

- DU BON USAGE DES ELASTIQUES -

Jean-Marie SOURIAU^{*}

APRIL 1973

73/P.533

^{*}

Professeur à l'Université de Provence - Marseille

Communication aux Journées Relativistes de Clermont-Ferrand,
présentée le 7 avril 1973 ,

Adresse Postale : Centre de Physique Théorique - C.N.R.S.
=====

31, chemin J. Aiguier
13274 MARSEILLE CEDEX 2
(France)

L'usage des élastiques que nous recommandons, et allons étudier de façon approfondie, consiste d'abord à les couper avec des ciseaux (afin d'éviter des difficultés de topologie différentielle) ; puis à les lancer (de préférence dans le vide) avec un état de vitesse arbitraire ; et à les observer avec soin.

- EXPERIENCE -

THEORISATION
=====

1°) - Mécanique rationnelle.

On lit dans les bons traités qu'un fil (sans raideur ni torsion) occupe à chaque instant t une courbe de l'espace ; en désignant le point courant par $\vec{r}$, et en choisissant une abscisse curviligne s , on pose :

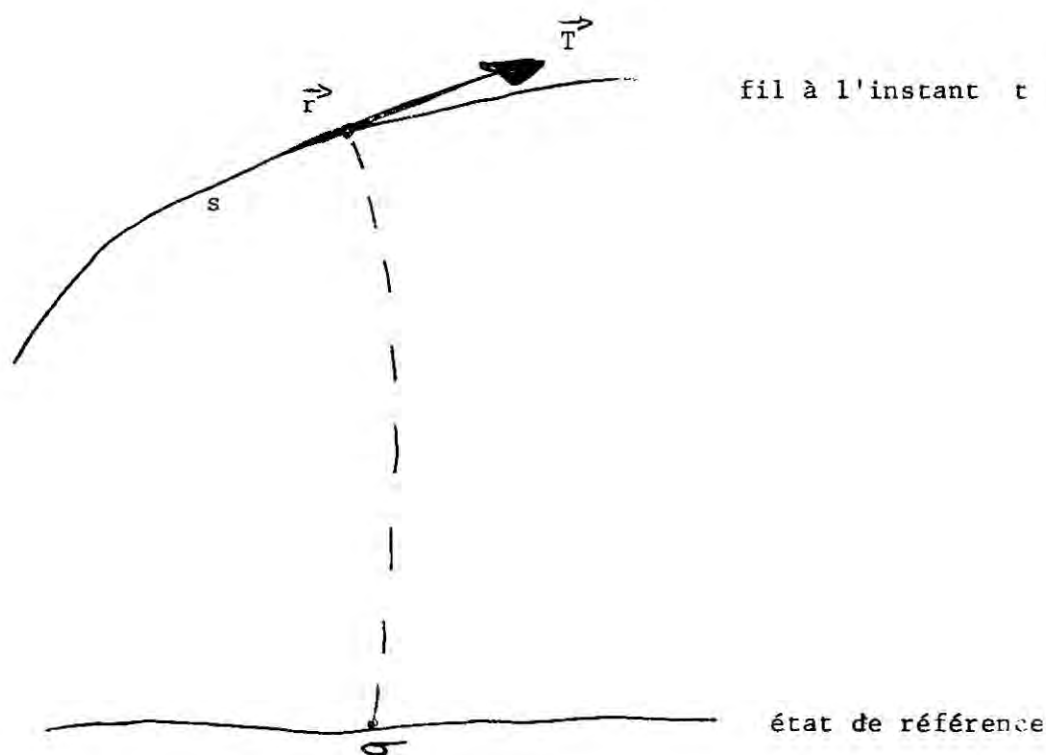
$$(1) \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} = \vec{T} ;$$

on admet l'existence de deux grandeurs ρ (la masse spécifique linéaire) et θ (la tension du fil) ; on "démontre" que la force à laquelle est soumis, de la part du reste du fil, un "élément" de longueur ds est égale à

$$\frac{\partial}{\partial s} [\theta \vec{T}] ds$$

si le fil évolue dans le vide, le principe fondamental de la mécanique s'écrit donc

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial s} [\theta \vec{T}] = \rho \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$



Il importe de remarquer que les deux dérivations qui figurent dans cette formule, $\frac{\partial}{\partial s}$ et $\frac{d}{dt}$, ne commutent pas : la première est une dérivation à temps constant, la seconde à molécule constante. C'est pourquoi sans doute on les écrit habituellement avec deux variantes de la lettre " D " .

La mécanique nous fournit encore le principe de conservation de la masse : on peut l'énoncer en utilisant un état de référence du fil ; on repère alors les molécules par leur abscisse σ dans cet état.

Nous appellerons étirement la quantité

$$(3) \quad u = \frac{ds}{d\sigma}$$

calculée à temps constant ; alors le principe de conservation de la masse pourra s'écrire :

$$(4) \quad \rho u = \rho_0$$

ρ_0 étant la masse spécifique dans l'état de référence, donc une fonction de σ seul.

On peut aussi donner une expression différentielle à ce principe : la dérivation par rapport au temps (à molécule constante) donne $\frac{d}{dt} [\rho u] = 0$; après quelques transformations -utilisant le fait que les dérivations $\frac{d}{d\sigma}$ et $\frac{d}{dt}$ commutent- on trouve la formule

$$(4 \text{ bis}) \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \left\langle \vec{T}, \frac{\partial}{\partial s} \frac{d\vec{r}}{dt} \right\rangle = 0 .$$

Cette formule, qui ne met pas en jeu l'état de référence, joue un rôle analogue à l'équation de continuité des fluides.

Les équations écrites jusqu'ici ne constituent pas encore un système déterministe : elles s'appliquent à tous les fils, quels que soient leur procédé de fabrication. Il faut leur adjoindre une loi de comportement plus ou moins phénoménologique. Ainsi le fil inextensible est caractérisé par la relation $u = 1$; un fil extensible, s'il n'est pas soumis à des phénomènes dissipatifs, sera en général caractérisé par une relation

$$(5) \quad \theta = f(u, \sigma) .$$

L'une des applications de ces équations (importante historiquement pour les mathématiques et pour la musique) est la théorie des cordes vibrantes : dans le cas d'un fil homogène, la linéarisation des équations ci-dessus (au voisinage de la solution évidente où le fil est rectiligne, immobile et tendu) montre que les ébranlements longitudinaux et transversaux X vérifient séparément l'équation des cordes vibrantes

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = v^2 \frac{d^2 X}{d^2}$$

la célérité v étant égale à $\sqrt{\frac{\theta}{\rho}}$ pour le cas transversal, et à $\sqrt{\frac{u}{\rho} \frac{d\theta}{du}}$ pour le cas longitudinal ; il résulte notamment de cette différence de célérité que les violons grincent lorsqu'on excite les cordes longitudinalement. Le remède idéal serait évidemment l'égalisation des célérités, c'est-à-dire d'avoir des cordes vérifiant

$$\frac{u}{\rho} \frac{d\theta}{du} = \frac{\theta}{\rho}$$

donc que la tension soit proportionnelle à l'étirement ; cette sorte de loi de Hooke n'a rien d'in vraisemblable dans un domaine réduit d'étirement ; là où elle diffère notablement des lois de comportement des élastiques réels, c'est pour les petites valeurs de u : laissé à lui-même, l'"élastique parfait" se recroqueville en un seul point.

Notons que cette loi peut aussi s'écrire

$$(6) \quad \rho \theta = \text{Cte.}$$

Les équations de l'élastique parfait se traitent sans linéarisation ; elles s'intègrent exactement, au moyen de deux fonctions vectorielles arbitraires

$\vec{\phi}$ et $\vec{\psi}$, en

$$(7) \quad \begin{cases} \vec{r} = \vec{\phi}\left(\tau + \frac{\sigma}{v}\right) + \vec{\psi}\left(\tau - \frac{\sigma}{v}\right) \\ \theta = \sqrt{\theta_0 \rho_0} \left\| \vec{\phi}'\left(\tau + \frac{\sigma}{v}\right) - \vec{\psi}'\left(\tau - \frac{\sigma}{v}\right) \right\| \\ \rho = \frac{\sqrt{\theta_0 \rho_0}}{\left\| \vec{\phi}'\left(\tau + \frac{\sigma}{v}\right) - \vec{\psi}'\left(\tau - \frac{\sigma}{v}\right) \right\|} \end{cases} \quad v = \sqrt{\frac{\theta_0}{\rho_0}}$$

Bien entendu, la généralité des fonctions $\vec{\phi}$ et $\vec{\psi}$ est limitée par les conditions aux limites que l'on impose (extrémités fixées par exemple) ; dans le cas expérimental ci-dessus, il est de bonne tradition de supposer la tension nulle aux extrémités libres du fil ; on trouve alors sans peine

la solution générale des équations du système :

$$(7a) \quad \vec{r} = \vec{A}t + \vec{B} + \frac{1}{2} \left[\vec{F}\left(t + \frac{\sigma}{v}\right) + \vec{F}\left(t - \frac{\sigma}{v}\right) \right]$$

F étant une fonction périodique de valeur moyenne nulle, de période $2\ell/v$ (ℓ étant la longueur du fil dans l'état de référence) ; $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont deux vecteurs arbitraires ($\vec{r} = \vec{A}t + \vec{B}$ est le mouvement du barycentre du fil).

Bien entendu, on peut décomposer F en série de Fourier, ce qui donne une formule

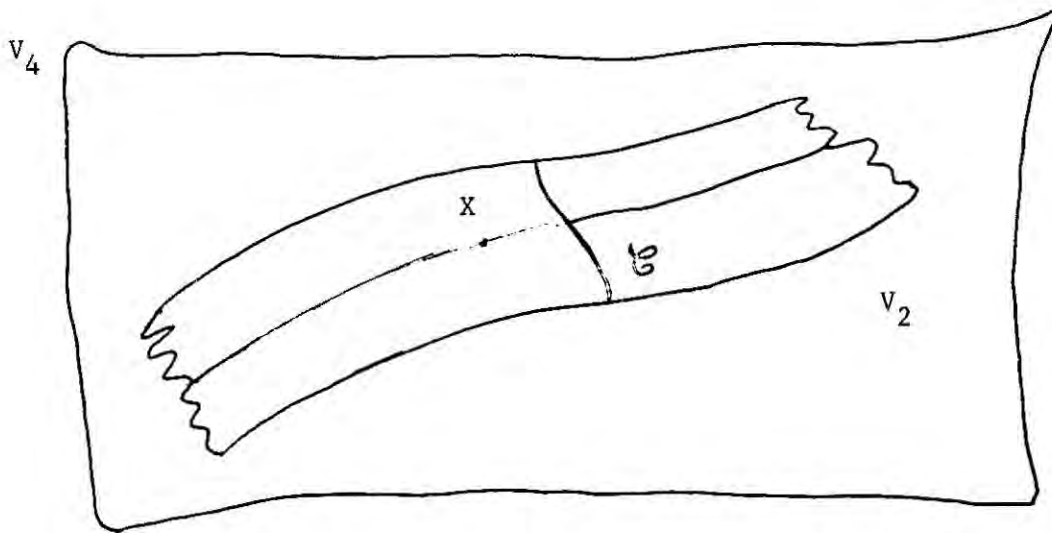
$$(7b) \quad \vec{r} = \vec{A}t + \vec{B} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\alpha\sigma) \operatorname{Re}(\vec{A}_n e^{in\omega t}) \quad \left[\vec{A}_n \in \mathbb{C}^3 \right]$$

$$\text{avec} \quad \alpha = \frac{\pi}{\ell}, \quad \omega = \frac{\pi v}{\ell}.$$

Le fil apparaît donc comme un oscillateur harmonique de dimension infinie, libre autour de son barycentre. Comme tel, il constitue évidemment une proie facile pour les quantificateurs.

2°) Relativité générale.

La description est à priori toute différente : dans la variété riemannienne espace-temps V_4 , les diverses molécules du fil décrivent une sous-variété V_2 , de dimension 2 ; puisque les molécules ne vont pas plus vite que la lumière, V_2 possède des vecteurs tangents du genre temps ; il en résulte qu'elle est hyperbolique normale (pour la structure riemannienne induite par celle de V_4) ; si les extrémités sont libres, leurs lignes d'univers constituent le bord de V_2 .



La cinématique du système étant ainsi décrite, il faut caractériser sa dynamique : elle consistera évidemment à construire un tenseur symétrique du second ordre -le tenseur impulsion-énergie T - dont la divergence riémannienne est nulle. Ici, puisque l'élastique se meut dans le vide, le champ de tenseurs T doit être condensé sur la variété V_2 , ce qui implique l'emploi de la technique des tenseurs-distributions.

Un tenseur-distribution est une fonctionnelle portant sur une variable d'essai, elle-même tensorielle à support compact ; ici, il sera judicieux de choisir comme variable d'essai une variation δg du tenseur métrique g ; en effet, si l'on écrit la fonctionnelle (dans le cas non condensé)

$$(8) \quad \mathcal{F}(X \mapsto \delta g) = \int_{V_4} \frac{1}{2} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \text{ vol}$$

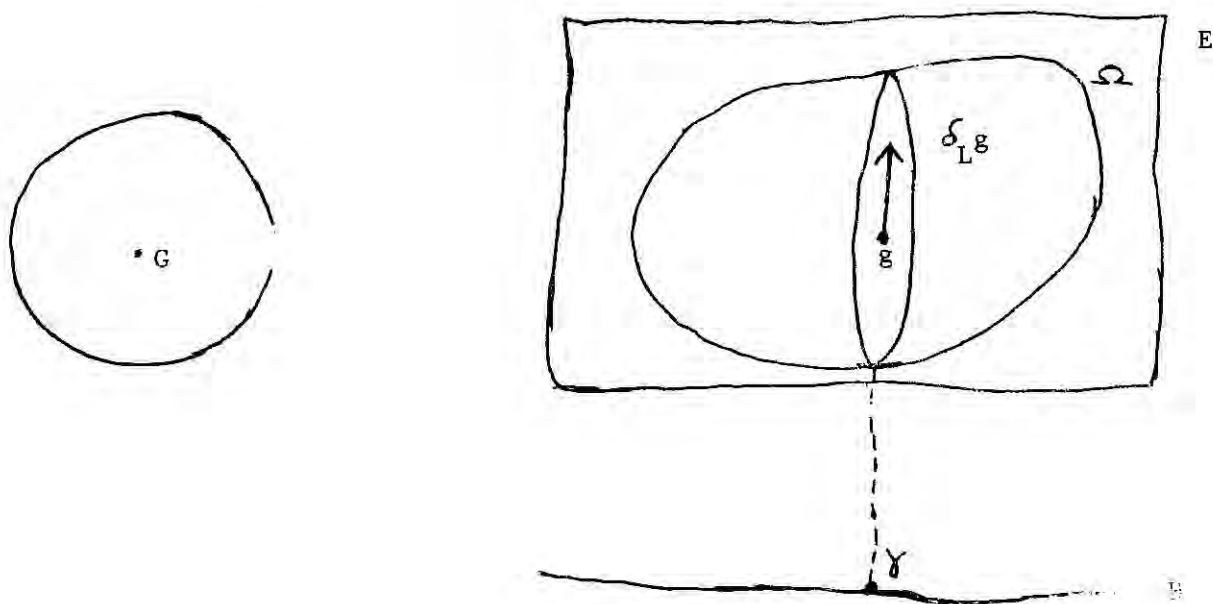
(vol désignant l'élément de volume riémannien),

l'équation dite "de conservation" $\text{div } T = 0$ s'écrit :

$$(9) \quad \mathcal{F}(X \mapsto \delta_L g) = 0 \text{ pour tout } X \mapsto \delta X \text{ à support compact.}$$

(nous désignons par $\delta_L g$ la dérivée de Lie de g associée à la dérivation X) ; elle s'interprète géométriquement de la façon suivante.

Désignons par E l'espace vectoriel de tous les champs de 2-tenseurs $\mathbb{C}^\infty$ symétriques sur la variété V_4 ; par Ω la partie de E constituée par les champs ayant la signature $+- - -$ (il s'agit d'un ouvert de E pour les topologies raisonnables dont on peut le munir) ; la fonctionnelle $\mathcal{F}$ apparaît alors comme une 1-forme de E définie en un point de Ω .



Le groupe G de tous les difféomorphismes de V_4 (triviaux en dehors d'un compact) opère évidemment sur E (en conservant Ω) ; un champ de vecteur $X \mapsto \mathcal{L}X$ peut s'interpréter comme un élément de l'algèbre de Lie de G ; la variation $\delta_L g$ correspondante du tenseur métrique apparaît comme l'action sur le champ $X \mapsto g$ de cet élément de l'algèbre de Lie ; par conséquent, c'est un vecteur tangent à l'orbite de G passant par le point g ; la condition (9) exprime donc la nullité de la 1-forme $\mathcal{F}$ sur tout vecteur tangent à l'orbite ; en d'autres termes, $\mathcal{F}$ est l'image réciproque d'une 1-forme Φ de l'espace quotient $H = \Omega/G$ (hyper-espace) ; le point γ de H où se projette le champ $X \mapsto g$ n'est autre que la géométrie de V_4 ; la répartition de matière dans l'univers s'identifie donc à une 1-forme Φ de l'hyper-espace, définie

au point γ .

Ceci est particulièrement satisfaisant, dans la mesure où le principe de relativité générale exprime justement l'inobservabilité physique de l'action de G ; en d'autres termes, ce n'est pas l'univers qui possède une signification physique, mais l'hyper-espace H ; le principe fondamental de la dynamique $\text{div } T = 0$ exprime donc en fait l'observabilité de la fonctionnelle $\mathcal{F}$.

Signalons que ce schéma géométrique peut s'élargir à l'électrodynamique relativiste, en prenant pour E l'ensemble des champs de potentiels gravitationnels $g_{\mu\nu}$ et électromagnétiques A_ρ , et pour G le produit semi-direct du groupe des difféomorphismes par le groupe des transformations de jauge (voir [9]) ; une 1-forme $\mathcal{F}$ de E s'écrira

$$(10) \quad \int \left[\frac{1}{2} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} - J_\rho \delta A_\rho \right] \text{vol} ;$$

en écrivant qu'elle est nulle sur les vecteurs tangents à l'orbite, on trouve les relations $\text{div } J = 0$, $\text{div } T + FJ = 0$ (F est le tenseur champ électromagnétique), ce qui fait apparaître le principe de conservation de l'électricité $\text{div } J = 0$ et la force électromagnétique $- FJ$.

Cette procédure a l'intérêt particulier de montrer le lien structurel qui existe entre l'inobservabilité des transformations de jauge et celle -moins familière aux physiciens- des difféomorphismes.

La formulation (9) des principes de la dynamique s'applique sans changements au cas où la fonctionnelle $\mathcal{F}$ a pour support une région restreinte de l'espace, une sous-variété par exemple : nous avons ainsi une formulation générale de la mécanique des états condensés.

Ainsi, en supposant que le support de $\mathcal{F}$ est une courbe de V_4 , on obtient une dynamique des particules (soumises aux champs de

gravitation et électromagnétique) ; celle-ci contient le principe des géodésiques, la définition de l'impulsion P de la charge électrique q , du tenseur de spin S et du tenseur moment électro-magnétique M (voir les références [3], [8], [9]).

Nous l'appliquerons ici au cas du fil, en supposant que $\mathcal{F}$ est une mesure de support V_2 (nous éliminons ainsi la raideur et la torsion du fil, qui apparaîtraient si l'on prenait une distribution du premier ordre). L'application de (9) conduit alors à la formulation suivante (voir [7]) :

(11,a) - il existe un tenseur symétrique $\oplus$, défini en chaque point de V_2 , tel que la fonctionnelle $\mathcal{F}$ s'écrive

$$\mathcal{F}(X \mapsto \delta g) = \int_{V_2} \frac{1}{2} \oplus^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \text{ surf}$$

"surf" désignant l'élément d'aire riémannienne de V_2 ;

(11,b) - $\oplus$ vérifie l'équation

$$\oplus^{\mu\nu} U_\nu = 0 \quad \forall U \text{ normal à } V_2$$

(ceci exprime que $\oplus$ est un tenseur symétrique de la variété riémannienne V_2 , prolongé de façon canonique par un tenseur de V_4).

(11,c) - Sur le bord de V_2 , $\oplus$ vérifie l'équation

$$\oplus^{\mu\nu} U_\nu = 0 \quad \text{pour tout vecteur } U \text{ normal au bord ;}$$

(11,d) - La divergence riémannienne de $\oplus$ (considéré comme tenseur de la variété V_2) est nulle ;

(11,e) - Le projecteur orthogonal P sur le plan tangent à V_2 vérifie l'équation

$$\text{Tr}(\delta X \mapsto \oplus \hat{\delta} P U) = 0 \quad U \text{ normal à } V_2$$

(ici δX désigne un vecteur tangent à V_2 ; $\hat{\delta}$ désigne la dérivation covariante (de V_4) associée ; le vecteur $\otimes \hat{\delta} P U$ est un vecteur tangent à V_2 ; par conséquent l'expression figurant sous le signe Tr est un opérateur linéaire du plan tangent à V_2 , ce qui permet le calcul de sa trace. Il est bien difficile d'écrire cette équation avec des notations classiques...).

La théorie générale des états condensés permet d'associer des grandeurs conservées à chaque vecteur de Killing K de la variété V_4 (lorsqu'il en existe). L'application au cas qui nous occupe donne l'expression

$$(12) \quad \mu = \int_C \text{surf}(\otimes K)(dX)$$

C désignant une courbe qui coupe V_2 (voir figure) choisie arbitrairement, et surf la 2-forme d'aire de V_2 (notons que $\otimes K$ est un vecteur tangent à V_2). Dans le cas de la relativité restreinte notamment, on pourra choisir pour K chacun des dix générateurs du groupe de Poincaré, et l'on obtiendra ainsi les dix moments du système dynamique constitué par le fil.

Nous allons maintenant transcrire ces équations en faisant une hypothèse qualitative sur le tenseur $\otimes$, à savoir qu'il a deux valeurs propres réelles distinctes (bien que $\otimes$ soit symétrique, la réalité des valeurs propres n'est pas obligatoire, puisqu'il s'agit d'un espace hyperbolique ; mais les $\otimes$ qui vérifient cette condition constituent un ouvert dans l'espace des tenseurs symétriques).

Dans ces conditions, il est immédiat de vérifier que $\otimes$ possède un vecteur propre I du genre temps, un vecteur propre J du genre espace ; I et J appartiennent au plan tangent à V_2 et sont orthogonaux ; on peut évidemment les supposer normés. Nous désignerons

par ρ et θ les valeurs propres respectivement associées à I et J , par δ_I et δ_J les dérivations correspondantes ; nous introduirons aussi les vecteurs

$$(13) \quad \Gamma = \hat{\delta}_I I \quad \text{et} \quad C = \hat{\delta}_J J .$$

Alors le système (11) devient

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta_I \rho + [\rho - \theta] \langle I, C \rangle = 0 ; \\ \delta_J \theta + [\rho - \theta] \langle J, \Gamma \rangle = 0 ; \\ \rho \Gamma - \theta C \text{ tangent à } V_2 ; \\ \theta = 0 \text{ au bord.} \end{array} \right.$$

Comme nous l'avons suggéré par le choix des lettres ρ et θ pour désigner les valeurs propres de $\textcircled{H}$, celles-ci s'interpréteront respectivement comme masse spécifique linéaire et tension du fil ; il est à noter que les équations aux dimensions classiques de ces grandeurs sont respectivement $M L^{-1}$ et $M L T^{-2}$, et qu'elles coïncident donc en relativité.

Par ailleurs, nous interpréterons les lignes de force du vecteur I comme lignes d'univers des molécules du fil. Ainsi I est la vitesse unitaire des molécules ; Γ est leur quadri-accélération.

Ces équations ont une solution exacte : il s'agit d'un élastique (non coupé!) qui tourne en rond ; nous désignons par R le rayon du cercle qu'il décrit, par ω sa vitesse angulaire. Bien entendu, on néglige la pesanteur (relativité restreinte). Les équations (14) montrent que ρ et θ sont constants, et liés par la relation

$$(15) \quad \theta = \rho R^2 \omega^2 .$$

Dans ce cas, on peut calculer les dix moments de Poincaré par la formule (12) ; ce calcul montre que l'énergie vaut

$$(16) \quad E = 2\pi R(\rho + \theta) ,$$

que le moment cinétique autour de l'axe du cercle vaut

$$(17) \quad M = 2\pi R^3 \rho \omega$$

et que les autres moments sont nuls. Ces résultats ont d'ailleurs une apparence classique, à l'exception de l'expression de l'énergie, qui donne un peu plus à penser.

Pour trouver l'approximation classique du système (14), on effectue les opérations suivantes :

- 1) - Prendre le cas de la relativité restreinte ;
- 2) - Se placer dans un référentiel galiléen tel que, à un instant et en un point donné, la vitesse d'une molécule du fil soit nulle ;
- 3) - Négliger le nombre sans dimension $\frac{\theta}{\rho c^2}$; ce nombre est d'ailleurs égal à $(v/c)^2$, v étant la célérité des ébranlements transversaux.

On trouve ainsi, en posant comme ci-dessus

$$\vec{T} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial s}$$

le système

$$\frac{\partial}{\partial s} [\partial \vec{T}] = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} ; \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \left\langle \vec{T}, \frac{\partial}{\partial s} \frac{d\vec{r}}{dt} \right\rangle = 0 ;$$

$u = 0$ aux extrémités,

c'est-à-dire les équations classiques de la mécanique des fils (1, 2, 4bis ci-dessus) ; seule manque bien entendu la loi de comportement. On peut donc considérer que la théorie des états condensés et la mécanique classique se confirment mutuellement, puisque elles se prolongent malgré la grande différence de leurs cadres conceptuels.

Revenons au système (14). Bien qu'il possède des "intégrales premières" (les constantes du mouvement calculées plus haut), il ne constitue pas un système déterministe : il est adapté à représenter toute sorte de fil, mais a besoin pour cela d'être complété par une équation d'état.

Etudions quelques exemples de comportement.

Le fil homogène inextensible est caractérisé par l'équation

$$(18) \quad \rho = \text{Cte.}$$

On en déduit facilement l'existence (locale en général) d'une carte de V_2 définie par deux coordonnées σ et τ telles que :

$$(19) \quad \frac{\partial X}{\partial \sigma} = J \quad \frac{\partial X}{\partial \tau} = I \frac{\rho}{\rho - \theta} ;$$

le système se complète par la relation

$$(20) \quad \frac{\hat{\partial} I}{\partial \sigma} = \frac{\hat{\partial}}{\partial \sigma} \left[J \frac{\theta}{\rho - \theta} \right] .$$

Ces équations montrent que l'étirement du fil reste égal à 1 . Notons que la variable σ marque les molécules du fil, et désigne leur abscisse curviligne propre : c'est en utilisant ces équations que l'on pourra analyser la mesure des longueurs en relativité générale à l'aide d'un mètre-ruban ; ce qui est notre seule ressource, lorsque les "règles" et les "horloges" traditionnelles deviennent molles. Il est facile, par exemple, dans le cas d'un champ de gravitation statique ou stationnaire, de voir ce que deviennent les "chaînettes" de la mécanique rationnelle (voir H. Juan) .

Dans le cas du mouvement circulaire déjà étudié en général, l'usage de la variable σ permet d'exprimer le rayon R du cercle en fonction de la longueur propre du fil ℓ et de la vitesse linéaire v du fil ; on trouve :

$$(21) \quad R = \frac{\ell}{2\pi} \sqrt{1-v^2}$$

ce qui manifeste évidemment la contraction de Lorentz ; avec les mêmes variables, l'énergie E (16) et le moment cinétique M (17) deviennent

$$(22) \quad E = \rho \ell [1+v^2] \sqrt{1-v^2} = m + \frac{1}{2} m v^2 + O(v^4) ,$$

(m = $\rho \ell$).

$$(23) \quad M = \frac{\rho l^2}{2\pi} v[1-v^2] = Rmv + O(v^3) .$$

Traisons maintenant l'élastique parfait relativiste, que nous définirons (comme dans le cas classique (6)) par l'équation d'état

$$(24) \quad \rho \theta = k^2 \quad (k = \text{constante positive caractéristique de la fabrication du fil}).$$

Nous avons supposé initialement que les valeurs propres du tenseur Θ étaient distinctes, donc que $\theta \neq \rho$; nous supposons bien entendu $\theta < \rho$; grâce à (24) nous pourrions donc choisir un paramètre λ tel que

$$\theta = k \operatorname{th} \lambda \quad \rho = k \operatorname{coth} \lambda .$$

Choisissons, sur la variété V_2 , des lignes coordonnées qui coïncident avec les lignes de force des vecteurs I et J ; nous aurons donc un paramètre σ , repérant les molécules, et un paramètre "temporel" τ tels que

$$\frac{\partial X}{\partial \tau} = I \alpha \quad \frac{\partial X}{\partial \sigma} = J \beta$$

α et β étant des variables ; en écrivant que les dérivations $\frac{\partial}{\partial \sigma}$ et $\frac{\partial}{\partial \tau}$ commutent ($\frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial X}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{\partial X}{\partial \tau}$), et en tenant compte du système (14), on trouve les relations

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\frac{\alpha}{\operatorname{ch} \lambda} \right] = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\beta}{\operatorname{sh} \lambda} \right] = 0 ,$$

qui s'intègrent en

$$\frac{\alpha}{\operatorname{ch} \lambda} = F(\tau) \quad \frac{\beta}{\operatorname{sh} \lambda} = G(\sigma) .$$

Chacune des variables σ et τ n'est définie jusqu'à présent qu'à un difféomorphisme près ; si l'on effectue sur la variable σ le changement de variable

$$\sigma \mapsto \int G(\sigma) d\sigma$$

on constate qu'on aura remplacé la fonction $G(\sigma)$ par 1 ; on fera de même $F(\tau) = 1$.

Bien entendu il reste encore une translation arbitraire dans le choix de chacune des variables ; en ce qui concerne σ , on pourra la faire disparaître en fixant $\sigma = 0$ à une extrémité, nous désignerons par a sa valeur à l'autre bout : a est la longueur de l'élastique lorsque sa tension θ vaut $\rho/2$; la masse au repos de l'élastique (dans son état recroquevillé) vaut a .

Si l'on introduit les variables σ et τ dans le système (14), il vient, après quelques calculs, l'équation

$$(25) \quad \frac{\partial^2 X}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 X}{\partial \sigma^2} ;$$

en relativité restreinte, cette équation s'intègre exactement en $X = \phi(\tau + \sigma) + \psi(\tau - \sigma)$. Il suffit de reporter dans les différentes équations établies jusqu'ici pour arriver à l'énoncé suivant :

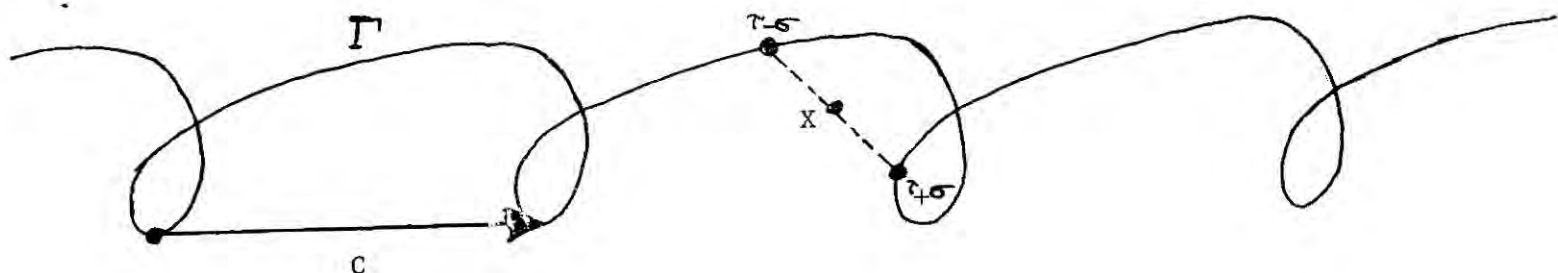
(26a) - L'extrémité $\sigma = 0$ de la corde décrit une ligne d'univers du genre temps

$$X = F(\tau) ,$$

τ désignant son temps propre ($F'(\tau)$ est donc un vecteur unitaire).

(26b) - Il existe un vecteur C , du genre temps, tel que

$$F(\tau + 2a) \equiv F(\tau) + C .$$



(26c) - La variété V_2 est l'ensemble des milieux de deux points de T

(26d) - En fonction des paramètres et on a les formules :

$$\begin{cases} X = \frac{1}{2} [F(\tau + \sigma) + F(\tau - \sigma)] \\ I \operatorname{ch} \lambda = \frac{1}{2} [F'(\tau + \sigma) + F'(\tau - \sigma)] \\ J \operatorname{sh} \lambda = \frac{1}{2} [F'(\tau + \sigma) - F'(\tau - \sigma)] \end{cases} \quad \sigma \in [0, a]$$

qui permettent de calculer λ , et par conséquent $\theta = k \operatorname{th} \lambda$

et $\rho = k \operatorname{coth} \lambda$

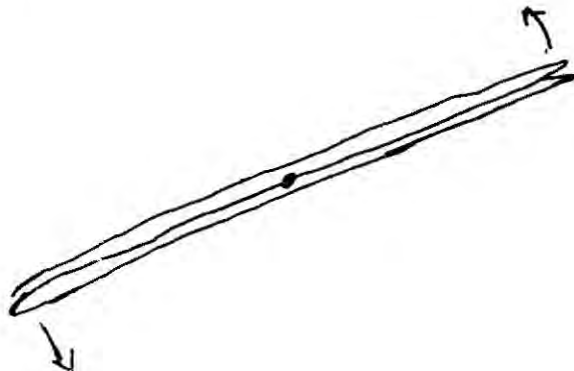
(26e) - La quadri-impulsion de la corde est

$$P = \frac{k}{2} C$$

C étant le vecteur défini en (b).

Réciproquement ; choisissons une fonction suffisamment régulière, de période $2a$; construisons l'une de ses primitives F ; en prenant cette valeur de F dans les formules (26), on obtiendra un mouvement de la corde.

Par exemple, en choisissant pour F' un vecteur unitaire constant, on trouve les mouvements recroquevillés ; l'énergie $\|P\|$ a alors la valeur minimum ka . Si F' décrit un cercle dans l'hyperboloïde, F décrit une hélice ; dans le référentiel propre, la corde occupe un segment de droite qui tourne uniformément autour de son centre ; dans ce mouvement, la corde peut être repliée n fois sur elle-même.



- Les élastiques parfaits sont plutôt rares sur le marché, surtout si l'on veut qu'ils supportent des tensions relativistes. Mais le modèle que nous venons de construire présente un certain intérêt spéculatif.
- Nous avons un exemple de milieu continu, dont les mouvements se construisent explicitement, aussi bien dans le cas classique que dans le cas relativiste.
- Nous avons, plus simplement, un exemple de système dynamique relativiste ; rappelons que ces modèles sont plutôt rares : les seuls qui soient connus en dimension finie sont les particules (avec ou sans spin), et les systèmes de particules sans interaction. On sait les difficultés que présentent la recherche d'une description relativiste des interactions : elle est probablement due au fait que l'existence d'une interaction implique une énergie, que cette énergie d'interaction possède elle-même une masse, et que les modèles recherchés ignorent où placer cette masse, et donc comment décrire son inertie. Ici, le bilan est facile et complet : la masse est répartie tout le long du fil, l'énergie, l'impulsion -et les autres moments de Poincaré se calculent immédiatement (formule (12)).
- Sur la formule (7b) qui donne les mouvements classiques de l'élastique parfait, la symétrie $SU(3)$ est manifeste : une matrice M de $SU(3)$ opère sur l'espace des mouvements en multipliant chacun des $\vec{A}_n$ (qui appartiennent à $\mathbb{C}^3$) ; on peut vérifier que $SU(3)$ est un groupe dynamique, en ce sens qu'il respecte la structure symplectique de l'espace des mouvements ; mais cette symétrie est brisée quand on passe au modèle relativiste.

Il y a évidemment une analogie formelle entre ce modèle, et celui des hadrons (particules lourdes) qui possèdent approximativement la symétrie $SU(3)$ -bien que cette symétrie soit incompatible avec la relativité restreinte.

Pour essayer de tirer partie de cette analogie, il est donc nécessaire de quantifier l'élastique parfait relativiste ; cette quantifi-

cation passe évidemment par la construction d'un formalisme lagrangien, hamiltonien ou symplectique.

Par analogie avec la mécanique classique des milieux continus, il semble naturel de prendre l'intégrale d'action

$$(27) \quad \mathcal{A} = \int_{V_2} L(\sigma, u) \text{ surf}$$

u étant l'étirement que nous avons déjà utilisé dans le cas classique, L une fonction lagrangienne à déterminer. L'avantage de cette formulation, c'est qu'elle permet de donner immédiatement la définition du tenseur $\textcircled{H}$ en faisant varier le tenseur métrique lui-même

$$(28) \quad \delta \mathcal{A} = \int_{V_2} \frac{1}{2} \textcircled{H}^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \text{ surf}$$

(comparer avec (8)) ; en effectuant le calcul (sans oublier que la 2-forme surf dépend elle-même de g) on trouve facilement que les lignes de courant sont effectivement des lignes de force d'un vecteur propre de $\textcircled{H}$, correspondant à la valeur propre $\rho = L$; l'autre valeur propre est $\theta = L + u \frac{\partial L}{\partial u}$. On peut alors vérifier que les équations aux variations entraînent le système (14) que nous avons établi plus haut par d'autres principes, donc qu'il y a compatibilité parfaite dans le cas du fil conservatif entre la formulation lagrangienne et la théorie des états condensés.

Si nous voulons avoir l'équation d'état (24) de l'élastique parfait, nous sommes ainsi conduits à la fonction lagrangienne

$$L = k \sqrt{1 + \frac{C}{u^2}}$$

C étant une constante qui dépend du choix de l'état de référence.

Il est possible, à partir de ce formalisme lagrangien, de calculer à nouveau les moments de Poincaré (à l'aide du théorème de Noether) ; d'établir la structure symplectique de l'espace des mouvements.

Cette structure a d'ailleurs été établie directement par G. Béranguier

- Une étude inverse a été effectuée par divers physiciens, notamment par Nambu [6] , Goddard, Golstone, Rebbi et Thorn [4] , Altes et Banyai [1]. Il s'agit d'interpréter différents modèles quantiques (notamment le modèle de Veneziano) à l'aide d'un modèle classique sous-jacent.

Le modèle proposé par Goddard et al. est effectivement une corde, mais un peu spéciale (elle est qualifiée de "massless"). Elle est décrite par une variété à bords V_2 ; l'action est proportionnelle à l'aire :

$$\mathcal{A} = \int_{V_2} k \text{ surf}$$

Il résulte facilement de la formule (28) que le tenseur $\textcircled{H}$ coïncide avec le projecteur orthogonal sur le plan tangent à V_2 ; en d'autres termes que $\rho = \theta = k$. Comme le veut la formule (11d) ci-dessus, la divergence de $\textcircled{H}$ est bien nulle ; mais la conditions aux bords (11e) $\textcircled{H}U = 0$ pour tout vecteur U normal au bord n'est évidemment pas réalisable.

Cependant, par des raisonnements un peu rapides, les auteurs suggèrent que la "tension au repos" du fil est égale à k , que la masse spécifique "au repos" est nulle, et que l'action est stationnaire si les extrémités de la corde se déplacent à la vitesse de la lumière -résultat évidemment faux. Il y a cependant une certaine analogie entre ce modèle et celui que nous venons d'étudier : V_2 est encore une surface de translation (c'est un résultat bien connu que les trajectoires isotropes d'une surface minima se déduisent l'une de l'autre par translation ; voir Valiron [10] . On peut espérer que ces difficultés recevront prochainement une solution ; il est actuellement trop tôt pour conclure.

Jean-Marie SOURIAU

Mes remerciements vont à tous ceux avec qui j'ai pu discuter ces questions ; notamment à Altes , Bacry , Banyai , Barut et Beranguier .

- R E F E R E N C E S -

- [1] K. ALTES et L. BANYAI
"On the Strong Picture of the Veneziano Amplitude".
A paraître.
- [2] G. BERENGUIER
C.R.A.S. t.273 , p. 947-949 (1971) .
- [3] C. DUVAL , H.H. FLICHE et J.M. SOURIAU
C.R.A.S. t.274 , p. 1082 (1972) .
- [4] P. GODARD , J. GOLDSTONE , C. REBBI et C.B. THORN
"Quantum Dynamics of a Massless Relativistic String"
TH. 1578 - CERN (1972) .
- [5] H. JUAN
Thèse de Doctorat d'Etat. - Marseille (1970) .
- [6] Y. NAMBU
Proc. Int. Conf. on Symmetries and Quark Models
Wayne State University , (1969) .
- [7] J.M. SOURIAU
C.R.A.S. t.270 , p. 731-732 (1970) .
- [8] J.M. SOURIAU
C.R.A.S. t.271 , p. 1086-1088 (1970) .
- [9] J.M. SOURIAU
R.C.P. 25 - Strasbourg - Nov 1972 .
- [10] G. VALIRON
"Equations fonctionnelles".
Ed. Masson - Paris