IL NUOVO CIMENTO VOL. IL A, N. 1 1° Maggio 1967

Realisations d'algèbres de Lie au moyen de variables dynamiques.

J.-M. SOURIAU
Laboratoire de Relativité, Faculté des Sciences - Marseille

(ricevuto il 4 Marzo 1967)

Divers chercheurs (1-5) se sont préoccupés récemment de trouver, pour un système dynamique classique à n degrés de liberté, un système de variables dynamiques formant, pour le crochet de Poisson, une algèbre de Lie de structure donnée.

On peut espérer a priori que ces variables seront les générateurs infinitésimaux d'un *groupe dynamique* ayant une interprétation physique importante. C'est bien le cas, par exemple, pour le problème de Képler et le groupe $SO_4 \times R$ (2).

Mais, ainsi que nous l'avons rappelé dans (2), de strictes conditions *globales* sont nécessaires; on peut montrer en effet (6) que, *localement*, les variétés symplectiques de dimension donnée $2n$ sont toutes isomorphes; la possibilité de réaliser une algèbre de Lie donnée sur un système dynamique à n degrés de liberté ne dépend donc que de l'entier n; cette remarque semble diminuer l'intérêt physique de ce problème, mais n'empêche pas de l'étudier.

Soit G un groupe de Lie, A son algèbre de Lie, A^* l'espace vectoriel dual de A. On sait que G opère linéairement sur A (représentation adjointe); il existe donc une représentation *coadjointe* de G sur A^*; soit V une orbite de G dans cette représentation. On voit facilement que V est une variété différentiable plongée dans A^*; que pour $\theta \in V$, l'espace vectoriel tangent à V en θ est constitué par les $\theta \cdot ad(a)$ $[a \in A]$, et qu'il existe une 2-forme σ, définie sur V par

$$\sigma\big(\theta \cdot ad(a)\big)\big(\theta \cdot ad(a')\big) = \theta \cdot [a, a'] \,,$$

qui donne à V une *structure symplec-*

(1) H. BACRY: *Nuovo Cimento*, **41**, 222 (1966).

(2) H. BACRY, H. RUEGG et J.-M. SOURIAU: *Dynamical groups and spherical potentials in classical mechanics*, a paraître dans *Comm. Math. Phys.* (1966).

(3) D. M. FRADKIN: *Existence of the dynamic symmetries O_4 and SU_3 for all classical central potentials problems*, preprint, Wayne State Univ., Detroit (1966).

(4) N. MUKUNDA: *Dynamical symmetries and classical mechanics*: *Realizations of Lie algebras in classical mechanics*; preprints, Syracuse Univ. (1966).

(5) J. ROSEN: *On realizations of Lie algebras and symmetries in classical and quantum mechanics*, preprints I et II, Brown Univ. (1966).

(6) J. M. SOURIAU: *Géométrie de l'espace des phases, calcul des variations et mécanique quantique*, tirage ronéotypé, Faculté des Sciences, Marseille (1965).

tique (*); la dimension de V est donc *paire*; de plus, si l'on pose pour $a \in A$

$$u_a = \theta \cdot a ,$$

l'application $\theta \to u_a$ définit sur V, pour chaque a, une *variable dynamique* u_a telle que

$$[u_a, u_{a'}]_{\text{Poisson}} = u_{[a,a']_{\text{Lie}}}$$

si bien que les u_a forment une représentation, du type cherché, de l'algèbre de Lie A; cette représentation sera fidèle, à moins que V soit contenue dans un sous-espace strict de A^*.

Il suffira donc qu'il existe une telle orbite V, de dimension $2n$, pour que l'algèbre de Lie A soit réalisable sur tous les systèmes dynamiques à n degrés de liberté; ce sera le cas pour les exemples suivants, où l'on construit aisément une orbite convenable:

$G = O_{p,q}$, $\quad p + q = n + 2$;

$G = SU_{p,q}$, $\quad p + q = n + 1$ (*) ;

$G = O_{p,q}$ non homogène, $p + q = n + 1$;

en particulier

$G =$ groupe de Poincaré, $n = 3$;

$G = SL_{n+1}$; etc.

(*) Nous avons utilisé cette remarque, suggérée par un article de BACRY (7), pour construire des modèles classiques de particules élémentaires (8).

(7) H. BACRY: *Classical Hamiltonian formalism for spin*, preprint, Argonne Nat. Lab. (1966).

(8) J. M. SOURIAU: *Comm. Math. Phys.*, 1, 374 (1966); *Quantification géométrique*. - II: *Modèles classiques quantifiables pour les particules élémentaires*; preprints, Faculté des Sciences, Marseille (1966).

(*) On retrouve donc deux résultats récents de ROSEN (5).