

Fair

ISTITUTO NAZIONALE DI ALTA MATEMATICA

SYMPOSIA MATHEMATICA

VOLUME XIV

(ESTRATTO)

JEAN-MARIE SOURIAU

SUR LA VARIÉTÉ DE KÉPLER

"MONOGRAF"

BOLOGNA - 1974

SUR LA VARIÉTÉ DE KÉPLER (*)

JEAN-MARIE SOURIAU

1. Équations du mouvement dans un champ Coulombien attractif.

Considérons une particule de masse m , occupant la position $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ à la date t , soumise à la force coulombienne attractive $\mathbf{F} = -k(\mathbf{r}/r^3)$ ($r = \|\mathbf{r}\|$; $k > 0$).

En désignant par $\mathbf{v}$ sa vitesse, les équations du mouvement s'écrivent

$$(1.1) \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}, \quad m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{k\mathbf{r}}{r^3};$$

on sait qu'elles admettent l'intégrale première de l'énergie

$$(1.2) \quad \hbar = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{k}{r}, \quad (v = \|\mathbf{v}\|).$$

Nous choisirons les grandeurs

$$(1.3) \quad m, \quad \frac{\hbar^2}{km}, \quad \frac{\hbar^3}{k^2m} \quad (2\pi\hbar = \text{constante de Planck}),$$

comme unités respectives de masse, longueur et temps; si bien que l'on aura désormais

$$(1.4) \quad m = 1, \quad k = 1, \quad \hbar = 1.$$

2. Intégration des équations.

Considérons la variable

$$(2.1) \quad \alpha = \int \frac{dt}{r}$$

(*) I risultati conseguiti in questo lavoro sono stati esposti nella conferenza tenuta il 20 gennaio 1973.

définie, pour chaque mouvement, à une constante additive près. Nous désignerons par ' la dérivation par rapport à α . Choisissons la variable quadridimensionnelle

$$(2.2) \quad X = \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ t \end{pmatrix};$$

un calcul immédiat donne:

$$(2.3) \quad \begin{cases} X' = \begin{pmatrix} \mathbf{r}\mathbf{v} \\ r \end{pmatrix}, & X'' = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{r}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v} - \frac{\mathbf{r}}{r} \\ \langle \mathbf{r}, \mathbf{v} \rangle \end{pmatrix}, \\ X''' = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix} + 2hX', & X^{IV} = 2hX'', \end{cases}$$

(nous notons par $\langle, \rangle$ le produit scalaire de $\mathbb{R}^3$).

La dernière des équations (2.3) montre que la matrice 4×4

$$(2.4) \quad M = (XX'X''X'''),$$

vérifie l'équation différentielle linéaire à coefficients constants

$$(2.5) \quad \frac{dM}{d\alpha} = M \cdot A,$$

où l'on a posé

$$(2.6) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2h \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'intégration de (2.5) est immédiate

$$(2.7) \quad M = M_0 \exp(\alpha A).$$

Le calcul de l'exponentielle est aisé par les méthodes standard de l'algèbre linéaire; on trouve, dans le cas $h \neq 0$

$$(2.8) \quad \exp[\alpha A] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\text{ch } \lambda\alpha - 1}{\lambda^2} & \frac{\text{sh } \lambda\alpha}{\lambda} & \text{ch } \lambda\alpha & \lambda \text{ sh } \lambda\alpha \\ \frac{\text{sh } \lambda\alpha - \lambda\alpha}{\lambda^3} & \frac{\text{ch } \lambda\alpha - 1}{\lambda^2} & \frac{\text{sh } \lambda\alpha}{\lambda} & \text{ch } \lambda\alpha \end{pmatrix}.$$

λ étant une racine carrée (réelle ou imaginaire) de $2h$ (les valeurs propres de A sont $0, 0, \lambda, -\lambda$). Bien entendu, le choix de λ n'importe pas, tous les éléments de cette matrice sont des fonctions paires de λ .

Les formules (2.2), (2.3), (2.7), (2.8) donnent *explicitement*, en fonction de α et des conditions initiales, la valeur des variables $t, r, r, rv, \langle r, v \rangle, \langle r, v \rangle v - r/r$; par exemple:

$$(2.9) \quad t = t_0 + r_0 \frac{\operatorname{sh} \lambda \alpha}{\lambda} + \langle r_0, v_0 \rangle \frac{\operatorname{ch} \lambda \alpha - 1}{\lambda^2} + \frac{\operatorname{sh} \lambda \alpha - \lambda \alpha}{\lambda^3}.$$

Le cas $h = 0$ peut se traiter directement; on peut aussi calculer $\exp(\alpha A)$ en faisant tendre λ vers 0 dans (2.8) (l'exponentielle étant une application continue), ce qui donne

$$(2.10) \quad \exp[\alpha A] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 \\ \alpha^2/2 & \alpha & 1 & 0 \\ \alpha^3/6 & \alpha^2/2 & \alpha & 1 \end{pmatrix},$$

et

$$(2.11) \quad t = t_0 + r_0 \alpha + \langle r_0, v_0 \rangle \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{6};$$

r est un polynôme du second degré en α , ce qui montre que la trajectoire est une parabole.

Dans le cas $h < 0$, (2.9) s'écrit évidemment

$$(2.12) \quad t = t_0 + r_0 \frac{\sin \mu \alpha}{\mu} + \langle r_0, v_0 \rangle \frac{1 - \cos \mu \alpha}{\mu^2} + \frac{\mu \alpha - \sin \mu \alpha}{\mu^3} \quad (\mu = \sqrt{-2h}).$$

Dans les trois cas, on constate que $\alpha \mapsto t$ est un homéomorphisme de la droite réelle sur elle-même; ceci justifie a posteriori le choix du paramètre α pour décrire le mouvement.

3. Collisions.

Il faut noter que certains mouvements (tous ceux où r_0 et v_0 ne sont pas indépendants) comportent une *collision* de la particule avec le centre attractif 0, collision qui se produit avec une vitesse infinie, ainsi que le montre (1.2).

On pourrait *convenir* que le mouvement cesse après le choc; mais nous constatons que la résolution précédente des équations du mouvement nous donne le moyen de *prolonger* les mouvements au delà des chocs; toutes les variables apparaissant dans la matrice $M(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}, \mathbf{r}\mathbf{v}, \text{etc.})$ ne subissent évidemment aucune singularité au moment du choc ⁽¹⁾.

4. Espace des mouvements et variété de Képler.

Considérons l'espace d'évolution V , de dimension 7, parcouru par la variable $y = (\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$ (figure 1). Chaque solution des équations du mouvement définit évidemment une courbe x tracée dans V ; x est

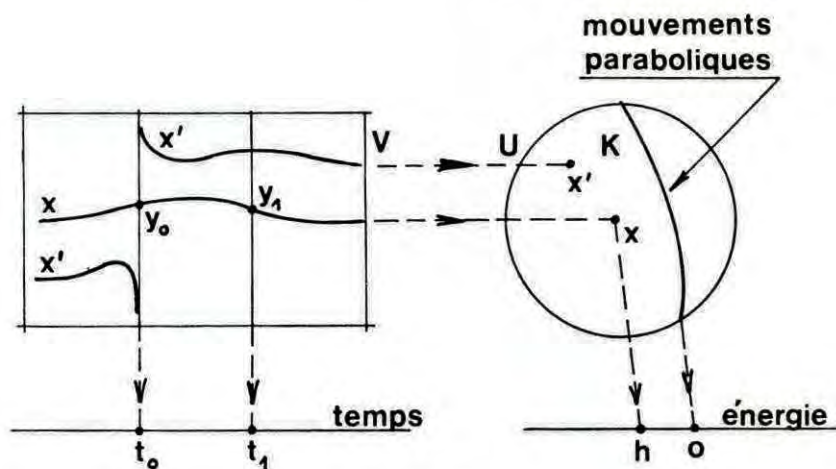


Figure 1.

une partie de V que nous appellerons « mouvement ». Puisque chaque condition initiale définit un mouvement, les mouvements forment une

⁽¹⁾ Pour une collision à l'instant 0, X_0 et X'_0 sont nuls; t'_0 est nul, $\mathbf{r}_0''$ est un vecteur unitaire; le mouvement s'écrit

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0'' \frac{\text{ch } \lambda x - 1}{\lambda^2}, \quad t = \frac{\text{sh } \lambda x - \lambda x}{\lambda^3};$$

le mobile «rebondit» sur le centre attractif, comme si la collision était élastique; dans le cas de l'énergie négative, le mouvement est périodique, et comporte une infinité de collisions.

partition de V ; nous noterons U l'ensemble quotient (ensemble abstrait des mouvements).

Nous allons munir canoniquement U d'une structure de variété (analytique) de dimension 6.

Choisissons en effet une date t_0 ; la section de V par $t = t_0$ est un espace de dimension 6 (« *espace de phases* à l'instant t_0 »).

Chaque mouvement x coupe l'espace de phases $t = t_0$ en un seul point $y_0 = (r_0, v_0, t_0)$, à l'exception des mouvements (x') qui comportent une collision à cette date.

L'application $x \mapsto (v_0, r_0)$ définit donc un *système de coordonnées* de U ; en faisant varier la date t_0 , on obtient ainsi un *atlas* de U , puisque tous les mouvements sont repérés; les formules de changement de coordonnées $(v_0, r_0) \mapsto (v_1, r_1)$ étant analytiques (ce qui résulte de l'intégration précédente, même pour les mouvements comportant des collisions entre t_0 et t_1), U est bien une variété analytique.

Nous appellerons désormais *espace des mouvements* l'ensemble U muni de cette structure de variété.

Puisque h est une intégrale première, il existe une application (analytique) $x \mapsto h$ de U sur $\mathbb{R}$; l'inégalité $h < 0$ définit un ouvert K de U , qui est donc une sous-variété analytique de dimension 6; nous appellerons K « *variété de Képler* », puisqu'elle est constituée des mouvements vérifiant les trois lois de Képler (complétés par les mouvements elliptiques « aplatis » sur un segment de droite).

Notons que les 6 nombres que les astronomes donnent pour caractériser le mouvement des planètes (inclinaison, demi-grand axe, longitude du noeud ascendant, longitude du périhélie, excentricité, date du passage au périhélie par exemple) et qu'on appelle « *éléments de l'orbite* » constituent une carte locale de la variété de Képler.

5. Paramètres de Fock.

Puisque l'espace d'évolution est de dimension 6, il est clair que les 16 éléments de la matrice $M = (XX'X''X''')$ sont nécessairement soumis à des liaisons; l'une d'elles est la relation $X''' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2hX'$ déjà donnée en (2.3). Étudions les relations existant entre X'' et X''' .

On rappelle (2.3) que

$$(5.1) \quad \begin{array}{|l|l|} \hline \mathbf{r}'' = \langle \mathbf{r}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v} - \frac{\mathbf{r}}{r} & t'' = \langle \mathbf{r}, \mathbf{v} \rangle \\ \hline \mathbf{r}''' = 2h\mathbf{r}\mathbf{v} & t''' = 1 + 2hr \\ \hline \end{array}$$

Il en résulte facilement les formules:

$$(5.2) \quad \begin{array}{|l|} \hline \| \mathbf{r}'' \|^2 - 2ht''^2 = 1 \\ \hline \| \mathbf{r}''' \|^2 - 2ht'''^2 = -2h \\ \hline \langle \mathbf{r}'', \mathbf{r}''' \rangle - 2ht''t''' = 0 \\ \hline \end{array} \quad \boxed{[t'' - 1] \times 2h \geq 0},$$

et, si $h \neq 0$,

$$(5.3) \quad \begin{array}{|l|} \hline \mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}'''t'' + \mathbf{r}'' + \mathbf{r}''[1 - t''']}{2h} \\ \hline \mathbf{v} = \frac{\mathbf{r}'''}{t''' - 1} \\ \hline \end{array}.$$

Réciproquement, si on se donne $\mathbf{r}'', \mathbf{r}''', t'', t'''$ solutions de (5.2) (avec $t''' \neq 1$), et si l'on définit $\mathbf{r}$ et $\mathbf{v}$ par (5.3), les formules (5.1) sont vérifiées.

Plaçons nous sur la variété de Képler ($h < 0$); posons

$$(5.4) \quad \boxed{\varrho = \frac{1}{\sqrt{-2h}} \quad B = \begin{pmatrix} \mathbf{r}'' \\ t''/\varrho \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} \varrho \mathbf{r}''' \\ t''' \end{pmatrix}},$$

pour *normaliser* la forme quadratique qui apparaît évidemment dans les formules (5.2). Alors celles-ci deviennent

$$(5.5) \quad \|B\|^2 = \|C\|^2 = 1, \quad \langle B, C \rangle = 0$$

où l'on utilise la norme euclidienne et le produit scalaire de $\mathbb{R}^4$. Elles expriment que B et C constituent une base orthonormale d'un sous-espace de $\mathbb{R}^4$.

(5.6) On peut aussi remarquer que ces équations définissent une sous-variété Φ de $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$, que nous appellerons ici *variété de Fock*.

Il est possible de considérer les éléments de $\mathbb{R}^4$ comme des quaternions; ce qui permet de repérer un point (B, C) de la variété de Fock par le couple (B, D) , avec $D = B^{-1} \times C$ (opérations quaternioniques); alors les équations de la variété deviennent:

$$(5.7) \quad \|B\|^2 = \|D\|^2 = 1, \quad \operatorname{Re}(D) = 0.$$

Les variables B et D sont indépendantes; B parcourt la sphère S_3 , D la sphère S_2 ; donc:

$$(5.8) \quad \text{La variété de Fock est difféomorphe à } S_3 \times S_2.$$

C'est donc une variété compacte, simplement connexe, de dimension 5.

Il résulte facilement des résultats précédents que l'on peut mettre en bijection la variété de Képler avec le produit direct $\mathbb{R} \times \Phi$, en repérant un mouvement par le couple $(\operatorname{Log} q, (B_0 C_0))$, B_0 et C_0 désignant les valeurs de B et C à une date t_0 arbitraire; ces « variables de Fock » ont été utilisées par de nombreux auteurs [6, 2, 10, 11]. Mais elles ont un inconvénient grave: la correspondance ainsi définie entre la variété de Képler et $\mathbb{R} \times \Phi$ n'est pas un difféomorphisme, bien qu'elle soit un homéomorphisme; les variables de Fock comportent des singularités pour les mouvements comportant une collision à la date t_0 . Ces résultats vont découler immédiatement du § suivant.

6. Structure de la variété de Képler.

Revenons aux notations (2.3) et définissons deux vecteurs U et V de $\mathbb{R}^4$ par la formule

$$(6.1) \quad (UV) = (X'' X'') \exp \left[-t'' \begin{pmatrix} 0 & 2h \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right].$$

En utilisant l'équation différentielle $X^{iv} = 2h X''$ (2.3), la dérivation de (6.1) fournit

$$\frac{d}{dx} (UV) = (UV) \begin{pmatrix} 0 & 2h \\ 1 & 0 \end{pmatrix} [1 - t''],$$

soit, grâce à (5.1)

$$(6.2) \quad \frac{d}{dt} (UV) = -2h(UV) \begin{pmatrix} 0 & 2h \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

en se souvenant que $dt = r dx$ (2.1).

(6.2) s'intègre en

$$(6.3) \quad (UV) = (U_0 V_0) \exp \left[-2ht \begin{pmatrix} 0 & 2h \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right],$$

U_0 et V_0 étant les valeurs pour $t = 0$.

Supposons $h \neq 0$; il est immédiat que la correspondance (6.1) définit une application $(X'' X''') \mapsto (UV)$ de la variété Φ_h définie par les équations (5.2) sur elle-même (puisque t'' est l'une des coordonnées de X''); cette application est analytique; nous allons constater qu'elle est bijective et bicontinue.

En effet, (UV) étant donnés sur Φ_h , l'équation (6.1) pourra se résoudre en

$$(X'' X''') = (UV) \exp \left[t'' \begin{pmatrix} 0 & 2h \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right],$$

si nous trouvons la valeur de t'' convenable, c'est-à-dire égale à la quatrième coordonnée de X'' . On a donc à résoudre l'équation numérique

$$(0001) \cdot (UV) \cdot \exp \left[t'' \begin{pmatrix} 0 & 2h \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = t'',$$

qui se développe en

$$(6.4) \quad U_4 \operatorname{ch} \lambda t'' + V_4 \frac{\operatorname{sh} \lambda t'' \lambda}{\lambda} = t'', \quad (\lambda^2 = 2h),$$

U_4 et V_4 étant les dernières composantes de U et V .

La discussion de cette équation montre qu'elle admet une seule solution réelle t'' ; aussi bien pour $h > 0$ (λ réel) que $h < 0$ (λ imaginaire)); dans ce dernier cas par exemple, on reconnaît en (6.4) l'équation de Képler

$$(6.5) \quad a \cos u + b \sin u = u \left(a = \frac{U_4}{\varrho}; b = V_4; u = t''/\varrho \right);$$

la relation $a^2 + b^2 \leq 1$ qui assure l'existence et l'unicité de la solution est une conséquence de l'équation de Φ_h vérifiée par (UV) .

De plus t'' est une fonction continue de (UV) : $(X'' X''') \mapsto (UV)$ est bien un homéomorphisme de Φ_h sur elle-même. Mais ce n'est pas un difféomorphisme: le calcul montre facilement que le rang de l'application linéaire tangente s'abaisse de 5 à 4 aux points où $t'' = 1$; les singularités correspondent aux collisions.

La bijectivité nous permet cependant de repérer analytiquement par (h, U_0, V_0) tout mouvement (d'énergie non nulle) qui n'a pas de collision à la date $t=0$; tout mouvement sera repérable par (h, U_1, V_1) s'il n'a pas de collision à une date t_1 ; grâce à (6.3), on constate que

$$(6.6) \quad \begin{cases} (U_1 V_1) = (U_0 V_0) \exp \begin{bmatrix} 0 & 2h \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ (U_0 V_0) = (U_1 V_1) \exp \begin{bmatrix} 0 & 2h \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \end{cases}$$

ce qui montre que $(hU_0V_0) \mapsto (hU_1V_1)$ est prolongeable par une application bi-analytique de $\mathbf{R}^9$ sur $\mathbf{R}^9$; ainsi se trouve vérifié directement le caractère analytique de la variété des mouvements (d'énergie non nulle); on constate de plus que cette variété est *repérée analytiquement* par (hU_0V_0) .

Restreignons-nous désormais au cas $h < 0$; comme nous l'avons fait en (5.4) pour X'' et X''' , normalisons les vecteurs U et V en posant

$$(6.7) \quad P = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1/\varrho \end{pmatrix} U, \quad Q = \begin{pmatrix} \varrho & & & \\ & \varrho & & \\ & & \varrho & \\ & & & 1 \end{pmatrix} V,$$

ce qui revient à poser

$$(6.8) \quad \boxed{P = B \cos \omega - C \sin \omega} \quad \boxed{Q = B \sin \omega + C \cos \omega}$$

avec

$$(6.9) \quad \boxed{\omega \stackrel{\text{def}}{=} t''/\varrho = B_4 = \sqrt{-2h} \langle \mathbf{r}, \mathbf{v} \rangle}.$$

Notons que la transcription de (6.2) donne

$$(6.10) \quad \frac{dP}{dt} = \frac{Q}{\varrho^3}, \quad \frac{dQ}{dt} = -\frac{P}{\varrho^3}.$$

(BC) et (PQ) sont deux repères orthonormés qui tournent dans le même 2-plan, avec un déphasage ω variable; mais (PQ) tourne avec

une vitesse angulaire constante $1/\varrho^3$, tandis que (BC) tourne avec des à-coups; en particulier, dans le cas de collisions, la vitesse angulaire de (BC) devient infinie.

Nous obtenons ainsi le résultat fondamental:

- (6.11) La variété de Képler est (globalement et analytiquement) difféomorphe au produit direct $\mathbf{R} \times \Phi$ de la droite réelle par la variété de Fock (5.6), donc à $\mathbf{R} \times S_3 \times S_2$; on obtient un tel difféomorphisme par

$$x \mapsto (\text{Log } \varrho, (P_1 Q_1))$$

P_1 et Q_1 étant les valeurs, à un instant arbitraire t_1 , des variables PQ (6.7).

Ce résultat montre que la variété de Képler est *séparée* ⁽²⁾ et *simplement connexe*.

Bien entendu, on pourrait donner une structure différentiable (ou analytique) à la variété de Képler en choisissant le paramétrage $(\text{Log } \varrho, (B_1 C_1))$; mais cette structure *dépendrait de la date t_1 choisie*.

Les variables P, Q ont été introduites par Baery [2] et Györgyi [7] comme générateurs d'un groupe dynamique (voir ci-dessous, § 11); Pauri et Onofri [11] ont proposé de les utiliser pour repérer les mouvements. Nous les désignerons dans la suite comme *variables de Baery-Györgyi*.

Il peut être intéressant d'introduire la variable complexe

$$(6.12) \quad z = \sqrt{\varrho} [P + iQ], \quad [z \in \mathbb{C}^1].$$

Il est clair que

$$(6.13) \quad \langle z, z \rangle = 0, \quad z \neq 0$$

$\langle, \rangle$ désignant le produit scalaire prolongé par bilinéarité de celui de $\mathbf{R}^4$; réciproquement, toute solution de (6.13) se met d'une seule façon sous la forme (6.8), (P, Q) appartenant à la variété de Fock, ϱ étant positif: la variété de Képler est difféomorphe au *cône isotrope* de l'espace euclidien complexe de dimension 4. Il en résulte immédiatement que l'on peut la munir d'une structure de variété analytique complexe (de dimension 3).

⁽²⁾ Ce ne serait pas le cas si l'on avait convenu de faire cesser les mouvements après un choc: deux mouvements ayant un même prolongement au travers du choc auraient alors une intersection non vide pour tous leurs voisinages respectifs.

7. Structure symplectique.

On peut définir, sur l'espace d'évolution d'une particule soumise à un champ de forces $\mathbf{F}$, une 2-forme σ par la formule suivante ⁽³⁾:

$$(7.1) \quad \sigma(\delta y, \delta' y) = \langle m\delta\mathbf{v} - \mathbf{F}\delta t, \delta'\mathbf{r} - \mathbf{v}\delta't \rangle - \langle m\delta'\mathbf{v} - \mathbf{F}\delta't, \delta\mathbf{r} - \mathbf{v}\delta t \rangle,$$

δy et $\delta'y$ étant deux variations de la condition initiale $y = (\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$.

Il est facile de constater que les équations du mouvement s'écrivent

$$(7.2) \quad \sigma\left(\frac{dy}{dt}, \delta y\right) = 0, \quad \forall \delta y,$$

ce qui constitue une généralisation du principe des travaux virtuels.

Dans le cas du problème de Képler (et chaque fois que $\mathbf{F}$ dérive d'un potentiel), la dérivée extérieure de σ est nulle (σ est fermée); il en résulte alors que σ est un *invariant intégral absolu*, au sens d'Elie Cartan, des équations du mouvement.

En d'autres termes, on peut définir une 2-forme de l'espace des mouvements U (voir la figure 1), encore notée σ , par la formule

$$(7.3) \quad \sigma(\delta x, \delta' x) = \sigma(\delta y, \delta' y),$$

(la forme de V est l'image réciproque de celle de U par la projection $y \mapsto x$, qui est une application différentiable ouverte).

La 2-forme de U est *régulière* (son rang est égal à la dimension de U , donc 6) et fermée; elle munit donc U d'une structure *symplectique*.

8. Homogénéité.

Une circonstance particulière apparaît ici, en raison de l'homogénéité du potentiel coulombien. Si λ est un nombre $\neq 0$, on constate que la substitution

$$(8.1) \quad r \rightarrow \lambda^2 r \quad v \rightarrow \lambda^{-1} v, \quad t \rightarrow \lambda^3 t,$$

ne change pas les équations du mouvement: elle définit donc un groupe de difféomorphismes de l'espace des mouvements U . La transfor-

⁽³⁾ Voir la référence [14], où l'on trouvera les démonstrations des résultats présentés ici.

mation de h est

$$(8.2) \quad h \rightarrow \lambda^{-2} h,$$

si bien que ces difféomorphismes préservent la variété de Képler.

Leur action sur la forme σ est évidente (en (7.1)):

$$(8.3) \quad \sigma \rightarrow \lambda \sigma.$$

Il en résulte, si l'on définit une dérivation δ_0 en posant

$$\lambda = 1, \quad \delta_0 \lambda = 1,$$

c'est-à-dire

$$\delta_0 r = 2r, \quad \delta_0 v = -v, \quad \delta_0 t = 3t,$$

que la dérivée de Lie de σ est égale à σ (voir [14], p. 103) et que σ est la dérivée extérieure d'une 1-forme $\bar{\omega}$ donnée par

$$\bar{\omega}(\delta y) = \sigma(\delta_0 y, \delta y),$$

c'est-à-dire, grâce à (7.1)

$$(8.4) \quad \boxed{\bar{\omega}(\delta y) = \langle v, \delta r \rangle - h \delta t + \delta[3ht - 2\langle v, r \rangle]} \quad, \quad \forall \delta y.$$

Cette 1-forme est un invariant intégral absolu, contrairement à la forme de Cartan qui est composée des deux premiers termes de l'expression (8.4); on peut donc la calculer sur l'espace des mouvements. En variables de Baery-Györgyi ⁽⁴⁾ on trouve facilement ⁽⁵⁾ la formule particulièrement simple:

$$(8.5) \quad \boxed{\bar{\omega}(\delta x) = \langle \varrho Q_0, \delta P_0 \rangle - \langle \varrho P_0, \delta Q_0 \rangle}.$$

⁽⁴⁾ L'expression est plus compliquée avec les variables de Fock; on trouve $\langle \varrho c, \delta B \rangle - \varrho \delta B_4$.

⁽⁵⁾ Il suffit de choisir $t = 0$ dans (8.4) ce qui donne $\bar{\omega}(\delta y) = -\langle r_0, \delta v_0 \rangle - \delta \langle r_0, v_0 \rangle$; on passe aux variables de Fock par les formules (5.3), puis aux variables de Baery-Györgyi par (6.8).

9. Structure symplectique de la variété de Képler.

Lorsque le mouvement décrit la variété de Képler, la variable Q_0 décrit la sphère unité S_3 de $\mathbb{R}^4$; la variable $\pi_0 = -\varrho P_0$ décrit l'espace vectoriel tangent à S_3 en Q_0 (privé du vecteur nul); on peut identifier π_0 à un covecteur tangent par la structure euclidienne de $\mathbb{R}^4$; on reconnaît alors dans (8.5) la 1-forme fondamentale du fibré cotangent à S_3 ; d'où par dérivation extérieure, le résultat:

La variété de Képler est globalement symplectomorphe au fibré cotangent à la sphère S_3 , privé de sa section nulle.

10. Structure des variétés d'énergie constante.

Puisque la variété de Képler est difféomorphe à $\mathbb{R} \times \Phi$ (6.11), chaque équation $\varrho = \varrho_0$ ($\varrho_0 =$ constante positive) ou $h = -1/2\varrho_0^2$ (cf. (5.4)) définit une sous-variété Φ_{ϱ_0} de la variété de Képler, difféomorphe à la variété de Fock $\Phi = S_3 \times S_2$, donc compacte et de dimension 5.

Un calcul simple montre que la 1-forme induite par la 1-forme $\tilde{\omega}$ (8.5) munit cette variété d'une *structure de contact*; de façon précise Φ_{ϱ_0} est un *fibré en cercles* au dessus d'une variété symplectique de dimension 4, elle-même symplectomorphe au produit symplectique direct de deux sphères S_2 (espace des états stationnaires; voir [14], p. 157). La circulation de $\tilde{\omega}$ sur chaque cercle est égale à $2\pi\varrho_0$.

Par conséquent Φ_{ϱ_0} est une *variété quantique* (ibidem, p. 318) si $\varrho_0 = 1$, c'est-à-dire si $h = -\frac{1}{2}$; compte tenu des unités choisies (1.3), on reconnaît l'état fondamental d'un atome d'hydrogène: l'état stationnaire classique quantifiable a même énergie que celui que l'on déduit de l'équation de Schrödinger.

On trouve les autres états pour $\varrho_0 = n$ ($n \in \mathbb{N}$), en identifiant les sommets d'un polygone régulier à n sommets sur chaque cercle (méthode de *fusion*, ibidem p. 326). On a ainsi retrouvé le spectre discret d'énergie de l'atome d'Hydrogène⁽⁶⁾; la variété de Képler contient en elle-même la quantification de ses états stationnaires.

Notons que l'espace de Planck associé (ib. 363) est constitué des traces, sur chaque variété Φ_n , des fonctions C -homogènes de degré n de la variable z (6.12).

⁽⁶⁾ On montre facilement que Φ_{ϱ_0} n'est pas quantifiable si ϱ_0 n'est pas entier.

11. Groupes dynamiques de la variété de Képler.

Il est bien connu que le groupe des difféomorphismes d'une variété V (noté $\text{Diff}(V)$) se relève canoniquement à son fibré cotangent par un groupe de symplectomorphismes respectant la section nulle. En choisissant $V = S_3$, on a donc le résultat suivant:

(11.1) Le groupe $\text{Diff}(S_3)$ opère symplectiquement sur la variété de Képler.

Les groupes de difféomorphismes de cette variété sont appelés généralement *groupes dynamiques*; on les distingue parfois en « groupes d'invariance » et « groupes de non-invariance » selon que l'action du groupe commute, ou non, avec les translations temporelles; ce qui revient à dire qu'elle conserve le hamiltonien h , donc la variable ϱ .

Ici ϱ est la longueur du vecteur tangent π_0 ; on obtiendra donc un *groupe d'invariance* en se limitant aux difféomorphismes qui conservent la longueur des vecteurs cotangents, c'est-à-dire aux *isométries* de S_3 . Celles-ci sont obtenues par l'action sur S_3 du groupe orthogonal $O(4)$; d'où le théorème:

(11.2) Le groupe $O(4)$ est groupe d'invariance de la variété de Képler; il agit selon la formule

$$(\varrho, P_0, Q_0) \rightarrow (\varrho, AP_0, AQ_0), \quad A \in O(4).$$

Il est clair que les orbites de $O(4)$ sont les variétés d'énergie constante étudiées ci-dessus.

Toute action symplectique d'un groupe de Lie semi-simple donne lieu à la construction d'un *moment* μ , élément du dual de son algèbre de Lie ([14], p. 105).

Ici l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est l'ensemble des matrices antisymétriques 4×4 ; la métrique positive

$$(11.3) \quad \langle Z, Z \rangle = -\frac{1}{2} \text{Tr}(Z^2), \quad \forall Z \in \mathfrak{g},$$

(qui est d'ailleurs égale à la forme de Killing au facteur près $-\frac{1}{4}$) permet d'identifier $\mathfrak{g}$ à son dual. Le moment se calcule immédiatement en remarquant que $O(4)$ laisse invariante la 1-forme $\bar{\omega}$ (ibidem,

p. 107); on trouve

$$(11.4) \quad \mu = \begin{pmatrix} 0 & -l_3 & l_2 & -qe_1 \\ l_3 & 0 & -l_1 & -qe_2 \\ -l_2 & l_1 & 0 & -qe_3 \\ qe_1 & qe_2 & qe_3 & 0 \end{pmatrix},$$

l_1, l_2, l_3 étant les composantes du *moment cinétique*

$$(11.5) \quad \mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} \quad (\times: \text{produit vectoriel}),$$

e_1, e_2, e_3 les composantes du *vecteur de Lenz* [9]

$$(11.6) \quad \mathbf{e} = \mathbf{l} \times \mathbf{v} + \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Le fait que $O(4)$ soit groupe d'invariance — ou, si l'on veut, le théorème de Noether symplectique ⁽⁷⁾ — montre que $\mathbf{l}$ et $\mathbf{e}$ sont des intégrales premières; elles sont connues, d'ailleurs, depuis Laplace, bien que le vecteur $\mathbf{e}$ ne soit pas populaire chez les astronomes. Dès 1926, W. Pauli avait reconnu que les composantes de la matrice μ engendrent par crochets de Poisson, l'algèbre de Lie de $O(4)$ [12]. C'est en 1966 qu'est parue la première recherche de l'action globale du groupe [3].

On peut noter que l'action de $O(4)$ respecte la structure complexe de la variété de Képler (6.13).

Un groupe de « non-invariance » est fournie par les *transformations conformes* de S_3 ; sur toute sphère de dimension > 2 , ce groupe se confond avec le groupe *anallagmatique*, c'est-à-dire le groupe des transformations homographiques de $\mathbb{R}^{n+1}$ qui respectent S_n . Ici ce groupe est isomorphe à $O(4,1)^\uparrow$ (composantes orthochrones du groupe de De Sitter $O(4,1)$). Son action sur S_3 s'obtient en remarquant que le vecteur $\xi = \begin{pmatrix} Q \\ 1 \end{pmatrix}$ est isotrope dans l'espace hyperbolique $E_{4,1}$ de signature $---+$; donc qu'il est transformé par l'action de tout élément M de $O(4,1)$ en un autre vecteur isotrope. Si M est orthochrone, $M\xi$ appartient à la même classe (futur ou passé) que ξ ; il existe donc $\lambda > 0$ tel que

$$(11.7) \quad M\xi = \lambda \begin{pmatrix} Q' \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q' \in S_3.$$

Il suffit de poser $Q' = M(Q)$.

(7) Voir [14], p. 107.

Ainsi:

$O(4, 1)^\uparrow$ est un groupe dynamique de la variété de Képler⁽⁸⁾.

- (11.8) { Les isométries sont un cas particulier des transformations conformes; par conséquent l'action de $O(4, 1)^\uparrow$ prolonge celle de $O(4)$.
On vérifie très facilement que $O(4, 1)^\uparrow$ opère *transitivement* sur la variété de Képler; la théorie des moments ([14], p. 118) laisse donc prévoir que cette action est isomorphe à celle de $O(4, 1)^\uparrow$ sur une orbite de sa représentation coadjointe (confondue ici avec la représentation adjointe).

La vérification directe mène facilement à l'énoncé suivant:

- (11.9) { Soit $E_{4,1}$ un espace euclidien hyperbolique de signature $---+$. Soit $\mathfrak{G}_{4,1}$ l'algèbre de Lie du groupe $O(4, 1)^\uparrow$ de E , c'est-à-dire des éléments de $L(E, E)$ qui sont antisymétriques pour la structure euclidienne.
Soit Ω l'ensemble des $Z \in \mathfrak{G}_{4,1}$ dont l'ensemble de valeurs est de dimension 2 et non régulier⁽⁹⁾.
Alors:
1) Ω est une orbite de la représentation (co)-adjointe de $O(4, 1)$; sa dimension est 6.
2) Si l'on a choisi une base orthonormale de $E_{4,1}$ tout élément $Z \in \Omega$ y est représenté par une matrice 5×5 ⁽¹⁰⁾
$$\varrho \begin{pmatrix} Q\bar{P} - P\bar{Q} & P \\ \bar{P} & 0 \end{pmatrix}, \quad \varrho > 0; P, Q \in S_3; \langle P, Q \rangle = 0.$$

3) La bijection de Ω avec la variété de Képler que l'on obtient en identifiant ϱ, P, Q avec les variables de Györgyi-Baery est un symplectomorphisme⁽¹¹⁾.
4) L'action de $O(4, 1)^\downarrow$ sur Ω est alors isomorphe à l'action anallagmatique définie ci-dessus.

⁽⁸⁾ $O(4, 1)$ complet opère évidemment, mais *pas effectivement*.

⁽⁹⁾ C'est-à-dire que la métrique induite de la métrique euclidienne de $E_{4,1}$ est dégénérée.

⁽¹⁰⁾ Nous désignons par X la ligne transposée d'une colonne X .

⁽¹¹⁾ On rappelle que toute orbite coadjointe est munie canoniquement d'une structure symplectique [8], [14], p. 116.

Cette même méthode permet de prolonger l'action de $O(4,1)^\uparrow$ par celle de $O(4,2)$ ⁽¹²⁾.

- (11.10) { Soit $E_{4,2}$ un espace euclidien de signature $----++$.
 Soit $\mathfrak{G}_{4,2}$ l'algèbre de Lie de $O(4,2)$.
 Soit Ω' l'ensemble des éléments Z de $\mathfrak{G}_{4,2}$ qui vérifient
- $$Z^2 = 0, \quad Z \neq 0.$$
- Alors:
- 1) Ω' est une orbite de la représentation (co)-adjointe de $O(4,2)$; sa dimension est 6.
 - 2) Dans une base orthonormale de $E_{4,2}$, tout élément $Z \in \Omega'$ est représenté par une matrice 6×6 :

$$\varrho \begin{pmatrix} Q\bar{P} - P\bar{Q} & P & \bar{Q} \\ \bar{P} & 0 & 1 \\ \bar{Q} & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varrho \neq 0; \quad P, Q \in S_3; \quad \langle P, Q \rangle = 0.$$
 - 3) Ω' possède deux composantes connexes, $\varrho > 0$ et $\varrho < 0$; chacune d'elles est symplectomorphe à la variété de Képler.

Le sous-groupe de $O(4,2)$ qui conserve chaque composante de Ω' est donc un *groupe dynamique* de la variété de Képler; il s'agit du groupe orthochrome $O(4,2)^\uparrow$. Notons que le groupe complet $O(4,2)$ agit par symplectomorphismes et anti-symplectomorphismes (en identifiant deux points opposés de Ω').

Ce groupe dynamique $O(4,2)^\uparrow$ prolonge l'action de $O(4,1)^\uparrow$; ce n'est pas un sous-groupe du groupe dynamique $\text{Diff}(S_3)$.

12. Indications sur les mouvements à énergie positive.

Soit H_3 l'hyperboloïde unité de l'espace de Minkowski:

$$H_3 = \{Q; Q \text{ est un vecteur unitaire du genre futur} \}.$$

Il est facile, par transposition des calculs précédents, de vérifier que l'espace des mouvements à énergie positive est symplectomorphe au fibré cotangent à H_3 privé de sa section nulle.

Il en résulte évidemment que tout groupe de difféomorphismes de H_3 se relève par un groupe de symplectomorphismes de la variété;

⁽¹²⁾ Cette action a été donnée au niveau de l'algèbre de Lie par Györgyi [7]; globalement par Onofri et Pauri [11].

notamment les isométries de la variété riemannienne H_3 fournissent un *groupe d'invariance*; il est isomorphe à $O(3,1)^\uparrow$ (groupe de Lorentz orthochrone ⁽¹³⁾).

Il est facile de réaliser sur la variété l'algèbre de Lie des groupes $O(3,2)$ et $O(4,2)$, respectivement correspondants aux groupes $O(4,1)$ et $O(4,2)$ dans le cas de l'énergie négative.

Mais ces groupes *n'opèrent pas* sur la variété des mouvements; les champs de vecteurs associés à leurs générateurs ne sont pas complets.

D'ailleurs H_3 est difféomorphe à $\mathbb{R}^3$; l'espace des mouvements à énergie positive est donc symplectomorphe au cotangent de $\mathbb{R}^3$ privé de sa section nulle: en d'autre termes il existe un système de coordonnées canoniques global (p_i, q_i) , astreint à la seule condition $(p_1, p_2, p_3) \neq 0$.

⁽¹³⁾ On rappelle que ce groupe munit H_3 de la géométrie de Lobatchevski.

Testo pervenuto il 22 gennaio 1973.

Bozze licenziate il 10 ottobre 1974.

RÉFÉRENCES

- [1] L. AUSLANDER et B. KOSTANT, Bull. Amer. Math. Soc., 73 (1967), 692.
- [2] H. BACRY, Nuovo Cimento (X), 41 (1966), 222.
- [3] H. BACRY, H. RUEGG et J.-M. SOURIAU, Commun. Math. Phys., 3 (1966), 323.
- [4] A. O. BARUT et H. KLEINERT, Phys. Rev., 156 (1967), 1541.
- [5] A. O. BARUT et H. KLEINERT, Phys. Rev., 157 (1967), 1180.
- [6] V. FOCK, Z. Phys., 98 (1935), 145.
- [7] G. GYÖRGYI, Nuovo Cimento, 53 (1968), 717.
- [8] A. A. KIRILLOV, Uspehi Mat. Nauk., 17 (1962), 57.
- [9] P. S. de LAPLACE, *Oeuvres*.
- [10] J. MOSER, Commun. P. App. Math., 23 (1970), 609.
- [11] E. ONOFRI et M. PAURI, Preprint, Univ. di Parma (1971).
- [12] W. PAULI, Z. Phys., 36 (1926), 336.
- [13] J. M. SOURIAU, Comm. Math. Phys., 1 (1966), 374.
- [14] J. M. SOURIAU, *Structure des Systèmes Dynamiques* (1970).

