RENCONTRES ENTRE MATHEMATICIENS ET PHYSICIENS

A LA FACULTE DES SCIENCES DE LYON-VILLEURBANNE

-:-

Exposés de J.M. SOURIAU *

9 Mars 1971

Octobre 1971

71/P.406

* Professeur à l'Université de Provence -

Adresse Postale : Centre de Physique Théorique - C.N.R.S.
31, chemin J. Aiguier 13 - MARSEILLE 9° (France)

I - VARIETES SYMPLECTIQUES ET COHOMOLOGIE EN MECANIQUE

-:-

On appelle <u>variété symplectique</u> une variété différentiable sur laquelle on a défini une 2-forme σ telle que [1] :

(1)
a) σ est régulière

b) au voisinage de chaque point de U , il existe des coordonnées locales dans lesquelles les composantes $\sigma_{\mu\nu}$ de σ sont constantes.

Le <u>théorème de Darboux</u> indique que l'on peut remplacer la condition b) par :

b') La dérivée extérieure de σ est nulle.

Cette structure symplectique a été reconnue et décrite en détails, <u>dès 1810</u>, par J.L. Lagrange[2] ; la variété est dans ce cas l'ensemble des <u>mouvements</u> d'un système dynamique lagrangien ; les composantes covariantes et contravariantes de σ , que Lagrange note (a,b) et $[a,b]$, sont appelées traditionnellement "parenthèses de Poisson" et "crochets de Lagrange" ; elles interviennent essentiellement dans la théorie de la "variations des constantes arbitraires" découverte par Lagrange afin de traiter le problème des perturbations en Mécanique céleste.

Si dx et δx désignent des variations arbitraires du mouvement x , la quantité

$$\sigma_{\mu\nu}\, dx^{\mu}\, \delta x^{\nu}$$

que nous noterons ici

$$\sigma(dx)(\delta x)$$

peut s'exprimer au moyen des coordonnées canoniques $p_j\ q^j$ à une date t

---

(2) Mécanique Analytique, deuxième partie, section V

(1) Synonymes : 2-forme - Tenseur covariant antisymétrique du 2ème ordre.

par la formule (Lagrange, loc. cit.) :

(2) $$\sigma(dx)(\delta x) \quad = \quad \sum_j dp_j\delta q^j - \delta p_j dq^j \quad .$$

Dans le cas où l'on donne aussi des variations à t, cette formule doit être complétée (E. Cartan) en :

(3) $$\sigma(dx)(\delta x) \quad = \quad \sum_j [dp_j\delta q^j - \delta p_j dq^j] + dt\delta H - \delta t dH$$

(H = fonction hamiltonienne) ;

on a enfin la formule suivante :

(4) $$\sigma(dx)(\delta x) \quad = \quad \sum_k \langle m_k d\vec{V}_k - \vec{F}_k dt, \delta\vec{r}_k - \vec{V}_k\delta t\rangle - \langle m_k\delta\vec{V}_k - \vec{F}_k\delta t, d\vec{r}_k - \vec{V}_k dt\rangle$$

qui fait intervenir les masses m_k des points matériels composant le système, leurs positions $\vec{r}_k$, leurs vitesses $\vec{V}_k$, et les forces $\vec{F}_k$ auxquelles ils sont soumis (les crochets $\langle\ ,\ \rangle$ désignent le produit scalaire ordinaire).

Dans le cas d'un système dynamique <u>isolé</u>, on connaît a priori certaines transformations qui opèrent sur les mouvements du système : les translations d'espace ou de temps ; les rotations d'espace ; les "transformations de Galilée", ou "boosts" qui consistent à communiquer une même vitesse à tous les points du système ; on constate immédiatement, sur la formule (4), que ces transformations ne changent pas la quantité $\sigma(dx)(\delta x)$, donc qu'elles préservent la structure symplectique de l'espace U des mouvements : nous dirons que ces transformations sont des <u>symplectomorphismes</u> de la variété symplectique U .

Par composition, ces diverses transformations engendrent un groupe G , le <u>groupe de Galilée</u> ; G possède une structure de groupe de Lie ; sa dimension est 10 . Nous désignerons par $a_U(x)$ le mouvement déduit d'un mouvement x du système par l'application d'un élément a de G ; on se trouve alors dans la situation suivante :

(5)
- U est une variété symplectique
- G est un groupe de Lie
- $a \to a_U$ est un morphisme du groupe G dans le groupe des symplectomorphismes de U :

$$\underline{a \times b}_U = a_U \circ b_U$$

- $\begin{pmatrix} a \\ x \end{pmatrix} \to a_U(x)$ est une application différentiable de $G \times U$ dans U.

Chaque fois que ces axiomes (5) se trouvent vérifiés, nous dirons que G est un <u>groupe dynamique</u> de U.

Soit Z un élément de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ d'un groupe dynamique G ; Z peut être considéré comme un vecteur tangent à la variété G en son élément neutre e. Si nous calculons

(6) $$\delta[a_U(x)]$$

avec une variation[1] δ telle que $\delta x = 0$, $\delta a = Z$, $a = e$, on définit ainsi un vecteur tangent à U en x , que nous noterons $Z_U(x)$; à tout élément Z de $\mathcal{G}$ est donc associé un champ de vecteur Z_U de la variété U.

En utilisant le fait que les a_U sont des symplectomorphismes, on peut montrer que la <u>dérivée de Lie</u> du tenseur σ associée au vecteur Z_U est nulle ; en utilisant une formule de Cartan, on en déduit :

(7) $$[\nabla\sigma](Z_U(x)) + \nabla[\sigma(Z_U(x))] = 0$$

où ∇ désigne l'opération de dérivation extérieure. Comme $\nabla\sigma = 0$ (ci-dessus, (1.b')), il reste

(8) $$\nabla[\sigma(Z_U(x))] = 0 ,$$

ce qui montre que la 1-forme $\sigma(Z_U(x))$, contractée de σ avec le vecteur $Z_U(x)$, a une dérivée extérieure nulle ; donc qu'elle est, localement, la

---

(1) Synonymes : variation, dérivation.

dérivée extérieure d'une 0-forme, c'est-à-dire d'un scalaire $-u$:

(9) $$\sigma(Z_U(x)) \quad = \quad - \nabla u$$

formule qui s'écrit aussi :

(10) $$\sigma(Z_U(x))(\delta x) \quad = \quad - \delta u$$

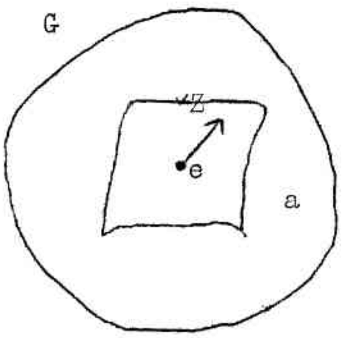
pour toute dérivation δ telle que $\delta Z = 0$.

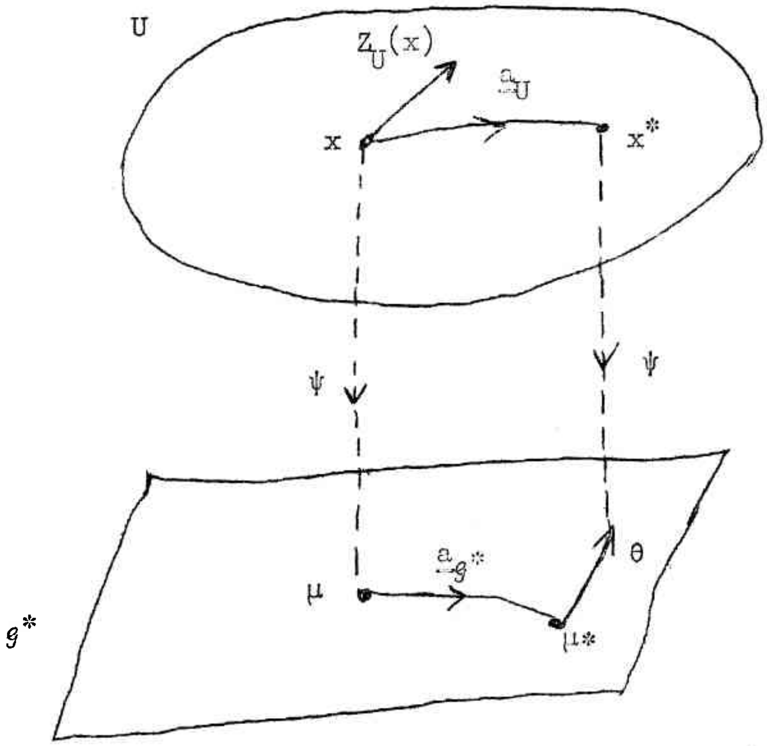
u n'est définie (dans un ouvert connexe) qu'à une constante additive près, par cette formule.

Nous pouvons reproduire cette procédure pour tout vecteur Z pris dans $\mathfrak{g}$; il est facile (en choisissant une base de $\mathfrak{g}$) de choisir u fonction linéaire de Z ; on arrive ainsi au résultat fondamental suivant :

(11)

> Si G est un groupe dynamique de U , il existe, dans un voisinage de chaque point de U , une application ψ de U dans $\mathfrak{g}^*$ (espace vectoriel dual de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G) telle que
>
> $$\sigma(Z_U(x))(\delta x) \quad = \quad - \delta\mu(Z) \qquad [\mu \equiv \psi(x)]$$
>
> pour toute dérivation δ telle que $Z = 0$.
>
> μ n'est défini qu'à une constante additive près.





Examinons le cas du groupe de Galilée. Un élément Z de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ agit sur l'espace-temps E selon la formule

$$Z_E\begin{pmatrix}\vec{r}\\ t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\vec{\omega}\times\vec{r} + \vec{\beta}t + \vec{\gamma}\\ \varepsilon\end{pmatrix}$$

définissant ainsi une "transformation de Galilée" infinitésimale. Nous noterons

(12) $$\mu = \{\vec{\ell}\,,\,\vec{g}\,,\,\vec{p}\,,\,E\}$$

un élément du dual $\mathfrak{g}^*$; étant convenu qu'il opère sur Z selon la formule

$$\mu(Z) = \langle\vec{\ell},\vec{\omega}\rangle - \langle\vec{g},\vec{\beta}\rangle + \langle\vec{p},\vec{\gamma}\rangle - E\,\varepsilon \qquad (1)$$

Dans le cas où μ est le moment d'un système dynamique, le calcul montre que $\vec{\ell}$ est le moment cinétique (du système dans le mouvement x), $\vec{p}$ son impulsion, E son énergie ; quant à la variable $\vec{g}$, elle s'écrit $m\vec{G} - \vec{p}t$, m étant la masse du système, G son barycentre ; le fait que μ soit une constante du mouvement (théroème de Norther généralisé) donne donc les théorèmes généraux de la Mécanique, y compris le fait que le barycentre a un mouvement rectiligne uniforme. Notons en passant que le "principe de l'égalité de l'action et de la réaction" est une conséquence du fait que le groupe de Galilée est un groupe dynamique – et qu'il n'y a donc pas lieu de le postuler à part.

Cette interprétation de μ explique la terminologie que nous emploierons désormais : nous dirons que μ est le moment associé au groupe dynamique.

Soit maintenant a un élément quelconque d'un groupe dynamique G (figure). On sait faire opérer a sur un point x de U , définissant ainsi un point $x^* = a_U(x)$; par ailleurs, on sait faire opérer a

(1) Autrement dit, $\vec{\ell}$ est la variable conjugée d'une rotation infinitésimale $\vec{\omega}$; $-\vec{g}$ la variable conjuguée d'un boost infinitésimal $\vec{\beta}$; $\vec{p}$ et $-E$ d'une translation spatiale $\vec{\gamma}$ et temporelle ε

sur le moment μ , en utilisant la "représentation co-adjointe" de G , ce qui conduit à un nouveau moment $\mu^* = \underline{a}_{\mathcal{G}^*}(\mu)$. On pourrait s'attendre à ce que μ^* soit le moment associé au point x^* , c'est-à-dire que :

$$\psi(\underline{a}_U(x)) = \underline{a}_{\mathcal{G}^*}(\psi(x)) .$$

En fait, μ^* est bien un moment de x^* , mais ce n'est pas nécessairement <u>le même</u> que celui qui a été choisi initialement (n'oublions pas la présence d'une constante additive arbitraire dans μ) ; en d'autres termes, il existe une constante θ (dans $\mathcal{G}^*$) telle que

$$\psi(\underline{a}_U(x)) - \underline{a}_{\mathcal{G}^*}(\psi(x)) = \theta .$$

Cette "constante" peut se calculer pour chaque valeur de a ; si nous la notons $\theta(a)$, on obtient donc la formule

$$\psi(\underline{a}_U(x)) - \underline{a}_{\mathcal{G}^*}(\psi(x)) = \theta(a) \tag{13}$$

Il est immédiat de déduire de cette formule l'identité

$$\theta(a \times b) = \underline{a}_{\mathcal{G}^*}(\theta(b)) + \theta(a) \qquad \forall\ a,b \in G . \tag{14}$$

Il se trouve que θ est différentiable ; si nous désignons par f la dérivée de θ au point e , f est évidemment une application de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}^*$, c'est-à-dire une forme bilinéaire sur $\mathcal{G}$.

Par dérivation de (13) , on établit facilement l'identité

$$\sigma(Z_U(x))(Z'_U(x)) = \mu \cdot [Z,Z'] + f(Z)(Z') \tag{15}$$

où la notation [,] désigne le <u>crochet</u> de l'algèbre de Lie. Il resulte immédiatement de cette formule que f est <u>antisymétrique</u> .

Nous appellerons <u>cocycles</u> (symplectiques) du groupe G toute application de G dans $\mathcal{G}^*$ vérifiant (14) et ayant une dérivée antisymétrique au point e . Il est évident que les cocycles peuvent être recensés <u>indépendamment de toute variété symplectrique sur lequel G pourrait opérer</u> ; ils forment un espace vectoriel ; on peut montrer que sa dimension est <u>finie</u>.

La recherche des cocycles est d'ailleurs facilitée par l'identité de Bargmann

(16) $$f([X,Y])(Z) + f([Y,Z])(X) + f([Z,X])(Y) = 0$$

que l'on obtient par dérivation de (14).

Etudions l'effet sur le cocycle θ de la constante arbitraire qui figure dans le moment $\mu = \psi(x)$; comme θ dépend linéairement de μ, on voit que cet effet pour s'écrire

(17) $$[\mu \rightarrow \mu + \mu_o] \quad \Rightarrow \quad [\theta \rightarrow \theta + \text{cobord}(\mu_o)]$$

"cobord" étant une application linéaire de $\mathfrak{g}^*$ dans l'espace des cocycles ; il résulte immédiatement de (14) que

(18) $$\text{cobord}(\mu_o)(a) = \mu_o - \underline{a}_*(\mu_o) .$$

Autrement dit, les différents cocycles associés à un groupe dynamique ne diffèrent que d'un cobord (on dit qu'ils sont cohomologues) ; la quantité indépendante du choix de la constante est donc la classe de cohomologie de θ ; c'est un élément de l'espace vectoriel de cohomologie de G, quotient de l'espace des cocycles par l'espace des cobords ; il est clair que cet espace peut, lui-aussi, s'étudier sans avoir à connaître de la variété U.

Ainsi, dans le cas du groupe de Galilée, V. Bargmann a montré (à l'aide de l'identité (15)) que l'espace de cohomologie a la dimension 1 ; autrement dit, il existe un cocycle particulier θ_o du groupe de Galilée tel que tout cocycle de G s'écrive :

(19) $$\theta = m\,\theta_o + \text{cobord}(\mu_o)$$

μ_o étant un élément de $\mathfrak{g}^*$, m un scalaire qui repère la classe de cohomologie de θ.

Pour toute variété symplectique admettant le groupe de Galilée comme groupe dynamique, on pourra donc choisir le moment $\mu = \psi(x)$ de sorte que :

(20) $$\psi(a_U(x)) - a_{\mathcal{g}^*}(\psi(x)) = m\,\theta_o(a)\,.$$

En traitant le cas d'un système composé de point matériels, on constate que le nombre m est la <u>masse</u> du système : on voit donc que la masse, en mécanique classique, est <u>définie</u> au moyen d'une classe de cohomologie.

Une question importante est de savoir dans quelle mesure cette formule (20) permet de faire disparaître la constante arbitraire μ_o figurant dans le moment ; comme μ_o ne figure que par son cobord (formule (17)), on voit qu'il reste, comme arbitraire, un élément quelconque du <u>noyau</u> de l'application cobord : le calcul montre que ce noyau est constitué par les μ_o de la forme

$$\{\vec{0}\,,\ \vec{0}\,,\ \vec{0}\,,\ E_o\} \qquad \text{(notation (12))} ;$$

par conséquent, la formule (19) détermine entièrement le moment cinétique $\vec{\ell}$, l'impulsion $\vec{p}$, la grandeur $\vec{g}$; mais il reste une <u>constante additive irréductible</u> dans l'énergie E.

Cette étude nous permet d'analyser les différences fondamentales entre la <u>mécanique classique</u> et la <u>mécanique relativiste</u> ; on admettra encore, en relativité restreinte, que l'espace des mouvements d'un système isolé est une variété symplectique ; mais cette fois, c'est le <u>groupe de Poincaré</u> (groupe de Lorentz non homogène) qui sera pris comme groupe dynamique.

Il n'est pas très difficile, dans ce cas, de montrer que l'application cobord est une <u>bijection</u> de $\mathcal{g}^*$ sur l'espace des cocycles. Par conséquent, la cohomologie du groupe est <u>nulle</u>, il n'existe plus de nombre analogue à la masse classique, qui soit caractéristique du système donné ; il existe un choix du moment μ permettant d'annuler le cocycle θ ; les formules (13) et (15) deviennent alors :

(21) $$\psi(a_U(x)) = a_{\mathcal{g}^*}(\psi(x))$$

(22) $$\sigma(Z_U(x))(Z'_U(x)) = \mu . [Z,Z'] .$$

Comme "cobord" est une application injective, le choix du moment est <u>unique</u> ; la condition (21) caractérise entièrement le moment relativiste ; en particulier l'<u>énergie relativiste</u> est définie sans constante arbitraire.

Nous allons construire, dans l'exposé II , un modèle symplectique pour le <u>point matériel libre relativiste</u> ; ce modèle contient une constante arbitraire m_o ; l'énergie du système est égale à

(23) $$\frac{m_o c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

elle dépend donc explicitement du mouvement; en particulier l'énergie au repos est égale à

(24) $$m_o\, c^2 .$$

D'autre part, il existe un processus d'approximation qui permet de passer de ce modèle relativiste à un modèle classique ; dans ce cas la <u>masse</u> est égale à m_o , l'énergie à $\frac{1}{2} m_o v^2 + \mathrm{Cte}$ (1) ; ces résultats montrent que c'est la <u>cohomologie</u> qui permet de donner un statut rigoureux à la relation d'Einstein

(25) $$E = mc^2$$

qui associe deux grandeurs appartenant à des théories physiques différentes: <u>l'énergie relativiste</u> E et la <u>masse classique</u> m .

Nous allons maintenant étudier les applications à la mécanique de quelques résultats mathématiques, donnés ici sans démonstration.

<u>Définition</u>

Soient U_1 et U_2 deux variétés symplectiques, avec les 2-formes respectives σ_1 , σ_2 . **Alors** le produit direct $U_1 \times U_2$, muni de la 2-forme

---

(1) Le choix apparemment objectif qui consisterait à annuler cette constante dépend en fait du référentiel galiléen dans lequel on travaille.

(26)
$$\sigma(dx)(\delta x) = \sigma_1(dx_1)(\delta x_1) + \sigma_2(dx_2)(\delta x_2) \quad [x = (x_1 = x_2)]$$
est une variété symplectique ; nous l'appelerons <u>produit symplectique</u> direct de U_1 et U_2.

<u>Théorème</u>.

(27) Soit U une variété symplectique ; G un groupe dynamique de U. On suppose que

- G est un groupe <u>abélien connexe</u> de dimension n.
- Il existe un <u>moment</u> μ.
- La 2-forme f associée (notation (15)) est <u>régulière</u>.

Alors

1° G est isomorphe au groupe additif $(\mathbb{R}^n, +)$

2° U est un produit symplectique direct de deux variétés U_1, U_2 :

U_1 = variété $\mathbb{R}^n$, munie de la 2-forme constante $\sigma_1 = f$;

U_2 = sous-variété de U, d'équation $\mu = 0$, munie de la 2-forme σ_2 induite de celle de U.

<u>Théorème</u>.

(28) Soit U une variété symplectique ; G un groupe dynamique de U.

On suppose que

- G possède un sous-groupe de Lie <u>$\tilde{G}$ invariant, abélien, connexe</u>.
- La forme $\tilde{f}$ induite par f sur l'algèbre de Lie $\tilde{\mathfrak{g}}$ de $\tilde{G}$ est régulière.

Alors

U est un produit direct symplectique (théorème précédent appliqué au groupe dynamique $\tilde{G}$) ;

G opère sur U en respectant la décomposition $U_1 \times U_2$;

$G \times [G/\tilde{G}]$ est un groupe dynamique de U [1] .

Ce théorème s'applique en particulier aux cas suivants.

- On considère (en relativité restreinte) une particule chargée soumise à un champ électromagnétique constant F . Il est clair que ce problème admet comme groupe dynamique G un sous-groupe du groupe de Poincaré, à savoir le groupe des transformations qui conservent le champ électromagnétique ; il est clair aussi que G possède comme sous-groupe invariant le groupe $\tilde{G}$ des translations d'espace-temps (puisque $\tilde{G}$ est sous-groupe invariant du groupe de Poincaré) ; l'algèbre de Lie de $\tilde{G}$ est l'espace de Minkowski ; le calcul montre que la 2-forme f est proportionnelle au champ électromagnétique F ; par conséquent, si F est régulier [2] , le théorème (28) s'applique ; l'espace des mouvements est une variété de dimension 6 , produit direct de l'espace de Minkowski (muni de la 2-forme F) par une variété de dimension 2 ; il possède un groupe dynamique plus grand que G , à savoir le produit direct de G par $G/\tilde{G}$; ce dernier groupe est constitu par les transformations de Lorentz qui commutent avec F ; sa dimension est 2 ; il possède donc un moment à 2 composantes, qui sont de <u>nouvelles constantes du mouvement</u> ; l'une d'elles est nulle [3] ; l'autre peut s'interpréter comme la mesure du champ électrique dans le référentiel propre de la particule.

- Un autre cas d'application, beaucoup plus général, est celui d'un système galiléen libre de masse non nulle.

---

(1) Il suffit de faire opérer un élément de G sur U_1 , un autre élément de G sur U_2 .

(2) C'est-à-dire si les champs électrique et magnétique ne sont pas orthogonaux.

(3) Ce ne serait pas le cas si la particule était munie d'une <u>charge **magnétique**</u>.

Il suffit de prendre comme groupe G le groupe de Galilée ; comme sous-groupe $\tilde{G}$ le groupe de dimension 6 engendré par les translations et les boosts (addition d'une vitesse constante) ; on vérifie les conditions de (27) ; par conséquent, U se décompose nécessairement en produit direct d'une variété de dimension 6 (c'est l'espace des mouvements du barycentre considéré comme point matériel doué de la masse totale) par une autre variété symplectique (espace des mouvements "autour" du barycentre); le nouveau groupe dynamique $G/\tilde{G}$, de dimension 4 , est isomorphe au produit direct $SO(3) \times \mathbb{R}$; la composante $SO(3)$ est connue des physiciens sous le nom de groupe de spin ; le moment de $G/\tilde{G}$ est constitué par le moment cinétique propre et l'énergie propre.

On voit comment le théorème (28) permet d'étendre les théorèmes de Koenig à tout système classique, même s'il n'est pas composé de points matériels (exemple : une particule à spin, dont les mouvements autour du barycentre constituent une variété de dimension 2 , isomorphe à la sphère S_2 [1].

Comme le groupe de Poincaré ne possède pas de sous-groupe $\tilde{G}$ vérifiant les conditions du théorème (28) , la décomposition barycentrique ne s'applique pas à la mécanique relativiste des systèmes ; c'est l'une des difficultés qu'il faudra surmonter pour construire un modèle relativiste de particules en interaction.

---

(1) Ce fait permet de différencier radicalement la particule à spin d'un solide tournant.

II - MODELES SYMPLECTIQUES DE PARTICULES

Nous allons entreprendre maintenant une étude inverse ; au lieu d'étudier les propriétés des systèmes dynamiques donnés par la nature, nous allons essayer de construire des modèles de tels systèmes.

Comme principe, nous postulerons seulement que l'espace U des mouvements d'un système dynamique isolé est une variété symplectique admettant comme groupe dynamique le groupe de Poincaré ; nous renonçons donc a priori à l'existence d'un formalisme lagrangien ou hamiltonien, et même à l'existence d'un espace de phase ou de configuration.

On peut démontrer (en utilisant la formule (22)) que le moment μ peut se définir sur U tout entier (et pas seulement localement, comme nous le permettait le théorème de Poincaré) [1]. Bien entendu, nous normaliserons le moment par la condition (21 , 22) .

Nous allons faire maintenant une hypothèse restrictive : nous supposerons que le groupe de Poincaré G opère transitivement sur U , c'est-à-dire que, pour tout couple de mouvements (x,x') du système, il existe un élément a de G tel que $x' = \underline{a}_U(x)$ [2] . Nous verrons a posteriori que les systèmes répondant à cette condition sont simplement les "particules élémentaires".

Le fait géométrique fondamental qui permet alors de mener à bien l'étude du système est le suivant : on peut caractériser entière-

---

(1) Ce n'est pas le cas en mécanique classique : il pourrait arriver, a priori, que l'énergie soit une fonction multiforme. On postule généralement que ceci n'arrive pas : on voit que ce principe phénoménologique de la mécanique classique peut être considéré comme un emprunt licite à la mécanique relativiste.

(2) Autrement dit, les mouvements ne diffèrent les uns des autres que par leur situation spatio-temporelle ; en choisissant convenablement un référentiel de Lorentz, tous les mouvements ont la même description.

ment (1) chaque <u>mouvement</u> x du système par son <u>moment</u> μ ; c'est une habitude bien connue des physiciens, habitude qui est ici justifiée mathématiquement.

Le simple examen de la figure ci-dessus montre, lorsque x décrit l'espace des mouvements, que le moment μ décrit une orbite de la représentation co-adjointe de G sur $\mathcal{G}^*$ (2)(3)

On peut montrer que tout vecteur tangent à U en un point x se met sous la forme $Z_U(x)$; il en résulte immédiatement que la formule (22) peut être prise comme <u>définition</u> de la forme σ ; pour <u>toute</u> orbite co-adjointe Ω de G, on démontre que cette définition est cohérente, c'est-à-dire qu'elle donne effectivement une structure symplectique à Ω.

Le problème est maintenant purement calculatoire : il suffit de classer les orbites co-adjointes du groupe de Poincaré, munies chacune de leur structure symplectique intrinsèque.

---

(1) En fait, ce théorème suppose une condition topologique (que le stabilisateur du moment dans la représentation co-adjointe soit un sous-groupe <u>connexe</u> du groupe de Poincaré) ; il existe un cas où cette condition n'est pas vérifiée, lorsqu'on admet dans le groupe de Poincaré les symétries spatiales ; alors il est possible que la description d'un mouvement x exige, en plus du moment μ, la connaissance d'une quantité pouvant prendre 2 valeurs <u>(la parité intrinsèque)</u>.

(2) On rappelle que G opère transitivement sur U, et que nous avons pu annuler le cocycle θ.

(3) On appelle <u>orbite</u> d'un groupe opérant sur un ensemble E l'ensemble des images d'un point donné de E par tous les éléments du groupe.

Un élément Z de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G peut se caractériser par un opérateur antisymétrique Λ et un vecteur Γ de l'espace de Minkovski E, opérant selon la formule

$$Z_E(X) = \Lambda.X + \Gamma \qquad (X \in E) \tag{29}$$

Nous noterons

$$\mu = \{M,P\} \qquad [M \text{ antisymétrique, } P = \text{vecteur}] \tag{30}$$

un élément de $\mathfrak{g}^*$, opérant sur $\mathfrak{g}$ selon

$$\mu(Z) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(M.\Lambda) - \langle P,\Gamma\rangle \ . \tag{31}$$

Avec ces conventions M est le <u>moment de Lorentz</u>, P <u>la quadri-impulsion</u>; il est intéressant de définir <u>la polarisation</u> W de la particule par la formule

$$W = *(M) \circ P \tag{32}$$

$*(M)$ étant le tenseur adjoint de M. En effet, un calcul simple montre que les carrés scalaires des vecteurs P et W sont tous les deux invariants par la représentation co-adjointe, donc qu'ils sont constants sur chaque orbite.

Nous n'étudierons pas le cas où P serait un vecteur de genre temps, qui correspondrait aux "tachyons" ; nous pourrons donc poser

$$\langle P,P\rangle = m^2$$

le nombre réel m ainsi défini étant la <u>masse</u> (au repos) de la particule.

<u>I) $m > 0$</u>

Il résulte immédiatement de la définition (32) que les vecteurs P et W sont orthogonaux ; W étant orthogonal à un vecteur de genre temps, est un vecteur de genre espace ; nous pourrons donc poser :

$$\langle W,W\rangle = -m^2 s^2$$

définissant ainsi un nombre s qui sera le <u>spin</u> de la particule.

I a) $s = 0$ $(W = 0)$

Dans ce cas, on montre que chaque mouvement de la particule est défini par une droite T parallèle à P (sa ligne d'univers) ; la dimension de l'espace des mouvements est 6 ; la forme σ est définie simplement par

(33) $\sigma(dx)(\delta x) = \langle dX, \delta P\rangle - \langle dP, \delta X\rangle$ (X = point arbitraire de T)

C'est le point matériel libre relativiste auquel nous avons fait allusion plus haut.

I b) $s \neq 0$

Alors la description d'un mouvement inclut à la fois une trajectoire T et un tenseur antisymétrique S (tenseur de spin) vérifiant

(34)
$$
\begin{aligned}
S \cdot P &= 0 \\
\mathrm{Tr}(S^2) &= -2\,s^2
\end{aligned}
$$

ce qui donne la dimension 8 à l'espace des mouvements.

La forme σ s'obtient en ajoutant à (33) la quantité

(35)
$$
-\frac{1}{s^2}\,\mathrm{Tr}(dS \cdot S \cdot \delta S)\,.
$$

On a ainsi un modèle symplectique de particule à spin ; contrairement au cas précédent, on peut montrer que ce modèle ne possède ni formalisme lagrangien, ni formalisme hamiltonien, ni même d'espace de phase[1].

II) $m = 0$

Le seul cas physiquement intéressant est celui où W est isotrope ; il est alors parallèle à P, ce qui permet de poser

$$
W = s\,P
$$

---

(1) Ceci résulte de propriétés topologiques globales ; on peut toujours trouver des coordonnées canoniques, mais elles laissent nécessairement échapper certaines orientations de spin.

s est un pseudo-scalaire ; sa valeur absolue est le <u>spin</u> de la particule, son signe <u>l'hélicité</u> ; la dimension de l'espace des mouvements est 6 ; on peut caractériser chaque mouvement par une trajectoire T isotrope et par le vecteur P (parallèle à T) ; mais il importe de remarquer que la trajectoire <u>dépend du référentiel choisi</u> ; lorsqu'on fait varier ce dernier, T parcourt un 2-plan isotrope.

Ce modèle convient aux neutrinos et aux photons - qui apparaissent comme des particules polarisées <u>circulairement</u> ; l'hélicité indique le sens de polarisation.

COMMENTAIRES

-:-:-:-:-:-:-

QUANTIFICATION

Considérons le problème de la quantification sous la forme que lui a donné Dirac : faire correspondre à chaque variable dynamique u un opérateur hermitien (que nous noterons $\hat{u}$) sur un espace de Hilbert H de façon à réaliser les relations

$$(37) \quad \begin{cases} \widehat{[u,v]}_{\text{Poisson}} = i\,[\hat{u}\,.\,\hat{v} - \hat{v}\,.\,\hat{u}] \\ \hat{1} = 1_H \quad \text{(opérateur identique sur } H) \end{cases}$$

dans un système d'unités où la constante de Planck h est prise égale à 2π.

Nous avons montré en 1965 que l'on pouvait résoudre ce problème en construisant un espace fibré Y ayant pour base la variété symplectique U des mouvements ; Y est une variété munie d'une 1-forme ϖ , vérifiant les conditions suivantes :

(38)
- $\ker(\varpi) \cap \ker(\nabla\varpi)$ est un espace de dimension 1 ;
- les lignes de force de cet espace vectoriel sont fermées ;
- la circulation de ϖ sur ces courbes fermées est égale à la constante de Planck ;
- chacune de ces lignes de force est mise en correspondance avec un point de U , de sorte que l'invariant intégral $\nabla\varpi$ corresponde à la forme de Lagrange σ de U .

Dans ces conditions H est un espace fonctionnel sur Y , et l'on peut réaliser effectivement les relations de Dirac (37).

Mais la construction (38) ("quantification géométrique") n'est pas toujours possible ; lorsqu'elle l'est, elle n'est pas toujours unique. Ainsi dans le cas d'une particule à spin, une condition nécessaire et suffisante de possibilité est la relation

$$s = n\frac{\hbar}{2} \quad (n \text{ entier}) \tag{39}$$

qui est effectivement vérifiée par les spins des particules ; dans ce cas la quantification est unique.
Par contre, pour un système de particules, il y a exactement 2 quantifications géométriques possibles ; elles sont effectivement réalisées dans la nature (statistiques de Bose-Einstein et de Fermi-Dirac). Il est intéressant de remarquer que le dénombrement des quantifications utilise le "groupe d'homotopie" de la variété symplectique U ; ce n'est pas le seul exemple de propriétés quantiques subordonnées à un problème d'homotopie (voir par exemple la théorie des super-conducteurs).

Les groupes dynamiques, après quantification, posent des questions nouvelles et intéressantes : il s'agit de savoir si on peut les "relever" par des groupes opérant sur Y en respectant la forme $\tilde{\omega}$ ("quantomorphismes"). Dans bien des cas, ce relèvement conduit à construire une extension non triviale du groupe : ainsi, dans le cas de l'oscillateur harmonique, le groupe des translations se relève par un groupe non abélien (le groupe de Weyl) ; c'est le groupe de Poincaré ou son revêtement à 2 feuillets qui se relève, dans le cas d'une particule à spin, selon la parité du nombre n de la formule (39) ; ainsi s'explique un paradoxe de la mécanique quantique (l'usage des spineurs qui ne sont définis qu'au signe près dans la géométrie de l'espace de Minkowski).

PARTICULES NON ELEMENTAIRES

En Mécanique galiléenne, les théorèmes de Koenig auxquels nous avons fait allusion plus haut permettent de réduire la description d'une particule quelconque à une variété symplectique sur laquelle opère le groupe $SO(3) \times \mathbb{R}$. Ainsi, l'atome d'hydrogène classique, dont l'espace des mouvements propres est décrit par les 3 lois de Képler. On peut montrer que $SO(4)$ est groupe dynamique de cette variété, et qu'il est relevable sans extension après quantification ; ceci "explique" la dégénérescence des états stationnaires de l'hydrogène.

Mais le problème devient beaucoup plus difficile dans le cas d'une particule relativiste ; ainsi que nous l'avons déjà remarqué, il n'est plus possible de décrire les "mouvements propres" de la particule. La définition même d'une particule composée devient sujette à caution ; la décomposition classique du système en particules passives et forces d'interaction cesse d'être possible, puisque la relativité interdit de distinguer entre la masse des particules et l'énergie d'interaction.

PARTICULES SOUMISES A UN CHAMP

La dynamique des particules soumises à un champ électromagnétique peut s'étudier dans le formalisme symplectique -on arrive ainsi à reformuler de façon satisfaisante les équations de Bargmann, Michel et Telegdi par exemple, dans le cas des particules à spin chargées et aimantées.
L'usage de la relativité générale permet également de traiter les particules soumises au champ de gravitation, avec des résultats satisfaisants. Cependant, le lien profond qui pourrait unir la relativité générale avec la formulation symplectique -lien dont l'existence est suggérée par certains cas particulers- reste encore à découvrir.