PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Sur le mouvement des particules à spin en relativité générale.* Note (*) de M. **Jean-Marie Souriau**, présentée par M. André Lichnerowicz.

La répartition d'énergie, d'impulsion et de tensions d'un milieu continu peut se caractériser par une fonctionnelle $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F}(X \mapsto \gamma) = \int T^{jk} \gamma_{jk} \,\mathrm{vol}; \tag{1}$$

T désigne le tenseur impulsion-énergie du milieu au point X, γ une variable d'essai, tenseur symétrique à support compact, et vol l'élément de volume riemannien.

Les principes de la dynamique condensés dans l'écriture

$$\hat{\partial}_j T^{jk} = 0 \tag{2}$$

($\hat{}$ désigne la dérivation covariante) se transcrivent alors en

$$\mathcal{F}(X \mapsto \gamma) = 0 \quad \text{si} \quad \gamma_{jk} = \hat{\partial}_j V_k + \hat{\partial}_k V_j, \tag{3}$$

V étant un vecteur à support compact.

On peut se proposer de décrire une particule en supposant que $\mathcal{F}$ est un tenseur-distribution ayant pour support une courbe Γ (la ligne d'univers de la particule); en supposant que $\mathcal{F}$ est une distribution du premier ordre :

$$\mathcal{F}(X \mapsto \gamma) = \int_\Gamma [\Theta^{jk} \gamma_{jk} + \Psi^{jkl} \partial_j \gamma_{kl}] \, d\tau$$

et en appliquant le principe (3), on établit le résultat suivant :

En chaque point X *de* Γ *sont définis un vecteur* P *et un tenseur antisymétrique* S *tels que*

$$\mathcal{F}(X \mapsto \gamma) = \int_\Gamma [P^k \gamma_{kl} + S^{jk} \hat{\partial}_j \gamma_{kl}] \, dX^l; \tag{4}$$

ils vérifient les équations différentielles :

$$\hat{d} S^{jk} = P^j \, dX^k - P^k \, dX^j; \tag{5}$$

$$\hat{d} P^r = -\frac{1}{2} R^r_{jk,l} S^{jk} \, dX^l. \tag{6}$$

Si V est un vecteur de Killing $(\hat{\partial}_j V_k + \hat{\partial}_k V_j = 0)$, il associe à toute répartition d'impulsion-énergie une grandeur conservative μ (le flux du vecteur $T^{jk} V_k$ à travers une hypersurface); cette grandeur peut se calculer à partir de la fonctionnelle $\mathscr{F}$, par la formule

$$(7) \qquad \mu = \mathscr{F}(X \mapsto \gamma) \quad \text{si} \quad \gamma_{jk} = \frac{1}{2}[V_j \partial_k u + V_k \partial_j u],$$

u étant une fonction arbitraire, égale à 0 dans le passé, à 1 dans le futur.

Appliquée à la particule, cette procédure donne [grâce à (4)]

$$(8) \qquad \mu = P^k V_k + \frac{1}{2} S^{jk} \hat{\partial}_j V_k;$$

un calcul direct permet d'ailleurs de vérifier que (8) est une intégrale première du système différentiel (5), (6).

Dans le cas de la relativité restreinte ce calcul, appliqué aux générateurs du groupe de Poincaré, donne l'interprétation de P et S : P est l'*impulsion* de la particule, S son *tenseur de spin* (c'est-à-dire son moment de Lorentz par rapport à X).

Les équations (5), (6) ne déterminent pas le mouvement (dX reste arbitraire); il est naturel de leur joindre la condition

$$(9) \qquad S^{jk} P_k = 0$$

qui exprime qu'on choisit à chaque instant, comme position de la particule, celle de son centre de masse.

Alors on obtient un système déterministe, moyennant la condition (physiquement évidente)

$$(10) \qquad P_k \, dX^k \neq 0;$$

la masse $m(P_k P^k = m^2)$ et le spin $s(S^{jk} S_{jk} = 2s^2)$ sont des constantes du mouvement; en négligeant les termes du second ordre en s/m, la vitesse est co-linéaire à l'impulsion : on voit donc que les particules à spin ne décrivent pas des géodésiques; mais l'accélération gravitationnelle reste très faible (de l'ordre de 10^{-19} fois celle de la pesanteur pour un électron à la surface de la Terre), et ne pourrait être sensible que dans le cas d'ondes gravitationnelles très intenses.

L'approximation ci-dessus revient essentiellement à négliger la grandeur sans dimensions

$$(11) \qquad \frac{1}{4m^2} R_{jk,pq} S^{jk} S^{pq}$$

(elle est de l'ordre de 10^{-49} dans les conditions ci-dessus); si cette grandeur approchait de -1, la vitesse de la particule dépasserait celle de la lumière, son impulsion restant cependant du genre temps.

Les particules *élémentaires* ont une masse et un spin indépendants du mouvement; dans ce cas, le mouvement dérive d'un principe symplectique;

en effet, sur l'espace fibré de dimension 9 décrit par le triplet $y = (\mathrm{X}, \mathrm{P}, \mathrm{S})$' les équations du mouvement ci-dessus peuvent s'écrire

$$dy \in \ker(\sigma) \tag{12}$$

σ étant la 2-forme définie par

$$\sigma(dy)(\delta y) = d\mathrm{X}^j\, \hat{\delta}\mathrm{P}_j - \delta\mathrm{X}^j\, \hat{d}\mathrm{P}_j + \frac{1}{s^2}\, \mathrm{S}^{jk} g^{lm}\, \hat{d}\mathrm{S}_{jl}\, \hat{\delta}\mathrm{S}_{km} - \frac{1}{2}\, \mathrm{R}_{jk,\, lm}\mathrm{S}^{jk}\, d\mathrm{X}^l\, \delta\mathrm{X}^m. \tag{13}$$

Un calcul direct, mettant notamment en jeu les identités de Bianchi, montre que la dérivée extérieure de σ est nulle; σ est donc un invariant intégral des équations du mouvement, et donne une structure symplectique à la variété des mouvements (de dimension 8).

En généralisant des résultats établis antérieurement dans le cas de la relativité restreinte ([1]), on établit que σ ne dérive pas d'un potentiel, donc *a fortiori* d'un lagrangien, et que le système n'est *quantifiable* que si le spin est un multiple entier de $\hbar/2$.

(*) Séance du 28 septembre 1970.

([1]) *Structure des systèmes dynamiques*, Dunod, Paris, 1970.

(*Centre de Physique théorique*
du C. N. R. S.,
31, *chemin Joseph-Aiguier*,
13-*Marseille*, 9e, *Bouches-du-Rhône*.)