

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Sur le mouvement des particules dans le champ électromagnétique.* Note (*) de M. JEAN-MARIE SOURIAU présentée par M. André Lichnerowicz.

Appelons *matière passive* une matière qui *subit* les actions du champ de gravitation et du champ électromagnétique, mais qui peut être négligée en tant que *source* de ces deux champs.

On peut associer à la matière deux champs d'univers, $X \mapsto T$ (T , tenseur symétrique d'impulsion-énergie) et $X \mapsto J$ (J , vecteur densité de courant-charge); ils vérifient les équations

$$(1) \quad \partial_\mu J^\mu = 0; \quad \partial_\mu T^\mu_\nu + F_{\mu\nu} J^\mu = 0$$

qui expriment respectivement la conservation de l'électricité et l'action des forces électromagnétiques (F , champ électromagnétique) et gravitationnelles (grâce aux dérivations covariantes notées $\hat{\partial}$).

Il existe quelques bonnes raisons de penser que ce schéma est universel, c'est-à-dire qu'il est valable pour toute espèce de matière passive (quelle que soit sa structure intime, qui peut se manifester par des variables et des équations supplémentaires); en particulier, on peut les déduire de la théorie unitaire pentadimensionnelle, par le processus même d'approximation qui conduit à la « théorie provisoire » de l'électromagnétisme et de la gravitation [voir (1)]; les 5 équations (1) ci-dessus expriment la nullité de la divergence d'un tenseur symétrique à 5 dimensions]. Nous allons voir qu'il permet de rendre compte directement du comportement dynamique et électromagnétiques des particules à spin.

Introduisons les deux fonctionnelles linéaires $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ définies par

$$(2) \quad \mathcal{E}(X \mapsto \beta) = \int J^\mu \beta_\mu \text{ vol}; \quad \mathcal{F}(X \mapsto \gamma) = \int T^{\mu\nu} \gamma_{\mu\nu} \text{ vol},$$

les intégrales étant prises sur l'univers, le vecteur β et le tenseur symétrique γ étant des variables d'essai à support compact; vol désigne l'élément de volume riemannien.

On montre alors que $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ caractérisent les répartitions de courant-charge et d'impulsion-énergie, et que les principes (1) se traduisent par les équations

$$(3) \quad \mathcal{E}(X \mapsto \beta) = 0 \quad \text{si} \quad \beta_\mu = \partial_\mu u,$$

$$(4) \quad \mathcal{E}(X \mapsto \beta) + \mathcal{F}(X \mapsto \gamma) = 0 \quad \text{si} \quad \beta_\mu = F_{\mu\nu} V^\nu, \quad \gamma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} [\partial_\mu V_\nu + \partial_\nu V_\mu],$$

u et V étant des variables d'essai à support compact (scalaire et vectorielle respectivement).

Expérimentalement, une particule est une répartition de matière négligeable dès que l'on s'éloigne d'une ligne d'univers Γ ; on doit donc obtenir une description au moins approximative de toute particule passive en remplaçant $\mathcal{E}$ et $\mathcal{T}$ par des tenseurs-distributions admettant Γ comme support, et vérifiant les équations (3) et (4).

Traisons le cas de distributions d'ordre 1; le calcul montre alors qu'il existe un nombre q et, en tout point X de Γ , un vecteur P et deux tenseurs antisymétriques S et M , tels que

$$(5) \quad \mathcal{E}(X \mapsto \beta) = q \int \beta_\mu dX^\mu + \int \partial_\mu \beta_\nu M^{\mu\nu} d\tau,$$

$$(6) \quad \mathcal{T}(X \mapsto \gamma) = \int [P^\nu \gamma_{\nu\rho} + S^{\mu\nu} \partial_\mu \gamma_\nu] dX^\rho - \int F_{\nu\mu} \gamma_{\mu\rho} M^{\rho\nu} d\tau,$$

$$(7) \quad dP_\rho = q F_{\nu\rho} dX^\nu + \frac{1}{2} d\tau M^{\mu\nu} \partial_\rho F_{\nu\mu},$$

$$(8) \quad dS^{\mu\rho} = P^\mu dX^\rho - P^\rho dX^\mu + d\tau [M^{\mu\nu} F_{\nu\rho} - M^{\rho\nu} F_{\nu\mu}]$$

(nous nous sommes placé, pour simplifier, en relativité restreinte).

Des méthodes que nous avons exposées dans une Note antérieure⁽²⁾ permettent de déduire de (5) et (6) les interprétations suivantes : q , charge électrique; P , impulsion-énergie; S , tenseur de spin; M , tenseur moment électromagnétique (dans le cas où le paramètre τ est le temps propre).

Les équations (7) et (8) doivent être universelles; ainsi, dans le cas où $\mathcal{E}$ et $\mathcal{T}$ sont des mesures, S et M sont nuls, on retrouve les équations du mouvement d'une particule chargée sans spin (dont la masse m est définie par l'intégrale première $P_\mu P^\mu = m^2$).

Dans le cas général, le système (7) et (8) ne fournit pas d'équation du mouvement; ce qui est naturel puisque le choix de la courbe Γ contient une part d'arbitraire liée à la nature même du processus d'approximation. En supposant positive la répartition d'énergie, il est naturel de choisir pour Γ la courbe décrite par le centre de masse; ce qui fournit l'équation supplémentaire

$$(9) \quad S^{\mu\nu} P_\nu = 0.$$

Cependant, on n'obtient pas encore de système déterministe; il reste à écrire des conditions décrivant de la structure intime de la particule considérée, et qui n'ont aucune raison d'être universelles.

On peut les chercher en postulant, non pas un formalisme lagrangien (il n'en existe pas pour les particules à spin), mais, plus simplement, un formalisme symplectique.

Dans le cas des particules « élémentaires » considérons la 2-forme σ :

$$(10) \quad d\lambda^\mu \delta P_\mu - \delta X^\mu dP_\mu + \frac{1}{s^2} S^{\mu\nu} g^{\lambda\rho} dS_{\mu\lambda} \delta S_{\nu\rho} + q F_{\mu\nu} dX^\mu \delta X^\nu$$

dont la dérivée extérieure est nulle, avec les liaisons (9), (11), (12) :

$$(11) \quad S_{\mu\nu} S^{\mu\nu} = 2s^2,$$

$$(12) \quad P_\mu P^\mu = m^2 + \frac{m\mu}{s} S_{\mu\nu} F^{\mu\nu},$$

s, m, μ étant des constantes. Les équations du mouvement qui dérivent de σ [voir ⁽³⁾] contiennent *exactement* les équations universelles ci-dessus, le moment électromagnétique M étant proportionnel à S (ce qui exprime la nullité du moment électrique); μ, s, m s'interprètent comme *moment magnétique, spin* et *masse* (en l'absence de champ) de la particule. La forme (10) ci-dessus ne diffère que par des termes du second ordre en F de celle que nous avons proposée antérieurement ⁽³⁾; elle conduit donc dans les cas expérimentaux aux mêmes équations du mouvement, et en particulier à l'équation phénoménologique de Thomas ⁽⁴⁾, et Bargman, Michel, Telegdi ⁽⁵⁾, vérifiée expérimentalement avec une très grande précision lors de la mesure du moment magnétique anormal de l'électron et du muon.

(*) Séance du 16 novembre 1970.

⁽¹⁾ *Géométrie et Relativité*, Hermann, Paris, 1964.

⁽²⁾ *Comptes rendus*, 271, série A, 1970, p. 751.

⁽³⁾ *Structure des systèmes dynamiques*, Dunod, Paris, 1970.

⁽⁴⁾ *Phil. Mag.*, 3, 1927, p. 1.

⁽⁵⁾ *Phys. Rev. Lett.*, 2, 1959, p. 435.

(Centre de Physique théorique,
C. N. R. S.,
31, chemin Joseph-Aiguier,
13-Marseille, 9^e,
Bouches-du-Rhône.)