

GEOMETRIE ET THERMODYNAMIQUE EN COSMOLOGIE

par

Jean-Marie SOURIAU

ABSTRACT : Les univers dans lesquels on peut observer simultanément le rayonnement cosmologique du corps noir et le redshift des galaxies sont analysés géométriquement : ils possèdent un groupe à un paramètre de transformations conformes dont le générateur est le vecteur-température de Planck ; l'entropie, l'énergie et l'impulsion du rayonnement sont nécessairement conservatives.

L'introduction des équations de champ conduit à des modèles du type Robertson-Walker (sans avoir à postuler l'homogénéité ou l'isotropie spatiales) ; ces modèles se raccordent avec celui de Gamow aux débuts de l'expansion ; leur confrontation avec l'observation est brièvement discutée.

MAI 1974

74/P.616

Adresse postale : Centre de Physique Théorique - C.N.R.S. -
31, Chemin Joseph Aiguier - 13274 MARSEILLE CEDEX 2 (France)

INTRODUCTION.

Le rayonnement cosmologique, découvert en 1965 dans l'espace, est un rayonnement infra-rouge ; les mesures montrent que sa composition spectrale et directionnelle est pratiquement la même que s'il provenait d'une enceinte isotherme (de température 2.7°K) dans laquelle la Terre serait immobile.

Cette "immobilité" est vérifiée par l'observation : si l'on communiquait à la Terre une vitesse de quelques centaines de km/s, l'isotropie et l'isothermie apparentes du rayonnement seraient brisées par l'effet Doppler ; il est d'ailleurs possible que l'on parvienne à mesurer par ce moyen les variations saisonnières de la vitesse de la Terre.

Il existe donc, en tout point de l'univers, un référentiel privilégié, par rapport auquel le rayonnement est isotrope et isotherme ; de plus la Terre est pratiquement au repos par rapport à ce référentiel.

Ces faits donnent l'impression d'un univers en équilibre thermodynamique ; alors qu'un autre fait d'observation - le redshift des galaxies - suggère un univers en expansion.

Comment interpréter ce paradoxe ?

Une analyse géométrique de la situation (§1) montre que la coexistence des deux faits implique l'existence d'un groupe à un paramètre de transformations conformes de l'univers ; le quadrivecteur \textcircled{M} qui engendre ce groupe a pour direction la quadrivitesse de la matière ; pour sens celui du futur ; sa longueur est inversement proportionnelle à la température du rayonnement.

L'existence de ce groupe a des implications cosmologiques (existence d'un "espace" tridimensionnel riemannien dans lequel les galaxies sont fixes) et physiques (diminution de toute énergie lumineuse proportionnellement à la température sans changement du nombre des photons). Son interprétation thermodynamique est intéressante : il se trouve que le vecteur \textcircled{H} ainsi introduit cosmologiquement coïncide avec le vecteur-température de Planck ; une théorie covariante (fondée sur la géométrie symplectique) permet de montrer que ce vecteur est une isométrie infinitésimale dans le cas d'un équilibre thermodynamique (VIII).

Ici, nous rencontrons donc un "équilibre généralisé" - puisque \textcircled{H} est une transformation conforme infinitésimale. Cependant la géométrie montre (§2) que certaines propriétés des équilibres sont sauvegardées : l'entropie, l'énergie et l'impulsion du rayonnement sont des grandeurs conservatives -

bien que la température ne reste pas constante.

Il en résulte évidemment que les échanges entre matière et rayonnement ont un bilan nul ; en particulier la dynamique de la matière est la même que si le rayonnement n'existait pas ; la loi de la gravitation (principe des géodésiques) permet d'en déduire que le mouvement de la matière est irrotationnel (ce que confirme l'observation) ; il existe un temps universel ; la métrique d'univers est conforme à une métrique statique ; la perte d'énergie de la lumière s'interprète comme le travail que la pression de radiation fournit à l'expansion.

Tous ces résultats ont été obtenus sans écrire d'équations de champ ; l'équation d'Einstein permet maintenant de calculer le tenseur impulsion-énergie total, puisque la métrique est connue (§3) ; en écrivant que la contrainte se réduit à une pression, on montre que l'espace tridimensionnel est une variété à courbure constante, donc homogène et isotrope (ce que vérifie l'observation des galaxies et des quasars) ; la métrique d'univers est donc du type Robertson-Walker ; les grandeurs géométriques introduites permettent de calculer simplement les principaux effets d'observations (diamètres apparents, luminosités, brillances, statistique).

En écrivant ensuite que la pression d'univers est celle du rayonnement cosmologique (§4) on obtient des équations d'évolution qui s'intègrent élémentairement : le modèle ainsi construit admet comme approximations asymptotiques celui de Gamow (au début de l'expansion) et celui de Friedmann (à la fin). Le rôle des différents paramètres (température du rayonnement, densité de matière, coefficient de Hubble, courbure de l'espace, constante cosmologique) est rapidement discuté ; une suggestion est faite pour interpréter les observations des quasars et la formation des amas de galaxies.

- L'équivalence rigoureuse - et assez paradoxale - entre le modèle cosmologique newtonien le plus simple et le modèle de Friedmann avec courbure spatiale est évoquée en annexe.

§1 - GEOMETRIE DU VECTEUR TEMPERATURE.

Rappelons d'abord l'interprétation relativiste du redshift ; elle est basée sur les deux hypothèses suivantes ⁽¹⁾

(1) ces hypothèses sont valables aussi bien en relativité restreinte qu'en relativité générale ; elles sont vérifiées expérimentalement avec une extrême précision.

\mathcal{H}_1 [En chaque point x de l'univers est défini le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$;

\mathcal{H}_2 [Les lignes d'univers des rayons lumineux sont les géodésiques isotropes de la métrique d'univers.

Dessignons les lignes d'univers de deux galaxies G_1 et G_2 (figure 1); pour fixer les idées, imaginons que G_2 soit la nôtre.

Soit x_2 un point quelconque de la ligne G_2 - "aujourd'hui" par exemple. De tous les rayons lumineux que nous recevons, un seul est issu de G_1 - puisque nous voyons la galaxie G_1 en un seul point du ciel ⁽¹⁾; elle est issue d'un point x_1 de la ligne d'univers G_1 ; x_1 définit la "position" et la "date" de la galaxie G_1 telle que nous la voyons aujourd'hui.

Puisque l'observation de G_1 est permanente, nous sommes amenés à tracer les géodésiques isotropes successives issues de G_1 qui rencontrent G_2 ; elles forment une famille à un paramètre, et mettent les lignes d'univers G_1 et G_2 en bijection ⁽²⁾; bijection que l'on peut caractériser par la correspondance $s_1 \mapsto s_2$ entre les abscisses curvilignes (temps propres) de G_1 et G_2 .

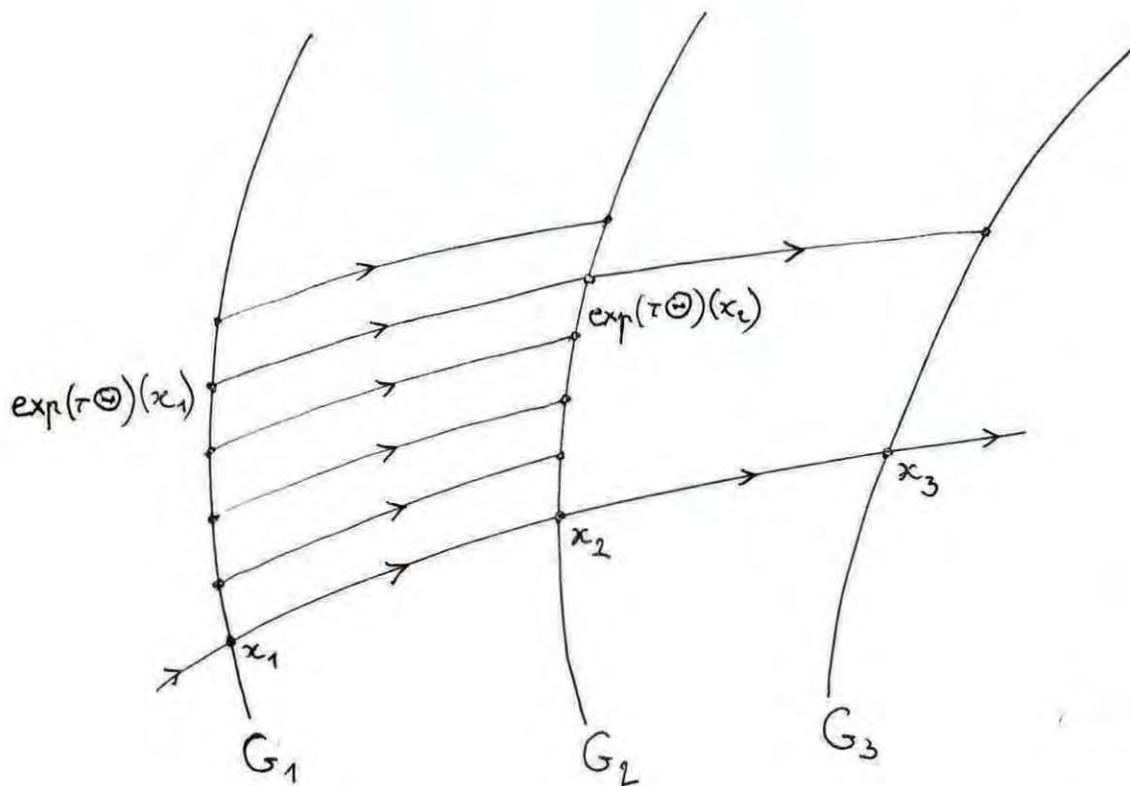
Si G_1 émet un signal lumineux périodique - schématisé sur la figure par des rayons lumineux successifs - avec une fréquence ν_1 , il sera reçu sur G_2 avec une fréquence ν_2 (a priori différente de ν_1 et modulée dans le temps); le nombre de périodes observées entre deux instants a_2 et b_2 est

$$(1) \quad \int_{a_2}^{b_2} \nu_2 ds_2$$

par définition de la fréquence ν_2 et du temps (terrestre) s_2 ; le même nombre de périodes, calculé sur G_1 , est

(1) On ne peut pas exclure a priori l'éventualité d'un "mirage gravitationnel" pour des galaxies très lointaines.

(2) Ces propriétés peuvent être démontrées localement.



- Fig. 1 -

$$(2) \quad \int_{a_1}^{b_1} \nu_1 ds_1$$

a_1 et b_1 étant les dates d'émission des signaux extrêmes, dans le temps s_1 de G_1 . On a donc la relation

$$(3) \quad \nu_1 ds_1 = \nu_2 ds_2$$

que nous écrirons de préférence

$$(4) \quad \frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{ds_2}{ds_1} ;$$

elle montre que le rapport $\frac{\nu_1}{\nu_2}$ des fréquences émises et reçues est indépendant de ν_1 (puisque le rapport $\frac{ds_2}{ds_1}$ ne dépend que de la géométrie

de la figure 1) ; cette propriété est vérifiée avec une grande précision par les observations de spectres de galaxies ⁽¹⁾ ; le nombre

$$(5) \quad \frac{\nu_1}{\nu_2} - 1$$

ainsi mesuré, est par définition le redshift ⁽²⁾ .

Observons maintenant le rayonnement cosmologique derrière la galaxie G_1 ; les rayons infrarouges ainsi détectés ont les mêmes lignes d'univers - entre G_1 et G_2 - que les rayons issus de G_1 ; le spectre du rayonnement, observé de G_1 et de G_2 , subit nécessairement le même décalage (4) .

Il se trouve que le spectre du corps noir, après avoir subi un décalage proportionnel, est encore un spectre de corps noir - mais avec une autre température ; les fréquences homologues ν_1 et ν_2 des deux spectres, les températures correspondantes T_1 et T_2 sont reliées par la loi de Wien

$$(6) \quad \frac{\nu_1}{T_1} = \frac{\nu_2}{T_2} .$$

Formulons maintenant l'hypothèse :

\mathcal{H}_3 [Le rayonnement cosmologique, observé de n'importe quelle galaxie à n'importe quel instant, est un rayonnement de corps noir.

elle exprime - modestement - que les apparences du rayonnement cosmologique ne privilégient ni la Terre, ni l'époque où nous y vivons.

Grâce à la loi de Wien, cette hypothèse est compatible avec le redshift, mais à condition que la température du rayonnement soit variable ; ainsi la confrontation de (4) et (6) montre que les températures T_1 et T_2 observées sur G_1 et G_2 en x_1 et x_2 sont liées par

(1) Toute autre tentative d'interprétation du redshift doit fournir une explication de ce fait.

(2) Cette interprétation est unitaire : on peut si l'on veut décomposer le redshift en effet Doppler (dû au mouvement des deux sources) et effet Einstein (dû au champ de gravitation régnant entre les sources) ; mais cette décomposition est subjective (elle varie avec le choix d'un système de coordonnées) et inutile.

$$(7) \quad \frac{T_1}{T_2} = \frac{ds_2}{ds_1}$$

ainsi un quasar ayant un redshift de 3.5 (il en existe) recevait au moment où nous l'observons un rayonnement de température $T_1 = T_2 \times (3.5 + 1) \neq 12^\circ\text{K}$; comme les redshifts lointains sont tous positifs, l'univers était plus chaud autrefois qu'aujourd'hui.

La relation (7) nous permet de paramétrer les rayons lumineux joignant G_1 à G_2 au moyen d'une variable τ choisie de sorte que

$$(8) \quad d\tau = k T_1 ds_1 = k T_2 ds_2$$

k étant la constante de Boltzmann ; en introduisant les vitesse unitaires

$$(9) \quad U_1 = \frac{dx_1}{ds_1}, \quad U_2 = \frac{dx_2}{ds_2}$$

des deux galaxies, on a donc

$$(10) \quad \frac{dx_1}{d\tau} = \frac{U_1}{kT_1}, \quad \frac{dx_2}{d\tau} = \frac{U_2}{kT_2}$$

En tout point x de l'univers, désignons par

$$(11) \quad U$$

la vitesse unitaire du référentiel par rapport auquel le rayonnement cosmologique est homogène et isotrope (voir l'introduction) ; nous poserons

$$(12) \quad \textcircled{H} = \frac{U}{kT}$$

T étant la température de rayonnement en x ; l'ensemble du rayonnement est décrit par la correspondance

$$(13) \quad x \mapsto \textcircled{H}$$

qui est un champ de vecteurs de l'espace-temps.

Selon l'hypothèse \mathcal{H}_3 , le rayonnement est homogène et isotrope pour G_1 comme pour G_2 ; les vitesses unitaires U_1 et U_2 vérifient donc

$$(14) \quad U_1 = U(x_1), \quad U_2 = U(x_2)$$

si bien que les équations (10) s'écrivent

$$(15) \quad \frac{dx_1}{d\tau} = \textcircled{H}(x_1), \quad \frac{dx_2}{d\tau} = \textcircled{H}(x_2).$$

Utilisons la notation géométrique concernant les équations différentielles ⁽¹⁾ : nous désignerons par

$$(16) \quad \exp(a \textcircled{H})(x_0)$$

la valeur, pour $\tau = a$, de la solution de l'équation

$$(17) \quad \frac{dx}{d\tau} = \textcircled{H}(x)$$

qui prend la valeur $x = x_0$ pour $\tau = 0$; si le champ de vecteur \textcircled{H} est différentiable, $\exp(a \textcircled{H})$ est un difféomorphisme ⁽²⁾ ; lorsque a varie, les $\exp(a \textcircled{H})$ forment (au moins localement) un groupe à un paramètre de difféomorphismes (c'est le groupe engendré par le vecteur \textcircled{H}) ; les équations (15), valables à toute époque selon l'hypothèse \mathcal{H}_3 , indiquent que les lignes d'univers des galaxies sont des orbites de ce groupe ; elles indiquent de plus - puisque le paramètre τ qui figure dans ces deux équations indexe le même rayon lumineux, que les points $\exp(\tau \textcircled{H})(x_1)$, $\exp(\tau \textcircled{H})(x_2)$ des lignes d'univers G_1 et G_2 (figure 1) sont situés sur une même géodésique isotrope ; autrement dit que l'image par $\exp(a \textcircled{H})$ de la géodésique isotrope $\tau = 0$ rencontre une autre géodésique isotrope en deux points (situés sur G_1 et G_2) ; elle la rencontre d'ailleurs en un troisième point chaque fois que d'une galaxie G_3 , à un instant quelconque, G_1 et G_2 paraissent alignées (figure 1).

(1) Veuillez pardonner l'abus de notation qui consiste à confondre variable et champ.

(2) difféomorphisme = application différentiable ainsi que son inverse.

Le choix de ces trois points sur la géodésique isotrope est arbitraire (ce sont simplement des points où l'on a imaginé que l'observation du rayonnement cosmologique se faisait comme sur Terre); nous obtenons donc une propriété de l'application $\exp(\tau \textcircled{H})$ elle-même : elle transforme toute géodésique isotrope en géodésique isotrope.

Les difféomorphismes ayant cette propriété sont les transformations conformes, c'est-à-dire celles qui transforment le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ en un tenseur proportionnel ⁽¹⁾. Nous avons donc trouvé l'interprétation géométrique de la répartition spectrale du rayonnement : $\exp(\tau \textcircled{H})$ est une transformation conforme pour tout τ ; on dit que \textcircled{H} est une transformation conforme infinitésimale.

Le vecteur \textcircled{H} - ainsi possesseur d'une propriété cosmologique remarquable- possède par ailleurs une interprétation thermodynamique : c'est le vecteur-température qui apparaît naturellement dans une théorie covariante de la mécanique statistique (voir VIII, IX et la première partie de ce chapitre).

Grâce à la théorie des dérivées de Lie, on sait écrire tensoriellement que \textcircled{H} est une transformation conforme infinitésimale :

$$(18) \quad \partial_\mu \textcircled{H}_\nu + \partial_\nu \textcircled{H}_\mu - 2 \Gamma_{\mu\nu}^\rho \textcircled{H}_\rho = \lambda g_{\mu\nu}$$

ou, avec des notations plus géométriques ⁽²⁾

$$(19) \quad \boxed{\frac{\hat{\partial} \textcircled{H}}{\partial x} + \overline{\frac{\hat{\partial} \textcircled{H}}{\partial x}} = \lambda \underline{1}}$$

(1) Tout difféomorphisme A qui permute les géodésiques isotropes laisse invariant le champ des cônes isotropes; or, en tout point x , le cône isotrope caractérise algébriquement le tenseur $g_{\mu\nu}$ à un facteur près. Réciproquement, si A est conforme, il conserve le champ des cônes isotropes; donc les caractéristiques de ce champ (au sens de la théorie des équations aux dérivées partielles du 1er ordre) ; il se trouve que ces caractéristiques sont les géodésiques isotropes.

(2) le signe $\hat{}$ indique une dérivation covariante ; la barre $\overline{}$ indique la transposition par rapport à la métrique g ; $\underline{1}$ est l'application identique de l'espace vectoriel tangent à l'univers en x .

λ étant un scalaire défini en tout point.

Une géodésique est, par définition, une courbe qui peut être décrite avec une accélération géodésique nulle; c'est dire qu'il existe un paramètre s de la courbe (défini à une transformation affine près) tel que l'on ait

$$(20) \quad \frac{dx^\alpha}{ds} = P \quad ; \quad \frac{\hat{d}P}{ds} = 0 .$$

Le nombre $\bar{P}.P$ est une intégrale première de ces équations; si on a

$$(21) \quad \bar{P}P = 0$$

la géodésique est isotrope.

Dérivons alors le produit scalaire $\bar{\Theta}.P$; il vient

$$\frac{d}{ds} [\bar{\Theta}P] = \bar{\Theta} \frac{\hat{d}P}{ds} + P \frac{\hat{d}\bar{\Theta}}{ds} = P \frac{\hat{\partial}\bar{\Theta}}{\partial x^\alpha} P \quad (\text{grâce à (20)}) .$$

Ce nombre peut aussi s'écrire

$$\frac{1}{2} \bar{P} \left[\frac{\hat{\partial}\bar{\Theta}}{\partial x^\alpha} + \frac{\hat{\partial}\bar{\Theta}}{\partial x^\alpha} \right] P$$

d'où, grâce à (19) et (21)

$$(22) \quad \frac{d}{ds} [\bar{\Theta}.P] = 0$$

Dans le cas où $\bar{\Theta}$ est une transformation conforme infinitésimale, nous voyons donc que les géodésiques isotropes possèdent la quantité $\bar{\Theta}.P$ comme intégrale première.

Il se trouve que les équations (20), (21) constituent la description quasi-classique d'un photon (dont on néglige le spin); P est sa quadri-impulsion.

Dans un repère en équilibre par rapport au rayonnement - dont la quadrivitesse est U - l'énergie du photon est

$$(23) \quad E = \bar{U} \cdot P$$

comme $\Theta = \frac{U}{kT}$ (12), on voit que l'énergie apparente des photons diminue au cours du temps, selon la loi

$$(24) \quad \frac{E}{T} = \text{Cte}$$

Comme l'énergie d'un photon est liée à sa fréquence ν par la formule de Planck

$$(25) \quad E = 2\pi\hbar\nu$$

on voit aussi que le redshift des galaxies peut s'interpréter par la perte d'énergie des photons (les formules (4) et (7) donnant la même loi que (25) et (24)). Il ne s'agit en aucune façon d'une alternative à l'interprétation ci-dessus (l'effet Doppler-Einstein couplé), mais d'une propriété équivalente (grâce à la loi de Planck (25))

Réciproquement d'ailleurs, si la loi (24) est vérifiée par tous les photons, le vecteur-température est une transformation conforme infinitésimale : en effet en dérivant par rapport à s la constante $\bar{\Theta} P$, et en tenant compte de la loi de comportement (20), (21) des photons, on constate que l'opérateur linéaire $A = \frac{\partial \Theta}{\partial x}$ vérifie

$$(26) \quad \bar{P} \cdot A \cdot P = 0 \quad \forall P \text{ isotrope};$$

un calcul algébrique élémentaire permet d'en déduire

$$(27) \quad A + \bar{A} = \lambda \underline{1}$$

soit (19).

Le même résultat s'obtient en considérant la lumière comme onde électromagnétique : si le tenseur champ électromagnétique F vérifie les équations de Maxwell (dans le vide) il est bien connu que le tenseur de Maxwell-Poynting

$$(28) \quad M = \frac{1}{4\pi} \left[F^2 - \frac{1}{4} \text{Tr} (F^2) \underline{1} \right]$$

a une divergence nulle. En relativité restreinte, on en déduit la conservation de l'énergie électromagnétique

$$(29) \quad \iiint \frac{1}{8\pi} \left[\vec{E}^2 + \vec{B}^2 \right] dx dy dz$$

\vec{E} et \vec{B} étant les champs électrique et magnétique; en effet l'expression (29) est le flux, à travers une surface du genre temps, du vecteur MU (U étant la quadrivitesse du laboratoire).

Ici, ce vecteur n'est pas conservatif; par contre on constate que

$$\begin{aligned} \text{div} [M \odot] &= [\text{div} M] \odot + \text{Tr} \left(M \frac{\widehat{\partial \odot}}{\partial x} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left(M \left[\frac{\widehat{\partial \odot}}{\partial x} + \frac{\widehat{\partial \odot}}{\partial x} \right] \right) \quad (\text{puisque } \text{div} M = 0 \text{ et } M = \bar{M}) \\ &= \text{Tr} (M) \lambda \quad (\text{d'après (19)}); \text{ donc} \end{aligned}$$

$$(30) \quad \text{div} [M \odot] = 0$$

(il suffit de prendre la trace de (28)). Le flux du vecteur $M \odot$ sur une surface $T = \text{Cte}$ - qui est donc une grandeur conservée - est le quotient par kT du flux de U , qui est l'énergie : on voit que l'énergie lumineuse diminue proportionnellement à la température (1).

(1) On peut si l'on veut interpréter ce fait comme la conservation du nombre des photons dans le vide - puisque le taux de perte d'énergie total est égal à celui de chaque photon.

- Etudions maintenant les implications cosmologiques de la formule (19), que nous écrirons

$$(31) \quad \delta_L g = \lambda g$$

δ_L étant la dérivée de Lie associée au vecteur $\delta x = \textcircled{H}$. En remarquant que (27) peut s'écrire $\lambda = 2 \frac{\delta \Theta}{\Theta}$, la formule (31) s'écrit aussi

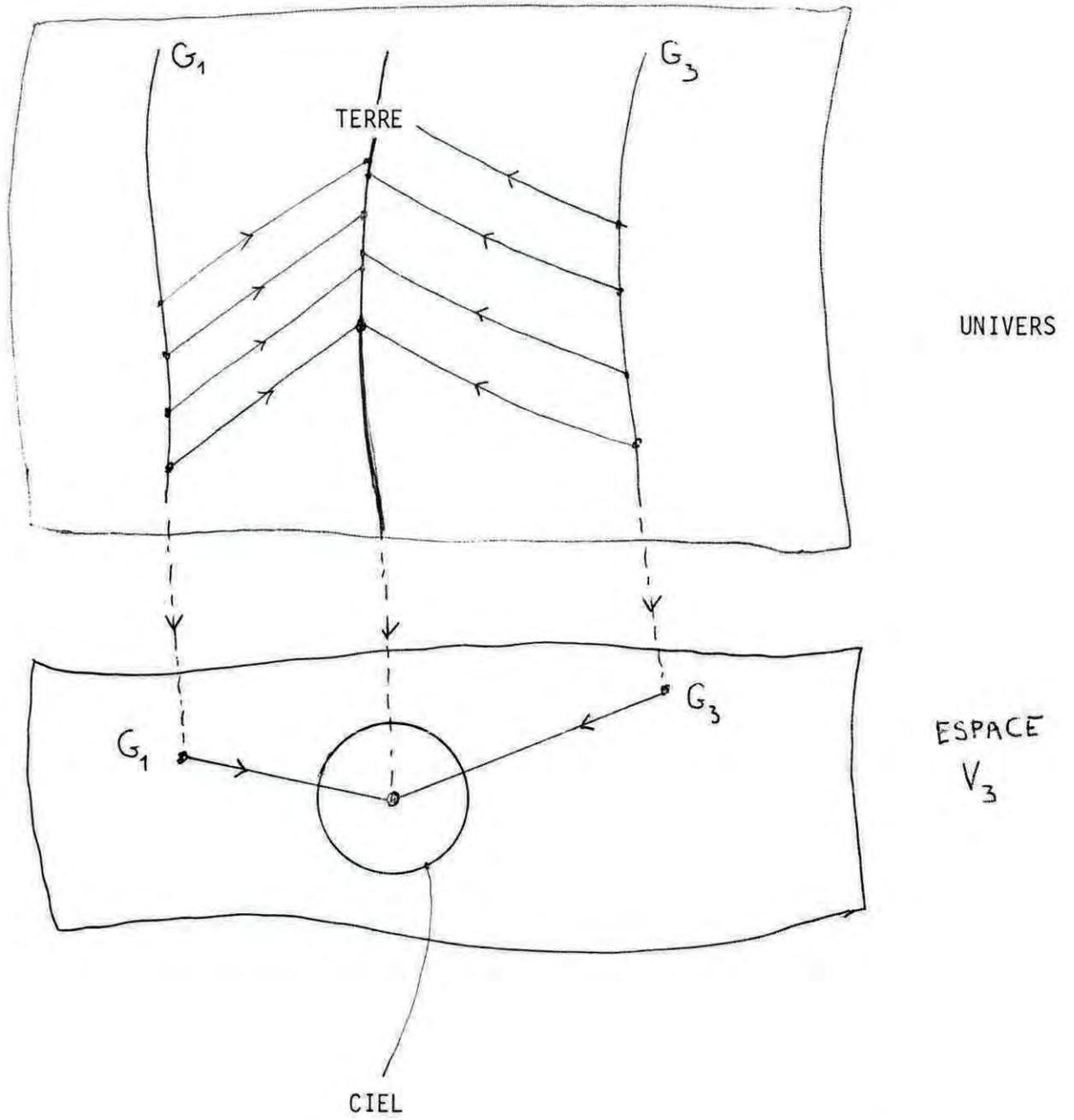
$$(32) \quad \delta_L \left[\frac{g}{\Theta^2} \right] = 0 \quad (\text{avec } \Theta = \frac{1}{kT})$$

Ainsi le vecteur température \textcircled{H} est une isométrie infinitésimale de la métrique

$$(33) \quad g_{\mu\nu}^* = \frac{1}{\Theta^2} g_{\mu\nu}$$

nous pouvons donc appliquer à cette métrique les techniques propres aux variétés riemanniennes qui admettent un groupe d'isométries à un paramètre (univers stationnaires, au sens de (IV)) ; le quotient de l'univers par le groupe est une variété V_3 , que l'on peut munir canoniquement d'une structure riemannienne positive ; V_3 conceptualise l'"espace" à trois dimensions (figure 2) ; les galaxies se projettent sur V_3 en des points fixes (aux fluctuations aléatoires près) ; la sphère unité de l'espace vectoriel tangent à V_3 au point que nous occupons s'identifie à la voûte céleste ; puisque les rayons lumineux joignant deux galaxies se projettent sur V_3 selon des courbes fixes, nous voyons les galaxies fixes dans le ciel (1).

(1) Effectivement les galaxies n'ont pas de précession observable ; il faut bien entendu tenir compte de l'aberration, due au mouvement orbital de la Terre.



- Figure 2 -

§2 . UN EQUILIBRE THERMODYNAMIQUE PARADOXAL.

Posons, comme en (32)

$$(34) \quad \theta = \frac{1}{kT}$$

En portant

$$(35) \quad \Theta = \theta U$$

dans (19), on trouve la formule

$$(36) \quad \theta \left[\widehat{\frac{\partial U}{\partial x}} + \overline{\widehat{\frac{\partial U}{\partial x}}} \right] + U \overline{\text{grad } \theta} + \text{grad } \theta \overline{U} = \lambda \underline{1}$$

où $\text{grad } \theta$ est le gradient riemannien de θ , c'est-à-dire le vecteur transposé du covecteur $\frac{\partial \theta}{\partial x}$.

L'identité

$$(37) \quad \overline{U} U = 1$$

donne par dérivation et transposition

$$(38) \quad \overline{U} \widehat{\frac{\partial U}{\partial x}} = 0 ; \quad \overline{\widehat{\frac{\partial U}{\partial x}}} U = 0$$

si bien que, si l'on multiplie l'équation (36) à gauche par \overline{U} , à droite par U , on trouve

$$(39) \quad 2 \frac{\partial \theta}{\partial x} U = \lambda ;$$

en reportant cette valeur de λ dans (36) et en prenant la trace, on trouve

$$(40) \quad 2 \theta \text{div } U - 6 \frac{\partial \theta}{\partial x} U = 0$$

ce qui s'écrit encore

$$(41) \quad \text{div} \left[\frac{U}{\theta^3} \right] = 0 ;$$

nous avons donc montré que le vecteur

$$(42) \quad \frac{U}{\theta^3}$$

est conservatif (sa divergence riemannienne est nulle).

Par ailleurs, en multipliant à gauche (24) par \bar{U} , en tenant compte de (37), (38), (39) on trouve

$$(43) \quad \theta \bar{U} \widehat{\frac{\partial U}{\partial x}} + \frac{\partial \theta}{\partial x} [1 - U\bar{U}] = 0;$$

au moyen de quelques transformations ⁽¹⁾, on constate que le premier membre de (43) est égal à

$$(44) \quad \frac{\theta^5}{4} \operatorname{div} \left[\frac{4U\bar{U} - 1}{\theta^4} \right]$$

si bien que nous avons montré que le tenseur

$$(45) \quad \frac{1}{\theta^4} [4U\bar{U} - 1]$$

a une divergence riemannienne nulle ; le caractère conservatif du vecteur (42) et du tenseur (45) est une conséquence de la seule formule (19), donc de la propriété du vecteur \textcircled{H} d'être une transformation conforme infinitésimale.

Or ces grandeurs ont une interprétation physique importante : à des facteurs constants près, (45) est le tenseur impulsion-énergie du rayonnement du corps noir à la température T ⁽²⁾, (42) est le flux d'entropie de

(1) Utiliser les identités riemanniennes $\operatorname{div} [\alpha \underline{1}] = \frac{\partial \alpha}{\partial x}$, $\operatorname{div} [A\underline{B}] = [\operatorname{div} A] \underline{B} + \bar{A} \widehat{\frac{\partial B}{\partial x}}$ en faisant $\alpha = \theta^{-4}$, $A = U\theta^{-3}$, $B = U\theta^{-1}$ et en tenant compte de (41).

(2) L'isotropie spatiale du tenseur impulsion-énergie du rayonnement montre qu'il est de la forme $\alpha U\bar{U} + \beta \underline{1}$; comme il est la valeur moyenne du tenseur de Maxwell-Poynting (28), et que ce tenseur a visiblement une trace nulle, on a

$$\alpha + 4\beta = 0$$

ce qui montre notamment que la pression de radiation $-\beta$ est le tiers de la densité d'énergie $\alpha + \beta$; la loi de Stefan indique que cette densité d'énergie est proportionnelle à T^4 , donc à θ^{-4} .

ce rayonnement (1).

Nous n'avions interprété jusqu'ici que la répartition spectrale du rayonnement cosmologique, sans nous préoccuper de son intensité; nous voyons maintenant que le fait que cette intensité soit celle du corps noir à la température T exprime que l'entropie, l'énergie et l'impulsion de ce rayonnement sont conservatives; c'est-à-dire que l'échange de ces grandeurs entre la matière et le rayonnement se fait avec un bilan nul : en ce sens le système matière-rayonnement constitue bien une sorte d'équilibre thermodynamique, malgré l'expansion et le refroidissement (2).

Formulons - à titre d'approximation - l'hypothèse

\mathcal{H}_4 [Les seuls efforts auxquels est soumise la matière sont l'action du rayonnement cosmologique et le champ gravitationnel.

Nous convenons donc de négliger, par exemple, les interactions électromagnétiques, la pression due au rayonnement des étoiles, l'effet de l'impact des rayons cosmiques, etc., comme on le fait - avec succès - dans la dynamique du système solaire.

Le rayonnement cosmologique - et notamment sa pression de radiation - n'est pas négligeable; mais il a un effet nul, puisque nous avons vu qu'il n'échange ni énergie, ni impulsion avec la

(1) Ceci revient à dire que le flux tridimensionnel d'entropie à l'intérieur d'un four est nul (ce qui est évident) et que la densité d'entropie est proportionnelle à θ^{-3} , donc à T^3 . La formule $dS = \frac{dQ}{T}$, appliquée à un four de volume unité dont on fait varier la température T , et la loi de Stefan $Q = a T^4$ donnent bien $S = \frac{4a}{3} T^3$ (à une constante additive près que l'on annule au zéro absolu.)

(2) La thermodynamique covariante (voir [VIII], [IX]) indique que le vecteur température serait une isométrie infinitésimale si l'univers était en équilibre; c'est-à-dire qu'il faudrait joindre à toutes les relations ci-dessus la relation $\lambda = 0$; la formule (39) montre alors que la température (scalaire) serait constante (au moins pour chaque observateur).

matière ⁽¹⁾. Ainsi le mouvement de la matière est le même que si elle était soumise au seul champ de gravitation global de l'univers; par conséquent les lignes de courant de la matière sont des géodésiques de la métrique $g_{\mu\nu}$ ⁽²⁾. En se souvenant que ces lignes de courant sont les lignes de force du vecteur unitaire U , nous avons donc à écrire que la dérivée covariante de U dans la direction U est nulle :

$$(46) \quad \boxed{\frac{\hat{\partial} U}{\partial x} U = 0}$$

Nous avons donc trouvé une propriété du seul rayonnement à partir d'hypothèses sur la matière; l'équation (46), vérifiée en tout point de l'univers, va avoir de nouvelles implications géométriques.

En effet, en portant (46) dans l'équation (43) transposée, on obtient la relation

$$(47) \quad \left[\underline{1} - U\bar{U} \right] \text{grad } \theta = 0$$

qui exprime simplement que le vecteur $\text{grad } \theta$ est parallèle à U ⁽³⁾; puisque le vecteur $\text{grad } \theta$ n'est pas identiquement nul (sinon T serait constante dans l'univers) les équations $\theta = \text{cte}$ définissent en général des sous-variétés de dimension 3 qui sont en chaque point orthogonales au vecteur U ; ainsi le champ de sous-espaces vectoriels

$$(48) \quad x \mapsto \text{orthogonal}(U)$$

est une feuilletage; la condition d'intégrabilité

(1) De façon précise, on sait que les lois relativistes de la mécanique s'expriment par la nullité de la divergence du tenseur impulsion-énergie total, somme de celui de la matière et de celui du rayonnement; comme ce dernier a déjà une divergence nulle (45), les lois du mouvement de la matière sont les mêmes que si elle était seule.

(2) Ce "principe des géodésiques" est vérifié avec une extrême précision par les mouvements du système solaire - et notamment ^{de} Mercure; - il interprète les $g_{\mu\nu}$ comme potentiels du champ de gravitation.

(3) $U\bar{U}$ est le projecteur orthogonal sur le vecteur U .

$$(49) \quad \left[\bar{U} dx = 0, \bar{U} \delta x = 0 \right] \Rightarrow \left[\bar{U} [d, \delta] x = 0 \right]$$

où $[d, \delta] x$ est le crochet de Lie de deux dérivations dx et δx est vérifiée; l'identité

$$(50) \quad [d, \delta] x = \hat{d} \delta x - \hat{\delta} dx$$

permet d'écrire la condition (49) sous la forme

$$(51) \quad [1 - U\bar{U}] \left[\frac{\hat{\partial} U}{\partial x} - \frac{\widehat{\partial} U}{\partial x} \right] [1 - U\bar{U}] = 0$$

ou, compte tenu de (38) et (46)

$$(52) \quad \frac{\hat{\partial} U}{\partial x} - \frac{\widehat{\partial} U}{\partial x} = 0$$

On reconnaît une condition d'intégrabilité : il existe une variable t telle que

$$(53) \quad U = \text{grad } t ;$$

puisque U est un vecteur unitaire, t définit une abscisse curviligne sur chaque ligne de force de U ; c'est-à-dire un temps propre sur chaque ligne de courant : t peut donc être adopté comme temps universel; la valeur de t au point x s'appellera date de l'événement x .

Sur les hypersurfaces $t = \text{Cte}$, la variable θ est constante puisque $\text{grad } \theta$ est parallèle à $\text{grad } t$; il existe donc une fonction

$$(54) \quad t \mapsto \theta$$

qui définit la température en fonction de la date.

Les mêmes propriétés sont vraies pour la métrique g^* ((33); l'orthogonalité est la même pour les deux métriques); il existe un vecteur $*$ -unitaire tangent aux lignes de courant (c'est le vecteur \ominus); il est l' $*$ -gradient d'une variable τ ; on trouve

$$(55) \quad \tau = \int \frac{dt}{\theta} + \text{Cte} ;$$

mais comme de plus \ominus est le générateur d'un groupe d'isométries de g^* , on en déduit par un calcul immédiat que l'élément de longueur ds^* de

cette métrique vérifie

$$(56) \quad ds^{*2} = d\tau^2 - d\sigma^2$$

$d\sigma$ étant l'élément de longueur de la variété quotient V_3 (1).

La formule (55) montre que l'on peut exprimer t , donc θ en fonction de τ ; en regroupant (56) et (33), on en déduit donc la formule

$$(57) \quad ds^2 = \theta(\tau)^2 [d\tau^2 - d\sigma^2]$$

qui définit la vraie métrique d'univers au moyen de la métrique d'espace $d\sigma^2$ et de la fonction $\tau \mapsto \theta$.

- Il résulte immédiatement de (36), (39) et (57) que

$$(58) \quad \frac{\hat{\partial} U}{\partial x} = \frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{dt} [1 - U\bar{U}]$$

cette formule permet d'interpréter la conservation de l'énergie d'un phénomène quelconque, dont le tenseur d'impulsion-énergie vérifie la condition $\text{div } T = 0$; en effet le vecteur flux d'énergie TU vérifie

$$(59) \quad \text{div} [TU] = [\text{div } T]U + \text{Tr} \left(T \frac{\hat{\partial} U}{\partial x} \right) = -3 \frac{p}{\theta} \frac{d\theta}{dt}$$

p désignant la pression associée au phénomène (c'est-à-dire la valeur moyenne des trois contraintes principales dans le cas d'un phénomène non isotrope) ; l'énergie perdue apparaît donc comme le travail fourni par la pression à l'expansion, puisque $\frac{3}{\theta} \frac{d\theta}{dt}$ est le taux d'expansion volumique (CF. (57)). Ceci s'applique notamment aux rayonnements divers, et en particulier au rayonnement cosmologique.

(1) On dit que la métrique g^x est statique (voir [III], [IV]).

§ 3 ISOTROPIE ET HOMOGENEITE DE L'ESPACE

Nous allons commencer à utiliser l'équation d'Einstein

$$(60) \quad \boxed{8\pi G T_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}}$$

qui indique comment le tenseur impulsion-énergie global $T_{\mu\nu}$ est source du champ de gravitation; G est la constante de la gravitation de Newton; $R_{\mu\nu}$ le tenseur de Ricci de l'univers; R la courbure contractée $R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$; on prend la vitesse de la lumière égale à 1. Puisque nous connaissons la métrique par la formule (57), nous pouvons utiliser la formule (60) pour calculer les composantes du tenseur $T_{\mu\nu}$, qui caractérise en chaque point la densité d'énergie, la densité d'impulsion (ou flux d'énergie) et la contrainte; elles doivent coïncider avec les valeurs connues expérimentalement.

On prend des coordonnées x^j de V_3 ($j = 1, 2, 3$) et l'on pose $\tau = x^0$; les formules classiques donnent alors :

$$(61) \quad 8\pi G T_{00} = \frac{1}{2} R_{tridi} + 3\theta'^2/\theta^2$$

$$(62) \quad 8\pi G T_{0j} = 0$$

$$(63) \quad 8\pi G T_{jk} = \left[R_{jk} - \frac{1}{2} R g_{jk} \right]_{tridi} + \frac{2\theta\theta'' - \theta'^2}{\theta^4} g_{jk}$$

où les grandeurs notées "tridi" sont associées à la métrique tridimensionnelle de V_3 ; θ' et θ'' sont les dérivées de θ par rapport à τ .

Nous adopterons -comme dernière approximation- l'hypothèse

\mathcal{H}_6 [En chaque point de l'univers la contrainte se réduit à une pression (1).]

(1) Ceci revient à considérer que les contraintes de cisaillement sont rares dans l'univers, et en tout état de cause ne jouent aucun rôle comme source du champ de gravitation, ce qui semble parfaitement justifié par leur évaluation numérique là où on en rencontre (par exemple dans certaines roches).

Cette hypothèse s'écrit

$$(64) \quad T_{jk} = -p g_{jk}$$

où les T_{jk} sont les composantes spatiales de T et p la pression.

Un coup d'oeil sur la formule (63) montre qu'il existe un scalaire K tel que la variété V_3 vérifie l'équation tridimensionnelle

$$(65) \quad R_{jk} - \frac{1}{2} R g_{jk} = -K g_{jk}$$

Utilisons quelques résultats de géométrie riemannienne; nous savons - grâce aux identités de Bianchi - que la divergence du premier membre de (65) est identiquement nulle; il en résulte que K est une constante. D'autre part, dans le cas de la dimension 3, le tenseur de Riemann-Christoffel peut se calculer en fonction du tenseur de Ricci; on déduit ainsi de (65) la formule

$$(66) \quad R_{jk,lm} = K [g_{jm} g_{kl} - g_{jl} g_{km}]$$

qui exprime que V_3 est une variété de courbure constante K .

Les principales propriétés de ces variétés sont connues depuis Riemann; rappelons - les rapidement.

En supposant V_3 géodésiquement complète et simplement connexe (1) on démontre que V_3 est isométrique à l'espace euclidien \mathbb{R}^3 (si $K = 0$);

(1) Si ces hypothèses globales ne sont pas exigées, toutes les propriétés énoncées sont vraies localement; en particulier, si V_3 est géodésiquement complète et connexe - mais pas simplement, on montre que V_3 est le quotient de \mathbb{R}^3 , S^3 ou H^3 par un groupe discret d'isométries; le lecteur trouvera dans (XII) quelques possibilités topologiques pour V_3 dont certaines ne manquent pas de pittoresque (espace projectif, espaces lenticulaires, bouteille de Klein).

à la sphère S^3 (si $K > 0$) ou à l'hyperboloïde H^3 ⁽¹⁾ (si $K < 0$). Dans chacun de ces trois cas, V_3 possède un groupe d'isométries de dimension 6, qui agit transitivement, dont les stabilisateurs sont isomorphes au groupe $O(3)$, et qui munit V_3 de la géométrie euclidienne (si $K = 0$), de la géométrie de Riemann (si $K > 0$) ou de la géométrie de Lobatchevski (si $K < 0$) ⁽²⁾.

Dans l'analyse précédente, nous avons traité comme rigoureuses un certain nombre d'hypothèses dont nous savons pertinemment qu'elles peuvent seulement être approchées (on ne s'attend pas, par exemple, que le référentiel du rayonnement accompagne la Terre dans son mouvement autour du Soleil).

Ces hypothèses viennent de nous conduire à une conséquence importante : l'espace physique V_3 est homogène et isotrope (grâce aux propriétés des groupes d'isométrie ci-dessus). Ce résultat est évidemment faux pris à la lettre ; par contre, il est très bien vérifié macroscopiquement : le décompte des galaxies de différents types donne les mêmes résultats statistiques dans toutes les portions du ciel (sauf celles qui sont voilées par des poussières proches) ; cette isotropie implique évidemment l'homogénéité si nous n'estimons pas occuper une place privilégiée dans l'univers.

C'est pourquoi on le prend généralement comme axiome dans la construction d'un modèle cosmologique : nous voyons ici que c'est inutile - c'est une conséquence des hypothèses purement ponctuelles que nous avons énoncées.

- On sait définir dans V_3 les cercles et les sphères ; nous noterons

(67) $\left\{ \begin{array}{l} 2\pi L(r) = \text{longueur du cercle de rayon } r \\ 4\pi S(r) = \text{surface de la sphère de rayon } r \\ 4\pi V(r) = \text{volume de la sphère de rayon } r \end{array} \right.$

(1) On peut définir H^3 comme l'ensemble des vecteurs de futur de l'espace de Minkowski ayant une longueur donnée

(2) Le groupe est le groupe des déplacements euclidiens si $K = 0$, le groupe $O(4)$ si $K > 0$, le groupe de Lorentz orthochrone $O(3,1)^\uparrow$ si $K < 0$.

Des considérations élémentaires et la formule de Stokes montrent que l'on a

$$(68) \quad V'(r) = S(r) = L(r)^2$$

et

$$(69) \quad S'(r) = S(r) \Delta r$$

Δr désignant le laplacien de la fonction r , distance géodésique au centre de la sphère. On en déduit - par exemple en choisissant des coordonnées - les formules

$$(70) \quad L(r) = \begin{cases} \frac{\sin(r\sqrt{K})}{\sqrt{K}} & \text{si } K > 0 \\ r & \text{si } K = 0 \\ \frac{\text{sh}(r\sqrt{|K|})}{\sqrt{|K|}} & \text{si } K < 0 \end{cases}$$

$$(71) \quad V(r) = \begin{cases} \frac{2r\sqrt{K} - \sin(2r\sqrt{K})}{4K^{3/2}} & \text{si } K > 0 \\ r^3/3 & \text{si } K = 0 \\ \frac{\text{sh}(2r\sqrt{|K|}) - 2r\sqrt{|K|}}{4|K|^{3/2}} & \text{si } K < 0 \end{cases}$$

nous allons utiliser ces formules pour calculer quelques effets cosmologiques.

- Diamètres apparents.

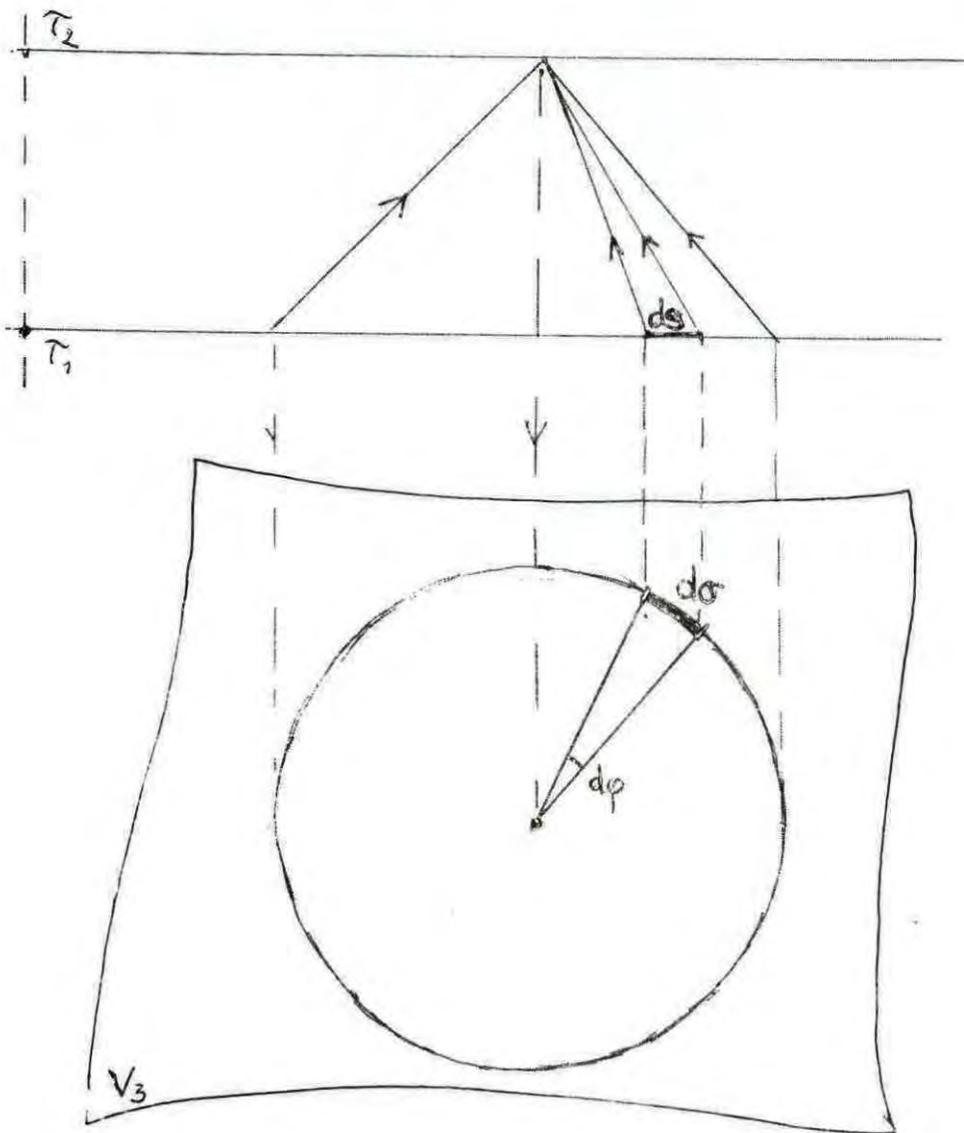
- Les rayons lumineux décrivent des géodésiques isotropes aussi bien pour la métrique g^* que pour la métrique g ; elles se projettent donc sur V_3 selon des géodésiques, parcourues selon la loi $\frac{d\sigma}{d\tau} = 1$ (figure 3).

Il en résulte que toutes les galaxies que nous voyons avec un redshift donné sont situées sur une sphère géodésique de V_3 , centrée sur notre position, de rayon

$$(72) \quad r = \tau_2 - \tau_1$$

τ_1 et τ_2 étant les valeurs de τ correspondant respectivement à elles et à nous; la valeur du redshift est

$$(73) \quad \frac{\Theta(\tau_2)}{\Theta(\tau_1)} - 1$$



- Figure 3 -

Un grand cercle de cette sphère a comme longueur $2\pi L(r)$ dans V_3 ; sa longueur réelle est donc $2\pi \Theta(\tau_1) L(r)$ (formule (57)) ; comme nous le voyons sous un angle 2π , il en résulte que le diamètre apparent d'un objet de diamètre réel ds est

(74)

$$d\varphi = \frac{ds}{\Theta(\tau_1) L(\tau_2 - \tau_1)}$$

Luminosités.

Quelles que soient leur composition spectrale et leur état de polarisation, les ondes que nous recevons d'une étoile sont indiscernables d'une onde plane progressive : à tout instant, le champ électrique \vec{E} et le champ magnétique \vec{B}

composant cette onde sont perpendiculaires et de même longueur.

Algébriquement, ces propriétés s'écrivent

$$(75) \quad F^3 = 0$$

F étant le tenseur champ électromagnétique ; nous prendrons cette formule comme hypothèse pour étudier la propagation dans l'univers des ondes émises par un astre.

On déduit de (75) que $\text{Tr}(F^2) = 0$, donc que le tenseur de Maxwell-Poynting (28) est

$$(76) \quad M = \frac{F^2}{4\pi} ;$$

on sait que les équations de Maxwell dans le vide entraînent l'équation

$$(77) \quad \text{div } M = 0.$$

Il résulte des équations (75,76) que l'espace de valeurs de M est une direction isotrope ; de (77) que les lignes de force de cette direction sont des géodésiques isotropes - les rayons lumineux issus de l'astre. Puisque nous les connaissons, M est défini à un facteur près que nous noterons $\rho \theta^2$; on a ainsi

$$(78) \quad M = \rho \theta^2 V \bar{V}$$

en posant

$$(79) \quad V = \text{grad}[\tau - r]$$

- r étant la distance géodésique au point occupé par l'astre sur V_3 .

Compte-tenu de la relation $\bar{V}U = \frac{1}{\theta}$, $\rho = \bar{U}MU$ est la densité d'énergie du rayonnement. On possède pour la déterminer la formule (77) ; compte-tenu de l'identité

$$(80) \quad \frac{\hat{\partial} V}{\partial x} V = 0$$

elle se réduit à

$$(81) \quad \text{div} [\rho \theta^2 v] = 0$$

Nous allons la remplacer par un argument plus imagé. Supposons (fig. 4) que l'astre émette une bouffée de lumière entre les instants repérés par τ_1 , $\tau_1 + \delta\tau_1$; et que cette émission soit à symétrie sphérique.

À l'instant repéré par τ_2 , cette lumière sera reçue entre deux sphères qui, en projection sur V_3 , auront les rayons

$$(82) \quad r = \tau_2 - \tau_1$$

et $r - \delta\tau_1$; donc dans un volume réel $4\pi \theta(\tau_2)^3 V'(r) \delta\tau_1$

(compte tenu de (57)) ;

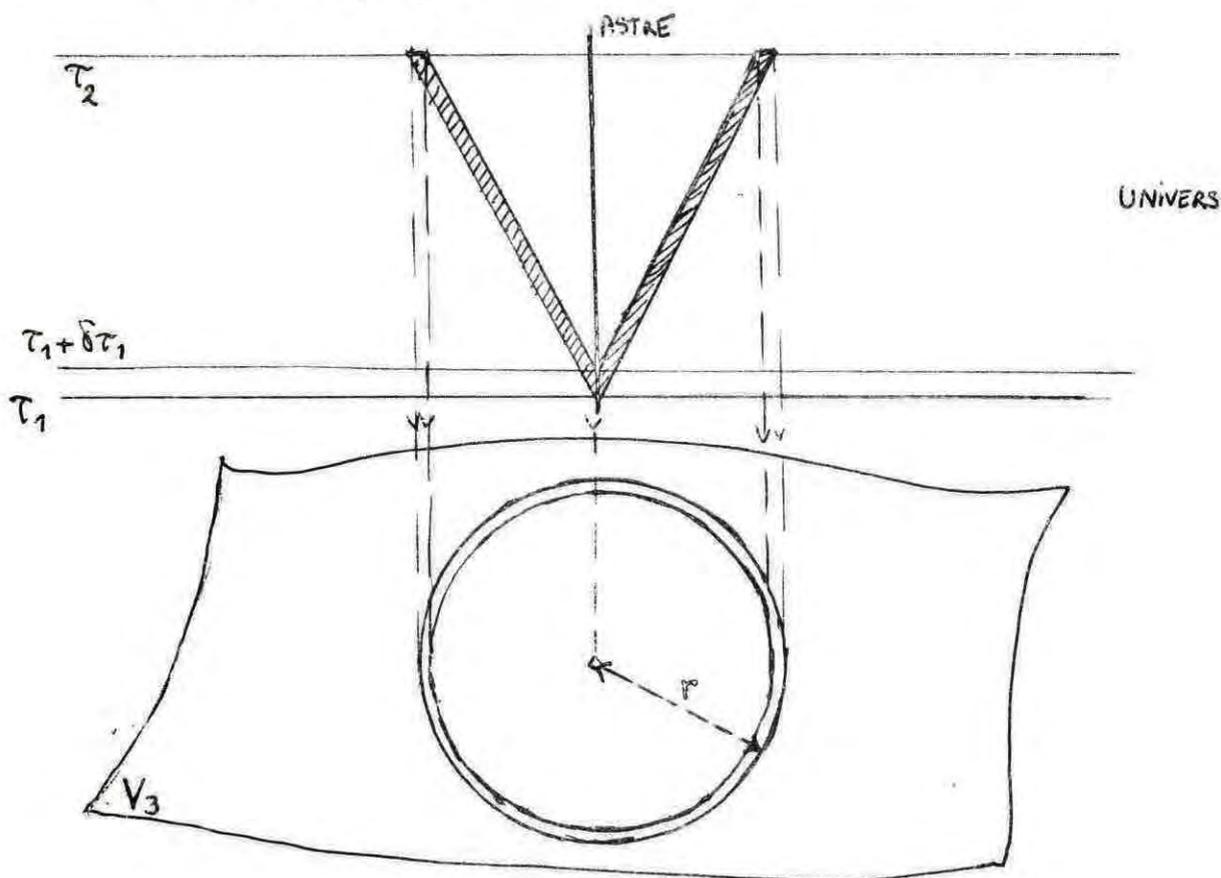


Figure 4

l'énergie reçue est donc

$$(83) \quad E_2 = 4\pi \rho \theta(\tau_2)^3 V'(r) \delta\tau_1;$$

on sait que cette énergie est inversement proportionnelle à $\theta(\tau_2)$ (voir (.30)) ; si bien que l'énergie émise vaut

$$(84) \quad E_1 = E_2 \frac{\theta(\tau_2)}{\theta(\tau_1)}.$$

Compte tenu de (46), le temps d'émission de cette énergie est

$$(85) \quad \delta t_1 = \theta(\tau_1) \delta\tau_1;$$

d'où la relation entre ρ et la puissance P_1 émise (1)

$$(86) \quad \rho = \frac{P_1}{4\pi S(\tau_2 - \tau_1)} \frac{\theta(\tau_1)^2}{\theta(\tau_2)^4}$$

compte tenu du caractère progressif des ondes reçues, ρ est aussi le flux reçu dans la direction de l'astre, c'est-à-dire sa luminosité.

- Nous avons ainsi trouvé une solution particulière de l'équation (77-78), à savoir

$$\rho = \frac{\theta^2}{S(r)} \times C^{\tau}$$

Il s'ensuit que la solution générale est

$$(87) \quad \rho = \frac{\theta^2}{S(r)} f(x)$$

(1) Nous avons utilisé (68) ; $S(r) = L(r)^2$ est donnée par (70).

Comparer avec [VII] et [XI].

$f(x)$ étant une fonction positive qui ne dépend que du rayon lumineux passant par x ; ceci permet de traiter une émission non isotrope et dépendant du temps - en particulier le cas du signal lumineux périodique que nous avons envisagé au §1,

Brillance.

Dans le cas d'une source étendue - que nous supposons pour simplifier uniformément brillante, il existe une constante C telle que la puissance rayonnée par un élément d'aire ds^2 soit $C ds^2$; en utilisant (86), (74) et (68) on voit que la luminosité de la source est

$$(88) \quad \frac{C}{4\pi} d\varphi^2 \left[\frac{\theta(\tau_1)}{\theta(\tau_2)} \right]^4$$

$d\varphi^2$ étant l'angle solide sous lequel on voit la source.

On voit que $\frac{C}{4\pi}$ est la brillance initiale de la source, et que la brillance actuelle est divisée par $\left[\frac{\theta_2}{\theta_1} \right]^4$; ce résultat particulièrement simple vaut aussi pour le fond du ciel - brillant du rayonnement cosmologique : dans ce cas on retrouve la loi de Stefan.

Dénombrements d'astres

Un coup d'oeil sur la figure (3) montre que les astres que l'on observe entre les valeurs τ_1 et τ_2 du paramètre - donc avec un redshift inférieur à $\frac{\theta(\tau_2)}{\theta(\tau_1)} - 1$ - sont ceux qui remplissent une sphère de V_3 de rayon $r = \tau_2 - \tau_1$; l'homogénéité de l'espace montre que leur nombre N est proportionnel au volume de cette sphère, soit $4\pi V(r)$; la densité D des astres dans l'espace V_3 est évidemment phénoménologique, et dépend du type d'astre considéré ; on a donc la formule

$$(89) \quad \boxed{N = 4\pi D V(\tau_2 - \tau_1)}$$

l'expression de V étant donnée en (71).

§ 4 ACHEVEMENT DU MODELE COSMOLOGIQUE

Pour disposer d'un modèle cosmologique défini, il ne nous manque plus que la détermination de la fonction $\theta(r)$; nous disposons à cet usage de l'équation d'Einstein (60), c'est-à-dire de 10 équations scalaires ; leur compatibilité avec l'expérience est donc un test important pour le modèle.

Compte tenu de l'homogénéité de l'espace - c'est-à-dire des formules (65) ou (66) , il est facile de regrouper les diverses composantes (61, 62, 63) du tenseur T en une seule formule quadridimensionnelle; on trouve ainsi

$$(90) \quad \boxed{\delta \pi G T_{\mu\nu} = \frac{A}{\theta^4} [4U_\mu U_\nu - g_{\mu\nu}] + \frac{6B}{\theta^3} U_\mu U_\nu}$$

où l'on a posé comme abréviation

$$(91) \quad A = \theta'^2 - 2\theta\theta'' - K\theta^2$$

$$(92) \quad B = \theta'' + K\theta$$

la pression est alors constante dans l'espace et vaut

$$(93) \quad p = \frac{A}{8\pi G \theta^4}$$

Nous allons supposer que cette pression est essentiellement la pression de radiation du rayonnement cosmologique (1) ; celle-ci est connue par la théorie de Planck; nous avons vu qu'elle est le

(1) Puisque il faut choisir une pression constante dans tout l'espace, on doit choisir sa valeur moyenne; pour des raisons de volume occupé, cette valeur moyenne diffère peu de celle de l'espace intergalactique; on y évalue les diverses causes de pression à moins d'un cinquantième de la pression de radiation (la pression de l'éventuel gaz intergalactique sera discutée plus loin).

tiers de la densité d'énergie du rayonnement, soit

$$(94) \quad p = \frac{\pi^2}{45 \hbar^3} \times \frac{1}{\theta^4} \quad [2\pi\hbar = \text{constante de Planck}];$$

l'identification de (93) et (94) nous montre que A est constante, et prend la valeur

$$(95) \quad A = \frac{8\pi^3 G}{45 \hbar^3} = 9.40 \times 10^{84} \text{ g}^{-4} \text{ cm}^{-2};$$

la dérivation de (91) et (92) montre immédiatement que B aussi est constante.

La formule (90) exprime alors que le tenseur T est la somme du rayonnement cosmologique. *(du tenseur d'énergie)*

$$(96) \quad \frac{A}{8\pi G \theta^4} [4U_\mu U_\nu - g_{\mu\nu}]$$

(voir (33) ci-dessus) et du tenseur d'énergie d'une poussière de densité ρ ;

$$(97) \quad \rho U_\mu U_\nu$$

ρ étant donné par

$$(98) \quad \rho = \frac{3B}{4\pi G \theta^3};$$

résultat bien satisfaisant, puisque ce sont les deux phénomènes

physiques que nous avons considérés avant même d'écrire l'équation d'Einstein (1).

Pour achever la détermination du modèle, nous avons les équations (91) et (92) :

$$(91) \quad \theta'^2 - 2\theta\theta'' - K\theta^2 = A$$

$$(92) \quad \theta'' + K\theta = B$$

où l'on sait que les constantes A et B ont des valeurs positives; ce sont deux équations différentielles dont chacune est intégrale première de l'autre; leur système est d'ailleurs équivalent à l'équation du premier ordre obtenue par élimination de θ'' , à savoir

$$(99) \quad \theta'^2 = A + 2B\theta - K\theta^2.$$

Compte tenu du fait que θ est positive, et que θ' est actuellement positive (refroidissement), l'intégration élémentaire montre que θ s'est annulé dans le passé - quelles que soient les valeurs numériques de A, B, K; ceci correspond à un état de température infinie et de densité infinie au delà duquel le modèle n'est certainement pas prolongeable dans le passé; c'est le big-bang.

(1) Nous savons que l'expansion de la matière est adiabatique - puisqu'il n'y a pas d'échange avec le rayonnement; l'équation (98), que l'on peut écrire $\rho/T^3 = \text{Cte}$, est donc une loi de comportement adiabatique. Il se trouve que c'est celle d'un gaz parfait dont le rapport des chaleurs spécifiques a la valeur 4/3. (C'est celle que donne la théorie cinétique à un gaz composé de particules solides, et elle est de l'ordre de grandeur des valeurs mesurées pour les gaz polyatomiques à basse température). Mais cette interprétation implique l'existence d'une pression, que nous noterons p' , donnée par la loi de Mariotte-Gay-Lussac $p'\theta/\rho = \text{Cte}$; il en résulte que p' , comme la pression de radiation p , est proportionnelle à T^4 . Le rapport constant p'/p est proportionnel à la densité actuelle, inversement proportionnel à la masse moléculaire du gaz; la valeur maximum que l'on pourrait envisager (hydrogène intergalactique de densité $10^{-29} \text{ g cm}^{-3}$) serait 10^{-8} ; ce qui justifie a posteriori que nous ayons négligé p' devant p en (93, 94)

Une autre difficulté provient de l'existence probable de neutrinos de basse énergie, qui doivent modifier la valeur de la constante A. Mais ils posent quelques difficultés de principe, et semblent pour l'instant inaccessibles à l'expérience.

En choisissant le big-bang comme origine pour la variable τ ,
on trouve alors

$$(100) \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } \theta = \sqrt{A} \frac{\sin(\tau\sqrt{K})}{\sqrt{K}} + B \frac{1 - \cos(\tau\sqrt{K})}{K} \quad (\text{pour } K > 0) \\ \text{b) } \theta = \sqrt{A} \frac{\text{sh}(\tau\sqrt{|K|})}{\sqrt{|K|}} + B \frac{\text{ch}(\tau\sqrt{|K|}) - 1}{|K|} \quad (\text{pour } K < 0) \\ \text{c) } \theta = \sqrt{A}\tau + B \frac{\tau^2}{2} \quad (K = 0); \end{array} \right.$$

Il se trouve que ces trois formules peuvent s'écrire

$$(101) \quad \boxed{\theta = \sqrt{A} L(\tau) + 2B L(\tau/2)^2}$$

L étant la fonction définie en (67), calculée en (70).

Connaissant θ , on détermine immédiatement la température (34)

$$(102) \quad \boxed{T = \frac{1}{k\theta}}$$

la densité de matière

$$(103) \quad \boxed{\rho = \frac{3B}{4\pi G\theta^3}}$$

la pression de radiation (93)

$$(104) \quad \boxed{p = \frac{A}{8\pi G\theta^4}}$$

la date

$$(105) \quad t = \int \theta d\tau;$$

le calcul donne - en prenant le big-bang comme origine des temps

$$(106) \quad \boxed{t = 2\sqrt{A} L(\tau/2)^2 + 4B V(\tau/2)}$$

la fonction V étant donnée en (71);
 et enfin le coefficient d'expansion de Hubble - c'est-à-dire la dérivée logarithmique de la distance des galaxies proches par rapport au temps; la formule (57) donne

$$(107) \quad \boxed{H = \frac{1}{\Theta} \frac{d\Theta}{dt} = \frac{\Theta'}{\Theta^2}}$$

- Le modèle de Friedmann ne tient pas compte - et pour cause- du rayonnement cosmologique comme source du champ de gravitation; on l'obtient en faisant $A = 0$ dans les formules ci-dessus; les valeurs numériques montrent que cette approximation n'entraîne pas de modification très importante dans la description actuelle de l'univers, ni dans la valeur numérique de son âge. On peut remarquer que ce modèle de Friedmann - même avec courbure spatiale K - est rigoureusement équivalent au plus simple des modèles newtoniens (voir l'annexe).

- Au contraire, au début de l'expansion, le premier terme des formules (90) et (101) devient prépondérant; la matière est négligeable devant le rayonnement; en négligeant B et K , dans les formules ci-dessus, on trouve le modèle de Gamow, dans lequel

$$(108) \quad \Theta = \sqrt{A} \tau \qquad t = \sqrt{A} \tau^2 / 2$$

d'où

$$(109) \quad kT = 1 / \sqrt{2t \sqrt{A}}$$

c'est ce modèle qui a permis à Gamow de prédire le rayonnement cosmologique - reste fossile de la lumière des premiers instants [I].

Si l'on fait l'hypothèse que l'on peut remonter jusqu'à un redshift de 10^{12} - correspondant à une température de 3×10^{12} °K, à un âge de l'univers de 30 microsecondes, on arrive à des conditions (1)

(1) La pression de radiation correspondante est 10^{35} dyne cm^{-2} , soit 10^{18} fois celle qui règne au centre du Soleil. Cette pression, supposée régner dans tous l'univers, serait le moteur de l'expansion (voir la fin du § 1).

telles que la lumière peut produire spontanément des paires proton-antiproton, neutron-antineutron. Une théorie cosmogonique récente (VI) suppose que toute la matière de l'univers s'est créée de cette façon, avec une quantité égale d'antimatière; la condensation ultérieure en galaxies et antigalaxies aurait été accompagnée d'une dématérialisation partielle, responsable du fond de rayons X que l'on observe effectivement.

- Nous disposons donc d'un modèle géométrique et thermodynamique qui est a priori acceptable tout au long de l'expansion - puisqu'il se trouve posséder les modèles de Gamow et de Friedmann comme modèles asymptotiques. Reste à le déterminer numériquement. Nous connaissons :

- (110) - La constante $A = 9.40 \times 10^{84} \text{ g}^{-4} \text{ cm}^2$; cette valeur peut être augmentée pour tenir compte des neutrinos;
- (111) - la température actuelle T du rayonnement est évaluée à $2.7 \text{ }^\circ\text{K}$;
 Θ vaut donc $2.4 \times 10^{36} \text{ g}^{-1}$;
- (112) - le coefficient H de Hubble est évalué à $2.6 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1}$, avec une précision douteuse; Θ' vaut donc $5 \cdot 10^{44} \text{ cm}^{-1} \text{ g}^{-2}$
- (113) - la densité moyenne de la matière galactique est évaluée à $3 \times 10^{-31} \text{ g cm}^{-3}$; mais la densité de matière intergalactique est très mal connue; c'est bien dommage, car la formule

$$(114) \quad K = \frac{A}{\Theta^2} + \frac{8\pi G}{3} \rho \Theta^2 - \frac{\Theta'^2}{\Theta^2}$$

conséquence de (98) et (99), permettrait alors de déterminer la courbure spatiale K .

On est donc conduit à faire quelques hypothèses et à les comparer à l'observation. Nous en ferons ici trois.

Modèle "plat".

On suppose a priori $K = 0$ -par raison de "simplicité" . Les formules ci-dessus donnent les expressions suivantes :

$$(115) \quad \rho = \frac{3}{8\pi G} \frac{\Theta'^2}{\Theta^4} \left[1 - \frac{A}{\Theta'^2} \right]$$

$$(116) \quad B = \frac{\theta'^2}{2\theta} \left[1 - \frac{A}{\theta'^2} \right]$$

$$(117) \quad \tau = \frac{2\theta}{\theta'} \frac{1}{1 + \sqrt{A/\theta'}}$$

$$(118) \quad t = \frac{2\theta^2}{3\theta'} \left[1 - \frac{A/\theta'^2}{[1 - \sqrt{A/\theta'}]^2} \right]$$

qui permettent de dimensionner le modèle à partir des données actuelles. Le rapport sans dimension $\sqrt{A/\theta'}$ vaut $6.13 \cdot 10^{-3}$ (avec les valeurs ci-dessus); par conséquent les valeurs (115, 116, 117, 118) diffèrent peu de celles que donnent l'approximation de Friedmann $A = 0$; on trouve

$$(119) \quad \left\{ \begin{array}{l} B = 5.2 \times 10^{52} \text{ g}^{-3} \text{ cm}^{-2} \\ \tau = 9.6 \times 10^{-9} \text{ g cm} \\ t = 2.56 \times 10^{17} \text{ s} = 8.1 \text{ milliards d'années} \\ \rho = 1.2 \times 10^{-29} \text{ g cm}^{-3} \end{array} \right.$$

C'est cette dernière valeur qui est la plus difficile à expliquer : pourquoi un quarantième seulement de la masse totale s'est-il condensé dans les galaxies? Où est la masse manquante? (on n'observe pas de gaz intergalactique; les "trous noirs" restent conjecturaux, et leur présence en grande quantité dans les galaxies serait décelée gravitationnellement).

"Modèle "vide"

On peut au contraire supposer que la matière s'est presque entièrement condensée dans les galaxies, et que par conséquent la densité générale est pratiquement la densité galactique

$$(120) \quad \rho = 3 \times 10^{-31} \text{ g cm}^{-3}$$

en portant cette valeur dans (114), on trouve (1)

(1) Le dernier terme de (114) est le plus important, si bien que cette valeur est peu sensible à l'évaluation de la densité galactique.

$$(121) \quad K = -4.23 \times 10^{16} \text{ g}^{-2} \text{ cm}^{-2}$$

cette valeur étant négative, l'espace V_3 est hyperbolique ⁽¹⁾ ;
la formule (100 b) montre que l'expansion doit durer indéfiniment,
comme dans le cas plat.

Pour dimensionner le modèle, il est commode d'utiliser la
formule ⁽²⁾

$$(122) \quad \tau = \frac{1}{\sqrt{|K|}} \text{Log} \frac{\left(1 + \sqrt{A/\theta'} + \sqrt{1 - 8\pi G\rho/3H^2 - A/\theta'^2}\right)^2}{8\pi G\rho/3H^2 + 2\sqrt{A/\theta'} + 2A/\theta'^2}$$

d'où

$$(123) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = 9.40 \times 10^{84} \text{ g}^{-4} \text{ cm}^{-2} \\ B = 1.29 \times 10^{51} \text{ g}^{-3} \text{ cm}^{-2} \\ K = -4.23 \times 10^{16} \text{ g}^{-2} \text{ cm}^{-2} \\ \tau = 2.27 \times 10^{-8} \text{ g cm} \\ t = 3.71 \times 10^{17} \text{ s} = 11.7 \text{ milliards d'années} \end{array} \right.$$

Modèle avec constante cosmologique.

A priori, il n'est pas impossible que la "véritable" équation de la
gravitation contienne une constante dite cosmologique; on peut l'in-
terpréter - sans modifier l'équation d'Einstein (60) - en attribuant
au vide un tenseur impulsion-énergie scalaire

$$(124) \quad T_{\mu\nu} = \frac{\Lambda}{8\pi G} g_{\mu\nu}$$

(1) Rappelons que ceci n'empêche pas l'existence d'un équivalent
newtonien (voir l'annexe).

(2) Cette formule fait intervenir deux nombres sans dimension :
 $8\pi G\rho/3H^2 = 1/40$ et $\sqrt{A/\theta'} = 1/163$; le second n'est pas négligea-
ble devant le premier, ce qui montre que la radiation joue un rôle
important dans le dimensionnement du modèle à partir des conditions
actuelles (le logarithme vaut 4.67 ; il vaudrait 5.07 en faisant
 $A = 0$ (modèle de Friedmann) et 5.78 en faisant $\rho = 0$ (modèle de Gamow
avec courbure).

ce qui correspond à une densité d'énergie $\Lambda/8\pi G$, à une pression $-\Lambda/8\pi G$.

Rien n'est changé aux trois premiers paragraphes de cette étude; mais l'expression (90) du tenseur impulsion-énergie total doit être modifiée pour être interprétable, en

$$(125) \quad 8\pi G T_{\mu\nu} = \frac{A}{\theta^4} [4U_\mu U_\nu - g_{\mu\nu}] + \frac{6B}{\theta^3} U_\mu U_\nu + \Lambda g_{\mu\nu}$$

avec cette fois-ci

$$(126) \quad \begin{cases} A = \theta'^2 - 2\theta\theta'' - K\theta^2 + \Lambda\theta^4 \\ B = \theta'' + K\theta - \frac{2}{3}\Lambda\theta^3 \end{cases}$$

Si on admet que la pression est égale à la pression du rayonnement cosmologique augmentée de celle du vide, A est constant (et prend la valeur (123)); comme précédemment on en déduit que B est constant; l'équation (99) devient

$$(127) \quad \theta'^2 = A + 2B\theta - K\theta^2 + \frac{\Lambda}{3}\theta^4$$

ce qui montre que θ est une fonction elliptique de τ .

On ne possède aucune indication observationnelle permettant de distinguer Λ de 0; la dynamique du système solaire laisse présumer que $|\Lambda| < 10^{-40} \text{ cm}^{-2}$; celle de la Galaxie que $|\Lambda| < 10^{-51} \text{ cm}^{-2}$; enfin la dynamique des amas galactiques, pour être valable, suppose que $|\Lambda| < 10^{-56} \text{ cm}^{-2}$. On est donc réduit aux conjectures sur sa valeur; l'une de celle-ci est que l'univers est à la fois plat et vide entre les galaxies: A et B prennent les valeurs (123), K est nul, et l'équation (127) donne

$$(128) \quad \Lambda = + 2.2 \cdot 10^{-56} \text{ cm}^{-2}$$

l'intégration de l'équation (127) fournit alors un modèle à expansion éternelle et à big-bang; l'âge correspondant de l'univers est 20,8 milliards d'années.

Quelques tests :

Nous n'allons pas discuter ici les divers arguments permettant de choisir un modèle d'univers; rappelons simplement que l'âge estimé de la galaxie (dix milliards d'année environ) s'accorde mieux avec les modèles vides.

Un des tests les plus importants est la statistique des sources lointaines (galaxies, quasars) qui peut porter sur leur quantité, leur luminosité et leur redshift.

La luminosité totale d'une source n'est pas mesurable directement : la présence de l'atmosphère, la nature des télescopes et des radio-télescopes ne permet que de la mesurer dans une bande passante déterminée. Comme cette bande passante correspond, pour des sources différentes, à des régions spectrales différentes (en raison des variations de redshift), on ne peut faire de statistique que si l'on a fait une hypothèse préalable sur le spectre d'émission des sources concernées.

- Par exemple, la couleur bleue des quasars (malgré leur redshift) peut suggérer que leur rayonnement est celui d'un corps noir à très haute température; dans ce cas on peut utiliser la loi de Rayleigh-Jeans, selon laquelle l'énergie émise est équipartie sur la variable ν^3 : En utilisant la formule (86) on trouve donc l'expression suivante pour la luminosité correspondant à un intervalle $\nu_1, \nu_1 + \delta\nu_1$ de fréquences émises

$$(129) \quad C \nu_1^2 \delta\nu_1 \frac{\theta(\tau_1)^2}{S(\tau_2 - \tau_1) \theta(\tau_2)^4},$$

C étant une constante caractéristique de la nature du quasar; soit encore compte tenu du redshift

$$(130) \quad \frac{C \nu_2^2 \delta\nu_2}{S(\tau_2 - \tau_1) \theta(\tau_1) \theta(\tau_2)}$$

Pour différents quasars de même type observés sur Terre ($\tau_2 = Cte$) la luminosité apparente sera donc inversement proportionnelle à

$$S(\tau_2 - \tau_1) \times \theta(\tau_1)$$

tant que l'approximation de Rayleigh-Jeans sera valable dans la bande spectrale observée (1).

La figure (5) donne, en fonction du décalage spectral ν_1/ν_2 (porté sur les courbes) la luminosité apparente ainsi calculée (en abscisse) et le nombre total de sources de redshift inférieur (en ordonnée). Les courbes correspondant aux modèles vides (pratiquement une droite de pente logarithmique 2 pour des redshifts allant de 0.5 à 4) sembleraient s'accorder avec les observations sans obliger à supposer que le nombre des quasars a fortement évolué depuis la date où nous observons les plus anciens. Mais l'hypothèse faite sur le spectre des quasars demande confirmation.

(1) Par exemple, pour des observations dans le spectre visible, si la température du quasar est supérieure à 50 000 ° K et le redshift inférieur à 4.

NOMBRE DE SOURCES

MODELE VIDE

100000

10000

1000

100

10

1

MODELE PLAT
ET VIDE
AVEC
CONSTANTE
COSMOLOGIQUE

MODELE PLAT

1.5 1.5

500

100

50

20

10

6

5

4

3

2

2

1.5

100

50

20

10

6

5

4

3

5

3

100 50 30 20 10

5

4

3

2

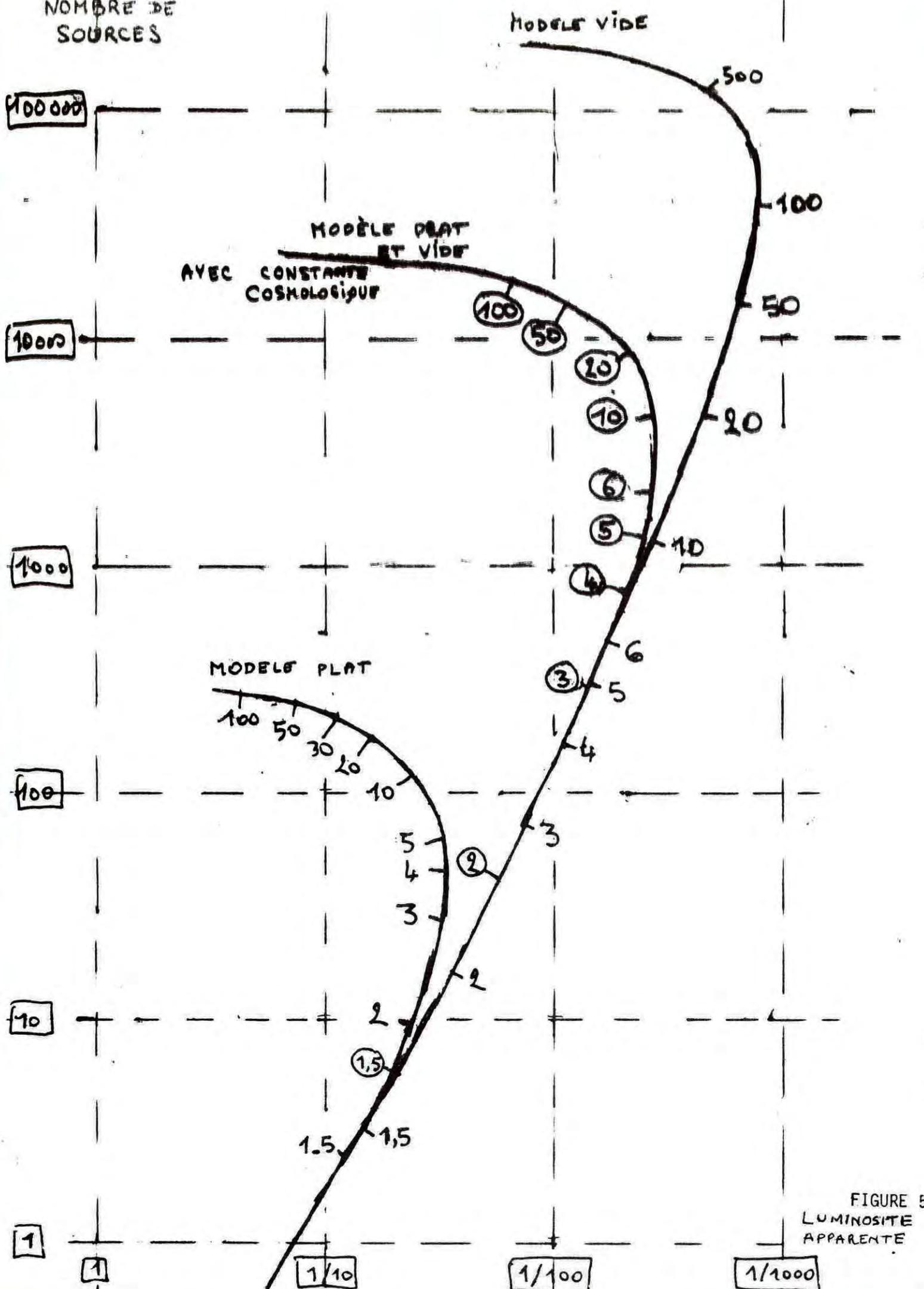
1.5

1/10

1/100

1/1000

FIGURE 5
LUMINOSITE
APPARENTE



L'hypothèse d'une constante cosmologique non nulle (ci-dessus (128)) exige qu'on confronte avec l'observation la loi de gravitation ainsi modifiée.

Le ds^2 de Schwarzschild - qui représente le champ de gravitation à symétrie sphérique - doit être remplacé par la formule

$$(131) \quad ds^2 = \left[1 - \frac{2MG}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} \right] dt^2 - \frac{dr^2}{1 - 2MG/r - \Lambda r^2/3} - r^2 [d\theta^2 + \cos^2\theta d\varphi^2]$$

où M est la masse de la matière qui crée le champ.

L'étude des géodésiques de ce champ est facile (voir [X]) ; pour les orbites circulaires, la durée de révolution ⁽¹⁾ est donnée par la formule

$$(132) \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{MG}{r^3} - \frac{\Lambda}{3}}}$$

avec la valeur (128) de Λ , les différences sont négligeables dans le système solaire ⁽²⁾ ; mais à l'échelle intergalactique, les différences deviennent considérables : on voit que pour une distance

$$(133) \quad r = \left[\frac{3MG}{\Lambda} \right]^{1/3}$$

le mouvement circulaire est remplacé par un équilibre ; aux distances plus élevées il n'existe plus de mouvement circulaire, le champ de gravitation devient répulsif. La distance (133) représente donc le rayon d'attraction d'une masse M ; pour la Galaxie il vaut (toujours avec la valeur (128) de Λ)

$$(134) \quad r = 500 \text{ Kpc}$$

ce qui est l'ordre de grandeur de la distance aux autres grandes galaxies de

(1) Il s'agit de la durée mesurée dans le temps t , c'est-à-dire pour un observateur lointain.

(2) L'effet le plus notable serait un ralentissement de Pluton lui faisant perdre un dixième de millimètre par siècle.

l'amas local - mais nettement supérieur à la distance aux galaxies satellites, comme les nuages de Magellan.

La formule (133) peut s'interpréter comme donnant la densité minimum d'un amas sphérique gravitationnellement lié

$$(135) \quad \rho = \frac{\Lambda}{4\pi G} = 2 \times 10^{-29} \frac{g}{cm^3} = 1.7 \frac{\text{Galaxie}}{[Mpc]^3}$$

il y a donc compatibilité avec l'observation, puisque les grands amas ont une densité nettement supérieure, et que (135) coïncide à peu près avec la densité de l'amas local.

Si cette coïncidence n'est pas accidentelle, on peut interpréter les amas de galaxies comme des lambeaux déchirés par l'expansion lorsque la densité générale est devenue inférieure à (135) ; ce qui correspond - dans le modèle (128) - à un redshift de 3.4 , et à un âge des amas de 15.5 milliards d'années.

ANNEXE : COSMOLOGIE NEWTONIENNE

En mécanique Newtonienne, un point matériel qui occupe la position \vec{r} à l'instant t gravite selon l'équation

$$(136) \quad \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{g}$$

\vec{g} désignant le champ de gravitation.

Cette équation peut s'écrire quadridimensionnellement : si l'on appelle x^j ($j = 1, 2, 3$) les composantes de \vec{r} , x^4 le temps, on constate immédiatement que (136) devient

$$(137) \quad \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\rho}{ds} = 0$$

à condition que les nombres $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ soient tous nuls, à l'exception des

$$(138) \quad \Gamma_{44}^4 = -g^4 ;$$

s est un paramètre a priori arbitraire, en fait fonction affine de t (faire $\mu = 4$ dans (137)).

On reconnaît dans (137) l'équation des géodésiques d'une connexion symétrique dont les composantes sont les $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$. La vraie nature du vecteur \vec{g} , c'est donc de définir une connexion symétrique de l'espace-temps par la formule (138).

Rappelons qu'une connexion symétrique est un objet géométrique que l'on peut définir indépendamment de toute métrique; elle possède une propriété remarquable : en chaque point, les nombres $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ qui repèrent la connexion peuvent être annulés par un choix convenable des coordonnées.

Cette propriété géométrique correspond ici à une propriété physique bien connue : la possibilité d'annuler localement la gravitation par

le choix d'un référentiel (apesanteur dans les satellites artificiels).

Ni le vecteur \vec{g} (en un point), ni sa longueur, ni même sa nullité ou sa non-nullité n'ont de signification physique ou géométrique objective.

Mais la géométrie différentielle nous permet d'associer une grandeur tensorielle à un champ de connexion : il s'agit du tenseur de Riemann-Christoffel (tenseur de courbure) dont le calcul est bien connu ; on trouve ici que toutes les composantes $R^M_{\nu\rho,\sigma}$ sont nulles, à l'exception des

$$(139) \quad R^j_{k4,4} = -R^j_{4k,4} = - \frac{\partial g^j}{\partial x^k}$$

On voit donc que la dérivée spatiale du vecteur \vec{g} a un sens objectif ; par conséquent, le vecteur \vec{g} est défini à l'addition près d'une constante arbitraire (1)

Ainsi se trouve levé l'obstacle épistémologique qui s'opposait autrefois à la construction d'un modèle cosmologique newtonien : si le vecteur \vec{g} était "objectif", et si l'espace était homogène et isotrope, \vec{g} ne pourrait avoir que la valeur 0 ; l'équation de Poisson

$$(140) \quad \text{div } \vec{g} = -4\pi G \rho$$

exigerait alors que la densité ρ soit partout nulle.

Ici, c'est le tenseur $\frac{\partial \vec{g}}{\partial x^k}$ qui doit être isotrope - donc scalaire ; en choisissant - ce qui est permis - $\vec{g} = 0$ à l'origine, on a donc

$$(141) \quad \vec{g} = -\lambda \vec{r}$$

λ étant une constante - plus exactement une fonction du temps ; l'équation de Poisson donne alors

$$(142) \quad \boxed{3\lambda = 4\pi G \rho}$$

(1) La pratique des calculs de mécanique céleste (calcul des perturbations, calcul des marées par exemple) ne met effectivement en jeu que des différences de valeurs de \vec{g} entre couples de points de l'espace

Cette équation est compatible avec une expansion uniforme - dont la vitesse est donnée en chaque point \vec{r} par

$$(143) \quad \vec{v} = H \vec{r}$$

H étant une fonction du temps (H est le coefficient de Hubble) ; en effet, si l'on écrit que les lignes de courant vérifient (136), (141), on trouve

$$(144) \quad \boxed{\frac{dH}{dt} + H^2 = -\lambda}$$

la conservation de la masse s'écrit par ailleurs (*)

$$(145) \quad \boxed{\frac{d\rho}{dt} + 3H\rho = 0}$$

Reste à intégrer le système des équations différentielles (142, 144, 145) ; on peut d'abord tirer ρ de (142) et porter dans (145), ce qui donne

$$(146) \quad \frac{d\lambda}{dt} + 3H\lambda = 0$$

Rien ne nous empêche maintenant de choisir une constante positive B et de poser

$$(147) \quad \theta = \left[\frac{B}{\lambda} \right]^{1/3}$$

puisque (142) montre que λ est positive ; ni d'introduire le paramètre

$$(148) \quad \tau = \int \frac{dt}{\theta}$$

(1) Ces équations (144, 145) sont respectivement l'équation d'Euler et l'équation de continuité ; elles restent valables si la matière, au lieu d'être de la poussière, est constituée d'un gaz parfait, d'équation d'état quelconque (la pression, étant spatialement constante, donne une contribution nulle à l'équation d'Euler).

La confrontation de (146, 147, 148) montre que

$$(149) \quad H = \frac{\theta'}{\theta^2}$$

θ' étant la dérivée de θ par rapport à τ ; en portant cette valeur dans (144) il vient

$$(150) \quad \theta'^2 - \theta\theta'' = 3\theta$$

On vérifie immédiatement, comme conséquence de (150), que la quantité

$$(151) \quad K = \frac{2B}{\theta} - \frac{\theta'^2}{\theta^2}$$

est constante ; si bien que θ est solution de l'équation différentielle

$$(152) \quad \theta'^2 = 2B\theta - K\theta^2$$

qui, après résolution, donnera

$$(153) \quad t = \int \theta d\tau$$

$$(154) \quad H = \theta'/\theta^2$$

$$(155) \quad \rho = \frac{3B}{4\pi G\theta^3}$$

On reconnaît exactement les équations (99, 105, 107, 103) du modèle relativiste - avec $A = 0$; l'interprétation du temps t , du coefficient de Hubble H et de la densité ρ étant les mêmes.

L'intégration de (152) conduit donc, comme ci-dessus, à la nécessité du big-bang, et fournit les formules (100) avec $A = 0$: en ce qui concerne l'évolution de l'univers, le modèle newtonien est donc strictement équivalent au modèle de Friedmann ; mais la constante d'intégration K ne s'interprète plus comme courbure spatiale.

REFERENCES .

- I G. GAMOW - Phys. Rev. 70 572 (1946).
- II S.W. HAWKING et G.F.R. ELLIS. "The large scale structure of space-time". Cambridge University Press, 1973.
- III H. JUAN. Ann. Fac. Sc. Marseille, 16, 5 (1968).
- IV A. LICHNEROWICZ. "Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme". Masson, 1955.
- V S. MAVRIDES - "L'univers relativiste". Masson 1973.
- VI R. OMNES - "Les métamorphoses de l'univers" Paris, 1973
- VII H.P. ROBERTSON - Z.f. Astrophysik, 15, 69 (1937).
- VIII J.M. SOURIAU. "Structure des systèmes dynamiques" Dunod, 1970.
- IX J.M. SOURIAU. Supp. Nuovo Cimento, I, 4, 203 (1966).
- X J.M. SOURIAU. Bull. Soc. Math. France, 93, 193 (1965).
- XI S. WEINBERG. "Gravitation and cosmology" J. Wiley, 1972.
- XII J.A. WOLF. "Spaces of constant curvature" Mc. Graw-Hill (1967).