

MÉCANIQUE STATISTIQUE, GROUPES DE LIE ET COSMOLOGIE

Jean-Marie SOURIAU (1)

Première partie

FORMULATION SYMPLECTIQUE DE LA MECANIQUE STATISTIQUE

RESUME

La notion classique d'ensemble canonique de Gibbs est étendue au cas d'une variété symplectique sur laquelle un groupe de Lie possède une action symplectique ("groupe dynamique").

La définition rigoureuse donnée ici permet d'étendre un certain nombre de propriétés thermodynamiques classiques (la température est ici un élément de l'algèbre de Lie du groupe, la chaleur un élément de son dual), notamment des inégalités de convexité.

Dans le cas de groupes non commutatifs, des propriétés particulières apparaissent : la symétrie est spontanément brisée, certaines relations de type cohomologique sont vérifiées dans l'algèbre de Lie du groupe.

Diverses applications sont abordées (corps tournants, mécanique statistique covariante ou relativiste).

[Ces résultats précisent et complètent une étude publiée dans un ouvrage antérieur (2) qui sera désigné par les initiales S.S.D.].

(1) Université de Provence et Centre de Physique Théorique C.N.R.S., Marseille.

(2) "Structure des systèmes dynamiques", Dunod, Paris, 1970.

§1 — FONCTIONS DE DISTRIBUTION

Le concept initial de la *mécanique statistique classique* est la *fonction de distribution* ; il s'agit d'une fonction réelle ρ , définie sur l'espace de phases d'un système dynamique, telle que l'intégrale

$$\int_D \rho dp_1 \dots dp_n dq_1 \dots dq_n \quad (1)$$

soit égale à la *probabilité* pour que le point $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ représentant l'état du système à l'instant t soit contenu dans un domaine D . Ce qui exige évidemment que ρ soit ≥ 0 et que l'intégrale (1), étendue à l'espace de phase tout entier soit égale à 1.

On suppose de plus que ρ vérifie l'équation de Liouville

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial \rho}{\partial q_j} \frac{\partial h}{\partial p_j} - \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_i} = 0 \quad (2)$$

h étant la fonction hamiltonienne.

§2 — ETATS STATISTIQUES

Il est commode de donner une interprétation géométrique ; considérons (fig. 1) l'*espace d'évolution* V_{2n+1} du système, variété paramétrée par les variables p_1, \dots, q_n, t ; il se projette sur l'*espace des mouvements* U_{2n} , variété dont chaque point est un *mouvement* (courbe tracée dans V , solutions des équations de Hamilton), et dont les espaces de phases successifs (section $t = \text{Cte}$ de V) constituent un atlas. U est munie d'une *structure symplectique* telle que toutes ces cartes soient canoniques. Nous noterons σ la 2-forme correspondante.

Alors l'équation de Liouville (2) exprime simplement que ρ est une *fonction définie sur U* ; l'intégrale (1) s'écrit :

$$\int_{D'} \rho \text{ vol} \quad (3)$$

où D' désigne un ouvert de U et vol la *densité de Liouville* de U .

Ainsi, une fonction de distribution s'interprète par une *loi de probabilité* (mesure positive de masse 1) *de la variété des mouvements*, loi de probabilité que nous appellerons *état statistique* (3).

(3) Les états statistiques définis par une fonction continue ρ sont *complètement continus* ; on peut considérer chaque mouvement classique x comme un état statistique en l'identifiant à la mesure de Dirac au point x .

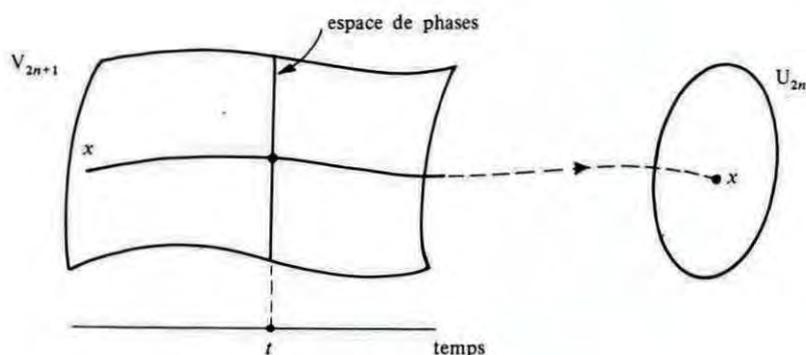


Fig. 1

§3 — IMAGES DE MESURES

On sait définir l'image $a(\mu)$ d'une mesure μ par un homéomorphisme a ; elle est caractérisée par la formule

$$a(\mu)(f) = \mu(f \circ a) \quad (4)$$

où f désigne une fonction d'essai à support compact ; l'image d'une loi de probabilité est une loi de probabilité.

L'image de la mesure de Liouville de U par un symplectomorphisme a est encore la mesure de Liouville ; il en résulte que l'on obtient la fonction de distribution de l'image de la mesure (3) par un symplectomorphisme a en composant ($x \mapsto \rho$) avec a^{-1} . Si le système dynamique considéré est conservatif, le groupe des translations dans le temps agit sur U par symplectomorphismes⁽⁴⁾ ; un état statistique est dit *état d'équilibre* s'il est invariant par les translations temporelles⁽⁵⁾.

§4 — PRODUITS TENSORIELS DE MESURE

Si μ_1 et μ_2 sont des mesures de deux variétés V_1 et V_2 , le *produit tensoriel* $\mu_1 \otimes \mu_2$ est la mesure définie sur la *variété produit* $V_1 \times V_2$ par la formule

(4) Une translation τ fait correspondre à un mouvement x le mouvement ayant la même trajectoire, mais dont la loi horaire est retardée de τ .

(5) De même qu'un état d'équilibre (au sens classique) est un mouvement invariant par les translations temporelles.

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(f) = \mu_1(x_1 \mapsto \mu_2(x_2 \mapsto f(x_1, x_2))) \quad (5)$$

où f désigne une fonction d'essai à support compact sur $V_1 \times V_2$.

Si V_1 et V_2 sont des variétés symplectiques, $V_1 \times V_2$ est canoniquement symplectique⁽⁶⁾ ; la mesure de Liouville de $V_1 \times V_2$ coïncide avec le produit tensoriel de celles de V_1 et V_2 ; par conséquent, si deux états statistiques de V_1 et V_2 sont définis par des fonctions de distribution $x_1 \mapsto \rho_1, x_2 \mapsto \rho_2$, leur produit tensoriel est l'état statistique de $V_1 \times V_2$ défini par la fonction de distribution $(x_1, x_2) \mapsto \rho_1 \times \rho_2$.

Le produit tensoriel correspond à la notion de variables aléatoires indépendantes ; ainsi, dans le cas d'un gaz composé de N molécules identiques dont on néglige les interactions, l'hypothèse du "*chaos moléculaire*" consiste à supposer que l'état statistique du système est la puissance tensorielle $N^{\text{ème}}$ d'un état statistique à une seule molécule.

§5 — ENTROPIE

Dans un état statistique défini à l'aide d'une fonction de distribution ρ , on appelle avec Boltzmann *entropie* la valeur moyenne s de la fonction $\text{Log}(1/\rho)$:

$$s = - \int_U \rho \text{Log} \rho \text{ vol} \quad (7)$$

Les résultats des § 3 et 4 montrent que l'entropie d'un état statistique est *invariante par l'action de tout symplectomorphisme* ; que *l'entropie du produit tensoriel de deux états statistiques est la somme des deux entropies*.

§6 — ENSEMBLE CANONIQUE DE GIBBS

L'expérience montre⁽⁸⁾ que les équilibres thermodynamiques réalisés dans la nature sont caractérisés par la propriété suivante : le *logarithme*

(6) En ajoutant les 2-formes σ_1 et σ_2 définies sur V_1 et V_2 .

(7) Ceci suppose que la fonction $-\rho \log \rho$ est sommable pour la mesure de Liouville ; bien entendu on la prolonge par 0 là où ρ s'annule.

(8) Dans le cas d'un gaz parfait, il est équivalent de supposer en chaque point la *répartition des vitesses de Maxwell*, qui possède une vérification spectroscopique directe (largeur de raies). Toutes les formules thermodynamiques que nous allons établir constituent une vérification indirecte.

de la fonction de répartition est une fonction affine de l'énergie E ; il existe alors deux nombres z et Θ tels que

$$\rho = e^{-[z + \Theta E]} ; \quad (7)$$

en écrivant que la masse de la mesure est égale à 1, il vient évidemment

$$z = \log \int_U e^{-\Theta E} \text{ vol} ; \quad (8)$$

par conséquent ces états, (qui constituent l'"ensemble canonique de Gibbs") sont indexés par le seul nombre Θ . Dans le cas d'un système composé de deux parties indépendantes, l'énergie totale E est la somme des énergies E_1 et E_2 ; par conséquent tout état de Gibbs du système composé est le produit tensoriel de deux états de Gibbs des systèmes composants⁽⁹⁾ donnant la même valeur au paramètre Θ . Comme l'expérience montre que deux systèmes sont en équilibre lorsqu'ils sont à la même température, on soupçonne que le nombre Θ définit une échelle de température ; une étude détaillée du thermomètre à gaz parfait montre effectivement que Θ est relié à la température absolue T par la relation :

$$\Theta = \frac{1}{T} \quad (9)$$

à condition de choisir une unité de température telle que la constante de Boltzmann soit égale à 1 ($1^\circ\text{K} = 1.3840 \times 10^{-16}$ erg).

La valeur moyenne de l'énergie, à savoir l'intégrale

$$Q = \int_U e^{-[z + \Theta E]} E \text{ vol} . \quad (9 \text{ bis})$$

s'interprète comme la chaleur du système⁽¹⁰⁾ ; z s'appelle *potentiel thermodynamique de Planck* ; il existe entre les variables Θ , z , Q , s des relations que nous allons établir dans un cadre élargi.

§7 — ENSEMBLE DE GIBBS D'UN GROUPE DYNAMIQUE

Soit U une variété symplectique séparée possédant un *groupe dynamique* G ; ce qui signifie que G est un *groupe de Lie* qui agit différentiablement sur U par *symplectomorphismes* ; nous noterons \underline{a}_U la transformation de U associée à un élément a de G ; $a \mapsto \underline{a}_U$ est donc un morphisme du groupe G dans le groupe des symplectomorphismes de U ; si ce morphisme est injectif, on dit que G agit *effectivement*.

(9) Les états de Gibbs d'un gaz parfait vérifient donc l'hypothèse du chaos moléculaire.

(10) Parce que nous n'étudions ici que des évolutions de systèmes isolés, donc sans échange de travail.

Si Z est un élément de l'algèbre de Lie \mathfrak{G} de G , on peut lui associer un champ de vecteurs Z_U défini sur U , qui caractérise l'action infinitésimale du groupe (11).

Sous des hypothèses assez générales (voir S.S.D.) le groupe dynamique possède un *moment* : il s'agit d'une application différentiable $x \mapsto E$ de la variété U dans le dual \mathfrak{G}^* de l'algèbre de Lie \mathfrak{G} , caractérisée (à une constante additive près) par la formule

$$\sigma(\delta x, Z_U(x)) = [\delta E](Z) \quad (10)$$

où σ désigne la forme symplectique de U , δx une variation arbitraire du point x (δE est la variation correspondante de E).

Dans le cas d'un système dynamique conservatif, l'énergie est *—au signe près—* le moment du groupe dynamique des translations dans le temps (agissant sur la variété symplectique des mouvements du système) (12).

Nous allons donc généraliser les définitions thermodynamiques du § 6 par l'énoncé suivant :

Soit G un groupe dynamique d'une variété symplectique séparée U , possédant le moment E .

Nous appellerons *température (généralisée)* tout élément Θ_0 de l'algèbre de Lie \mathfrak{G} de G tel que l'intégrale

$$I_0(\Theta) = \int_U e^{\langle E, \Theta \rangle} \text{vol} \quad (11)$$

converge normalement dans un voisinage de Θ_0 ($\langle E, \Theta \rangle$ note la dualité de \mathfrak{G}^* et \mathfrak{G} ; vol désigne la densité de Liouville de U).

L'ensemble des températures généralisées est évidemment une partie ouverte Ω de \mathfrak{G} ; on a le théorème (voir l'annexe) :

La fonction I_0 est de classe C^∞ dans Ω ; sa dérivée n -ème est, pour tout Θ , l'intégrale tensorielle

$$I_n = \int_U e^{\langle E, \Theta \rangle} E^{\otimes n} \text{vol} ; \quad (12)$$

cette intégrale est localement normalement convergente.

A chaque température (généralisée) Θ nous pouvons donc associer la loi de probabilité sur U dont la fonction de distribution est

$$e^{\langle E, \Theta \rangle - z} , \quad (13)$$

(11) On peut le définir par la formule $\frac{\partial}{\partial t} [\exp(tZ)_U(x)] = Z_U(\exp(tZ)_U(x))$.

(12) Plus généralement dans le cas des systèmes dynamiques, les composantes du moment sont les grandeurs noetheriennes attachées à la symétrie.

z étant une constante ; en écrivant que cette loi de probabilité a une masse égale à 1, on trouve comme ci-dessus :

$$z = \log(I_0) = \log \int_U e^{<E, \Theta>} \text{vol} \quad (14)$$

L'ensemble de ces lois de probabilité, indexé par Θ , s'appellera *ensemble de Gibbs* (du groupe dynamique) ; z , fonction C^∞ sur Ω , s'appellera *potentiel thermodynamique* ; nous appellerons *chaleur* (généralisée) l'intégrale

$$Q = \int_U e^{<E, \Theta> - z} E \text{vol} \quad (15)$$

valeur moyenne du moment E dans l'état de Gibbs ; on note que :

$$Q = \frac{I_1}{I_0} ; \quad (16)$$

il résulte donc du théorème (12) que cette intégrale est convergente, et que :

$$\boxed{Q = \frac{dz}{d\Theta}} \quad (17)$$

la chaleur est donc une fonction C^∞ de la température Θ , à valeur dans le dual de l'algèbre de Lie.

Il résulte de (17) que la dérivée $\frac{dQ}{d\Theta}$ est un tenseur du second ordre *symétrique* ; on le calcule en dérivant (16) :

$$\frac{dQ}{d\Theta} = \frac{I_2}{I_0} - \frac{I_1 \otimes I_1}{I_0^2} = \frac{I_2}{I_0} - Q \otimes Q \quad (18)$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$\boxed{\frac{dQ}{d\Theta} = \int_U e^{<E, \Theta> - z} [E - Q] \otimes [E - Q] \text{vol} ;} \quad (19)$$

ceci montre que la forme quadratique associée au tenseur $\frac{dQ}{d\Theta}$ est *positive* ; elle est même *définie positive* pour tout x à moins qu'il n'existe un élément non nul Z de l'algèbre de Lie tel que

$$< E - Q, Z > = 0 \quad (20)$$

ce qui exprime que le moment E varie dans une sous-variété affine de \mathfrak{G}^* et montre, en dérivant, en appliquant (10), et en se souvenant que la forme symplectique σ est injective :

$$Z_U(x) = 0 \quad (21)$$

La définition de $Z_U(x)$ montre que le sous-groupe à 1 paramètre des exp(tZ) agit trivialement sur U ; d'où le théorème :

Si G agit effectivement sur U , le tenseur symétrique $\frac{dU}{d\Theta}$ est défini positif pour tout $\Theta \in \Omega$ (13). (22)

Le tenseur positif $\frac{dQ}{d\Theta}$ est la dérivée seconde (ou *hessien*) du potentiel thermodynamique (voir (17)) ; d'où le corollaire :

Le potentiel thermodynamique z est une fonction convexe sur l'ouvert convexe Ω (14) (23)

Le graphe de l'application convexe $\Theta \mapsto z$ est situé au-dessus de ses hyperplans tangents ; d'où l'inégalité :

$$z_0 + \langle Q_0, \Theta_1 - \Theta_0 \rangle \leq z_1 \quad (24)$$

qui se transforme en inégalité stricte si $\Theta_1 \neq \Theta_0$ et si G opère effectivement, en raison de (22) ; il en résulte que $Q_0 \neq Q_1$, donc que l'application $\Theta \mapsto Q$ est injective ; comme sa dérivée $\frac{dQ}{d\Theta}$ est inversible d'après (22), on a le théorème

Si G opère effectivement sur U , l'application $\Theta \mapsto Q$ est un difféomorphisme de Ω sur un ouvert $\Omega^* \subset \mathcal{G}^*$. (25)

Nous pouvons alors appliquer à l'application $\Theta \mapsto z$ la transformation de Legendre ; elle consiste à lui associer la fonction — évidemment de classe C^∞ :

$$Q \mapsto z - \langle \frac{\partial z}{\partial \Theta}, \Theta \rangle ; \quad (26)$$

On vérifie immédiatement que :

$$z - \langle \frac{\partial z}{\partial \Theta}, \Theta \rangle = \int_U e^{\langle E, \Theta \rangle - z} [z - \langle E, \Theta \rangle] \text{vol} ; \quad (27)$$

l'intégrale qui figure au second membre se trouve être égale à l'entropie s (formule (6)).

Ainsi :

(13) Dans le cas de la thermodynamique classique, ceci exprime que la capacité calorifique $\frac{dQ}{dT}$ est toujours positive.

(14) La convexité de Ω résulte facilement de l'inégalité $\rho_0^\lambda \rho_1^{1-\lambda} \leq \sup(\rho_0, \rho_1)$ où ρ_0 et ρ_1 sont positifs, $\lambda \in [0,1]$. Cette même inégalité montre, si Ω n'est pas vide, que tout point où l'intégrale I_0 converge est adhérent à Ω .

Si G opère effectivement sur U , la transformée de Legendre de l'application

$$\Theta \mapsto z$$

(de classe C^∞ sur l'ouvert Ω) est l'application

$$Q \mapsto s$$

s étant l'entropie (27), qui est C^∞ sur l'ouvert Ω^* .

(28)

On vérifie immédiatement les formules réciproques :

$\frac{dz}{d\Theta} = Q$	$\frac{ds}{dQ} = -\Theta \clubsuit$	(29)
$s = z - \frac{\partial z}{\partial \Theta} \Theta$	$z = s - \langle Q, \frac{ds}{dQ} \rangle$	

La formule \clubsuit comporte un abus de notation (elle identifie \mathcal{G} à son bidual) ; elle montre que le hessien de $Q \mapsto s$ est $-\frac{d\Theta}{dQ}$, donc, au signe près, l'inverse de celui de $Q \mapsto z$; il est donc *défini négatif* ; ce qui montre que $Q \mapsto s$ est une fonction *concave*.

Toutes ces formules s'appliquent à la mécanique statistique classique ; (en particulier la formule \clubsuit , qui s'écrit :

$$ds = \frac{d\mathcal{Q}}{T} \quad (30)$$

\mathcal{Q} étant la chaleur classique, montre l'équivalence de la définition de Boltzmann de l'entropie avec sa définition thermodynamique) ; il est facile d'en déduire les formules fondamentales de la thermodynamique des équilibres (gaz parfaits, chaleurs spécifiques, formules de Mayer, Maxwell, Gibbs-Helmoltz, Clapeyron-Clausius, etc. Voir (S.S.D.)).

§8 — SYMETRIES BRISEES

Dans le cas de la thermodynamique classique, les états de Gibbs sont des états d'équilibre : le groupe G (ici les translations temporelles) les laisse tous invariants.

Ce n'est plus vrai dans le cas général : on dit que la symétrie est brisée.

Soit μ_Θ un état de Gibbs, a un élément de G . L'image de μ_Θ par a_U (au sens du § 3) est encore une loi de probabilité, dont on obtient la loi de distribution en composant $x \mapsto e^{\langle E, \Theta \rangle - z}$ avec a_U^{-1} ; l'entropie ne change pas (§ 5).

Pour calculer $\underline{a}_U(\mu_\Theta)$, il faut donc calculer d'abord $\psi \circ \underline{a}^{-1} \psi$ étant l'application $x \mapsto E$. Celle-ci est donnée par les formules suivantes (voir (S.S.D.)), obtenues en supposant U connexe :

— Il existe une application $\varphi (G \rightarrow \mathfrak{G}^*)$ telle que

$$\psi(\underline{a}_U(x)) = \underline{a}_{\mathfrak{G}^*}(\psi(x)) + \varphi(a) \quad \forall a \in G, \forall x \in U \quad (31)$$

où $a \mapsto \underline{a}_{\mathfrak{G}^*}$ est la représentation duale de la *représentation adjointe*
 $a \mapsto a_{\mathfrak{G}}$:

$$a_{\mathfrak{G}^*}(E) = E \circ \underline{a}_{\mathfrak{G}}^{-1} \quad (32)$$

— φ vérifie l'identité

$$\varphi(a \times b) = \varphi(a) + \underline{a}_{\mathfrak{G}^*}(\varphi(b)) \quad \forall a, b \in G \quad (33)$$

qui exprime que φ est un \mathfrak{G}^* -cocycle du groupe G , d'où résulte

$$\varphi(e) = 0 \quad (e = \text{élément neutre de } G), \quad \varphi(a^{-1}) = -\underline{a}_{\mathfrak{G}^*}^{-1}(\varphi(a)) \quad (34)$$

On en tire immédiatement la fonction de distribution de $\underline{a}_U(\mu_\Theta)$, qui s'écrit $e^{\langle E, \Theta^* \rangle - z^*}$, avec

$$z^* = z - \langle \varphi(a^{-1}), \Theta \rangle, \quad \Theta^* = \underline{a}_{\mathfrak{G}}(\Theta); \quad (35)$$

notons que

$$z^* = z + \langle \varphi(a), \Theta^* \rangle \quad (35 \text{ bis})$$

Ces formules montrent comment la symétrie peut être brisée ; elles montrent aussi que l'ensemble Ω des températures généralisées est *invariant* par l'action adjointe de G et que :

$$\underline{a}_U(\mu_\Theta) = \mu_{\underline{a}_{\mathfrak{G}}(\Theta)}; \quad (36)$$

elles montrent enfin que l'application $\Theta \mapsto z$ qui définit le potentiel thermodynamique est invariante par la substitution des variables Θ^*, z^* données en (35).

Appliquons la formule (17)

$$\delta z - \langle Q, \delta \Theta \rangle = 0 \quad (37)$$

à une variation $\delta \Theta$ tangente à l'orbite, donc engendrée par un élément Z de l'algèbre de Lie ; la dérivation de (35) donne

$$f(\Theta)(Z) + \langle Q, [\Theta, Z] \rangle = 0 \quad (38)$$

$[\Theta, Z]$ désignant un crochet de Lie, f la dérivée de l'application φ au point e ; on sait (S.S.D.) que f est une 2-forme de \mathfrak{G} et qu'elle vérifie l'identité :

$$f(Z)([Z', Z'']) + f(Z')([Z'', Z]) + f(Z'')([Z \cdot Z']) = 0 \quad (39)$$

Nous écrivons (38) sous la forme :

$$\Theta \in \ker(f_\Theta) \quad (40)$$

en posant

$$f_\Theta(Z)(Z') = f(Z)(Z') + \langle Q, [Z, Z'] \rangle \quad (41)$$

Appliquons par ailleurs la définition (4) de l'image d'une mesure à la fonction $f = \psi$; on constate que la *chaleur* Q^* dans l'état μ_{Θ^*} est égale à la valeur moyenne dans l'état μ_Θ de la variable $\psi(a_U(x))$; soit, grâce à (31) :

$$Q^* = \underline{a}_{\mathcal{G}^*}(Q) + \varphi(a) . \quad (42)$$

Comme précédemment, en dérivant tangentiellement à l'orbite suivant $Z \in \mathcal{G}$, et en utilisant la positivité de $\frac{dQ}{d\Theta}$, on trouve :

$$\langle Q, [Z, [\Theta, Z]] \rangle + f(Z)([\Theta, Z]) \geq 0 \quad (43)$$

ce qui s'écrit encore avec la notation (41)

$$f_\Theta(Z)([\Theta, Z]) \geq 0 \quad (44)$$

l'inégalité étant stricte si $[\Theta, Z] \neq 0$ et si G opère effectivement ; cette inégalité peut s'interpréter en vérifiant (grâce à (40)) que :

— f_Θ est une 2-forme de \mathcal{G} qui vérifie (39) ;
 — il existe un tenseur *symétrique* g_Θ , défini sur l'ensemble de valeurs de $\text{ad}(\Theta)$ par la formule

$$g_\Theta([\Theta, Z])([\Theta, Z']) = f_\Theta(Z)([\Theta, Z']) \quad \forall Z, Z' \in \mathcal{G} \quad (45)$$

alors (44) exprime que la forme quadratique associée à g_Θ est positive, et définie positive si G opère effectivement.

§9 — APPLICATIONS THERMODYNAMIQUES

En dehors de leur éventuel intérêt mathématique, il se trouve que les résultats précédents s'appliquent en thermodynamique.

La loi de Gibbs proprement dite n'est pas une formulation acceptable de la thermodynamique, parce qu'elle viole le principe de relativité galiléenne : un état d'équilibre cesse évidemment d'en être un sous l'action d'une transformation de Galilée.

Une idée séduisante a priori consiste à supposer que les états d'équilibre sont des états de Gibbs associés au groupe de Galilée lui-même ; on sait en effet que l'espace des mouvements d'un système dynamique *libre* possède ce groupe de Galilée comme groupe dynamique.

Mais l'ensemble de tels états de Gibbs est *vide* : en effet, la relation (38), qui devrait être vérifiée $\forall \Theta \in \Omega$, implique une condition pour Θ (15) ; or cette relation n'est vérifiée dans aucun ouvert.

L'interprétation de ce résultat est de type cosmologique ; on conçoit bien, par exemple, qu'un gaz ne peut atteindre d'équilibre s'il est libre dans un espace illimité ; il faut le mettre en boîte. Mais l'existence de cette boîte brise la symétrie : on ne pourra atteindre l'équilibre que pour un système *non libre*, dont un mécanisme approprié limitera la symétrie à un *sous-groupe du groupe de Galilée*.

On est donc conduit à se donner a priori un élément Θ de l'algèbre de Lie du groupe de Galilée, et à chercher si Θ peut-être la *température généralisée* d'un système dynamique dont la symétrie comporte en particulier le groupe à un paramètre engendré par Θ .

Pour interpréter Θ , considérons son action infinitésimale sur l'espace-temps \mathcal{G} : nous appellerons *vecteur-température* le quadri-vecteur $\Theta_{\mathcal{G}}(X)$, $X = \begin{pmatrix} r \\ t \end{pmatrix}$ étant un point arbitraire de l'espace-temps. (46)

Cette procédure réussit si la *composante temporelle* du vecteur température (qui est indépendante de X) est *positive* : elle s'interprète alors comme *l'inverse de la température* (classique) *de l'équilibre*.

Le vecteur-température définit en plus un *champ de vitesses* : celui d'un milieu dont les lignes d'univers seraient les orbites spatio-temporelles du groupe à un paramètre engendré par Θ . Il se trouve que le mouvement de ce milieu est *solide*, mais qu'il ne s'agit pas en général d'un mouvement de translation rectiligne uniforme ; les boîtes susceptibles de contenir des équilibres thermodynamiques peuvent être *accélérées*, mais seulement selon certaines règles ; on trouve par exemple la boîte *uniformément accélérée*, la boîte en *rotation uniforme* (centrifugeuse). Dans ces différents cas, on peut interpréter complètement les états de Gibbs associés : ainsi, dans le cas d'une centrifugeuse, on trouve la formule donnant la variation de concentration des composantes d'un gaz non homogène — celle-là même qui explique l'utilisation des centrifugeuses pour l'enrichissement de l'uranium (voir S.S.D.).

(15) La classe de cohomologie symplectique (voir S.S.D.) du système est indexée par un réel m qui s'interprète comme la *masse* du système et qui fournit la valeur de la 2-forme f qui figure dans (38) ; en supposant la *masse non nulle*, on tire de (40) la relation $\langle \vec{\omega}, \vec{\beta} \rangle = 0$ où $\vec{\omega}$ est la *rotation* infinitésimale, $\vec{\beta}$ la *transformation de Galilée* infinitésimale qui figurent dans Θ .

On peut cependant tempérer le veto opposé à l'équilibre des systèmes libres grâce à une propriété particulière du groupe de Galilée G : il possède un sous-groupe abélien invariant connexe G_0 sur l'algèbre de Lie duquel la 2-forme f est inversible (16) ; on en déduit que l'espace des mouvements d'un système dynamique libre de masse non nulle est un *produit symplectique direct* (voir S.S.D.) : le produit d'une variété de dimension 6 (celle des mouvements du *barycentre* considéré comme point matériel libre doué de toute la masse) par l'espace des *mouvements autour du barycentre*. Il en résulte que le groupe de Galilée agit doublement sur le système ; en fait, il s'agit sur les mouvements autour du barycentre que par l'intermédiaire du quotient G/G_0 , isomorphe à $O(3) \times \mathbf{R}$ (partiellement interprété par les physiciens sous le nom de "groupe de spin").

On peut donc étudier les équilibres de Gibbs de ces mouvements ; ils sont indexés par un élément Θ de l'algèbre de Lie de $O(3) \times \mathbf{R}$; cette *température généralisée* se compose d'une *température classique* T et d'une *vitesse de rotation* $\vec{\omega}$; la *chaleur généralisée* Q unifie la chaleur classique et le moment cinétique $\vec{\sigma}$; la relation (38) montre qu'il existe un nombre I tel que $\vec{\sigma} = I\vec{\omega}$; (44) montre que I est positif. Ces prédictions sont *totale-ment indépendantes du choix d'un modèle pour le système* ; on sait qu'elles sont effectivement vérifiées par les "équilibres" des corps célestes isolés : avec une bonne précision la Terre, comme les étoiles, a un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe principal d'inertie.

D'autres prévisions sont possibles – par exemple celles que l'on obtient en explicitant la symétrie du tenseur $\frac{dQ}{d\Theta}$; on sait aussi que l'ensemble Ω , parcouru par $\left(\frac{\vec{\omega}}{T}, \frac{1}{T}\right)$ est *ouvert, convexe et invariant par l'action adjointe du groupe* (qui consiste simple à faire tourner le vecteur $\vec{\omega}$ sans changer T). Il en résulte que, pour chaque valeur de T , les valeurs permises de $\vec{\omega}$ forment une *boule ouverte* (éventuellement de rayon nul ou infini).

De plus, la convexité de Ω montre que le rayon de cette boule $\|\omega\|_{\max}$, est de la forme $Tf(1/T)$, f étant concave ; on en déduit simplement que $g : T \mapsto Tf(1/T)$ est aussi concave ; ainsi $\|\vec{\omega}\|_{\max}$ est une fonction concave de la température.

Il semble assez rare que cette vitesse de rotation maximum croisse avec la température ; faisons donc l'hypothèse que, pour un système dynamique donné et pour un couple au moins de températures (T_1, T_2) , $\|\vec{\omega}\|_{\max}$ soit décroissante (fig. 2).

Alors la concavité de la fonction g montre qu'il existera une *température critique* T_c au-dessus de laquelle le corps explosera – faute de posséder un

(16) G_0 est engendré par les *translations spatiales* et les *transformations de Galilée*.

état d'équilibre — *quelle que soit la vitesse, même nulle, de rotation*. Ce résultat, fondé sur la seule formulation symplectique de la mécanique classique, est peut-être un élément d'explication de certains phénomènes astrophysiques (vent solaire, novae, supernovae ?).

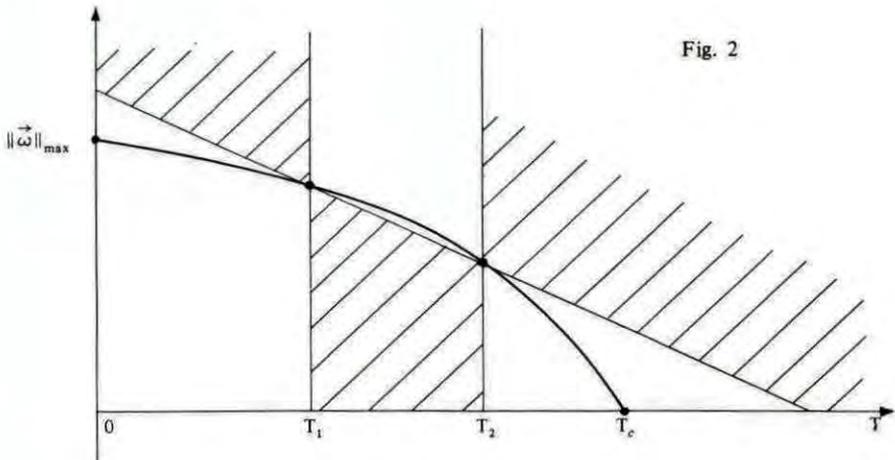


Fig. 2

§10 — THERMODYNAMIQUE RELATIVISTE

Il est facile d'étendre la théorie précédente à la relativité restreinte : il suffit de remplacer le groupe de Galilée par le groupe de Poincaré. Le vecteur-température devient alors un *vecteur de Killing* de la métrique minowskienne ; la condition (46) se transpose aisément : le vecteur-température doit être de *genre futur* ; en chaque point sa direction définit le *référentiel local d'équilibre* ; sa longueur est l'inverse de la *température propre* ; son sens est la "*flèche du temps*". La considération de ce vecteur-température donne une réponse précise au problème — constamment débattu depuis les travaux de Planck — du statut spatio-temporel de la température.

Comme dans le cas galiléen, on montre qu'un système libre ne possède pas d'équilibres de Gibbs : pour un système dont la masse au repos n'est pas nulle, la relation (41), appliquée à l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré, montre que la transformation de Lorentz infinitésimale qui est incluse dans Θ a un *pfaffien* nul (c'est l'équivalent relativiste du produit scalaire $\langle \vec{\omega}, \vec{\beta} \rangle$ du cas galiléen) ; cette relation ne peut pas être vérifiée dans un ouvert Ω .

Comme précédemment, on va chercher les équilibres de systèmes possédant une symétrie limitée à un sous-groupe du groupe de Poincaré ; on arrive encore par cette voie à des résultats raisonnables (voir S.S.D.) ; on retrouve le *gaz parfait relativiste* de Synge, dont la loi de compressibilité met en jeu des fonctions de Bessel ; la description de la centrifugeuse reste

possible, mais il apparaît un effet relativiste (la température propre est un peu plus grande sur les bords de la centrifugeuse que sur l'axe ; cet effet n'est notable que si la vitesse du bord n'est pas négligeable devant celle de la lumière) ; etc.

§ 11 — QU'EST-CE QU'UN EQUILIBRE THERMODYNAMIQUE ?

En mécanique pratique des milieux continus — qu'elle soit galiléenne ou relativiste — on admet généralement qu'il existe, en chaque point de l'espace-temps une *température* et une *vitesse moyenne* du milieu, donc un *vecteur-température* (on admet souvent aussi que le milieu se comporte *localement* comme dans un équilibre, en ce qui concerne par exemple le loi de répartition des vitesses de Maxwell, les lois de compressibilité, etc. ; seule l'épaisseur des ondes de choc fait exception).

Mais le vecteur-température n'est plus astreint à faire partie de l'algèbre de Lie du groupe de Galilée ou de Poincaré ; il est simplement soumis à des équations, généralement phénoménologiques, comme les équations de Navier.

La réussite de ce genre de compromis nous fournit des indications sur ce que pourrait être une véritable thermodynamique des systèmes hors d'équilibre — encore à construire.

En adoptant ce point de vue, l'étude précédente nous suggère une *définition des équilibres thermodynamiques* : on les reconnaît à ce que le *vecteur-température est un vecteur de Killing de l'espace-temps* (nous adoptons maintenant le seul point de vue relativiste).

Nous allons maintenant élargir ce point de vue, en recourant à l'observation radio-astronomique.

On a en effet découvert, en 1965, un rayonnement infrarouge, appelé rayonnement cosmologique, qui a la propriété de coïncider — à la précision des observations — avec le rayonnement thermique d'un four (de température 2.7°K) dans lequel la Terre serait immobile.

Un tel rayonnement définit, non seulement une température, mais aussi un référentiel local d'équilibre (si on communiquait une vitesse de quelques centaines de km/s à la Terre, l'effet Doppler briserait l'isotropie et l'isothermie du rayonnement). Il existe donc en chaque point X de l'univers, un *vecteur-température* $\Theta(X)$.

Le *principe cosmologique* — si l'on préfère, l'idée que la Terre et notre époque n'occupent pas une place privilégiée dans l'espace-temps — nous amène à postuler que de toutes les galaxies, à tous les instants, on observe de même un rayonnement de corps noir.

Comment concilier cette hypothèse avec le redshift des galaxies lointaines ? Une étude géométrique précise de l'effet Doppler-Einstein responsable du redshift (voir la seconde partie de cet exposé) montre qu'il y a effectivement compatibilité, à l'unique condition suivante : le vecteur $\Theta(X)$ doit être une *transformation conforme infinitésimale de la métrique d'Univers* ; ce qui peut s'écrire sous la forme

$$\hat{\partial}_\mu \Theta_\nu + \hat{\partial}_\nu \Theta_\mu = \lambda g_{\mu\nu} \quad (47)$$

les $\hat{\partial}_\mu$ étant des dérivations covariantes, les Θ_ν les composantes du vecteur-température.

Il est remarquable que ce résultat fasse apparaître une propriété du vecteur-température lui-même (et plus précisément du groupe à 1 paramètre qu'il engendre), et non par exemple du vecteur parallèle dont la longueur serait T (au lieu de $1/T$), parfois proposé comme grandeur thermodynamique de base.

De plus, dans le cas particulier $\lambda = 0$ (qui correspondrait à un taux d'expansion nul de l'univers), on reconnaît dans (47) l'*équation de Killing* ; l'observation du rayonnement cosmologique nous suggère donc une *généralisation* de la notion précédente d'équilibre.

Chose intéressante, certaines propriétés des équilibres sont conservées : de la seule équation (47), on déduit en effet les équations

$$\hat{\partial}_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad \partial_\mu S^\mu = 0 \quad (48)$$

où les $T^{\mu\nu}$ sont les composantes du tenseur impulsion-énergie du rayonnement, les S^μ les composantes du vecteur flux d'entropie.

Ces équations de conservation expriment donc que les *échanges d'impulsion, d'énergie et d'entropie entre la matière et le rayonnement se font avec un bilan nul* : une propriété essentielle des équilibres est sauvegardée, bien que la température ne soit pas constante (le signe du redshift montre que l'univers se refroidit). Nous renvoyons à la deuxième partie de cet exposé pour les implications cosmologiques de ces propriétés géométriques.

ANNEXE : DEMONSTRATION DU THEOREME (12)

Soit U une variété, $x \mapsto E$ une application continue de U dans le dual \mathcal{G}^* d'un espace vectoriel \mathcal{G} de dimension finie : soit une densité positive continue sur U . Nous choisirons sur \mathcal{G} une norme euclidienne ; il s'en déduit, sur \mathcal{G}^* et plus généralement sur les espaces de tenseurs $[\mathcal{G}^*]^{\otimes n}$ une norme d'applications (multi) linéaires.

Supposons que l'intégrale

$$I_0 = \int_U e^{\langle E, \Theta \rangle} \text{vol}$$

dépendant de la variable Θ ($\Theta \in \mathcal{G}$) soit normalement convergente dans un voisinage de Θ_0 ; c'est-à-dire qu'il existe un nombre positif ε et une fonction continue positive ρ telles que

$$\diamond \quad e^{\langle E, \Theta \rangle} \leq \rho \quad \text{si} \quad \|\Theta - \Theta_0\| < \varepsilon$$

$$\heartsuit \quad \int_U \rho \text{vol} < \infty$$

$\forall \alpha \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}$, on a évidemment

$$\left| \frac{2\alpha}{n} \right|^n \leq \left| 2 \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha}{n} \right) \right|^n = |e^{\alpha/n} - e^{-\alpha/n}|^n = \left| \sum_{p=0}^n [-1]^p C_n^p e^{[-1+2p/n]\alpha} \right|$$

d'où, en choisissant $V \in \mathcal{G}$ et en posant $\alpha = \langle E, V \rangle$,

$$\left[\frac{2}{n} \right]^n e^{\langle E, \Theta \rangle} |\langle E, V \rangle|^n \leq \left| \sum_{p=0}^n [-1]^p C_n^p e^{\langle E, \Theta + [2p/n - 1]V \rangle} \right|$$

et par conséquent, grâce à \diamond ,

$$e^{\langle E, \Theta \rangle} |\langle E, V \rangle|^n \leq n^n \rho \quad \text{si} \quad \|\Theta - \Theta_0\| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \|V\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Pour tout U unitaire, en posant $V = U\varepsilon/2$, on a donc

$$e^{\langle E, \Theta \rangle} |\langle E, U \rangle|^n \leq \left[\frac{2n}{\varepsilon} \right]^n \rho ;$$

l'égalité $\|E^{\otimes n}\| = \sup_U |\langle E, U \rangle|^n$

montre donc que

$$\heartsuit \quad \|e^{\langle E, \Theta \rangle} E^{\otimes n}\| \leq \left[\frac{2n}{\varepsilon} \right]^n \rho \quad \forall \Theta \in \mathcal{B}'(\Theta_0, \varepsilon/2)$$

il résulte de \heartsuit que l'intégrale à valeur tensorielle

$$I_n = \int_U e^{\langle E, \Theta \rangle} E^{\otimes n} \text{vol}$$

est normalement convergente dans un voisinage de Θ_0 .

En utilisant la formule de Taylor pour l'exponentielle

$$e^\alpha - 1 - \alpha = \frac{\alpha^2}{2} e^{\lambda\alpha} \quad \lambda \in [0, 1]$$

on trouve la formule :

$$e^{\langle E, \Theta + V \rangle} E^{\otimes n} - e^{\langle E, \Theta \rangle} E^{\otimes n} - e^{\langle E, \Theta \rangle} E^{\otimes n+1}(V) = \\ \frac{1}{2} e^{\langle E, \Theta + \lambda V \rangle} E^{\otimes n+2}(V)(V)$$

où la notation $T(V)$ désigne la contraction d'un tenseur covariant T avec le vecteur V . Grâce à \heartsuit , la norme du second membre peut être majorée par

$$\frac{1}{2} \left[\frac{2(n+2)}{\varepsilon} \right]^{n+2} \rho \|V\|^2 ;$$

en intégrant sur U et en utilisant \heartsuit , on a donc :

$$\|I_{n_{\Theta+V}} - I_{n_{\Theta}} - I_{n+1_{\Theta}}(V)\| < \frac{a}{2} \left[\frac{2(n+2)}{\varepsilon} \right]^{n+2} \|V\|^2$$

pourvu que $\Theta \in \mathcal{B}'(\Theta_0, \varepsilon/4)$ et que $\|V\| \leq \varepsilon/4$ (a désigne la valeur de l'intégrale \heartsuit) ; il en résulte donc que l'application $\Theta \mapsto I_n$ est continue et dérivable dans un voisinage de Θ_0 , et que l'application linéaire dérivée est I_{n+1} ; ainsi I_0 est une application de classe C^∞ qui admet I_n comme dérivée n -ème.

C.Q.F.D.

Deuxième partie :

GEOMETRIE ET THERMODYNAMIQUE EN COSMOLOGIE

RESUME

Les univers dans lesquels on peut observer simultanément le rayonnement cosmologique du corps noir et le redshift des galaxies sont analysés géométriquement : ils possèdent un groupe à un paramètre de transformations conformes dont le générateur est le vecteur-température de Planck ; l'entropie, l'énergie et l'impulsion du rayonnement sont nécessairement conservatives.

L'introduction des équations de champ conduit à des modèles du type Robertson-Walker (sans avoir à postuler l'homogénéité ou l'isotropie spatiales) ; ces modèles se raccordent avec celui de Gamow aux débuts de l'expansion ; leur confrontation avec l'observation est brièvement discutée.

INTRODUCTION

Le *rayonnement cosmologique*, découvert en 1965 dans l'espace, est un rayonnement infra-rouge ; les mesures montrent que sa composition *spectrale et directionnelle* est pratiquement la même que s'il provenait d'une enceinte isotherme (de température 2.7°K) dans laquelle la Terre serait immobile.

Cette "immobilité" est vérifiée par l'observation : si l'on communiquait à la Terre une vitesse de quelques centaines de km/s, l'isotropie et l'isothermie apparentes du rayonnement seraient brisées par l'effet Doppler ; il est d'ailleurs possible que l'on parvienne à mesurer par ce moyen les variations saisonnières de la vitesse de la Terre.

Il existe donc, en tout point de l'univers, un *référentiel privilégié*, par rapport auquel le rayonnement est isotrope et isotherme ; de plus la Terre est pratiquement au repos par rapport à ce référentiel.

Ces faits donnent l'impression d'un univers en *équilibre thermodynamique* ; alors qu'un autre fait d'observation — le redshift des galaxies — suggère un univers en *expansion*.

Comment interpréter ce paradoxe ?

Une analyse géométrique de la situation (§ 1) montre que le coexistence des deux faits implique l'existence d'un *groupe à un paramètre de transformations conformes de l'univers* ; le quadrivecteur Θ qui engendre ce groupe a pour *direction* la *quadrivitesse de la matière* ; pour *sens* celui du *futur* ; sa *longueur* est inversement proportionnelle à la *température du rayonnement*.

L'existence de ce groupe a des implications *cosmologiques* (existence d'un "espace" tridimensionnel riemannien dans lequel les galaxies sont fixes) et *physiques* (diminution de toute énergie lumineuse proportionnellement à la température sans changement du nombre des photons). Son *interprétation thermodynamique* est intéressante : il se trouve que le vecteur Θ ainsi introduit cosmologiquement coïncide avec le *vecteur-température* de Planck ; une théorie covariante (fondée sur la géométrie symplectique) permet de montrer que ce vecteur est une *isométrie infinitésimale* dans le cas d'un *équilibre thermodynamique* (VIII).

Ici, nous rencontrons donc un "équilibre généralisé" — puisque Θ est une transformation conforme infinitésimale. Cependant la géométrie montre (§ 2) que certaines propriétés des équilibres sont sauvegardées : l'*entropie*, l'*énergie* et l'*impulsion* du rayonnement sont des grandeurs conservatives — bien que la *température* ne reste pas constante.

Il en résulte évidemment que les *échanges entre matière et rayonnement ont un bilan nul* ; en particulier la dynamique de la matière est la même que si le rayonnement n'existait pas ; la loi de la gravitation (principe des géodésiques) permet d'en déduire que le mouvement de la matière est *irrotationnel* (ce que confirme l'observation) ; il existe un *temps universel* ; la métrique d'univers est *conforme à une métrique statique* ; la perte d'énergie de la lumière s'interprète comme le travail que la pression de radiation fournit à l'expansion.

Tous ces résultats ont été obtenus *sans écrire d'équations de champ* ; l'équation d'Einstein permet maintenant de *calculer* le tenseur impulsion-énergie total, puisque la métrique est connue (§ 3) ; en écrivant que la contrainte se réduit à une pression, on montre que l'espace tridimensionnel est une variété à *courbure constante*, donc *homogène et isotrope* (ce que vérifie l'observation des galaxies et des quasars) ; la métrique d'univers est donc du type Robertson-Walker ; les grandeurs géométriques introduites permettent de calculer simplement les principaux effets d'observations (diamètres apparents, luminosités, brillances, statistique).

En écrivant ensuite que la pression d'univers est celle du rayonnement cosmologique (§ 4) on obtient des équations d'évolution qui s'intègrent élé-

mentairement : le modèle ainsi construit admet comme approximations asymptotiques celui de Gamow (au début de l'expansion) et celui de Friedmann (à la fin). Le rôle des différents paramètres (température du rayonnement, densité de matière, coefficient de Hubble, courbure de l'espace, constante cosmologique) est rapidement discuté ; une suggestion est faite pour interpréter les observations des quasars et la formation des amas de galaxies.

— L'équivalence rigoureuse — et assez paradoxale — entre le *modèle cosmologique newtonien* le plus simple et le *modèle de Friedmann avec courbure spatiale* est évoquée en annexe.

§1 — GEOMETRIE DU VECTEUR TEMPERATURE

Rappelons d'abord l'*interprétation relativiste du redshift* ; elle est basée sur les deux hypothèses suivantes⁽¹⁾.

\mathcal{H}_1 En chaque point x de l'univers est défini le *tenseur métrique* $g_{\mu\nu}$;

\mathcal{H}_2 Les lignes d'univers des rayons lumineux sont les *géodésiques isotropes* de la métrique d'univers.

Dessignons les lignes d'univers de deux galaxies G_1 et G_2 (fig. 3) ; pour fixer les idées, imaginons que G_2 soit la nôtre.

Soit x_2 un point quelconque de la ligne G_2 — "aujourd'hui" par exemple. De tous les rayons lumineux que nous recevons, un seul est issu de G_1 — puisque nous voyons la galaxie G_1 en un seul point du ciel⁽²⁾ ; elle est issue d'un point x_1 de la ligne d'univers G_1 ; x_1 définit la "position" et la "date" de la galaxie G_1 telle que nous la voyons aujourd'hui.

Puisque l'observation de G_1 est permanente, nous sommes amenés à tracer les géodésiques isotropes successives issues de G_1 qui rencontrent G_2 ; elles forment une famille à un paramètre, et mettent les lignes d'univers G_1 et G_2 en bijection⁽³⁾ ; bijection que l'on peut caractériser par la correspondance $s_1 \mapsto s_2$ entre les abscisses curvilignes (temps propres) de G_1 et G_2 .

Si G_1 émet un signal lumineux périodique — schématisé sur la figure par des rayons lumineux successifs — avec une fréquence ν_1 , il sera reçu sur G_2 avec une fréquence ν_2 (a priori *différente de* ν_1 et *modulée* dans le temps) ; le nombre de périodes observées entre deux instants a_2 et b_2 est

(1) Ces hypothèses sont valables aussi bien en relativité restreinte qu'en relativité générale ; elles sont vérifiées expérimentalement avec une extrême précision.

(2) On ne peut pas exclure a priori l'éventualité d'un "mirage gravitationnel" pour des galaxies très lointaines.

(3) Ces propriétés peuvent être démontrées *localement*.

$$\int_{a_2}^{b_2} \nu_2 ds_2 \quad (1)$$

par définition de la fréquence ν_2 et du temps (terrestre) s_2 ; le même nombre de périodes, calculé sur G_1 , est

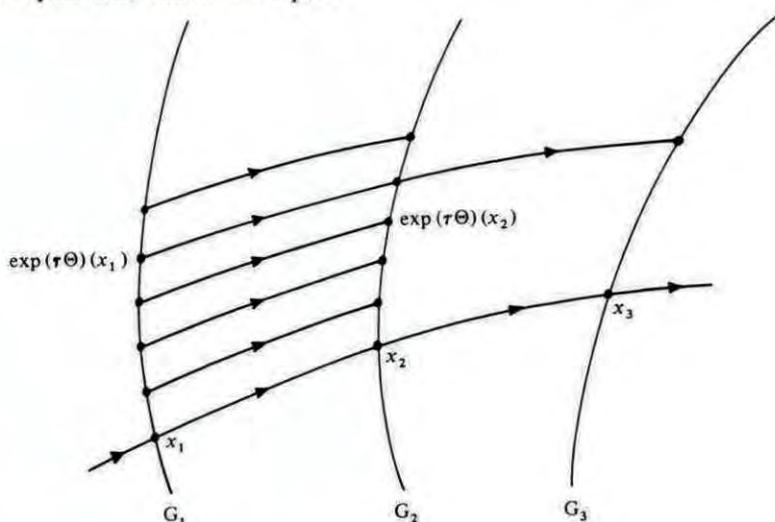


Fig. 3

$$\int_{a_1}^{b_1} \nu_1 ds_1 \quad (2)$$

a_1 et b_1 étant les dates d'émission des signaux extrêmes, dans le temps s_1 de G_1 . On a donc la relation

$$\nu_1 ds_1 = \nu_2 ds_2 \quad (3)$$

que nous écrirons de préférence

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{ds_2}{ds_1} ; \quad (4)$$

elle montre que le rapport $\frac{\nu_1}{\nu_2}$ des fréquences émises et reçues est *indépendant de ν_1* (puisque le rapport $\frac{ds_2}{ds_1}$ ne dépend que de la *géométrie* de la figure 3) ; cette propriété est vérifiée *avec une grande précision* par les observations de spectres de galaxies⁽⁴⁾ ; le nombre

(4) Toute autre tentative d'interprétation du redshift doit fournir une explication de ce fait.

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} - 1 \quad (5)$$

ainsi mesuré, est par définition le *redshift* (5).

Observons maintenant le rayonnement cosmologique *derrière* la galaxie G_1 ; les rayons infrarouges ainsi détectés ont les mêmes lignes d'univers — entre G_1 et G_2 — que les rayons issus de G_1 ; le spectre du rayonnement, observé de G_1 et de G_2 , subit nécessairement le même décalage (4).

Il se trouve que le spectre du corps noir, après avoir subi un décalage proportionnel, est *encore un spectre de corps noir* — mais avec *une autre température* ; les fréquences homologues ν_1 et ν_2 des deux spectres, les températures correspondantes T_1 et T_2 sont reliées par *la loi de Wien*

$$\frac{\nu_1}{T_1} = \frac{\nu_2}{T_2} \quad (6)$$

Formulons maintenant l'hypothèse :

\mathcal{E}_3 Le rayonnement cosmologique, observé de n'importe quelle galaxie à n'importe quel instant, est un rayonnement de corps noir.

Elle exprime — modestement — que les apparences du rayonnement cosmologique ne privilègient ni la Terre, ni l'époque où nous y vivons.

Grâce à la loi de Wien, cette hypothèse est *compatible avec le redshift*, mais à condition que la température du rayonnement soit variable ; ainsi la confrontation de (4) et (6) montre que les températures T_1 et T_2 observées sur G_1 et G_2 en x_1 et x_2 sont liées par

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{ds_2}{ds_1} \quad (7)$$

ainsi un quasar ayant un redshift de 3.5 (il en existe) rec 'vait au moment où nous l'observons un rayonnement de température

$$T_1 = T_2 \times (3.5 + 1) \approx 12^\circ\text{K} ;$$

comme les redshifts lointains sont tous positifs, *l'univers était plus chaud autrefois qu'aujourd'hui*.

La relation (7) nous permet de *paramétrer* les rayons lumineux joignant G_1 à G_2 au moyen d'une variable τ choisie de sorte que

$$d\tau = kT_1 ds_1 = kT_2 ds_2 \quad (8)$$

k étant la constante de Boltzmann ; en introduisant les *vitesses unitaires*

 (5) Cette interprétation est *unitaire* : on peut si l'on veut décomposer le redshift en *effet Doppler* (dû au mouvement des deux sources) et *effet Einstein* (dû au champ de gravitation régnant entre les sources) ; mais cette décomposition est subjective (elle varie avec le choix d'un système de coordonnées) et inutile.

$$U_1 = \frac{dx_1}{ds_1} \quad , \quad U_2 = \frac{dx_2}{ds_2} \quad (9)$$

des deux galaxies, on a donc

$$\frac{dx_1}{d\tau} = \frac{U_1}{kT_1} \quad , \quad \frac{dx_2}{d\tau} = \frac{U_2}{kT_2} \quad (10)$$

En tout point x de l'univers, désignons par

$$U \quad (11)$$

la *vitesse unitaire du référentiel par rapport auquel le rayonnement cosmologique est homogène et isotrope* (voir l'introduction) ; nous poserons

$$\Theta = \frac{U}{kT} \quad (12)$$

T étant la température de rayonnement en x ; l'ensemble du rayonnement est décrit par la correspondance

$$x \mapsto \Theta \quad (13)$$

qui est un *champ de vecteurs de l'espace-temps*.

Selon l'hypothèse \mathfrak{H}_3 , le rayonnement est homogène et isotrope pour G_1 comme pour G_2 ; les vitesses unitaires U_1 et U_2 vérifient donc

$$U_1 = U(x_1) \quad , \quad U_2 = U(x_2) \quad (14)$$

si bien que les équations (10) s'écrivent

$$\frac{dx_1}{d\tau} = \Theta(x_1) \quad , \quad \frac{dx_2}{d\tau} = \Theta(x_2) \quad (15)$$

Utilisons la notation géométrique concernant les équations différentielles⁽⁶⁾ : nous désignerons par

$$\exp(a\Theta)(x_0) \quad (16)$$

la valeur, pour $\tau = a$, de la solution de l'équation

$$\frac{dx}{d\tau} = \Theta(x) \quad (17)$$

qui prend la valeur $x = x_0$ pour $\tau = 0$; si le champ de vecteur Θ est différentiable, $\exp(a\Theta)$ est un difféomorphisme⁽⁷⁾ ; lorsque a varie, les $\exp(a\Theta)$ forment (au moins localement) un groupe à un paramètre de difféomorphismes (c'est le *groupe engendré* par le vecteur Θ) ; les équations (15), valables

(6) Veuillez pardonner l'abus de notation qui consiste à confondre variable et champ.

(7) Difféomorphisme = application différentiable ainsi que son inverse.

à toute époque selon l'hypothèse \mathfrak{H}_3 , indiquent que les *lignes d'univers des galaxies sont des orbites de ce groupe* ; elles indiquent de plus — puisque le paramètre τ qui figure dans ces deux équations indexe *le même rayon lumineux*, que les points $\exp(\tau\Theta)(x_1)$, $\exp(\tau\Theta)(x_2)$ des lignes d'univers G_1 et G_2 (fig. 3) sont situés *sur une même géodésique isotrope* ; autrement dit que *l'image par $\exp(\tau\Theta)$ de la géodésique isotrope $\tau = 0$ rencontre une autre géodésique isotrope en deux points* (situés sur G_1 et G_2) ; elle la rencontre d'ailleurs en un troisième point chaque fois que d'une galaxie G_3 , à un instant quelconque, G_1 et G_2 paraissent alignées (fig. 3).

Le choix de ces trois points sur la géodésique isotrope est arbitraire (ce sont simplement des points où l'on a imaginé que l'observation du rayonnement cosmologique se faisait comme sur Terre) ; nous obtenons donc une *propriété de l'application $\exp(\tau\Theta)$ elle-même : elle transforme toute géodésique isotrope en géodésique isotrope*.

Les difféomorphismes ayant cette propriété sont les *transformations conformes*, c'est-à-dire celles qui transforment le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ et un tenseur proportionnel⁽⁸⁾. Nous avons donc trouvé l'interprétation géométrique de la répartition spectrale du rayonnement : $\exp(\tau\Theta)$ est une transformation conforme pour tout τ ; on dit que Θ est une *transformation conforme infinitésimale*.

Le vecteur Θ — ainsi possesseur d'une propriété cosmologique remarquable — possède par ailleurs une *interprétation thermodynamique* : c'est le *vecteur-température* qui apparaît naturellement dans une théorie covariante de mécanique statistique (voir VIII, IX et la première partie de cet exposé).

Grâce à la théorie des dérivées de Lie, on sait écrire tensoriellement que Θ est une transformation conforme infinitésimale :

$$\partial_\mu \Theta_\nu + \partial_\nu \Theta_\mu - 2\Gamma_{\mu\nu}^\rho \Theta_\rho = \lambda g_{\mu\nu} \quad (18)$$

ou, avec des notations plus géométriques⁽⁹⁾

$$\boxed{\frac{\hat{\partial}\Theta}{\partial x} + \frac{\bar{\partial}\Theta}{\partial x} = \lambda \underline{1}} \quad (19)$$

λ étant un scalaire défini en tout point.

(8) Tout difféomorphisme A qui permute les géodésiques isotropes laisse invariant le champ des cônes isotropes ; or, en tout point x , le cône isotrope caractérise algébriquement le tenseur $g_{\mu\nu}$ à un facteur près. Réciproquement, si A est conforme, il conserve le champ des cônes isotropes ; donc les *caractéristiques* de ce champ (au sens de la théorie des équations aux dérivées partielles du 1^{er} ordre) ; il se trouve que ces caractéristiques sont les géodésiques isotropes.

(9) Le signe $\hat{\partial}$ indique une dérivation *covariante* ; la barre $\bar{\partial}$ indique la transposition par rapport à la métrique g ; $\underline{1}$ est l'application identique de l'espace vectoriel tangent à l'univers en x .

Une *géodésique* est, par définition, une courbe qui peut être décrite avec une *accélération géodésique nulle* ; c'est dire qu'il existe un paramètre s de la courbe (défini à une transformation affine près) tel que l'on ait

$$\frac{dx}{ds} = P \quad ; \quad \frac{\hat{d}P}{ds} = 0 \quad . \quad (20)$$

Le nombre $\bar{P} \cdot P$ est une intégrale première de ces équations ; si on a

$$\bar{P}P = 0 \quad (21)$$

la géodésique est *isotrope*.

Dérivons alors le produit scalaire $\bar{\Theta} \cdot P$; il vient

$$\frac{d}{ds} [\bar{\Theta}P] = \bar{\Theta} \frac{\hat{d}P}{ds} + P \frac{\hat{d}\bar{\Theta}}{ds} = \bar{P} \frac{\hat{\partial}\bar{\Theta}}{\partial x} P$$

(grâce à (20)). Ce nombre peut aussi s'écrire

$$\frac{1}{2} \bar{P} \left[\frac{\hat{\partial}\bar{\Theta}}{\partial x} + \frac{\hat{\partial}\bar{\Theta}}{\partial x} \right] P$$

d'où, grâce à (19) et (21)

$$\frac{d}{ds} [\bar{\Theta} \cdot P] = 0 \quad (22)$$

Dans le cas où Θ est une transformation conforme infinitésimale, nous voyons donc que les géodésiques isotropes possèdent la quantité $\bar{\Theta} \cdot P$ comme *intégrale première*.

Il se trouve que les équations (20), (21) constituent la *description quasi-classique d'un photon* (dont on néglige le spin) ; P est sa quadri-impulsion.

Dans un repère en équilibre par rapport au rayonnement – dont la quadrivitesse est U – l'énergie du photon est

$$E = \bar{U} \cdot P \quad (23)$$

comme $\Theta = \frac{U}{kT}$ (12), on voit que l'énergie apparente des photons diminue au cours du temps, selon la loi

$$\frac{E}{T} = \text{Cte} \quad (24)$$

Comme l'énergie d'un photon est liée à sa fréquence ν par la formule de Planck

$$E = 2\pi h\nu \quad (25)$$

on voit aussi que le *redshift des galaxies* peut s'interpréter par la *perte d'énergie des photons* (les formules (4) et (7) donnant la même loi que (25) et (24)). Il ne s'agit en aucune façon d'une alternative à l'interprétation ci-dessus (l'effet Doppler-Einstein couplé), mais d'une propriété *équivalente* (grâce à la loi de Planck (25)).

Réciproquement d'ailleurs, si la loi (24) est *vérifiée par tous les photons*, le vecteur-température est une transformation conforme infinitésimale : en effet en dérivant par rapport à s la constante ΘP , et en tenant compte de la loi de comportement (20), (21) des photons, on constate que

l'opérateur linéaire $A = \frac{\partial \Theta}{\partial x}$ vérifie

$$\bar{P}.A.P = 0 \quad \forall P \text{ isotrope ;} \quad (26)$$

un calcul algébrique élémentaire permet d'en déduire

$$A + \bar{A} = \lambda \underline{1} \quad (27)$$

soit (19).

Le même résultat s'obtient en considérant la lumière comme onde électromagnétique : si le tenseur champ électromagnétique F vérifie les équations de Maxwell (dans le vide) il est bien connu que le tenseur de Maxwell-Poynting

$$M = \frac{1}{4\pi} \left[F^2 - \frac{1}{4} \text{Tr}(F^2) \underline{1} \right] \quad (28)$$

a une divergence nulle. En relativité restreinte, on en déduit la conservation de l'énergie électromagnétique

$$\iiint \frac{1}{8\pi} [\vec{E}^2 + \vec{B}^2] dx dy dz \quad (29)$$

\vec{E} et \vec{B} étant les champs électrique et magnétique ; en effet l'expression (29) est le flux, à travers une surface du genre temps, du vecteur MU (U étant la quadrivitesse du laboratoire).

Ici, ce vecteur n'est pas conservatif ; par contre on constate que

$$\begin{aligned} \text{div}[M\Theta] &= [\text{div} M] \Theta + \text{Tr} \left(M \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \text{Tr} \left(M \left[\frac{\partial \Theta}{\partial x} + \overline{\frac{\partial \Theta}{\partial x}} \right] \right) \\ &\quad \text{(puisque } \text{div} M = 0 \text{ et } M = \bar{M}) \end{aligned}$$

= $\text{Tr}(M)\lambda$ (d'après (19)) ; donc

$$\text{div}[M\Theta] = 0 \quad (30)$$

(il suffit de prendre la trace de (28)). Le flux du vecteur $M\Theta$ sur une surface $T = \text{Cte}$ — qui est donc une grandeur conservée — est le quotient par kT du

flux de U, qui est l'énergie : on voit que l'énergie lumineuse diminue proportionnellement à la température⁽¹⁰⁾.

— Etudions maintenant les implications cosmologiques de la formule (19), que nous écrivons

$$\delta_L g = \lambda g \quad (31)$$

δ_L étant la *dérivée de Lie* associée au vecteur $\delta x = \Theta$. En remarquant que (27) peut s'écrire $\lambda = 2 \frac{\delta\theta}{\theta}$, la formule (31) s'écrit aussi

$$\delta_L \left[\frac{g}{\theta^2} \right] = 0 \quad \left(\text{avec } \theta = \frac{1}{kT} \right) \quad (32)$$

Ainsi le vecteur température Θ est une isométrie infinitésimale de la métrique

$$g_{\mu\nu}^* = \frac{1}{\theta^2} g_{\mu\nu} ; \quad (33)$$

nous pouvons donc appliquer à cette métrique les techniques propres aux variétés riemanniennes qui admettent un groupe d'isométries à un paramètre (univers *stationnaires*, au sens de (IV)) ; le quotient de l'univers par le groupe est une variété V_3 , que l'on peut munir canoniquement d'une structure riemannienne positive ; V_3 conceptualise l'"espace" à trois dimensions (fig. 4) ; les galaxies se projettent sur V_3 en des points fixes (aux fluctuations aléatoires près) ; la sphère unité de l'espace vectoriel tangent à V_3 au point que nous occupons s'identifie à la *voûte céleste* ; puisque les rayons lumineux joignant deux galaxies se projettent sur V_3 selon des courbes fixes, nous voyons les galaxies *fixes dans le ciel*⁽¹¹⁾.

§2 — UN EQUILIBRE THERMODYNAMIQUE PARADOXAL

Posons, comme en (32)

$$\theta = \frac{1}{kT} \quad (34)$$

En portant

$$\Theta = \theta U \quad (35)$$

dans (19), on trouve la formule

(10) On peut si l'on veut interpréter ce fait comme la *conservation du nombre des photons* dans le vide — puisque le taux de perte d'énergie total est égal à celui de chaque photon.

(11) Effectivement les galaxies n'ont pas de précession observable ; il faut bien entendu tenir compte de l'*aberration*, due au mouvement orbital de la Terre.

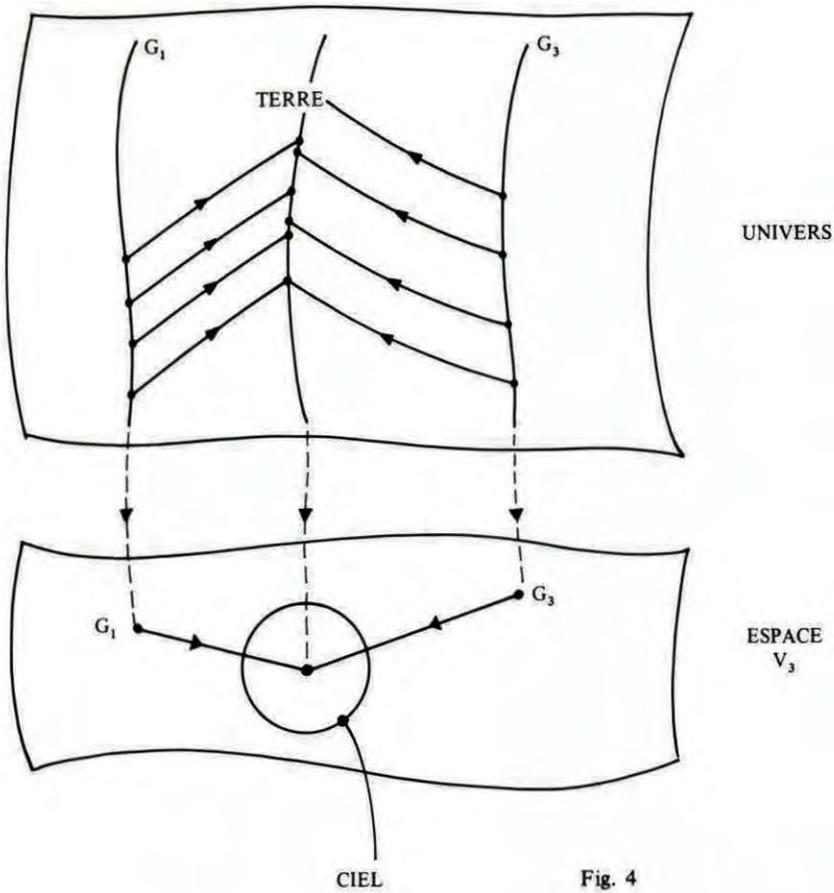


Fig. 4

$$\theta \left[\frac{\hat{\partial}U}{\partial x} + \frac{\bar{\partial}U}{\partial x} \right] + U \overline{\text{grad } \theta} + \text{grad } \theta \bar{U} = \lambda \underline{1} \quad (36)$$

où $\text{grad } \theta$ est le *gradient riemannien* de θ , c'est-à-dire le vecteur transposé du covecteur $\frac{\partial \theta}{\partial x}$.

L'identité

$$\bar{U}U = 1 \quad (37)$$

donne par dérivation et transposition

$$\bar{U} \frac{\hat{\partial}U}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \frac{\bar{\partial}U}{\partial x} U = 0 \quad (38)$$

si bien que, si l'on multiplie l'équation (36) à gauche par \bar{U} , à droite par U , on trouve

$$2 \frac{\partial \theta}{\partial x} U = \lambda ; \quad (39)$$

en reportant cette valeur de λ dans (36) et en prenant la trace, on trouve

$$2\theta \operatorname{div} U - 6 \frac{\partial \theta}{\partial x} U = 0 \quad (40)$$

ce qui s'écrit encore

$$\operatorname{div} \left[\frac{U}{\theta^3} \right] = 0 ; \quad (41)$$

nous avons donc montré que le *vecteur*

$$\frac{U}{\theta^3} \quad (42)$$

est *conservatif* (sa divergence riemannienne est nulle).

Par ailleurs, en multipliant à gauche (36) par \bar{U} , en tenant compte de (37), (38), (39) on trouve

$$\theta \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial x} [1 - U\bar{U}] = 0 ; \quad (43)$$

au moyen de quelques transformations⁽¹²⁾, on constate que le premier membre de (43) est égal à

$$\frac{\theta^5}{4} \operatorname{div} \left[\frac{4U\bar{U} - 1}{\theta^4} \right] \quad (44)$$

si bien que nous avons montré que le *tenseur*

$$\frac{1}{\theta^4} [4U\bar{U} - 1] \quad (45)$$

a une *divergence riemannienne nulle* ; le caractère conservatif du vecteur (42) et du tenseur (45) est une conséquence de la seule formule (19), donc de la propriété du vecteur Θ d'être une transformation conforme infinitésimale.

(12) Utiliser les identités riemanniennes

$$\operatorname{div} [\alpha \underline{1}] = \frac{\partial \alpha}{\partial x} , \quad \operatorname{div} [A\bar{B}] = [\operatorname{div} A] \bar{B} + \bar{A} \frac{\partial \bar{B}}{\partial x}$$

en faisant $\alpha = \theta^{-4}$, $A = U\theta^{-3}$, $B = U\theta^{-1}$ et en tenant compte de (41).

Or ces grandeurs ont une interprétation physique importante : à des facteurs constants près, (45) est le *tenseur impulsion-énergie du rayonnement du corps noir à la température T* (13), (42) est le *flux d'entropie* de ce rayonnement (14).

Nous n'avions interprété jusqu'ici que la *répartition spectrale* du rayonnement cosmologique, sans nous préoccuper de son *intensité* ; nous voyons maintenant que le fait que cette intensité soit celle du corps noir à la température T exprime que l'*entropie*, l'*énergie* et l'*impulsion* de ce rayonnement sont *conservatives* ; c'est-à-dire que l'échange de ces grandeurs entre la *matière* et le *rayonnement* se fait avec un *bilan nul* : en ce sens le système matière-rayonnement constitue bien une sorte d'*équilibre thermodynamique*, malgré l'expansion et le refroidissement (15).

Formulons — à titre d'*approximation* — l'hypothèse

\mathfrak{H}_4 Les seuls efforts auxquels est soumise la matière sont l'action du rayonnement cosmologique et le champ gravitationnel.

Nous convenons donc de négliger, par exemple, les interactions électromagnétiques, la pression due au rayonnement des étoiles, l'effet de l'impact des rayons cosmiques, etc., comme on le fait — avec succès — dans la dynamique du système solaire.

Le rayonnement cosmologique — et notamment sa pression de radiation — n'est pas négligeable ; mais il a un *effet nul*, puisque nous avons vu qu'il n'échange ni énergie, ni impulsion avec la matière (16). Ainsi le mou-

(13) L'isotropie spatiale du tenseur impulsion-énergie du rayonnement montre qu'il est de la forme $\alpha U\bar{U} + \beta \bar{1}$; comme il est la valeur moyenne du tenseur de Maxwell-Poynting (28), et que ce tenseur a visiblement une trace nulle, on a

$$\alpha + 4\beta = 0$$

ce qui montre notamment que la *pression de radiation* $-\beta$ est le tiers de la *densité d'énergie* $\alpha + \beta$; la *loi de Stefan* indique que cette densité d'énergie est proportionnelle à T^4 , donc à θ^{-4} .

(14) Ceci revient à dire que le flux tridimensionnel d'entropie à l'intérieur d'un four est nul (ce qui est évident) et que la *densité d'entropie* est proportionnelle à θ^{-3} , donc à T^3 . La formule $dS = \frac{dQ}{T}$, appliquée à un four de volume unité dont on fait varier la température T, et la loi de Stefan $Q = aT^4$ donnent bien $S = \frac{4a}{3} T^3$ (à une constante additive près que l'on annule au zéro absolu).

(15) La thermodynamique covariante (voir [VIII], [IX]) indique que le vecteur température serait une *isométrie infinitésimale* si l'univers était en *équilibre* ; c'est-à-dire qu'il faudrait joindre à toutes les relations ci-dessus la relation $\lambda = 0$; la formule (39) montre alors que la température (scalaire) serait constante (au moins pour chaque observateur).

(16) De façon précise, on sait que les lois relativistes de la mécanique s'expriment par la nullité de la divergence du tenseur impulsion-énergie total, somme de celui de la matière et de celui du rayonnement ; comme ce dernier a déjà une divergence nulle (45), les lois du mouvement de la matière sont les mêmes que si elle était seule.

vement de la matière est le même que si elle était soumise au seul champ de gravitation global de l'univers ; par conséquent les lignes de courant de la matière sont des *géodésiques* de la métrique $g_{\mu\nu}$ (17). En se souvenant que ces lignes de courant sont les lignes de force du vecteur unitaire U , nous avons donc à écrire que la dérivée covariante de U dans la direction U est nulle :

$$\frac{\hat{\partial}U}{\partial x} U = 0 \quad (46)$$

Nous avons donc trouvé une propriété du *seul rayonnement* à partir d'hypothèses sur la matière ; l'équation (46), vérifiée en tout point de l'univers, va avoir de nouvelles implications géométriques.

En effet, en portant (46) dans l'équation (43) transposée, on obtient la relation

$$[1 - U\bar{U}] \text{grad } \theta = 0 \quad (47)$$

qui exprime simplement que le vecteur $\text{grad } \theta$ est parallèle à U (18) ; puisque le vecteur $\text{grad } \theta$ n'est pas identiquement nul (sinon T serait constante dans l'univers) les équations $\theta = \text{Cte}$ définissent en général des sous-variétés de dimension 3 qui sont en chaque point *orthogonales* au vecteur U ; ainsi le champ de sous-espaces vectoriels

$$x \mapsto \text{orthogonal}(U) \quad (48)$$

est une *feuilletage* ; la condition d'intégrabilité

$$[\bar{U} dx = 0, \bar{U} \delta x = 0] \Rightarrow [\bar{U} [d, \delta] x = 0] \quad (49)$$

où $[d, \delta] x$ est le crochet de Lie de deux dérivations dx et δx est vérifiée ; l'identité

$$[d, \delta] x = \hat{d} \delta x - \hat{\delta} dx \quad (50)$$

permet d'écrire la condition (49) sous la forme

$$[1 - U\bar{U}] \left[\frac{\hat{\partial}U}{\partial x} - \frac{\bar{\partial}U}{\partial x} \right] [1 - U\bar{U}] = 0 \quad (51)$$

ou, compte tenu de (38) et (46)

$$\frac{\hat{\partial}U}{\partial x} - \frac{\bar{\partial}U}{\partial x} = 0 \quad (52)$$

 (17) Ce "principe des géodésiques" est vérifié avec une extrême précision par les mouvements du système solaire - et notamment de Mercure ; - il interprète les $g_{\mu\nu}$ comme *potentiels* du champ de gravitation.

(18) $U\bar{U}$ est le projecteur orthogonal sur le vecteur U .

On reconnaît une *condition d'intégrabilité* : il existe une variable t telle que

$$U = \text{grad } t ; \quad (53)$$

puisque U est un vecteur unitaire, t définit une abscisse curviligne sur chaque ligne de force de U ; c'est-à-dire un temps propre sur chaque ligne de courant : t peut donc être adopté comme *temps universel* ; la valeur de t au point x s'appellera *date* de l'événement x .

Sur les hypersurfaces $t = \text{Cte}$, la variable θ est constante puisque $\text{grad } \theta$ est parallèle à $\text{grad } t$; il existe donc une fonction

$$t \mapsto \theta \quad (54)$$

qui définit la température en fonction de la date.

Les mêmes propriétés sont vraies pour la métrique g^* ((33) ; l'orthogonalité est la même pour les deux métriques) ; il existe un vecteur $*$ -unitaire tangent aux lignes de courant (c'est le vecteur Θ) ; il est l' $*$ -gradient d'une variable τ ; on trouve

$$\tau = \int \frac{dt}{\theta} + \text{Cte} ; \quad (55)$$

mais comme de plus Θ est le générateur d'un groupe d'isométries de g^* , on en déduit par un calcul immédiat que l'élément de longueur ds^* de cette métrique vérifie

$$ds^{*2} = d\tau^2 - d\sigma^2 \quad (56)$$

$d\sigma$ étant l'élément de longueur de la variété quotient V_3 ⁽¹⁹⁾.

La formule (55) montre que l'on peut exprimer t , donc θ en fonction de τ ; en regroupant (56) et (33), on en déduit donc la formule

$$\boxed{ds^2 = \theta(\tau)^2 [d\tau^2 - d\sigma^2]} \quad (57)$$

qui définit la vraie métrique d'univers au moyen de la *métrique d'espace* $d\sigma^2$ et de la *fonction* $\tau \mapsto \theta$.

— Il résulte immédiatement de (36), (39) et (57) que

$$\frac{\hat{\partial}U}{\partial x} = \frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{dt} [1 - U\bar{U}] \quad (58)$$

cette formule permet d'interpréter la conservation de l'énergie d'un phénomène quelconque, dont le tenseur d'impulsion-énergie vérifie la condition $\text{div } \mathbf{T} = 0$; en effet le *vecteur flux* d'énergie $\mathbf{T}U$ vérifie

$$\text{div } [\mathbf{T}U] = [\text{div } \mathbf{T}] U + \text{Tr} \left(\mathbf{T} \frac{\hat{\partial}U}{\partial x} \right) = -3 \frac{p}{\theta} \frac{d\theta}{dt} \quad (59)$$

(19) On dit que la métrique g^* est *statique* (voir [III], [IV]).

p désignant la *pression* associée au phénomène (c'est-à-dire la valeur moyenne des trois contraintes principales dans le cas d'un phénomène non isotrope) ; l'énergie perdue apparaît donc comme le travail fourni par la pression à l'expansion, puisque $\frac{3}{\theta} \frac{d\theta}{dt}$ est le taux d'expansion volumique (Cf. (57)). Ceci s'applique notamment aux rayonnements divers, et en particulier au rayonnement cosmologique.

§3 — ISOTROPIE ET HOMOGENEITE DE L'ESPACE

Nous allons commencer à utiliser l'équation d'Einstein

$$\boxed{8\pi G T_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}} \quad (60)$$

qui indique comment le tenseur impulsion-énergie global $T_{\mu\nu}$ est source du champ de gravitation ; G est la constante de la gravitation de Newton ; $R_{\mu\nu}$ le tenseur de Ricci de l'univers ; R la courbure contractée $R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$; on prend la vitesse de la lumière égale à 1. Puisque nous connaissons la métrique par la formule (57), nous pouvons utiliser la formule (60) pour *calculer* les composantes du tenseur $T_{\mu\nu}$ qui caractérise en chaque point la *densité d'énergie*, la *densité d'impulsion* (ou *flux d'énergie*) et la *contrainte* ; elles doivent coïncider avec les valeurs connues expérimentalement.

On prend des coordonnées x^j de V_3 ($j = 1, 2, 3$) et l'on pose $\tau = x^0$; les formules classiques donnent alors :

$$8\pi G T_{00} = \frac{1}{2} R_{\text{tridi}} + 3\theta'^2/\theta^2 \quad (61)$$

$$8\pi G T_{0j} = 0 \quad (62)$$

$$8\pi G T_{jk} = \left[R_{jk} - \frac{1}{2} R g_{jk} \right]_{\text{tridi}} + \frac{2\theta\theta'' - \theta'^2}{\theta^4} g_{jk} \quad (63)$$

où les grandeurs notées "tridi" sont associées à la métrique tridimensionnelle de V_3 ; θ' et θ'' sont les dérivées de θ par rapport à τ .

Nous adopterons — comme dernière approximation — l'hypothèse \mathcal{H}_6 . En chaque point de l'univers la *contrainte* se réduit à une *pression* (20).

(20) Ceci revient à considérer que les *contraintes de cisaillement* sont rares dans l'univers, et en tout état de cause ne jouent aucun rôle comme source de champ de gravitation ; ce qui semble parfaitement justifié par leur évaluation numérique là où on en rencontre (par exemple dans certaines roches).

Cette hypothèse s'écrit :

$$T_{jk} = -p g_{jk} \quad (64)$$

où les T_{jk} sont les composantes spatiales de T et p la pression.

Un coup d'oeil sur la formule (63) montre qu'il existe un scalaire K tel que la variété V_3 vérifie l'équation *tridimensionnelle*

$$R_{jk} - \frac{1}{2} R g_{jk} = -K g_{jk} \quad (65)$$

Utilisons quelques résultats de géométrie riemannienne ; nous savons — grâce aux identités de Bianchi — que la divergence du premier membre de (65) est identiquement nulle ; il en résulte que K est une *constante*. D'autre part, dans le cas de la dimension 3, le tenseur de Riemann-Christoffel peut se calculer en fonction du tenseur de Ricci ; on déduit ainsi de (65) la formule

$$R_{jk, lm} = K [g_{jm} g_{kl} - g_{jl} g_{km}] \quad (66)$$

qui exprime que V_3 est une *variété de courbure constante* K .

Les principales propriétés de ces variétés sont connues depuis Riemann ; rappelons — les rapidement.

En supposant V_3 *géodésiquement complète et simplement connexe* (21) on démontre que V_3 est isométrique à l'espace euclidien \mathbf{R}^3 (si $K = 0$) ; à la sphère S^3 (si $K > 0$) ou à l'*hyperboloïde* H^3 (22) (si $K < 0$). Dans chacun de ces trois cas, V_3 possède un *groupe d'isométries de dimension 6*, qui agit transitivement, dont les stabilisateurs sont *isomorphes au groupe* $O(3)$, et qui munit V_3 de la géométrie *euclidienne* (si $K = 0$), de la géométrie de Riemann (si $K > 0$) ou de la géométrie de *Lobatchevski* (si $K < 0$) (23).

Dans l'analyse précédente, nous avons traité comme rigoureuses un certain nombre d'hypothèses dont nous savons pertinemment qu'elles peuvent seulement être approchées (on ne s'attend pas, par exemple, que le référentiel du rayonnement accompagne la Terre dans son mouvement autour du Soleil).

(21) Si ces hypothèses globales ne sont pas exigées, toutes les propriétés énoncées sont vraies *localement* ; en particulier, si V_3 est *géodésiquement complète et connexe* mais *pas simplement*, on montre que V_3 est le quotient de \mathbf{R}^3 , S^3 ou H^3 par un groupe discret d'isométries ; le lecteur trouvera dans (XII) quelques possibilités topologiques pour V_3 dont certaines ne manquent pas de pittoresque (espace projectif, espaces lenticulaires, bouteille de Klein).

(22) On peut définir H^3 comme l'ensemble des vecteurs de futur de l'espace de Minkowski ayant une longueur donnée.

(23) Le groupe est le groupe des déplacements euclidiens si $K = 0$, le groupe $O(4)$ si $K > 0$, le groupe de Lorentz orthochrone $O(3,1)^\dagger$ si $K < 0$.

Ces hypothèses viennent de nous conduire à une conséquence importante : l'espace physique V_3 est *homogène* et *isotrope* (grâce aux propriétés des groupes d'isométrie ci-dessus). Ce résultat est évidemment *faux* pris à la lettre ; par contre, il est *très bien vérifié macroscopiquement* ; le décompte des galaxies de différents types donne les mêmes résultats statistiques dans toutes les portions du ciel (sauf celles qui sont voilées par des poussières proches) ; cette *isotropie* implique évidemment l'*homogénéité* si nous n'estimons pas occuper une place privilégiée dans l'univers.

C'est pourquoi on le prend généralement comme *axiome* dans la construction d'un modèle cosmologique : nous voyons ici que c'est inutile – c'est une conséquence des hypothèses *purement ponctuelles* que nous avons énoncées.

On sait définir dans V_3 les *cercles* et les *sphères* ; nous noterons

$$\left. \begin{aligned} 2\pi L(r) &= \text{longueur du cercle de rayon } r \\ 4\pi S(r) &= \text{surface de la sphère de rayon } r \\ 4\pi V(r) &= \text{volume de la sphère de rayon } r \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

Des considérations élémentaires et la formule de Stokes montrent que l'on a

$$V'(r) = S(r) = L(r)^2 \quad (68)$$

et

$$S'(r) = S(r) \Delta r \quad (69)$$

Δr désignant le laplacien de la fonction r , distance géodésique au centre de la sphère. On en déduit – par exemple en choisissant des coordonnées – les formules

$$L(r) = \begin{cases} \frac{\sin(r\sqrt{K})}{\sqrt{K}} & \text{si } K > 0 \\ r & \text{si } K = 0 \\ \frac{\text{sh}(r\sqrt{|K|})}{\sqrt{|K|}} & \text{si } K < 0 \end{cases} \quad (70)$$

$$V(r) = \begin{cases} \frac{2r\sqrt{K} - \sin(2r\sqrt{K})}{4K^{3/2}} & \text{si } K > 0 \\ r^3/3 & \text{si } K = 0 \\ \frac{\text{sh}(2r\sqrt{|K|}) - 2r\sqrt{|K|}}{4|K|^{3/2}} & \text{si } K < 0 \end{cases} \quad (71)$$

nous allons utiliser ces formules pour calculer quelques effets cosmologiques.

Diamètres apparents.

— Les rayons lumineux décrivent des géodésiques isotropes aussi bien pour la métrique g^* que pour la métrique g ; elles se projettent donc sur V_3 selon des géodésiques, parcourues selon la loi $\frac{d\sigma}{d\tau} = 1$ (fig. 5).

Il en résulte que toutes les galaxies que nous voyons avec un redshift donné sont situées sur une *sphère géodésique* de V_3 , centrée sur notre position, de rayon

$$r = \tau_2 - \tau_1 \quad (72)$$

τ_1 et τ_2 étant les valeurs de τ correspondant respectivement à elles et à nous ; la valeur du redshift est

$$\frac{\theta(\tau_2)}{\theta(\tau_1)} - 1 \quad (73)$$

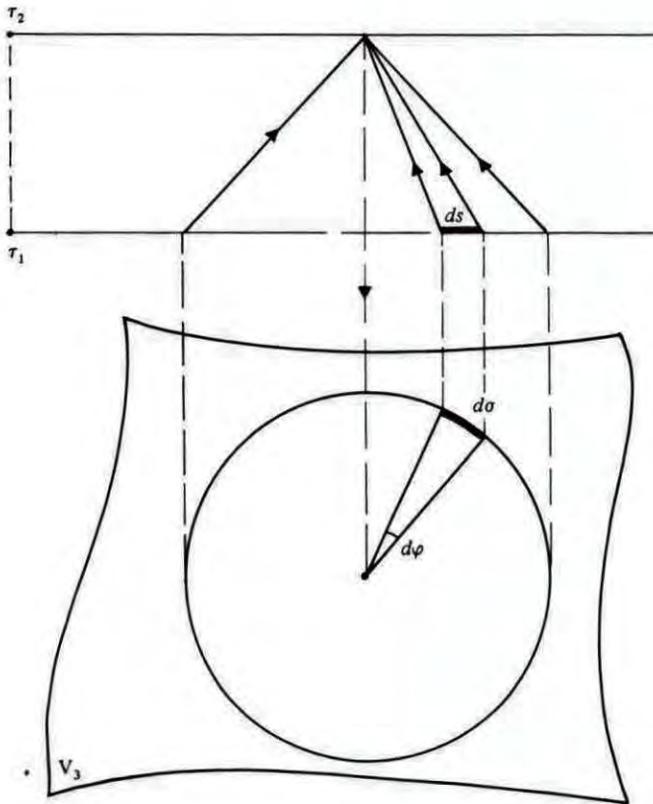


Fig. 5

Un grand cercle de cette sphère a comme longueur $2\pi L(r)$ dans V_3 ; sa longueur réelle est donc $2\pi\theta(\tau_1)L(r)$ (formule (57)) ; comme nous le voyons sous un angle 2π , il en résulte que le diamètre apparent d'un objet de diamètre réel ds est

$$d\varphi = \frac{ds}{\theta(\tau_1)L(\tau_2 - \tau_1)} \quad (74)$$

Luminosités.

Quelles que soient leur composition spectrale et leur état de polarisation, les ondes que nous recevons d'une étoile sont indiscernables d'une onde plane progressive : à tout instant, le champ électrique \vec{E} et le champ magnétique \vec{B} composant cette onde sont perpendiculaires et de même longueur.

Algébriquement, ces propriétés s'écrivent

$$F^3 = 0 \quad (75)$$

F étant le tenseur champ électromagnétique ; nous prendrons cette formule comme hypothèse pour étudier la propagation dans l'univers des ondes émises par un astre.

On déduit de (75) que $\text{Tr}(F^2) = 0$, donc que le tenseur de Maxwell-Poynting (28) est

$$M = \frac{F^2}{4\pi}; \quad (76)$$

on sait que les équations de Maxwell dans le vide entraînent l'équation

$$\text{div } M = 0 \quad (77)$$

Il résulte des équations (75,76) que l'espace de valeurs de M est une direction isotrope ; de (77) que les lignes de force de cette direction sont des géodésiques isotropes – les rayons lumineux issus de l'astre. Puisque nous les connaissons, M est défini à un facteur près que nous noterons $\rho\theta^2$; on a ainsi

$$M = \rho\theta^2 \sqrt{V} \quad (78)$$

en posant

$$V = \text{grad} [\tau - r] \quad (79)$$

r étant la distance géodésique au point occupé par l'astre sur V_3 .

Compte-tenu de la relation $\sqrt{V}U = \frac{1}{\theta}$, $\rho = \bar{U}MU$ est la densité d'énergie du rayonnement. On possède pour la déterminer la formule (77) ; compte-tenu de l'identité

$$\frac{\partial V}{\partial x} V = 0 \quad (80)$$

elle se réduit à

$$\text{div} [\rho \theta^2 V] = 0 \quad (81)$$

Nous allons la remplacer par un argument plus imagé. Supposons (fig. 6) que l'astre émette une bouffée de lumière entre les instants repérés par τ_1 , $\tau_1 + \delta\tau_1$; et que cette émission soit à symétrie sphérique.

A l'instant repéré par τ_2 , cette lumière sera reçue entre deux sphères qui, en projection sur V_3 , auront les rayons

$$r = \tau_2 - \tau_1 \quad (82)$$

et $r - \delta\tau_1$; donc dans un volume réel $4\pi\theta(\tau_2)^3 V'(r) \delta\tau_1$ (compte tenu de (57)) ;

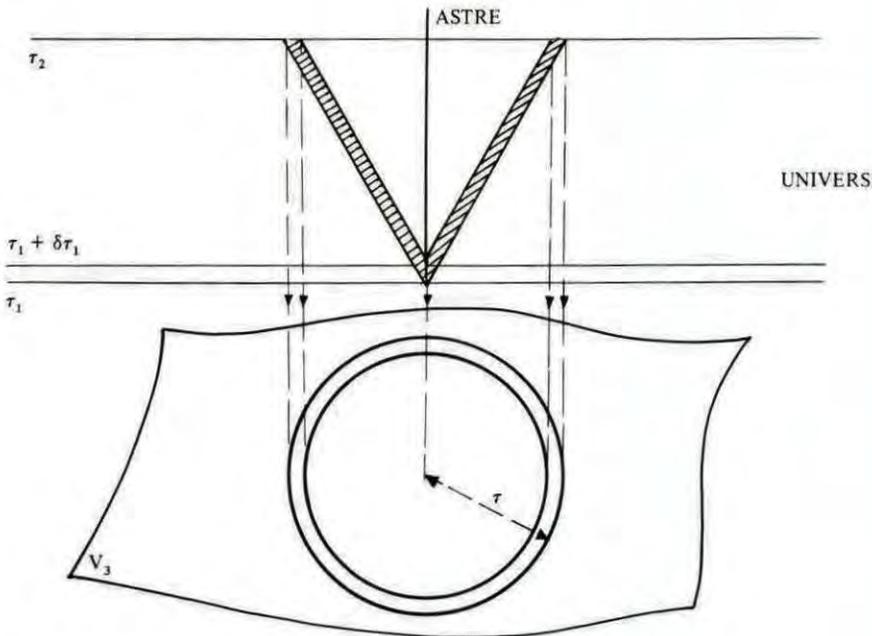


Fig. 6

l'énergie reçue est donc

$$E_2 = 4\pi\rho\theta(\tau_2)^3 V'(r) \delta\tau_1 ; \quad (83)$$

on sait que cette énergie est inversement proportionnelle à $\theta(\tau_2)$ (voir (30)) ; si bien que l'énergie émise vaut

$$E_1 = E_2 \frac{\theta(\tau_2)}{\theta(\tau_1)}. \quad (84)$$

Compte tenu de (46), le temps d'émission de cette énergie est

$$\delta t_1 = \theta(\tau_1) \delta \tau_1; \quad (85)$$

d'où la relation entre ρ et la puissance P_1 émise⁽²⁴⁾

$$\rho = \frac{P_1}{4\pi S(\tau_2 - \tau_1)} \frac{\theta(\tau_1)^2}{\theta(\tau_2)^4} \quad (86)$$

compte tenu du caractère progressif des ondes reçues, ρ est aussi le flux reçu dans la direction de l'astre, c'est-à-dire sa *luminosité*.

— Nous avons ainsi trouvé une solution particulière de l'équation (77-78), à savoir

$$\rho = \frac{\theta^2}{S(r)} \times \text{Cte}$$

Il s'ensuit que la solution générale est

$$\rho = \frac{\theta^2}{S(r)} f(x) \quad (87)$$

$f(x)$ étant une fonction positive qui ne dépend que du rayon lumineux passant par x ; ceci permet de traiter une émission non isotrope et dépendant du temps — en particulier le cas du signal lumineux périodique que nous avons envisagé au § 1.

Brillance.

Dans le cas d'une source étendue — que nous supposons pour simplifier uniformément brillante, il existe une constante C telle que la puissance rayonnée par un élément d'aire ds^2 soit $C ds^2$; en utilisant (86), (74) et (68) on voit que la luminosité de la source est

$$\frac{C}{4\pi} d\varphi^2 \left[\frac{\theta(\tau_1)}{\theta(\tau_2)} \right]^4 \quad (88)$$

$d\varphi^2$ étant l'angle solide sous lequel on voit la source.

(24) Nous avons utilisé (68); $S(r) = L(r)^2$ est donnée par (70). Comparer avec [VII] et [XI].

On voit que $C/4\pi$ est la *brillance initiale* de la source, et que la *brillance actuelle* est divisée par $\left[\frac{\theta_2}{\theta_1}\right]^4$; ce résultat particulièrement simple vaut aussi pour le fond du ciel – brillant du rayonnement cosmologique : dans ce cas on retrouve la loi de Stefan.

Dénombrements d'astres

Un coup d'oeil sur la figure (3) montre que les astres que l'on observe entre les valeurs τ_1 et τ_2 du paramètre – donc avec un redshift inférieur à $\frac{\theta(\tau_2)}{\theta(\tau_1)} - 1$ – sont ceux qui remplissent une sphère de V_3 de rayon $r = \tau_2 - \tau_1$; l'homogénéité de l'espace montre que leur nombre N est proportionnel au volume de cette sphère, soit $4\pi V(r)$; la densité D des astres dans l'espace V_3 est évidemment phénoménologique, et dépend du type d'astre considéré ; on a donc la formule

$$N = 4\pi DV(\tau_2 - \tau_1) \quad (89)$$

l'expression de V étant donnée en (71).

§4 – ACHEVEMENT DU MODELE COSMOLOGIQUE

Pour disposer d'un modèle cosmologique défini, il ne nous manque plus que la détermination de la fonction $\theta(\tau)$; nous disposons à cet usage de l'équation d'Einstein (60), c'est-à-dire de 10 *équations scalaires* ; leur compatibilité avec l'expérience est donc un test important pour le modèle.

Compte tenu de l'homogénéité de l'espace – c'est-à-dire des formules (65) ou (66), il est facile de regrouper les diverses composantes (61, 62, 63) du tenseur T en une seule formule quadridimensionnelle ; on trouve ainsi

$$8\pi GT_{\mu\nu} = \frac{A}{\theta^4} [4U_\mu U_\nu - g_{\mu\nu}] + \frac{6B}{\theta^3} U_\mu U_\nu \quad (90)$$

où l'on a posé comme abréviation

$$A = \theta'^2 - 2\theta\theta'' - K\theta^2 \quad (91)$$

$$B = \theta'' + K\theta \quad (92)$$

la *pression* est alors constante dans l'espace et vaut

$$p = \frac{A}{8\pi G\theta^4} \quad (93)$$

Nous allons supposer que cette pression est essentiellement *la pression de radiation du rayonnement cosmologique* (25) ; celle-ci est connue par la théorie de Planck ; nous avons vu qu'elle est le tiers de la densité d'énergie du rayonnement, soit

$$p = \frac{\pi^2}{45 \hbar^3} \times \frac{1}{\theta^4} \quad [2\pi\hbar = \text{constante de Planck}] ; \quad (94)$$

l'identification de (93) et (94) nous montre que A est *constante*, et prend la valeur

$$A = \frac{8\pi^3 G}{45 \hbar^3} = 9.40 \times 10^{84} \text{ g}^{-4} \text{ cm}^{-2} ; \quad (95)$$

la dérivation de (91) et (92) montre immédiatement que B *aussi est constante*.

La formule (90) exprime alors que le *tenseur T est la somme du tenseur d'énergie du rayonnement cosmologique* :

$$\frac{A}{8\pi G\theta^4} [4U_\mu U_\nu - g_{\mu\nu}] \quad (96)$$

(voir (33) ci-dessus) et du tenseur d'énergie d'une *poussière* de densité ρ ;

$$\rho U_\mu U_\nu \quad (97)$$

ρ étant donné par

$$\rho = \frac{3B}{4\pi G\theta^3} ; \quad (98)$$

résultat bien satisfaisant, puisque ce sont les deux phénomènes physiques que nous avons considérés avant même d'écrire l'équation d'Einstein (26).

(25) Puisque il faut choisir une pression constante dans tout l'espace, on doit choisir sa valeur moyenne ; pour des raisons de volume occupé, cette valeur moyenne diffère peu de celle de l'espace intergalactique ; on y évalue les diverses causes de pression à moins d'un cinquantième de la pression de radiation (la pression de l'éventuel gaz intergalactique sera discutée plus loin).

(26) Nous savons que l'expansion de la matière est adiabatique – puisqu'il n'y a pas d'échange avec le rayonnement ; l'équation (98), que l'on peut écrire $\rho/T^3 = \text{Cte}$, est donc une *loi de comportement adiabatique*. Il se trouve que c'est celle d'un gaz *parfait* dont le rapport des chaleurs spécifiques a la valeur 4/3. (C'est celle que donne la théorie cinétique à un gaz composé de particules solides, et elle est de l'ordre de grandeur des valeurs mesurées pour les gaz polyatomiques à basse température). Mais cette interprétation implique l'existence d'une pression, que nous noterons p' , donnée par la loi de Mariotte-Gay-Lussac $p'/\rho = \text{Cte}$; il en résulte que p' , comme la pression de radiation p , est proportionnelle à T^4 . Le rapport constant p'/p est proportionnel à la densité actuelle, inversement proportionnel à la masse moléculaire du gaz ; la valeur maximum que l'on pourrait envisager (hydrogène intergalactique de densité $10^{-29} \text{ g cm}^{-3}$) serait 10^{-8} ; ce qui justifie a posteriori que nous ayons négligé p' devant p en (93, 94).

Pour achever la détermination du modèle, nous avons les équations (91) et (92) :

$$\theta'^2 - 2\theta\theta'' - K\theta^2 = A \quad (91)$$

$$\theta'' + K\theta = B \quad (92)$$

où l'on sait que les constantes A et B ont des valeurs positives ; ce sont deux équations différentielles dont chacune est intégrale première de l'autre ; leur système est d'ailleurs équivalent à l'équation du premier ordre obtenue par élimination de θ'' , à savoir

$$\theta'^2 = A + 2B\theta - K\theta^2 \quad (99)$$

Compte tenu du fait que θ est positive, et que θ' est actuellement positive (refroidissement), l'intégration élémentaire montre que θ s'est annulé dans le passé — quelles que soient les valeurs numériques de A, B, K ; ceci correspond à un état de température infinie et de densité infinie au delà duquel le modèle n'est certainement pas prolongeable dans le passé ; c'est le *big-bang*.

En choisissant le big-bang comme *origine pour la variable τ* , on trouve alors

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } \theta = \sqrt{A} \frac{\sin(\tau\sqrt{K})}{\sqrt{K}} + B \frac{1 - \cos(\tau\sqrt{K})}{K} \quad (\text{pour } K > 0) \\ \text{b) } \theta = \sqrt{A} \frac{\text{sh}(\tau\sqrt{|K|})}{\sqrt{|K|}} + B \frac{\text{ch}(\tau\sqrt{|K|}) - 1}{|K|} \quad (\text{pour } K < 0) \\ \text{c) } \theta = \sqrt{A}\tau + B \frac{\tau^2}{2} \quad (K = 0) ; \end{array} \right\} (100)$$

Il se trouve que ces trois formules peuvent s'écrire

$$\boxed{\theta = \sqrt{A} L(\tau) + 2B L(\tau/2)^2} \quad (101)$$

L étant la fonction définie en (67), calculée en (70).

Connaissant θ , on détermine immédiatement la *température* (34)

$$\boxed{T = \frac{1}{k\theta}} \quad (102)$$

la *densité de matière*

(suite de la note 26)

Une autre difficulté provient de l'existence probable de neutrinos de basse énergie, qui doivent modifier la valeur de la constante A. Mais ils posent quelques problèmes de principe, et semblent pour l'instant inaccessibles à l'expérience.

$$\rho = \frac{3B}{4\pi G\theta^3} \quad (103)$$

la pression de radiation (93)

$$p = \frac{A}{8\pi G\theta^4} \quad (104)$$

la date

$$t = \int \theta \, d\tau ; \quad (105)$$

le calcul donne – en prenant le big-bang comme origine des temps

$$t = 2\sqrt{A} L(\tau/2)^2 + 4B V(\tau/2) \quad (106)$$

la fonction V étant donnée en (71) ; et enfin le coefficient d'expansion de Hubble – c'est-à-dire la dérivée logarithmique de la distance des galaxies proches par rapport au temps ; la formule (57) donne

$$H = \frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{\theta'}{\theta^2} \quad (107)$$

– Le modèle de Friedmann ne tient pas compte – et pour cause – du rayonnement cosmologique comme source du champ de gravitation ; on l'obtient en faisant $A = 0$ dans les formules ci-dessus ; les valeurs numériques montrent que cette approximation n'entraîne pas de modification très importante dans la description actuelle de l'univers, ni dans la valeur numérique de son âge. On peut remarquer que ce modèle de Friedmann – même avec courbure spatiale K – est rigoureusement équivalent au plus simple des modèles newtoniens (voir l'annexe).

– Au contraire, au début de l'expansion, le premier terme des formules (90) et (101) devient prépondérant ; la matière est négligeable devant le rayonnement ; en négligeant B et K , dans les formules ci-dessus, on trouve le modèle de Gamow, dans lequel

$$\theta = \sqrt{A} \tau \quad t = \sqrt{A} \tau^2 / 2 \quad (108)$$

d'où

$$kT = 1/\sqrt{2t\sqrt{A}} \quad (109)$$

c'est ce modèle qui a permis à Gamow de prédire le rayonnement cosmologique – reste fossile de la lumière des premiers instants [I].

Si l'on fait l'hypothèse que l'on peut remonter jusqu'à un redshift de 10^{12} – correspondant à une température de 3×10^{12} °K, à un âge

de l'univers de 30 microsecondes, on arrive à des conditions⁽²⁷⁾ telles que la lumière peut produire spontanément des paires proton-antiproton, neutron-antineutron. Une théorie cosmogonique récente (VI) suppose que toute la matière de l'univers s'est créée de cette façon, avec une quantité égale d'anti-matière ; la condensation ultérieure en galaxies et antigalaxies aurait été accompagnée d'une dématérialisation partielle, responsable du fond de rayons X que l'on observe effectivement.

— Nous disposons donc d'un modèle géométrique et thermodynamique qui est a priori acceptable tout au long de l'expansion — puisqu'il se trouve posséder les modèles de Gamow et de Friedmann comme modèles asymptotiques. Reste à le déterminer numériquement. Nous connaissons :

- (110) La constante $A = 9.40 \times 10^{84} \text{ g}^{-4} \text{ cm}^{-2}$; cette valeur peut être augmentée pour tenir compte des neutrinos ;
- (111) La température actuelle T du rayonnement est évaluée à 2.7°K ; θ vaut donc $2.4 \times 10^{36} \text{ g}^{-1}$;
- (112) Le coefficient H de Hubble est évalué à $2.6 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1}$, avec une précision douteuse ; θ' vaut donc $5.10^{44} \text{ cm}^{-1} \text{ g}^{-2}$;
- (113) La densité moyenne de la *matière galactique* est évaluée à $3 \times 10^{-31} \text{ g cm}^{-3}$; mais la densité de *matière intergalactique* est très mal connue ; c'est bien dommage, car la formule

$$K = \frac{A}{\theta^2} + \frac{8\pi G}{3} \rho \theta^2 - \frac{\theta'^2}{\theta^2} \quad (114)$$

conséquence de (98) et (99), permettrait alors de déterminer la courbure spatiale K .

On est donc conduit à faire quelques hypothèses et à les comparer à l'observation. Nous en ferons ici trois.

Modèle "plat".

On suppose a priori $K = 0$ — par raison de "simplicité". Les formules ci-dessus donnent les expressions suivantes :

$$\rho = \frac{3}{8\pi G} \frac{\theta'^2}{\theta^4} \left[1 - \frac{A}{\theta'^2} \right] \quad (115)$$

$$B = \frac{\theta'^2}{2\theta} \left[1 - \frac{A}{\theta'^2} \right] \quad (116)$$

(27) La pression de radiation correspondante est $10^{35} \text{ dyne cm}^{-2}$, soit 10^{18} fois celle qui règne au centre du Soleil. Cette pression, supposée régner dans tous l'univers, serait le moteur de l'expansion (voir la fin du §1).

$$\tau = \frac{2\theta}{\theta'} \frac{1}{1 + \sqrt{A/\theta'}} \quad (117)$$

$$t = \frac{2\theta^2}{3\theta'} \left[1 - \frac{A/\theta'^2}{[1 - \sqrt{A/\theta'}]^2} \right] \quad (118)$$

qui permettent de dimensionner le modèle à partir des données actuelles. Le rapport sans dimension $\sqrt{A/\theta'}$ vaut 6.13×10^{-3} (avec les valeurs ci-dessus) ; par conséquent les valeurs (115, 116, 117, 118) diffèrent peu de celles que donnent l'approximation de Friedmann $A = 0$; on trouve

$$\left. \begin{aligned} B &= 5.2 \times 10^{52} \text{ g}^{-3} \text{ cm}^{-2} \\ \tau &= 9.6 \times 10^{-9} \text{ g cm} \\ t &= 2.56 \times 10^{17} \text{ s} = 8.1 \text{ milliards d'années} \\ \rho &= 1.2 \times 10^{-29} \text{ g cm}^{-3} \end{aligned} \right\} \quad (119)$$

C'est cette dernière valeur qui est la plus difficile à expliquer : pourquoi un quarantième seulement de la masse totale s'est-il condensé dans les galaxies ? Où est la masse manquante ? (on n'observe pas de gaz intergalactique ; les "trous noirs" restent conjecturaux, et leur présence en grande quantité dans les galaxies serait décelée gravitationnellement).

"Modèle "vide"

On peut au contraire supposer que la matière s'est presque entièrement condensée dans les galaxies, et que par conséquent la densité générale est pratiquement la densité galactique

$$\rho = 3 \times 10^{-31} \text{ g cm}^{-3} \quad (120)$$

en portant cette valeur dans (114), on trouve⁽²⁸⁾

$$K = -4.23 \times 10^{16} \text{ g}^{-2} \text{ cm}^{-2} \quad (121)$$

cette valeur étant négative, l'espace V_3 est *hyperbolique*⁽²⁹⁾ ; la formule (100 b) montre que l'expansion doit durer indéfiniment, comme dans le cas plat.

Pour dimensionner le modèle, il est commode d'utiliser la formule⁽³⁰⁾

(28) Le dernier terme de (114) est le plus important, si bien que cette valeur est peu sensible à l'évaluation de la densité galactique.

(29) Rappelons que ceci n'empêche pas l'existence d'un équivalent newtonien (voir l'annexe).

(30) Cette formule fait intervenir deux nombres sans dimension : $8\pi G\rho/3H^2 = 1/40$ et $\sqrt{A/\theta'} = 1/163$; le second n'est pas négligeable devant le premier, ce qui montre que la radiation joue un rôle important dans le dimensionnement du modèle à partir des conditions actuelles (le logarithme vaut 4.67 ; il vaudrait 5.07 en faisant $A = 0$ (modèle de Friedmann) et 5.78 en faisant $\rho = 0$ (modèle de Gamow avec courbure).

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{|K|}} \text{Log} \frac{(1 + \sqrt{A/\theta'} + \sqrt{1 - 8\pi G\rho/3H^2 - A/\theta'^2})^2}{8\pi G\rho/3H^2 + 2\sqrt{A/\theta'} + 2A/\theta'^2} \quad (122)$$

d'où

$$\left. \begin{aligned} A &= 9.40 \times 10^{84} \text{ g}^{-4} \text{ cm}^{-2} \\ B &= 1.29 \times 10^{51} \text{ g}^{-3} \text{ cm}^{-2} \\ K &= -4.23 \times 10^{16} \text{ g}^{-2} \text{ cm}^{-2} \\ \tau &= 2.27 \times 10^{-8} \text{ g cm} \\ t &= 3.71 \times 10^{17} \text{ s} = 11.7 \text{ milliards d'années} \end{aligned} \right\} \quad (123)$$

Modèle avec constante cosmologique.

A priori, il n'est pas impossible que la "véritable" équation de la gravitation contienne une constante dite cosmologique ; on peut l'interpréter – sans modifier l'équation d'Einstein (60) – en attribuant au vide un tenseur impulsion-énergie scalaire

$$T_{\mu\nu} = \frac{\Lambda}{8\pi G} g_{\mu\nu} \quad (124)$$

ce qui correspond à une densité d'énergie $\Lambda/8\pi G$, à une pression $-\Lambda/8\pi G$.

Rien n'est changé aux trois premiers paragraphes de cette étude ; mais l'expression (90) du tenseur impulsion-énergie total doit être modifiée pour être interprétable, en

$$8\pi GT_{\mu\nu} = \frac{A}{\theta^4} [4U_\mu U_\nu - g_{\mu\nu}] + \frac{6B}{\theta^3} U_\mu U_\nu + \Lambda g_{\mu\nu} \quad (125)$$

avec cette fois-ci

$$\left. \begin{aligned} A &= \theta'^2 - 2\theta\theta'' - K\theta^2 + \Lambda\theta^4 \\ B &= \theta'' + K\theta - \frac{2}{3}\Lambda\theta^3 \end{aligned} \right\} \quad (126)$$

Si on admet que la pression est égale à la pression du rayonnement cosmologique *augmentée de celle du vide*, A est constant (et prend la valeur (123)) ; comme précédemment on en déduit que B est constant ; l'équation (99) devient

$$\theta'^2 = A + 2B\theta - K\theta^2 + \frac{\Lambda}{3}\theta^4 \quad (127)$$

ce qui montre que θ est une *fonction elliptique* de τ .

On ne possède aucune indication observationnelle permettant de distinguer Λ de 0 ; la dynamique du système solaire laisse présumer que

$|\Lambda| < 10^{-40} \text{ cm}^{-2}$; celle de la Galaxie que $|\Lambda| < 10^{-51} \text{ cm}^{-2}$; enfin la dynamique des amas galactiques, pour être valable, suppose que $|\Lambda| < 10^{-56} \text{ cm}^{-2}$. On est donc réduit aux conjectures sur sa valeur ; l'une de celle-ci est que l'univers est *à la fois plat et vide entre les galaxies* : A et B prennent les valeurs (123), K est nul, et l'équation (127) donne

$$\Lambda = + 2.2 \cdot 10^{-56} \text{ cm}^{-2} \quad (128)$$

l'intégration de l'équation (127) fournit alors un modèle à expansion éternelle et à big-bang ; l'âge correspondant de l'univers est 20,8 milliards d'années.

Quelques tests :

Nous n'allons pas discuter ici les divers arguments permettant de choisir un modèle d'univers ; rappelons simplement que l'âge estimé de la galaxie (dix milliards d'année environ) s'accorde mieux avec les modèles vides.

Un des tests les plus importants est la statistique des sources lointaines (galaxies, quasars) qui peut porter sur leur quantité, leur luminosité et leur redshift.

La luminosité totale d'une source n'est pas mesurable directement : la présence de l'atmosphère, la nature des télescopes et des radio-télescopes ne permet que de la mesurer dans une bande passante déterminée. Comme cette bande passante correspond, pour des sources différentes, à des régions spectrales différentes (en raison des variations de redshift), on ne peut faire de statistique que si l'on a fait une hypothèse préalable sur le *spectre d'émission* des sources concernées.

— Par exemple, la couleur bleue des quasars (malgré leur redshift) peut suggérer que leur rayonnement est celui d'un corps noir à très haute température ; dans ce cas on peut utiliser la loi de Rayleigh-Jeans, selon laquelle l'énergie émise est équipartie sur la variable ν^3 : En utilisant la formule (86) on trouve donc l'expression suivante pour la luminosité correspondant à un intervalle $\nu_1, \nu_1 + \delta\nu_1$ de fréquences émises.

$$C\nu_1^2 \delta\nu_1 \frac{\theta(\tau_1)^2}{S(\tau_2 - \tau_1) \theta(\tau_2)^4}, \quad (129)$$

C étant une constante caractéristique de la nature du quasar ; soit encore compte tenu du redshift

$$\frac{C\nu_2^2 \delta\nu_2}{S(\tau_2 - \tau_1) \theta(\tau_1) \theta(\tau_2)} \quad (130)$$

Pour différents quasars de même type observés sur Terre ($\tau_2 = \text{Cte}$) la luminosité apparente sera donc inversement proportionnelle à

$$S(\tau_2 - \tau_1) \times \theta(\tau_1)$$

tant que l'approximation de Rayleigh-Jeans sera valable dans la bande spectrale observée⁽³¹⁾.

La figure (7) donne, en fonction du décalage spectral ν_1/ν_2 (porté sur les courbes) la luminosité apparente ainsi calculée (en abscisse) et le nombre total de sources de redshift inférieur (en ordonnée). Les courbes correspondant aux modèles vides (pratiquement une droite de pente logarithmique 2 pour des redshifts allant de 0.5 à 4) sembleraient s'accorder avec les observations sans obliger à supposer que le nombre des quasars a fortement évolué depuis la date où nous observons les plus anciens. Mais l'hypothèse faite sur le spectre des quasars demande confirmation.

L'hypothèse d'une constante cosmologique non nulle (ci-dessus (128)) exige qu'on confronte avec l'observation la loi de gravitation ainsi modifiée.

Le ds^2 de Schwarzschild — qui représente le champ de gravitation à symétrie sphérique — doit être remplacé par la formule

$$ds^2 = \left[1 - \frac{2MG}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} \right] dt^2 - \frac{dr^2}{1 - 2MG/r - \Lambda r^2/3} - r^2 [d\theta^2 + \cos^2\theta d\varphi^2] \quad (131)$$

où M est la masse de la matière qui crée le champ.

L'étude des géodésiques de ce champ est facile (voir [X]) ; pour les orbites circulaires, la durée de révolution⁽³²⁾ est donnée par la formule

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{MG}{r^3} - \frac{\Lambda}{3}}} \quad (132)$$

avec la valeur (128) de Λ , les différences sont négligeables dans le système solaire⁽³³⁾ ; mais à l'échelle intergalactique, les différences deviennent considérables : on voit que pour une distance

$$r = \left[\frac{3MG}{\Lambda} \right]^{1/3} \quad (133)$$

le mouvement circulaire est remplacé par un *équilibre* ; aux distances plus élevées il n'existe plus de mouvement circulaire, le champ de gravitation

(31) Par exemple, pour des observations dans le spectre visible, si la température du quasar est supérieure à 50000°K et le redshift inférieur à 4.

(32) Il s'agit de la durée mesurée dans le temps t , c'est-à-dire pour un observateur lointain.

(33) L'effet le plus notable serait un ralentissement de Pluton lui faisant perdre un dixième de millimètre par siècle.

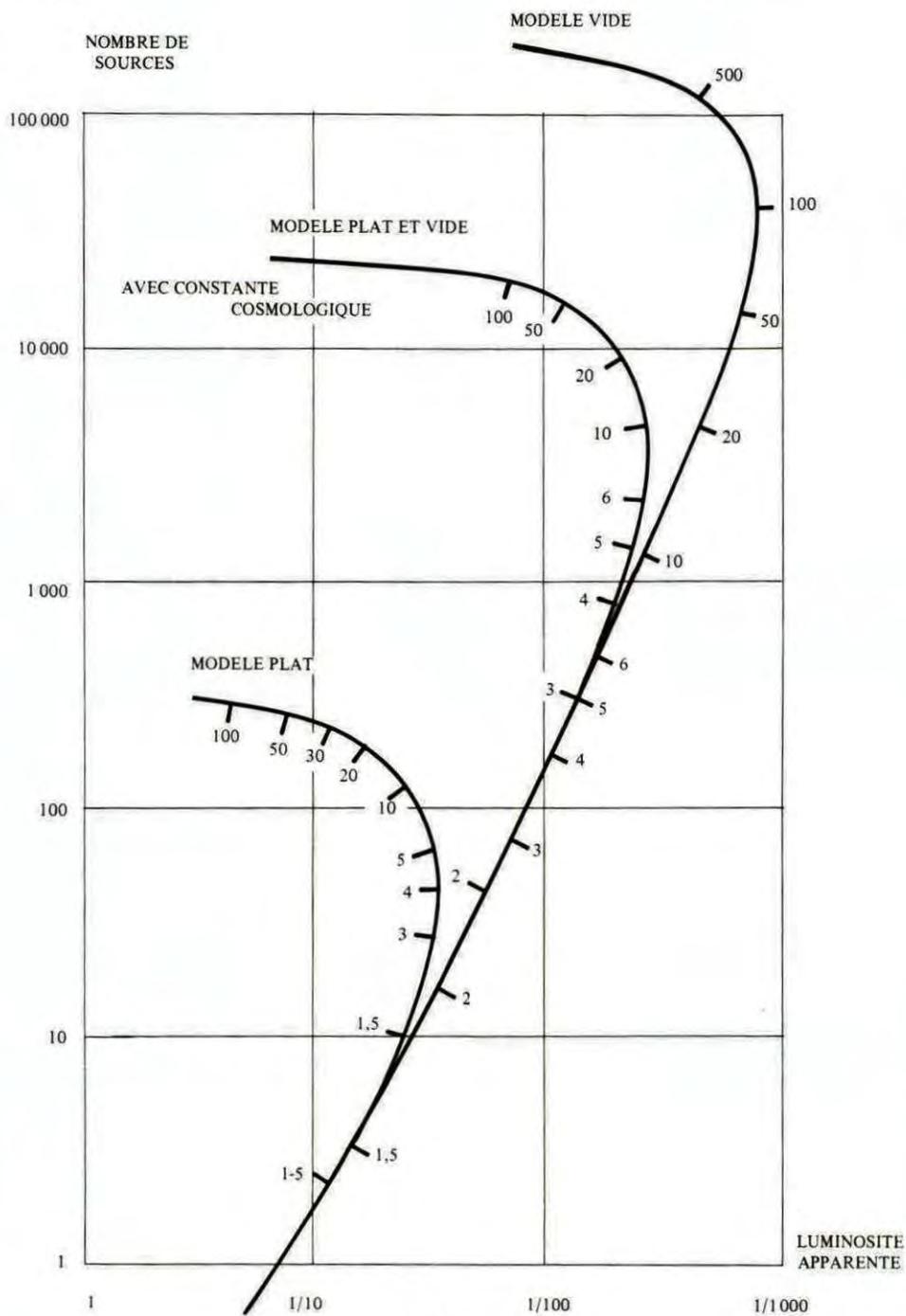


Fig 7

devient répulsif. La distance (133) représente donc le *rayon d'attraction* d'une masse M ; pour la Galaxie il vaut (toujours avec la valeur (128) de Λ)

$$r = 500 \text{ Kpc} \quad (134)$$

ce qui est l'ordre de grandeur de la distance aux autres grandes galaxies de l'amas local – mais nettement supérieur à la distance aux galaxies satellites, comme les nuages de Magellan.

La formule (133) peut s'interpréter comme donnant la *densité minimum d'un amas sphérique gravitationnellement lié*

$$\rho = \frac{\Lambda}{4\pi G} = 2 \times 10^{-29} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 1.7 \frac{\text{Galaxie}}{[\text{Mpc}]^3} \quad (135)$$

il y a donc compatibilité avec l'observation, puisque les grands amas ont une densité nettement supérieure, et que (135) coïncide à peu près avec la densité de l'amas local.

Si cette coïncidence n'est pas accidentelle, on peut interpréter les amas de galaxies comme des lambeaux déchirés par l'expansion lorsque la densité générale est devenue inférieure à (135) ; ce qui correspond – dans le modèle (128) – à un redshift de 3.4, et à un âge des amas de 15.5 milliards d'années.

ANNEXE : COSMOLOGIE NEWTONIENNE

En mécanique Newtonienne, un point matériel qui occupe la position \vec{r} à l'instant t gravite selon l'équation

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{g} \quad (136)$$

\vec{g} désignant le champ de gravitation.

Cette équation peut s'écrire quadridimensionnellement : si l'on appelle x^j ($j = 1, 2, 3$) les composantes de \vec{r} , x^4 le temps, on constate immédiatement que (136) devient

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\rho}{ds} = 0 \quad (137)$$

à condition que les nombres $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ soient tous nuls, à l'exception des

$$\Gamma_{44}^j = -g^j ; \quad (138)$$

s est un paramètre a priori arbitraire, en fait fonction affine de t (faire $\mu = 4$ dans (139)).

On reconnaît dans (137) l'équation des *géodésiques d'une connexion symétrique* dont les composantes sont les $\Gamma_{\nu\rho}^{\mu}$. La vraie nature du vecteur \vec{g} , c'est donc de définir une connexion symétrique de l'espace-temps par la formule (138).

Rappelons qu'une connexion symétrique est un objet géométrique que l'on peut définir *indépendamment de toute métrique* ; elle possède une propriété remarquable : en chaque point, les nombres $\Gamma_{\nu\rho}^{\mu}$ qui repèrent la connexion peuvent être *annulés* par un choix convenable des coordonnées.

Cette propriété géométrique correspond ici à une propriété physique bien connue : la possibilité d'annuler localement la gravitation par le choix d'un référentiel (apesanteur dans les satellites artificiels).

Ni le vecteur \vec{g} (en un point), ni sa longueur, ni même sa nullité ou sa non-nullité n'ont de signification physique ou géométrique objective.

Mais la géométrie différentielle nous permet d'associer une grandeur tensorielle à un champ de connexion : il s'agit du tenseur de Riemann-Christoffel (tenseur de courbure) dont le calcul est bien connu ; on trouve ici que toutes les composantes $R_{\nu\rho,\sigma}^{\mu}$ sont nulles, à l'exception des

$$R_{k4,4}^j = -R_{4k,4}^j = -\frac{\partial g^j}{\partial x^k} \quad (139)$$

On voit donc que la dérivée spatiale du vecteur \vec{g} a un sens objectif ; par conséquent, le vecteur \vec{g} est défini à l'addition près d'une constante arbitraire (34).

Ainsi se trouve levé l'obstacle épistémologique qui s'opposait autrefois à la construction d'un modèle cosmologique newtonien : si le vecteur \vec{g} était "objectif", et si l'espace était homogène et isotrope, \vec{g} ne pourrait avoir que la valeur 0 ; l'équation de Poisson

$$\operatorname{div} \vec{g} = -4\pi G\rho \quad (140)$$

exigerait alors que la densité ρ soit partout nulle.

Ici, c'est le tenseur $\frac{\partial \vec{g}}{\partial r}$ qui doit être isotrope — donc scalaire ; en choisissant — ce qui est permis — $\vec{g} = 0$ à l'origine, on a donc

$$\vec{g} = -\lambda \vec{r} \quad (141)$$

λ étant une constante — plus exactement une fonction du temps ; l'équation de Poisson donne alors

(34) La pratique des calculs de mécanique céleste (calcul des perturbations, calcul des marées par exemple) ne met effectivement en jeu que des différences de valeurs de \vec{g} entre couples de points de l'espace.

$$\boxed{3\lambda = 4\pi G\rho} \quad (142)$$

Cette équation est compatible avec une *expansion* uniforme — dont la vitesse est donnée en chaque point \vec{r} par

$$\vec{v} = H\vec{r} \quad (143)$$

H étant une fonction du temps (H est le coefficient de Hubble) ; en effet, si l'on écrit que les lignes de courant vérifient (136), (141), on trouve

$$\boxed{\frac{dH}{dt} + H^2 = -\lambda} \quad (144)$$

la conservation de la masse s'écrit par ailleurs⁽³⁵⁾

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} + 3H\rho = 0} \quad (145)$$

Reste à intégrer le système des équations différentielles (142, 144, 145) ; on peut d'abord tirer ρ de (142) et porter dans (145), ce qui donne

$$\frac{d\lambda}{dt} + 3H\lambda = 0 \quad (146)$$

Rien ne nous empêche maintenant de choisir une constante positive B et de poser

$$\theta = \left[\frac{B}{\lambda} \right]^{1/3} \quad (147)$$

puisque (142) montre que λ est positive ; ni d'introduire le paramètre

$$\tau = \int \frac{dt}{\theta} \quad (148)$$

la confrontation de (146, 147, 148) montre que

$$H = \frac{\theta'}{\theta^2} \quad (149)$$

θ' étant la dérivée de θ par rapport à τ ; en portant cette valeur dans (144) il vient

 (35) Ces équations (144, 145) sont respectivement l'équation d'Euler et l'équation de continuité ; elles restent valables si la matière, au lieu d'être de la poussière, est constituée d'un gaz parfait, d'équation d'état quelconque (la pression, étant spatialement constante donne une contribution nulle à l'équation d'Euler).

$$\theta'^2 - \theta\theta'' = B\theta \quad (150)$$

On vérifie immédiatement, comme conséquence de (150), que la quantité

$$K = \frac{2B}{\theta} - \frac{\theta'^2}{\theta^2} \quad (151)$$

est constante ; si bien que θ est solution de l'équation différentielle

$$\theta'^2 = 2B\theta - K\theta^2 \quad (152)$$

qui, après résolution, donnera

$$t = \int \theta \, d\tau \quad (153)$$

$$H = \theta'/\theta^2 \quad (154)$$

$$\rho = \frac{3B}{4\pi G\theta^3} \quad (155)$$

On reconnaît *exactement* les équations (99, 105, 107, 103) du modèle relativiste — avec $A = 0$; l'interprétation du temps t , du coefficient de Hubble H et de la densité ρ étant les mêmes.

L'intégration de (152) conduit donc, comme ci-dessus, à la nécessité du big-bang, et fournit les formules (100) avec $A = 0$: en ce qui concerne l'évolution de l'univers, *le modèle newtonien est donc strictement équivalent au modèle de Friedmann* ; mais la constante d'intégration K ne s'interpète plus comme courbure spatiale.

REFERENCES

- [I] G. GAMOW — *Phys. Rev.* 70, 572, (1946).
- [II] S.W. HAWKING et G.F.R. ELLIS — "The large scale structure of space-time". Cambridge University Press, 1973.
- [III] H. JUAN — *Ann. Fac. Sc. Marseille*, 16, 5 (1968).
- [IV] A. LICHNEROWICZ — "Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme". Masson, 1955.
- [V] S. MAVRIDES — "L'univers relativiste". Masson 1973.
- [VI] R. OMNES — "Les métamorphoses de l'univers" Paris, 1973.
- [VII] H.P. ROBERTSON — *Z.f. Astrophysik*, 15, 69 (1937).
- [VIII] J.M. SOURIAU — "Structure des systèmes dynamiques" Dunod, 1970.
- [IX] J.M. SOURIAU — *Supp. Nuovo Cimento*, 1, 4, 203 (1966).

- [X] J.M. SOURIAU — *Bull. Soc. Math. France*, 93, 193 (1965).
 [XI] S. WEINBERG — "Gravitation and cosmology", J. Wiley, 1972.
 [XII] J.A. WOLF — "Spaces of constant curvature" Mc. Graw-Hill (1967).

DISCUSSION

Pr. Sternberg — Est-ce qu'il existe une théorie symplectique de l'ensemble grand canonique, qui donnerait peut-être un état d'équilibre même dans le cas du groupe de Galilée ? Dans le cadre de la théorie standard des lois de Gibbs, il se trouve fréquemment que les fonctions z convergent quand on ajoute des conditions (par exemple, si on prend la mesure de Lebesgue sur \mathbf{R} , il n'y a pas de loi de probabilité qui maximise l'entropie quand on se donne seulement la valeur moyenne ; mais si on donne la valeur moyenne et la variance, on trouve que les lois de Gibbs sont les lois de Gauss). Est-ce qu'on peut faire une démarche analogue (peut-être pour élargir le groupe) dans le cas symplectique ?

Pr. Souriau — Ce ne me semble pas possible dans le cadre envisagé dans mon exposé (système dynamique *quelconque*) ; il faut évidemment ajouter des hypothèses exprimant l'*homogénéité* de l'état d'équilibre. Dans ces conditions cette suggestion est très intéressante.

Pr. Bleuler — Est-ce qu'on pourrait appliquer cette théorie aux modèles thermodynamiques des particules élémentaires lourdes (hadrons) données par Landau et par Heisenberg ?

Pr. Souriau — A priori, il semble dangereux d'utiliser une théorie non quantique et non relativiste à la description des particules à interactions fortes. Cependant certains faits expérimentaux suggèrent l'existence d'une analogie ("ébullition" des hadrons à partir d'une température critique).

Pr. Bleuler — Est-ce qu'on pourrait généraliser la théorie au cas de la statistique quantique ?

Pr. Souriau — Il s'agit d'un programme de recherches que nous envisageons.

Pr. Bleuler — Pourrait-on traiter des solutions globales (en particulier le "big-bang") à partir de l'expression des $T_{\mu\nu}$ donnée ici ?

Pr. Souriau — Effectivement, et l'on obtient ainsi des modèles cosmologiques "vraisemblables" qui sont asymptotes à celui de Gamow dans le passé lointain (big-bang) et à celui de Friedmann, par exemple, dans le futur. Ces modèles sont décrits et interprétés dans le dernier paragraphe de ma communication (qui n'a pu être lu à la conférence).