C. R. Acad. Sc. Paris, t. 265, p. 165-167 (17 juillet 1967). Série B

PHYSIQUE THÉORIQUE. — *Modèles classiques quantifiables pour les particules élémentaires.* Note (*) de M. **Jean-Marie Souriau**, présentée par M. Louis de Broglie.

1. Cohomologie symplectique d'un groupe de Lie. — Soit G un groupe de Lie, $\mathcal{G}$ son algèbre de Lie, $\mathcal{G}^\star$ le dual vectoriel de $\mathcal{G}$. Soit $a \to \mathfrak{a}_{\mathcal{G}^\star}$ la représentation duale de la représentation adjointe de G.

On appelle $\mathcal{G}^\star$-cocycle (de degré 1) toute application différentiable θ de G dans $\mathcal{G}^\star$ vérifiant

$$\theta(ab) \equiv \theta(a) + \mathfrak{a}_{\mathcal{G}^\star}(\theta(b)).$$

Soit f l'application linéaire tangente à θ en l'élément neutre de G; f est une application linéaire de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}^\star$, donc une forme bilinéaire sur $\mathcal{G}$; nous dirons que le cocycle θ est *symplectique* si f est antisymétrique.

On appelle cobord d'un élément μ de $\mathcal{G}^\star$ l'application θ

$$\theta(a) \equiv \mathfrak{a}_{\mathcal{G}^\star}(\mu) - \mu;$$

tout cobord est un cocycle symplectique; deux cocycles symplectiques sont dits *cohomologues* si leur différence est un cobord; les classes de cohomologie correspondantes forment un espace vectoriel (*espace de cohomologie symplectique*).

2. Variétés symplectiques associées aux groupes de Lie. — Soit θ un cocycle symplectique. G opère *aussi* sur $\mathcal{G}^\star$ selon

$$\mathfrak{a}_{\mathcal{G}^\star,\theta}(\mu) \equiv \mathfrak{a}_{\mathcal{G}^\star}(\mu) + \theta(a).$$

Soit U une orbite correspondante, μ un point de U.

$d\mu$ est tangent à U en μ s'il existe un $Z \in \mathcal{G}$ tel que

$$d\mu = \mu\,\mathrm{ad}(Z) + f(Z);$$

on définit une 2-forme σ sur U en posant

$$\sigma(d\mu)(\delta\mu) = d\mu.Z' \qquad \text{si} \quad \delta\mu = \mu.\,\mathrm{ad}(Z') + f(Z'),$$

σ donne à U une structure de *variété symplectique*, sur laquelle G opère en laissant σ invariante.

Réciproquement, si V est une variété symplectique simplement connexe sur laquelle G opère transitivement en préservant la forme symplectique, il lui est associé un cocycle symplectique θ, et une application ψ de V sur une orbite U associée à θ par l'algorithme ci-dessus; V et U ont même

dimension; ψ est, au moins localement, une transformation canonique et commute avec les opérations du groupe.

La structure des orbites ne dépend que de la classe de cohomologie de θ; on est donc ramené au seul cas $\theta = 0$ si la cohomologie symplectique de G est nulle; on sait que c'est le cas si G est connexe et semi-simple (théorème de Whitehead); une vérification directe montre que c'est aussi le cas pour les *groupes orthogonaux* non homogènes, en particulier pour le groupe de Lorentz-Poincaré.

3. Représentations unitaires associées. — Si l'on peut construire un *espace fibré quantifiant* W ayant pour base une des orbites ainsi construites [*voir* (1)], il existe un espace hilbertien de fonctions définies sur W qui est *espace de représentations unitaires projectives* pour le groupe G. On dispose ainsi d'un algorithme très général pour construire des représentations unitaires des groupes de Lie.

4. Application aux particules élémentaires non relativistes. — Dans une Note antérieure (2), nous avons proposé comme modèles des particules élémentaires les variétés symplectiques associées au groupe de Lorentz-Poincaré par l'algorithme précédent et leurs espaces fibrés quantifiants; nous n'avions en fait considéré que le cas $\theta = 0$, mais nous venons de constater que c'est le seul possible.

La situation est différente si l'on cherche des modèles *non relativistes*; en effet, l'ensemble des mouvements libres d'un point matériel newtonien de masse m est une variété de dimension 6, munie d'une structure symplectique invariante par le groupe de Galilée définie à l'aide de la 2-forme

$$\langle m\, d\mathrm{V},\ \delta\mathrm{X} - \mathrm{V}\,\delta t\rangle - \langle m\,\delta\mathrm{V},\ d\mathrm{X} - \mathrm{V}\,dt\rangle$$

(V, vitesse; X, position; t, temps) et dont la *classe de cohomologie symplectique n'est pas nulle;* à cette classe sont associées d'autres orbites symplectiques par l'algorithme ci-dessus; on constate qu'elles coïncident avec le modèle que nous avons proposé pour les *particules polarisées de masse m;* elles sont indexées par un nombre j qui s'interprète comme un moment cinétique propre, et sont quantifiables lorsque $2j/\hbar$ est entier; pour $j = \hbar/2$, rappelons que la quantification conduit à un spineur de Pauli dont les deux composantes vérifient l'équation de Schrödinger.

La *masse* s'interprète donc comme une classe de cohomologie symplectique du groupe de Galilée; par conséquent, les particules de masse nulle doivent être décrites par une orbite à cohomologie nulle.

L'une d'elles, de dimension 6, peut se repérer par un pseudo-vecteur unitaire S, un instant t, une droite D parallèle à S et un nombre e, avec la forme symplectique suivante :

$$\diamond \qquad k\{\langle d\mathrm{S},\ \delta\mathrm{X}\rangle - \langle \delta\mathrm{S},\ d\mathrm{X}\rangle\} + j\langle \mathrm{S},\ d\mathrm{S}\times\delta\mathrm{S}\rangle + de\,\delta t - \delta e\,dt.$$

On peut l'interpréter comme une particule d'énergie e, de moment cinétique propre j, qui parcourt la droite D avec une vitesse infinie, à l'instant t.

Si $j = \hbar$, cette orbite est quantifiable, et la quantification montre que la particule est *polarisée circulairement* (à droite ou à gauche suivant le signe du pseudo-scalaire k), et que sa *longueur d'onde* est $2\pi\hbar/|k|$. Nous avons donc un *modèle non relativiste de photon;* notons que deux photons de couleurs différentes apparaissent comme des particules distinctes — ce qui est possible grâce à l'absence d'effet Doppler pour une particule de vitesse infinie.

Le modèle proposé *ne coïncide pas* avec l'approximation de l'optique géométrique; en effet, le deuxième terme de $\diamond$ s'oppose à des circonstances familières telles que la focalisation d'un faisceau parallèle par une lentille, l'existence d'un principe variationnel à la Fermat, etc. Ce n'est qu'en négligeant j qu'on arrive aux conceptions classiques; notamment à la description d'un *état photométrique* — qui est simplement une loi de probabilité définie sur l'orbite.

On obtient aussi un modèle quantifiable en faisant $j = \hbar/2$; il donne une description non relativiste du *neutrino*.

(*) Séance du 3 juillet 1967.

(1) J. M. Souriau, *Comm. Math. Phys.*, 1, 1966, p. 374; *Ann. Inst. Henri Poincaré*, VI, 4, 1967, p. 311.

(2) J. M. Souriau, *Comptes rendus*, 263, série B, 1966, p. 1191.

(*Département de Physique mathématique, Faculté des Sciences, place Victor-Hugo, Marseille*, 3e, *Bouches-du-Rhône.*)