PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Mécanique relativiste des fils.*
Note (*) de M. **Jean-Marie Souriau**, présentée par M. André Lichnerowicz.

Soit X un point générique de l'univers de la relativité générale, T l'opérateur impulsion-énergie en ce point. On sait que le champ $X \mapsto T$ vérifie les équations [1]

$$\overline{T} = T; \qquad \operatorname{div} T = 0. \tag{1}$$

Si l'on introduit la mesure tensorielle μ définie, à l'aide d'un champ d'essai $X \mapsto A$ ($A =$ opérateur) par [2]

$$\mu(X \mapsto A) = \int \operatorname{Tr}(A.T)\,\operatorname{vol}(dX), \tag{2}$$

le système (1) devient [3]

$$\mu(X \mapsto A) = \mu(X \mapsto \overline{A}); \qquad \mu\left(X \mapsto \frac{\partial V}{\partial X}\right) = 0 \tag{3}$$

($X \mapsto V$ étant un champ arbitraire de vecteurs, à support compact).

On généralise la mécanique relativiste en introduisant des mesures μ qui ne sont pas complètement continues, et qui vérifient (3).

Ainsi, si $\mathcal{V}$ est une sous-variété non singulière de l'univers, et $X \mapsto \Theta$ un champ d'opérateurs défini sur $\mathcal{V}$, on peut poser [4]

$$\mu(X \mapsto A) = \int \operatorname{Tr}(\Theta.A)\,\operatorname{vol}_{\mathcal{V}}(dX); \tag{4}$$

en introduisant le projecteur orthogonal P sur l'espace vectoriel tangent à $\mathcal{V}$ en X, le système (3) peut s'écrire [5] :

$$\left\{\begin{array}{ll} (a) & \text{Il existe un opérateur } \Theta_{\mathcal{V}} \text{ de l'espace vectoriel tangent à } \mathcal{V} \text{ tel que} \\ & \qquad \Theta = P.\Theta_{\mathcal{V}}.P; \\ (b) & \qquad \overline{\Theta}_{\mathcal{V}} = \Theta_{\mathcal{V}}; \qquad \operatorname{div}_{\mathcal{V}} \Theta_{\mathcal{V}} = 0; \\ (c) & \operatorname{Tr}(\delta X \mapsto \Theta.\hat{\delta}P.N) = 0, \quad \forall\, N \text{ normal à } \mathcal{V}. \end{array}\right. \tag{5}$$

Par exemple, dans le cas où $\mathcal{V}$ est une courbe du genre temps, ces équations montrent que $\mathcal{V}$ est une géodésique, et que $\Theta = m\,I.\overline{I}$, I étant le vecteur tangent unitaire à $\mathcal{V}$, m une constante : le principe des géodésiques se trouve justifié sans recourir aux équations d'Einstein.

Traitons le cas où la dimension de $\mathcal{V}$ est 2; on supposera $\mathcal{V}$ hyperbolique et on supposera distinctes les deux valeurs propres, ρ et θ de $\Theta_{\mathcal{V}}$.

En introduisant les vecteurs propres normés correspondants, I et J, on écrit le système (5) sous la forme

$$
(6)\quad \begin{cases} \bar{\mathrm{I}}.\mathrm{I} = 1 ; \quad \bar{\mathrm{J}}.\mathrm{J} = -1 ; \quad \bar{\mathrm{I}}.\mathrm{J} = 0, \\ \Theta = \rho \mathrm{I}.\bar{\mathrm{I}} - \theta\, \mathrm{J}.\bar{\mathrm{J}}, \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial \mathrm{X}} \mathrm{I} + [\rho - \theta]\, \bar{\mathrm{I}}.\mathrm{C} = 0, \qquad \dfrac{\partial \theta}{\partial \mathrm{X}} \mathrm{J} + [\rho - \theta]\, \bar{\mathrm{J}}.\Gamma = 0, \\ \rho\Gamma - \theta \mathrm{C} \quad \text{tangent à } \mathcal{V} ; \\ \text{avec} \qquad \mathrm{C} = \dfrac{\hat{\partial} \mathrm{J}}{\partial \mathrm{X}} \mathrm{J}, \qquad \Gamma = \dfrac{\hat{\partial} \mathrm{I}}{\partial \mathrm{X}} \mathrm{I}. \end{cases}
$$

Il se trouve que ce système (6) peut s'interpréter comme la description d'un fil élastique, de densité linéaire ρ, de tension θ, dont les molécules ont la vitesse unitaire I; on retrouve, en effet, les équations classiques des fils (à l'exception de l'équation d'état) en supposant petites devant c la vitesse des molécules et la vitesse de propagation des ondes transversales.

Dans le cas particulier d'un fil *homogène inextensible*, défini par l'équation d'état $\rho = \text{Cte}$, ces équations prennent la forme suivantes :

$$
(7)\quad \begin{cases} \text{Il existe une carte } (\sigma, \tau) \mapsto \mathrm{X} \text{ de } \mathcal{V} \text{ telle que} \\ \dfrac{\partial \mathrm{X}}{\partial \sigma} = \mathrm{J} ; \qquad \dfrac{\hat{\partial} \mathrm{X}}{\partial \tau} = \mathrm{I} \dfrac{\rho}{\rho - \theta} ; \qquad \dfrac{\hat{\partial} \mathrm{I}}{\partial \tau} = \dfrac{\hat{\partial}}{\partial \sigma} \left[\mathrm{J} \dfrac{\theta}{\rho - \theta} \right], \end{cases}
$$

le paramètre σ, qui repère les molécules, peut s'interpréter comme une abscisse curviligne propre.

(*) Séance du 23 février 1970.

(1) La barre désigne la transposition riemannienne; div la divergence riemannienne.

(2) vol est l'élément de volume riemannien.

(3) $\hat{\partial}\mathrm{V}/\partial\mathrm{X}$ est la dérivée covariante de V.

(4) vol est l'élément de volume de $\mathcal{V}$ pour sa structure riemannienne induite.

(5) Les opérations sur $\Theta_{\mathcal{V}}$ mettent en jeu la structure riemannienne de $\mathcal{V}$.

(*Laboratoire de Physique mathématique,*
Faculté des Sciences,
place Victor-Hugo,
13-*Marseille*, 3e, *Bouches-du-Rhône*.)