

COLLOQUES INTERNATIONAUX  
DU  
CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

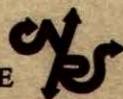
N° 220

# ONDES ET RADIATIONS GRAVITATIONNELLES

Paris  
Institut Henri Poincaré  
18 - 22 Juin 1973

*EXTRAIT*

CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE





# LE MILIEU ÉLASTIQUE SOU MIS AUX ONDES GRAVITATIONNELLES

par Jean-Marie SOURIAU \*\*

Le but de ce travail est d'examiner dans quelle mesure on peut traiter *exactement* l'action d'une onde gravitationnelle sur un corps élastique.

Il ne s'agit pas tant de calculer ce qui se passe dans certaines circonstances assez idéales, mais de permettre de vérifier, par comparaison, les diverses méthodes d'approximation que l'on peut être amené à utiliser.

## 1 – EQUATION DES ONDES PLANES

Nous allons utiliser la solution exacte des équations d'Einstein due à BONDI (1957), KUNDT & EHLERS (1962), qui se trouve exposée dans le *Traité de LANDAU & LIFCHITZ (Théorie du Champ, § 102)*.

On suppose qu'il existe des coordonnées  $x^\mu$  :

$$x^0 = \eta, x^1, x^2, x^3 ; \quad (1)$$

par commodité, on regroupe  $x^2$  et  $x^3$  en une matrice colonne  $x = \begin{pmatrix} x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$  ; nous noterons  $\bar{x}$  la ligne transposée :  $\bar{x} = (x^2 x^3)$ .

On suppose que les  $x^\mu$  forment un système de coordonnées de l'espace-temps, et que dans ce système, la matrice des potentiels de gravitation  $g_{\mu\nu}$  est de la forme

$$- \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & (G) & \end{pmatrix} \quad (2)$$

G étant une matrice  $2 \times 2$ , symétrique, fonction de la seule variable  $x^0 = \eta$  ; la signature + --- de l'espace exige que G soit positive définie.

-----

(\*) Professeur à l'Université de Provence

Le calcul du tenseur de courbure donne facilement la formule

$$R_{\lambda\mu, \nu\rho} dx^\lambda \delta x^\mu d'x^\nu \delta'x^\rho = \Phi(u, u') \quad (3)$$

où  $d, \delta, d', \delta'$  sont quatre dérivations arbitraires : on a posé

$$u = dx \delta\eta - \delta x d\eta, \quad u' = d'x \delta'\eta - \delta'x d'\eta;$$

$\Phi$  est une forme bilinéaire symétrique sur  $\mathbf{R}^2$  dont la matrice est

$$\ddot{G} - \frac{1}{2} \dot{G} G^{-1} \dot{G} \quad (5)$$

(le point désigne la dérivation par rapport à  $\eta$ ).

Si on considère le tenseur de courbure comme un élément de  $\mathbf{L}(\Omega, \Omega)$ ,  $\Omega$  étant l'espace des 2-formes, on déduit facilement de (3) qu'il est *nilpotent* (il est nul sur son espace de valeurs) ; son rang est celui de  $\Phi$  (donc  $\leq 2$ ).

On déduit de (3) une formule caractéristique du tenseur de Ricci  $R_{\lambda\mu}$  :

$$R_{\lambda\mu} \delta x^\lambda \delta'x^\mu = -\frac{1}{2} \text{Tr} \left( G^{-1} \left[ \ddot{G} - \frac{1}{2} \dot{G} G^{-1} \dot{G} \right] \right) \delta\eta \delta'\eta \quad (6)$$

qui montre que ce tenseur est aussi nilpotent, de rang  $\leq 1$ .

Nous allons maintenant étudier géométriquement une onde avec les hypothèses suivantes :

L'onde se propage dans le vide (ou à travers une matière dont l'effet de source est négligeable) ; elle est comprise entre deux hypersurfaces  $\eta = \eta_1, \eta = \eta_2$ .

Nous aurons donc à écrire les équations différentielles :

$$\ddot{G} - \frac{1}{2} \dot{G} G^{-1} \dot{G} = 0 \quad \text{pour } \eta < \eta_1 \text{ ou } \eta > \eta_2 \quad (7)$$

$$\text{Tr} \left( G^{-1} \left[ \ddot{G} - \frac{1}{2} \dot{G} G^{-1} \dot{G} \right] \right) = 0 \quad \text{pour } \eta \in [\eta_1, \eta_2]. \quad (8)$$

L'équation (7) s'intègre facilement : par dérivation, elle donne  $\ddot{G} = 0$  ; d'où  $\dot{G} = \dot{G}_0 = \frac{1}{2} \dot{G}_0 G_0^{-1} \dot{G}_0$  (en désignant par l'indice 0 les valeurs correspondant à  $\eta = \eta_0$  arbitraire) ; d'où, par deux intégrations

$$G = G_0 + \dot{G}_0 (\eta - \eta_0) + \dot{G}_0 G_0^{-1} \dot{G}_0 \frac{(\eta - \eta_0)^2}{4};$$

ce qui s'écrit aussi

$$G = \left[ G_0 + \frac{\eta - \eta_0}{2} \dot{G}_0 \right] G_0^{-1} \left[ G_0 + \frac{\eta - \eta_0}{2} \dot{G}_0 \right] \quad (9)$$

ou encore, en se souvenant que  $G$  est positive,

$$G = G_0^{1/2} [I + (\eta - \eta_0) C_0]^2 G_0^{1/2} \quad (10)$$

en posant

$$C_0 = 1/2 G_0^{-1/2} \dot{G}_0 G_0^{-1/2} \quad (11)$$

Il existe évidemment un changement de carte rendant manifeste le caractère plat de l'espace à l'extérieur de l'onde ; il est donné par les formules réciproques :

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \xi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta \\ x^1 - 1/2 \bar{x} G_0^{1/2} C_0 [I + C_0 (\eta - \eta_0)] G_0^{1/2} x \\ [I + C_0 (\eta - \eta_0)] G_0^{1/2} x \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$\begin{pmatrix} \eta \\ x^1 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta \\ \xi + 1/2 z C_0 [I + C_0 (\eta - \eta_0)]^2 z \\ G_0^{-1/2} [I + C_0 (\eta - \eta_0)]^{-1} z \end{pmatrix} \quad (13)$$

où les nouvelles variables  $\xi, z$  appartiennent respectivement à  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{R}^2$ . Avec ces variables le  $ds^2$  est donné par la formule à coefficients constants

$$ds^2 = -2 d\xi d\eta - \bar{d}z dz \quad (14)$$

que l'on peut immédiatement ramener à la forme normale de Minkowski.

A l'intérieur de l'onde, nous avons la seule équation scalaire (8), qui peut d'ailleurs s'écrire :

$$\text{Tr} \left( \dot{K} + \frac{1}{2} K^2 \right) = 0 \quad (\text{avec } K = G^{-1} \cdot \dot{G}) ; \quad (15)$$

On peut poser

$$\chi = [\det(G)]^{1/4}, \quad \Gamma = \chi^{-2} G \quad (16)$$

ce qui équivaut à

$$G = \chi^2 \Gamma, \quad \chi > 0, \quad \det(\Gamma) = 1 \quad (16 \text{ bis})$$

et entraîne

$$K = 2 \frac{\dot{\chi}}{\chi} I + \Gamma^{-1} \dot{\Gamma} \quad (17)$$

Comme  $\text{Tr}(\Gamma^{-1}\dot{\Gamma}) = 0$  (cf. (16 bis)), l'équation (15) s'écrit donc

$$\ddot{\chi} + \frac{\chi}{8} \text{Tr}([\Gamma^{-1} \cdot \dot{\Gamma}]^2) = 0 \quad (18)$$

ou encore, puisque  $\Gamma$  est une matrice positive

$$\ddot{\chi} + \frac{\chi}{8} \text{Tr}([\Gamma^{-1/2} \dot{\Gamma} \Gamma^{-1/2}]^2) = 0 \quad (19)$$

Ceci montre que la matrice unimodulaire  $\Gamma$  est, dans une certaine mesure, une fonction arbitraire de  $\eta$  dans l'intervalle  $[\eta_1, \eta_2]$ ; il faut ensuite choisir  $\chi$  solution de l'équation différentielle linéaire (19); et vérifier que  $\chi$  reste *positive* dans l'intervalle.

Remarquons que la matrice  $\Gamma^{-1/2} \dot{\Gamma} \Gamma^{-1/2}$  est symétrique, donc que son carré est une matrice positive, donc de trace  $\geq 0$ : l'équation (19) montre donc que  $\ddot{\chi}$  est  $\leq 0$ , donc que  $\chi$  est une fonction *concave*. (20)

## 2 - ISOMETRIES

### Théorème

La métrique (2) possède un groupe d'isométries de dimension 5. (21)

Choisissons en effet une constante  $a$ , deux constantes vectorielles

$$V, W (\in \mathbf{R}^2);$$

on vérifie facilement que la substitution

$$\begin{pmatrix} \eta \\ x^1 \\ x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \eta \\ x^1 + \bar{V}x - \frac{1}{2} \bar{V}HV + a \\ x - HV + W \end{pmatrix} \quad (22)$$

où la matrice  $H$  est une primitive arbitraire de  $G^{-1}$ , par exemple

$$H = \int_{\eta_0}^{\eta} G(\eta)^{-1} d\eta \quad (23)$$

conserve le  $ds^2$ , et définit donc une isométrie. Si l'on désigne la substitution (22) par la notation  $\{V, W, a\}$ , on trouve immédiatement la loi de composition

$$\{V', W', a'\} \circ \{V, W, a\} = \{V' + V, W' + W, a' + a + \bar{V}'W\} \quad (24)$$

qui est bien loi de composition d'un groupe de Lie de dimension 5, produit semi-direct de  $(\mathbf{R}^4, +)$  par  $(\mathbf{R}, +)$ , et visiblement non commutatif.

C.Q.F.D.

Remarquons d'ailleurs que ce groupe agit en particulier en *dehors de l'onde*, donc par isométries de l'espace euclidien : il doit donc s'identifier à un sous-groupe du groupe de Poincaré, et ceci aussi bien avant qu'après le passage de l'onde. De fait, l'action de la transformation  $(V, W, a)$  à l'aide des variables (12) donne la substitution affine

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \xi \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\bar{V}V/2 & 1 & -\bar{V} \\ V & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ Y \end{pmatrix} \quad (25)$$

où l'on a posé

$$Y = G_0^{1/2}W, \quad b = a - \bar{Y}C_0Y; \quad (26)$$

et ces transformations constituent bien un sous-groupe de dimension 5 du groupe de Poincaré (compte tenu de la métrique (14)).

Les orbites du groupe sont évidentes sur (22) : ce sont les hypersurfaces  $\eta = C^{te}$ .

### 3 - ETUDE DES GEODESIQUES

La recherche des géodésiques de la métrique (2) constitue un problème variationnel invariant par un groupe de Lie ; l'application du théorème de Noether fournit donc 5 intégrales premières, à savoir :

$$G \frac{dx}{ds}, \quad x \frac{d\eta}{ds} - HG \frac{dx}{ds}, \quad \frac{d\eta}{ds} \quad (27)$$

$s$  désignant un paramètre naturel des géodésiques ; il faut bien entendu joindre la relation de Jacobi

$$2 \frac{d\eta}{ds} \frac{dx^1}{ds} + \frac{\bar{dx}}{ds} G \frac{dx}{ds} = C^{te} \quad (28)$$

qui exprime que  $s$  est proportionnel à l'abscisse curviligne ; pour une géodésique du genre temps, la quantité (28) est négative ; comme  $G$  est positive, la constante  $\frac{dn}{ds}$  n'est pas nulle ; on peut donc la choisir égale

à 1, c'est-à-dire prendre  $\eta$  comme paramètre naturel de la géodésique. Les deux premières grandeurs (27), notées E et D, fournissent la relation

$$x = H(\eta) E + D \quad (29)$$

quant à la relation (28), elle donne après deux quadratures

$$x^1 = -\frac{1}{2} \bar{E} H(\eta) E - e\eta + f \quad (30)$$

où la constante négative (28) est prise égale à  $-2e$  ;

On a donc complètement intégré l'équation des géodésiques de genre temps, au moyen des constantes D, E, e, f.

Par ailleurs, le groupe d'isométrie trouvé ci-dessus agit sur les géodésiques ; en utilisant les formules (22), (29), (30) on trouve l'action de  $\{v, w, a\}$  sur les constantes d'intégration :

$$(D, E, e, f) \mapsto (D + W, E - V, e, f + a + VD). \quad (31)$$

Il est clair sur cette formule, que l'on peut, par l'action du groupe, annuler les constantes D, E, f ; c'est-à-dire appliquer une géodésique *quelconque* sur la géodésique

$$\begin{cases} x = 0 \\ x^1 = -e\eta \end{cases} \quad (32)$$

Autrement dit, pour une géodésique donnée, on peut *choisir les coordonnées* (1) de façon que l'équation de la géodésique soit (32) ; les formules (12) montrent que cette équation s'écrira, aussi bien avant qu'après le passage de l'onde

$$\begin{cases} z = 0 \\ \xi = -e\eta \end{cases} \quad (33)$$

#### 4 - ACTION DE L'ONDE SUR UN NUAGE DE POUSSIÈRE

Supposons maintenant que la géodésique que nous venons de choisir soit la ligne d'univers d'un grain de poussière appartenant à un nuage au repos *avant* le passage de l'onde. Les lignes d'univers des autres grains de poussière sont donc des géodésiques parallèles entre elles, d'équation (Cf. (33)) :

$$z = z_0, \xi + e\eta = \xi_0 + e\eta_0. \quad (34)$$

Nous pouvons prolonger ces équations pendant la traversée de l'onde :

les constantes du mouvement du paragraphe précédent prennent les valeurs :

$$E = -G_0^{1/2} C_0 z_0, \quad D = G_0^{1/2} z_0, \quad f = \xi_0 + e\eta_0 + \frac{1}{2} \bar{z}_0 C_0 z_0 \quad (35)$$

en portant dans les équations des géodésiques (29, 30) il vient :

$$\begin{cases} x = [-HG_0^{1/2} C_0 + G_0^{-1/2}] z \\ x^1 = \frac{1}{2} \bar{z} [C_0 - C_0 G_0^{1/2} H G_0^{1/2} C_0] z + \xi; \end{cases} \quad (36)$$

ces formules fournissent évidemment un *prolongement* du changement de coordonnées (13) qui avait été établi en dehors de l'onde ; le calcul du  $ds^2$  avec les variables  $\eta, \xi, z$  donne

$$-ds^2 = 2 d\eta d\xi + \bar{d}z G^* dz \quad (37)$$

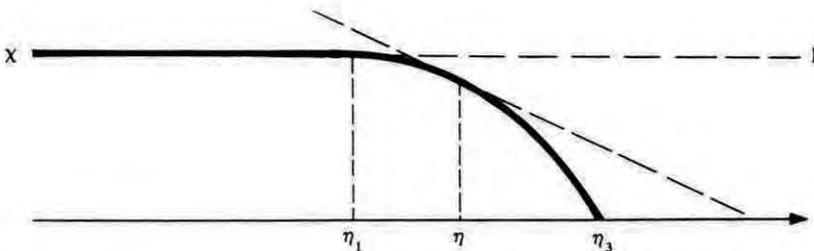
avec

$$G^* = [G_0^{-1/2} - C_0 G_0^{1/2} H] G [G_0^{-1/2} - H G_0^{1/2} C_0] \quad (38)$$

ce qui montre que les nouvelles coordonnées sont encore du type (2),  $G^*$  étant la nouvelle valeur de  $G$  (c'est encore une fonction de  $\eta$  seul).

Nous pouvons donc supposer que ce sont ces nouvelles coordonnées qui ont été choisies initialement ; en portant dans (36), on trouve alors  $G_0 = I, C_0 = 0$  et par conséquent (Cf. (10))  $G \equiv I$  avant le passage de l'onde.

Nous pouvons faire le graphique de la fonction  $\chi = \det(G)^{1/4}$ , dont nous savons qu'elle est concave en  $\eta$ , qu'elle vaut 1 pour  $\eta \leq \eta_1$ , et qu'elle n'est plus égale à 1 pour  $\eta \geq \eta_1$ , (sinon  $\ddot{\chi}$  serait nul, donc aussi  $\dot{\Gamma}$  (19), et par conséquent l'espace resterait euclidien, il n'y aurait pas d'onde).



la concavité montre que  $\chi$  s'annule nécessairement pour une valeur  $\eta_3$  de  $\eta$  ( $\eta_3$  peut être supérieure ou non à  $\eta_2$ ), et que par conséquent le système de coordonnées adopté devient singulier au bout d'un certain temps.

Cette singularité n'a d'ailleurs rien d'étonnant a priori : les coordonnées que nous avons choisies sont liées à une famille de géodésiques, primitivement parallèles ; après perturbation par le passage de l'onde, celles-ci finiront par ne plus former de système de coordonnées différentiables (c'est l'effet connu en optique sous le nom de "caustique").

Comme cas particulier de cette étude, on peut traiter l'onde de choc gravitationnelle : on suppose confondues les dates  $\eta_1$  et  $\eta_2$ , c'est-à-dire que l'équation (7) est valable immédiatement après le choc ; comme  $G$  valait 1 auparavant, et est continue, la formule (10) donne

$$G = [1 + \eta C_0]^2 \quad \text{pour} \quad \eta > 0 \quad (39)$$

(nous avons choisi  $\eta_1 = \eta_2 = 0$ ).

On a alors (15)

$$\chi = \sqrt{(1 + \eta k)(1 + \eta l)} \quad (40)$$

$k$  et  $l$  étant les valeurs propres de  $C_0$  ; l'équation (18)

$$\ddot{\chi} + \frac{\dot{\chi}}{8} \text{Tr}([\Gamma^{-1} \dot{\Gamma}]^2) = 0 \quad (41)$$

qui se trouve aussi bien vérifiée pour  $\eta < 0$  que  $\eta > 0$  donne pour  $\eta = 0$

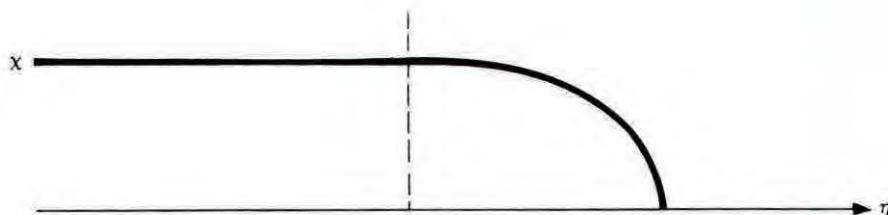
$$\dot{\chi} \text{ continue} \quad (42)$$

la courbe  $\chi = f(\eta)$  n'a pas de point anguleux à l'origine ; ce qui impose évidemment

$$k + l = 0 \quad (43)$$

ou encore

$$\text{Tr}(C_0) = 0 \quad (44)$$



ainsi s'expriment les conditions de choc, elles-mêmes déduites de l'équation d'Einstein. La formule (40) donne alors

$$\chi = \sqrt{1 - \eta^2 k^2} \quad (45)$$

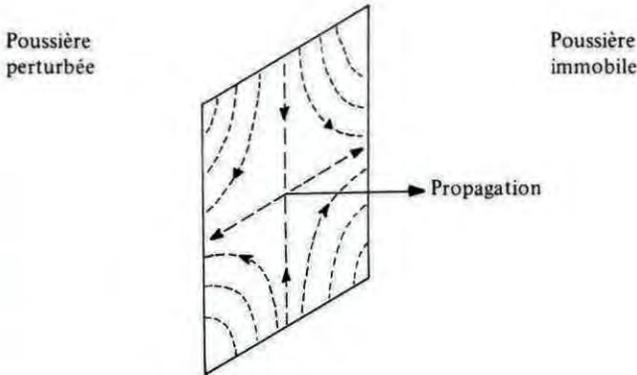
$k$  et  $-k$  étant les valeurs propres de  $C_0$ .

Il est facile d'interpréter l'équation des géodésiques dans ce cas particulier : après le passage de l'onde, dans un espace-temps désormais plat, l'état de quadrivitesse des poussières n'est plus celui du repos dans aucun référentiel de Lorentz ; tout se passe comme si les particules avaient subi une *percussion*, leur communiquant instantanément une certaine vitesse ; et cependant les quadrivitesse n'ont, en fait, subi aucune discontinuité.

L'état de vitesses se déduit immédiatement de l'équation des géodésiques ; au premier ordre en  $C_0$ , on trouve une *vitesse située dans le plan d'onde*, donnée par la formule

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{C_0 z}{\sqrt{2e}} \quad (46)$$

ce qui conduit à la figure suivante :



L'effet le plus important des termes quadratiques en  $C_0$  est l'apparition d'une vitesse *dans la direction de propagation de l'onde*, de mesure

$$\frac{k^2 \|z\|^2}{4e} \quad (47)$$

Il ne faut pas oublier que la ligne centrale —constituée des poussières qui restent immobiles après le passage de l'onde— a été choisie *arbitrairement* ; donc que la répartition de vitesse indiquée est "transportable" en tout point.

Du point de vue quadridimensionnel, l'espace-temps est muni d'une structure géométrique *complètement définie* ; on peut choisir deux systèmes de coordonnées locales  $(\eta, \xi, u, v)$  et  $(\eta^*, \xi^*, u^*, v^*)$  qui se raccordent (pour  $|\eta| < 1$ ) selon la formule

$$\eta^* = \eta ; \xi^* = \xi - \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + \frac{\eta}{2}(v^2 - u^2) ;$$

$$u^* = [1 + \eta]u ; v^* = [1 - \eta]v \quad (48)$$

le  $ds^2$  étant égal à  $-2 d\eta d\xi - du^2 - dv^2$  pour  $\eta < 0$ , à

$$-2 d\eta^* d\xi^* - du^{*2} - dv^{*2}$$

pour  $\eta > 0$ , et se prolongeant par continuité pour  $\eta = 0$ . Bien entendu cette variété possède toujours un groupe d'isométrie de dimension 5. Il en résulte que l'onde de choc plane gravitationnelle *fonctionne par tout ou rien* : il n'existe aucun paramètre ajustable caractérisant l'"intensité" de l'onde. Ce fait n'est peut-être pas aussi inquiétant, physiquement, qu'on pourrait le croire ; comme nous l'avons vu, l'effet produit sur la poussière se mesure par la quantité  $k/\sqrt{2e}$  ; ce nombre dépend évidemment de la quadrivitesse du laboratoire par rapport auquel la poussière est au repos (de même, l'"énergie" d'un rayon cosmique n'a de sens que relativement au laboratoire terrestre qui le reçoit).

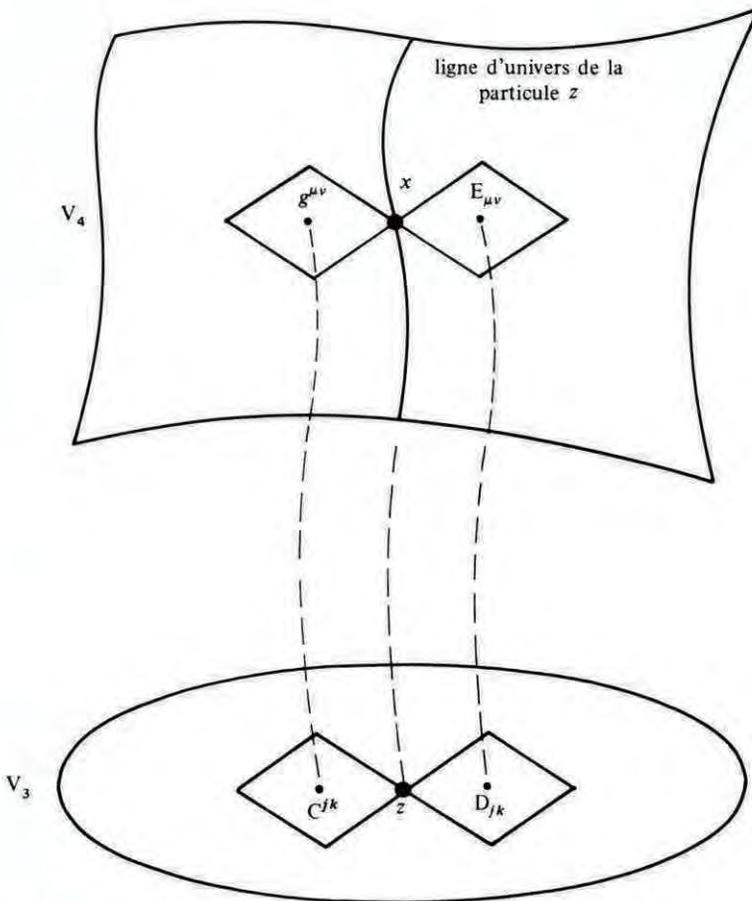
## 5 - ACTION SUR LE MILIEU ELASTIQUE

Dans cette solution exacte des équations d'Einstein, nous pouvons étudier le comportement du milieu élastique (supposé passif) par des équations exactes de l'élasticité relativiste (J.M. SOURIAU, Alger Mathématiques, V.2, pp. 103-170 (1958)); pour une description détaillée, voir "Géométrie et Relativité", Hermann ed., Paris, 1964). Donnons-en rapidement la description géométrique : les molécules sont repérées par les points d'une variété  $V_3$  ; leur *mouvement* est donc une application  $x \mapsto z$  de l'espace-temps  $V_4$  sur  $V_3$  ; l'*image directe* du tenseur contravariant  $g^{\mu\nu}$  (au point  $x$ ) par cette application, est un tenseur symétrique  $C^{jk}$  (la "conformation") [ $j, k = 1, 2, 3$ ] au point  $z$  [ $C^{jk} = g^{\mu\nu} \partial_\mu z^j \partial_\nu z^k$ ] ; il existe une fonction  $l(z, C)$  définie sur  $V_3$  (ou si l'on préfère sur l'espace fibré des tenseurs contravariants symétriques de  $V_3$ ), qui caractérise les propriétés élastiques du milieu ; l'application inconnue  $x \mapsto z$  doit rendre stationnaire l'intégrale d'action

$$\alpha = \int l(z, C) \sqrt{|g|} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$$

La dérivation de  $l$  par rapport aux  $C^{jk}$  définit un tenseur covariant symétrique  $D$  de  $V_3$  :

$$\delta l = D_{jk} \delta C^{jk} \quad (\text{si } \delta z = 0) ; \quad (50)$$



*l'image réciproque* par  $x \mapsto z$  de ce tenseur  $D$  est un tenseur symétrique  $E_{\mu\nu}$  au point  $x$  :  $E_{\mu\nu} = D_{jk} \partial_\mu z^j \partial_\nu z^k$  ; le *tenseur d'énergie*  $T$  du milieu, qui se définit aisément en faisant varier les  $g^{\mu\nu}$  dans l'action (49) est alors donné par

$$T_{\mu\nu} = l g_{\mu\nu} - 2 E_{\mu\nu} \quad (51)$$

ce qui montre (à cause de la définition de  $E_{\mu\nu}$ ) que  $T$  possède la *quadrivitesse* du milieu comme *vecteur propre*, avec la *valeur propre*  $l$ .

On démontre alors que les équations aux variations sont équivalentes à l'équation "de conservation"

$$\operatorname{div} T = 0 \quad (52)$$

(div désignant la divergence riemannienne), et que celle-ci est d'ailleurs surabondante (on possède 4 équations pour chercher les 3 variables  $z^i$ ).

Les différentes symétries éventuelles du milieu (homogénéité, isotropie, symétries discrètes cristallines) se caractérisent toutes par l'existence d'un groupe de difféomorphismes de  $V_3$  respectant la fonction  $l$ .

Cette procédure donne en particulier le cas des fluides ( $l$  ne dépend de  $C$  que par l'intermédiaire de son déterminant), et plus particulièrement de la *poussière*, caractérisée par l'absence de tensions internes, c'est-à-dire par le fait que les valeurs propres de  $T$  sont  $(l, 0, 0, 0)$ ; ce qui équivaut à la forme suivante pour la fonction lagrangienne

$$l = f(z) |\det (C^{jk})|^{1/2} \quad (53)$$

la fonction  $f(z)$  étant, du point de vue géométrique, une *densité* de  $V_3$ .

Dans les milieux élastiques que l'on expérimente, les tensions internes sont toujours très petites devant  $\rho c^2$  ( $\rho$  étant la densité propre du milieu, c'est-à-dire  $l(z, C)$  et  $c$  la vitesse de la lumière); il est donc indiqué d'écrire leur lagrangien sous la forme

$$l = f(z) |\det (C^{jk})|^{1/2} + \frac{1}{c^2} w(z, C^{jk}) \quad (54)$$

$w$  étant le terme responsable des tensions.

Cette *écriture* devient une *hypothèse* dans la procédure de passage à la mécanique newtonienne, qui consiste d'abord à se placer en relativité restreinte, puis à faire tendre  $c$  vers l'infini. Alors  $w(x, C^{jk})$  s'interprète comme *densité d'énergie élastique* et devient une *fonction de la déformation*; elle fournit la relation *énergie-contrainte-déformation* la plus générale pour un milieu élastique conservatif (en général non-linéaire, non-homogène, et non-isotrope); on obtient un système d'équations composé de *l'équation de continuité*, *l'équation d'Euler* (avec la contrainte définie par  $w$ ) et de l'équation surabondante mentionnée ci-dessus, à savoir *l'équation de Bernoulli généralisée*, qui rend manifeste le transfert interne d'énergie; le principe variationnel (49) se confond avec le *principe d'Hamilton* (voir les références ci-dessus).

Revenons au corps élastique soumis aux ondes gravitationnelles. Ici, *il n'y a pas d'approximation à faire*: les mesures élastiques faites sur le milieu donnent *directement* la fonction lagrangienne  $l$ , sous la forme (54); l'intégration des équations peut se faire numériquement: elle est facilitée par l'existence du principe variationnel (49).

Nous savons par ailleurs, grâce au théorème de Noether, qu'il existe 5 grandeurs conservées, associées aux 5 générateurs du groupe d'isométrie défini au § 2; à tout générateur  $Z^\mu$  correspond le flux du vecteur  $T_\nu^\mu Z^\nu$  à

travers une surface du genre espace arbitraire —ou encore d'un front d'onde  $\eta = C^{te}$ , puisque celui-ci coupe toutes les lignes de courant.

Deux de ces grandeurs conservées sont des combinaisons des composantes du moment cinétique et des coordonnées du barycentre ; deux autres sont les composantes de l'impulsion dans la direction du plan d'onde ; enfin la dernière est la *différence* entre l'énergie et la *mesure de l'impulsion dans la direction de propagation de l'onde*.

Dans le cas d'un milieu préalablement au repos sans contrainte, le passage de l'onde fournit nécessairement de l'énergie ; cette dernière grandeur conservée montre donc que l'onde *pousse* le corps élastique, en lui communiquant une impulsion dans le sens de la propagation ; bien entendu cet effet est observé par rapport à la particule centrale que nous avons prise comme repère. Dans le cas de la poussière, il est responsable de la vitesse longitudinale que nous avons calculée en (47), et qui serait négligée dans la théorie linéarisée.

Ce calcul permet évidemment de tester numériquement les différentes hypothèses sur le *profil* de l'onde gravitationnelle ; le cas le plus simple étant évidemment celui de l'onde de choc, car l'état de vitesse *coïncide avec celui que nous avons calculé dans le cas de la poussière*. Dans tous les cas, après le passage de l'onde, l'espace-temps est plat, on est ramené à un problème d'élasticité classique avec conditions initiales.

## DISCUSSION

### SOURIAU/DESER

Serait-il possible de généraliser ce formalisme si élégant pour les ondes planes dans le vide au cas général, puisque localement la métrique a toujours cette forme ?

*Réponse* : Je crains que la possibilité de résoudre facilement les équations de champ soit liée à la forme globale du  $ds^2$  (qui entraîne automatiquement l'existence d'un groupe d'isométrie). Si on est près de la source, l'onde n'est plus plane, sa symétrie est moindre ; la généralisation éventuelle du formalisme serait certainement beaucoup moins simple.

### SOURIAU/MAEDER

Il me semble que pour calculer la réponse d'un détecteur (par exemple cylindre de Weber) on n'ait pas besoin d'appliquer le formalisme complet décrit. Pour ce qui concerne le profil inconnu de l'onde, on peut en effet

faire le calcul d'abord pour une impulsion de courte durée, et ensuite obtenir –à l'aide d'une intégrale de convolution– la réponse à une onde de profil arbitrairement donné.

*Réponse* : On ne peut pas appliquer la convolution – les phénomènes sont non-linéaires.

Maeder : Pensez-vous que pour des déformations relatives de  $10^{-16}$  (cylindres de Weber !) la matière se comporte de façon non linéaire ?

*Réponse* : Bien sûr que non. Le but de cette étude est de justifier la validité des solutions linéarisées par l'existence de solution du cas général.