, ce qui montrera encore que la quantification éventuelle est unique ; mais ce n'est plus un produit direct pour la structure symplectique.

La quantification se fait par la méthode (3.1), en introduisant un spineur de Dirac Φ ([15]) vérifiant les conditions simultanées :

$$(4.16) \qquad \overline{\Phi}.\Phi = 1 \qquad \overline{\Phi}.\gamma^5.\Phi = 0$$

([15]) Les notations spinorielles sont celles de [*6*].

On a alors la construction suivante :

Variété $\mathcal{V}'$: parcourue par $\xi' = \begin{pmatrix} Q \\ \Phi \end{pmatrix}$, se projetant sur V′ par les relations

(4.17) $$\overline{\Phi}\gamma^\mu\Phi = U^\mu \quad ; \quad \mathcal{R}(i\overline{\Phi}\gamma^\mu\gamma^5\Phi) = S^\mu \text{ [16]}$$

(4.18) $$\varpi_{\mathcal{V}'}(\delta\xi') = -\langle mU\,,\,\delta Q\rangle - \mathcal{R}(i\overline{\Phi}\delta\Phi)$$

Groupe G :

(4.19) $$Q \to Q + U\lambda, \qquad \Phi \to \Phi e^{i\lambda m}$$

Espace des états :

(4.20) $$\begin{cases} \xi' \to \Psi(Q\,,\,\Phi) \\ \Psi(Q + U\lambda\,,\,\Phi e^{i\mu}) = \Psi(Q\,,\,\Phi)e^{i[\mu - m\lambda]} \end{cases}$$

Comme ci-dessus (4.9), l'espace des états se décompose en sous-espaces orthogonaux E_r, E_1 étant constitué par les fonctions Ψ (4.20) qui sont, *pour chaque valeur* de U, linéaires (sur le corps des complexes) en Φ ; soit

(4.21) $$\begin{cases} \xi' \to \overline{\Psi(Q\,,\,U)}.\Phi \\ \Psi(Q + U\lambda\,,\,U) = \Psi(Q\,,\,U)e^{im\lambda} \end{cases}$$

$\Psi(Q, U)$ est lui aussi un spineur de Dirac, que l'on peut décomposer sur les deux projecteurs associés à U, $\dfrac{1 + \gamma(U)}{2}$, $\dfrac{1 - \gamma(U)}{2}$. Or compte tenu des relations (4.16) et de la première relation (4.17), on peut vérifier que la seconde composante donne une contribution nulle à l'application (4.21), si bien que l'on peut se limiter à la première composante, c'est-à-dire joindre à (4.21) la relation

(4.22) $$\Psi(Q, U) = \gamma(U).\Psi(Q, U).$$

Si on utilise la condition de Planck, on est réduit au cas

(4.23) $$\Psi(Q\,,\,U) = \Psi(U)e^{-i\langle mU\,,\,Q\rangle}$$

---

[16] Les relations (4.16) et (4.17) entraînent $\langle U, U\rangle = 1$, $\langle U, S\rangle = 0$, $\langle S, S\rangle = -1$; un peu de γ-gymnastique montre d'ailleurs que l'on a

$$\Omega_{\mu\nu} - \mathcal{R}(i\overline{\Phi}\gamma_\mu\gamma_\nu\Phi)$$

et

$$\mathcal{R}(id\overline{\Phi}\delta\Phi) = \frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\,(\Omega.d\Omega.\delta\Omega)$$

ce qui permet de vérifier que la variété $\mathcal{V}$ est bien un E. F. Q. de base V.

Comme précédemment, on peut former une fonction d'onde spinorielle $\tilde{\Psi}$ en prenant la moyenne par rapport à U

$$\tilde{\Psi}(Q) = \int \Psi(U) e^{-i\langle mU\,,\,Q\rangle}\, dU$$

Compte tenu de la relation (4.22), on constate que $\tilde{\Psi}$ vérifie l'*équation de Dirac*

$$\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\tilde{\Psi} + im\tilde{\Psi} = 0 \tag{4.24}$$

et, de façon plus précise, que l'espace fonctionnel défini par (4.21, 4.22, 4.23) s'identifie à l'espace des *solutions à énergie positive* de cette équation de Dirac.

— Là aussi, on retrouve les résultats souhaités ; mais il faut noter la difficulté d'interprétation des espaces E_r.

— Comme chacun sait, le relèvement du groupe de Poincaré à l'espace fibré quantifiant n'est pas trivial dans ce cas : la méthode en donne une explication naturelle.

§ V. — PARTICULES DE SPIN QUELCONQUE

Soient n un entier, $\mathcal{U}$ un espace fibré quantifiant, et V sa base. Il est clair que les substitutions

$$\xi \rightarrow e^{\frac{2\pi k}{n}\delta}{}_{1}(\xi) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{5.1}$$

forment un groupe discret d'automorphismes de $\mathcal{U}$; soit $\mathcal{U}^*$ la variété quotient.

Si l'on pose

$$\left\{\begin{array}{l} \xi^* = \text{classe de } \xi \text{ suivant le groupe (5.1)} \\ \varpi_{\mathcal{U}^*}(\delta\xi^*) = n\varpi_{\mathcal{U}}(\delta\xi) \end{array}\right. \tag{5.2}$$

$\varpi_{\mathcal{U}^*}$ donne à $\mathcal{U}^*$ une structure d'E. F. Q., dont la base V* est encore la variété V, munie de la forme de Lagrange

$$\sigma_{V^*} = n\sigma_V \tag{5.3}$$

Ainsi :

Toute variété quantifiable reste quantifiable si l'on multiplie sa forme de Lagrange par un entier.

Cette méthode nous donne immédiatement la quantification (unique) d'une particule polarisée dont le spin j est un multiple quelconque de $\hbar/2$, aussi bien en mécanique newtonienne que relativiste (voir (2.11) et (4.14)).

On peut décrire l'E. F. Q. $\mathcal{V}^*$ correspondant en utilisant, au lieu du spineur Φ (de Pauli ou de Dirac, notations du § IV), sa puissance tensorielle $[2j]$ *ième*

$$\Phi^* = \Phi \otimes \Phi \otimes \ldots \otimes \Phi \tag{5.4}$$

caractéristique d'une classe suivant le groupe (5.1), qui opère selon

$$\Phi \to \Phi e^{\frac{2\pi k}{j}}$$

On reconnaît la procédure dite *méthode de fusion* de Louis de Broglie, après réduction au cas du « spin maximum » (voir [*11*], tome I, IV, 3, 8).

L'espace des états admet une décomposition analogue à celle du § précédent, l'espace E_1 étant constitué par les fonctions *linéaires* en Φ^*.

Dans le cas newtonien (notations (4.1)) les $2j + 1$ fonctions

$$z^{2j},\ z^{2j-1}z',\ \ldots,\ z'^{2j} \tag{5.5}$$

forment évidemment une base ; le calcul montre que ce sont les fonctions propres de l'observable $\overline{J^3}$, associées aux valeurs propres $j, j-1, \ldots -j$; on retrouve bien les caractéristiques quantiques usuelles de la particule de spin j.

Il est facile de vérifier que le groupe de Galilée (resp. de Poincaré) ne se relève trivialement que si j est entier, et de former les équations d'ondes, relativistes ou non, par la méthode du § précédent.

§ VI. — QUANTIFICATION D'UN SYSTÈME DE PARTICULES

Particules distinctes.

(6.1) Nous avons vu au § II (exemple II) qu'un système de particules ne pouvait former une structure dynamique relativiste (ou même simplement non simultanée) que si ces particules n'avaient pas d'interaction ; et que dans ce cas la variété des mouvements était le produit direct (symplectique) des variétés de chaque particule.

Ayant quantifié chaque particule (selon l'un des cas traités aux § précédents) nous pouvons donc immédiatement quantifier le système suivant la méthode du § I ; là aussi, la quantification est unique, puisqu'un produit direct de variétés simplement connexes est simplement connexe.

Traitons, pour fixer les idées, le cas des particules relativistes non polarisées ; en désignant par un indice j supérieur ce qui se rapporte à la particule n° j, on voit que l'espace des états (compte tenu du groupe (1.33)) pourra être considéré comme celui des fonctions

$$\Psi(\overset{1}{Q}, \overset{1}{U}, \ldots \overset{p}{Q}, \overset{p}{U})\overset{1}{z}\overset{2}{z} \ldots \overset{p}{z} \tag{6.2}$$

telles que dans les substitutions

$$\overset{j}{U} \to \overset{j}{U} \qquad \overset{j}{Q} \to \overset{j}{Q} + \overset{j}{U}\overset{j}{\lambda} \tag{6.3}$$

Ψ subisse la transformation

$$\Psi \to \Psi e^{-i\sum_j \overset{j}{\lambda}\overset{j}{m}} \tag{6.4}$$

On voit que l'on pourra prendre en particulier

$$\Psi = \Pi\overset{j}{\Psi}(\overset{j}{Q}, \overset{j}{U}) \tag{6.5}$$

chaque Ψ^j vérifiant la condition (3.14), ou toute combinaison linéaire de telles fonctions ; on voit comment l'espace des états du système peut être identifié avec le *produit tensoriel* des espaces d'états de chaque particule.

Particules identiques.

Le mouvement classique d'un système de particules identiques peut être considéré comme un champ dans l'espace-temps, ayant une description simplifiée par tout ou rien (en un point de l'univers, il passe ou il ne passe pas une particule).

Par conséquent ce mouvement est un *ensemble* de p mouvements d'une particule, au lieu d'être un *système* de tels mouvements. Il est défini par un ensemble de p points *distincts* pris sur la variété V des mouvements d'une particule ; en d'autres termes la variété V_S des mouvements du système est le quotient, par le groupe Γ des permutations des particules (groupe symétrique d'ordre p), de la variété V^p privée de sa *diagonale* (au sens (1.44)).

Or il se trouve que V^p, privée de sa diagonale, est une variété symplectique simplement connexe, puisque la dimension de V est au moins 6 (1.45), et que le groupe Γ est un groupe *discret* de transformations canoniques de cette variété (puisque les masses sont égales). Il en résulte que V_S possède une structure de variété symplectique, admettant V^p privé de sa diagonale comme *revêtement universel*, et par conséquent le groupe symétrique Γ comme *groupe d'homotopie*.

C'est naturellement cette structure dynamique classique que nous adopterons ; *elle est quantifiable*, parce que V^p est quantifiable, et que le groupe symétrique est *trivialement relevable* (1.27), ce qui se vérifie aisément ; elle possède *deux quantifications* non isomorphes, et deux seulement, parce que le groupe symétrique Γ ne possède que deux caractères (respectivement 1 et le caractère de parité).

Les états du système sont des fonctions définies sur la variété $\mathcal{V}$ (fig. 2) qui peuvent se relever [17] sur le revêtement $\mathcal{V}^*$, sous forme d'*états du système de particules distinctes associé ;* on constate que ces états sont alors *symétriques* (resp. *antisymétriques*) par rapport aux permutations des particules : on reconnaît donc les deux cas phénoménologiquement existants, celui des *bosons* et celui des *fermions*.

CONCLUSIONS

On voit que la formalisation géométrique proposée est apte à rendre compte de certains des aspects les plus importants de la Mécanique Quantique, notamment en fournissant par un procédé régulier les équations d'onde des particules libres ; il est clair qu'il reste beaucoup d'autres applications à étudier avant de pouvoir se prononcer sur la valeur physique de la théorie. Nous voudrions seulement conclure par quelques remarques de principe.

— Autant le *principe de correspondance* peut sembler naturel dans le sens de la « déquantification » (un système classique étant considéré comme la limite d'un système quantique lorsqu'on fait tendre $\hbar$ vers 0), autant il paraît étrange et irritant que l'on puisse remonter du système classique au système quantique par un algorithme quelconque. Il y a cependant, au cœur même de la Mécanique Quantique, un argument très fort en faveur de l'existence d'un modèle classique *sous-jacent* (et non *approché*) à tout système quantique : c'est l'interprétation probabiliste. En effet, comment formuler celle-ci de façon précise et intrinsèque en d'autres termes que ceux de la mécanique statistique classique, c'est-à-dire d'une loi de probabilité sur l'ensemble des mouvements d'un système classique bien déterminé ?

---

[17] Le relèvement dépend du caractère choisi, parce que les fibres de la projection de $\mathcal{V}^*$ sur $\mathcal{V}$ en dépendent.

La théorie que nous proposons, et qui peut se formuler de façon autonome par l'axiomatique des espaces fibrés quantifiants, donne une raison à ce fait : tout espace fibré quantifiant admet comme base une variété symplectique, qui définit une structure dynamique classique. Nous en donnons un exemple plus haut en décrivant le modèle classique sous-jacent à l'équation de Dirac.

Notons d'ailleurs que nous n'avons pas à proprement parler un algorithme de quantification, puisqu'il arrive que la quantification d'un système classique soit impossible, ou au contraire ait plusieurs solutions essentiellement distinctes (cas des bosons et des fermions) ; nous sommes seulement en mesure — en principe — de recenser les structures quantiques susceptibles de donner naissance à une structure classique donnée.

— Le grave problème posé par l'impossibilité de faire opérer le groupe de Poincaré sur les états d'une particule de spin 1/2 est résolu de façon satisfaisante : la théorie montre qu'il ne peut pas en être autrement si le moment cinétique propre vaut $\hbar/2$, bien que le modèle classique sous-jacent soit orthodoxement relativiste.

— Il est agréable aussi d'obtenir un modèle classique pour un système de particules indiscernables, et de démontrer que sa quantification ne peut conduire qu'aux états symétriques ou antisymétriques, les parastatistiques étant exclues. Il importe de noter que ce fait est dû uniquement à des propriétés *topologiques* — plus précisément *homotopiques* — de la variété des mouvements ; ce qui explique que ce résultat semble purement phénoménologique dans les formulations usuelles de la Mécanique Quantique, qui utilisent un langage exclusivement local (emploi de coordonnées par exemple).

Le lecteur ne sera d'ailleurs pas surpris qu'il existe des liens entre la Mécanique Quantique et la théorie de l'homotopie : on sait par exemple que l'on peut établir un courant permanent dans un conducteur métallique en le rendant superconducteur dans un champ magnétique, à la condition qu'il soit percé d'un trou, c'est-à-dire que son groupe d'homotopie ne soit pas nul.

RÉFÉRENCES

[1] H. BACRY, Thèse, *Annal Phys.*, 8, 197, 1963.
[2] BARGMANN, MICHEL and TELEGDI, *Phys. Rev. Lett.*, 2, 435, 1959.
[3] J. L. LAGRANGE, Mécanique Analytique, 1811.
[4] POISSON, *J. de l'École Polyt.*, XV, 266, 1809.
[5] J. M. SOURIAU, Quantification canonique. Tirage ronéotypé, Marseille, 1962.

[*6*] J. M. Souriau, Géométrie et relativité, Paris, Hermann, 1964.
[*7*] J. M. Souriau, Géométrie de l'espace de phases, calcul des variations et mécanique quantique. Tirage ronéotypé, Marseille, 1965.
[*8*] J. M. Souriau, Séminaire de Mécanique analytique et céleste. Tirage ronéotypé, Paris, 1965.
[*9*] J. M. Souriau, Quantification géométrique, *Commun. Math. Phys*, 1, 374, 1966.
[*10*] J. M. Souriau, Définition covariante des équilibres thermodynamiques. A paraître au Suppl. *Nuovo Cimento*.
[*11*] A. Visconti, Théorie Quantique des Champs, Paris, Gauthier-Villars, 1961.

(Reçu le 30 juin 1966).