CONSTRUCTION EXPLICITE DE L'INDICE DE MASLOV. APPLICATIONS.

par Jean-Marie SOURIAU*

Abstract :

Le revêtement universel de la grassmannienne lagrangienne est plongé dans un espace numérique, ce qui permet de définir l'indice de Maslov-Arnold-Leray par une formule explicite.

Les propriétés cohomologiques de cet indice permettent de rendre transitive la transformation de Fourier ; on construit ainsi un espace de Hilbert où agissent naturellement le groupe de Heisenberg-Weyl (représentation de Schrödinger) et le groupe métaplectique (représentation de Shale-Weil).

Dans le cas d'un oscillateur harmonique, l'espace ainsi construit coïncide avec l'ensemble des solutions de l'équation de Schrödinger. Cette équation est donc explicitement intégrée ; on obtient un prolongement de la formule de Feynman qui est valable pour des durées arbitrairement grandes.

OCTOBRE 1975

*Université de Provence et Centre de Physique Théorique, CNRS, Marseille

Adresse postale : Centre de Physique Théorique - CNRS
31, chemin Joseph Aiguier
F - 13274 MARSEILLE CEDEX 2 (France)

§1 - PLANS LAGRANGIENS

Soit σ une 2-forme d'un espace vectoriel E , c'est-à-dire un tenseur covariant antisymétrique d'ordre 2 . Contractée avec deux vecteurs $X,Y \in E$, on obtient un nombre que nous noterons

$$\sigma(X,Y)$$

ou encore

$$\sigma(X)(Y)$$

ce qui a l'avantage de mettre en évidence la 1-forme

$$\sigma(X) \quad : \quad Y \mapsto \sigma(X)(Y)$$

et de présenter σ

$$X \mapsto \sigma(X)$$

comme une application de E dans son dual E^* . Si elle est bijective, on dit que σ est une forme symplectique, ou que σ donne à E une structure d'espace vectoriel symplectique.

Dans un espace vectoriel symplectique, la relation

$$(1.1) \qquad \sigma(X)(Y) = 0$$

entre deux vecteurs X et Y s'appelle orthogonalité ; c'est une relation symétrique ; si E' est un sous-espace vectoriel de E , l'ensemble des X orthogonaux à tous les vecteurs de E est un sous-espace vectoriel, que nous noterons $\mathrm{orth}(E')$; on a la relation

$$(1.2) \qquad \dim(E') + \dim(\mathrm{orth}(E')) = \dim(E) .$$

E' sera dit isotrope si

$$(1.3) \qquad E' \subset \mathrm{orth}(E')$$

c'est-à-dire si les éléments de E' sont deux à deux orthogonaux ; c'est le cas pour tous les espaces de dimension 1 , à cause de l'antisymétrie de σ . On appelle plan lagrangien tout sous-espace isotrope maximal (pour la relation d'inclusion) ; il est clair que tout sous-espace isotrope est inclus dans un plan lagrangien ; que tout plan lagrangien λ vérifie

(1.4) $$\boxed{\lambda = \mathrm{orth}(\lambda)}$$

et (grâce à (1.2)) que tous les plans lagrangiens ont la même dimension n, égale à la moitié de celle de E ; il n'existe donc que des espaces symplectiques de dimension paire.

Deux plans lagrangiens λ et μ sont dits <u>transverses</u> si

(1.5) $$\lambda \cap \mu = \{0\}$$

ce qui s'écrit aussi (à cause des dimensions de E, λ, μ)

(1.6) $$E = \lambda \oplus \mu \quad .$$

Si λ et μ sont lagrangiens transverses, nous noterons $\sigma_{\lambda\mu}$ l'application

(1.7) $$\boxed{\sigma_{\lambda\mu}(X)(Y) = \sigma(X)(Y) \qquad \forall\, X \in \lambda \,,\ \forall\, Y \in \mu} \quad ;$$

$\sigma_{\lambda\mu}$ est une bijection linéaire de λ sur μ^* .

Soient λ, μ, ν trois plans lagrangiens <u>deux à deux transverses</u> ; alors l'application

(1.8) $$\boxed{g_{\lambda\mu\nu} = \sigma_{\lambda\mu} \circ \sigma_{\lambda\nu}^{-1} \circ \sigma_{\mu\nu}}$$

envoie μ dans son dual μ^* ; $g_{\lambda\mu\nu}$ est donc un tenseur covariant d'ordre 2 de μ, visiblement injectif ; on vérifie facilement que $g_{\lambda\mu\nu}$ est <u>symétrique</u>, donc qu'il munit μ d'une structure <u>euclidienne</u> ; nous noterons

(1.9) $$\boxed{\mathrm{sgn}(\lambda, \mu, \nu)}$$

la <u>signature</u> de $g_{\lambda\mu\nu}$, c'est-à-dire la <u>trace</u> de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots\ 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

représentant $g_{\lambda\mu\nu}$ dans une base orthonormale. Il est clair que

(1.10) $\quad \operatorname{sgn}(\lambda, \mu, \nu) \in \{-n, -n+2, \ldots\ldots\ldots n-2, n\}$

si $2n$ est la dimension de E ; on peut choisir λ, μ, ν pour que toutes ces valeurs soient effectivement atteintes.

Nous verrons au §4 que $\operatorname{sgn}(\lambda, \mu, \nu)$ est une <u>fonction anti-symétrique</u> de ses trois arguments, et que l'on a

(1.11) $\quad \boxed{\operatorname{sgn}(\lambda, \mu, \nu) = \operatorname{sgn}(\rho, \mu, \nu) + \operatorname{sgn}(\lambda, \rho, \nu) + \operatorname{sgn}(\lambda, \mu, \rho)}$

si ρ est un plan lagrangien transverse à λ, μ, ν (Leray, [III]) ; la cohomologie qui transparaît dans ces formules sera exploitée au §8 ci-dessous.

§2 - ACTION DU GROUPE SYMPLECTIQUE

Soit E un espace vectoriel symplectique de dimension $2n$, λ un plan lagrangien de E. On peut construire un plan lagrangien μ transverse à λ ; si $(S_1\ S_2 \ldots S_n)$ est une base de λ, la <u>base duale</u> de S s'identifie (grâce à la dualité $\sigma_{\lambda\mu}$) à une base $(T_1\ T_2 \ldots T_n)$ de μ ; il est clair que

(2.1) $\quad (S_1 \ldots S_n \quad T_1 \ldots T_n)$

est une base de E, dans laquelle la matrice du tenseur σ s'écrit

(2.2) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \\ \hline -1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & -1 & & & \end{array}\right) ;$$

on dit que (2.1) est une base canonique de E .
Si E' est un autre espace vectoriel symplectique de même dimension, l'application linéaire a qui envoie les vecteurs d'une base canonique de E sur ceux d'une base canonique de E' est évidemment un isomorphisme de la structure symplectique :

$$(2.3) \qquad a \in L(E,E') \ , \ a \text{ bijectif} \ , \ \sigma\big(a(X),a(Y)\big) = \sigma(X,Y) \quad \forall X,Y$$

l'ensemble des a vérifiant (2.3) sera noté $Sp(E,E')$, ($Sp(E)$ si $E'=E$) ; il est clair que $Sp(E)$ est un groupe, appelé groupe symplectique ; c'est un sous-groupe fermé du groupe linéaire $GL(E)$, donc un groupe de Lie ; c'est d'ailleurs un groupe semi-simple classique ; sa dimension est $n(2n+1)$.

Il résulte de la construction (2.1) des bases canoniques que $Sp(E)$ agit transitivement sur l'ensemble $\Lambda(E)$ des plans lagrangiens de E ; on constate que le stabilisateur d'un plan est un sous-groupe fermé de $Sp(E)$, dont la dimension est $n(3n+1)/2$; ce qui confère à $\Lambda(E)$ une structure de variété de dimension $n(n+1)/2$ sur laquelle $Sp(E)$ agit différentiablement ; cette variété $\Lambda(E)$ s'appelle la grassmannienne lagrangienne de E .
La construction des bases canoniques (2.1) montre aussi que la figure constituée par deux plans lagrangiens transverses est unique en géométrie symplectique. Mais des triplets lagrangiens peuvent présenter $n+1$ configurations ; en effet, si λ, μ, ν sont des plans lagrangiens deux à deux transverses dans E (resp. λ' , μ' , ν' dans E') la condition

$$(2.4) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Il existe } a \in Sp(E,E') \text{ tel que } a(\lambda) = \lambda' \ , \ a(\mu) = \mu' \ , \\ a(\nu) = \nu' \end{array} \right.$$

entraîne évidemment la condition

$$(2.5) \quad \Big[\quad \mathrm{sgn}(\lambda, \mu, \nu) = \mathrm{sgn}(\lambda', \mu', \nu')$$

le calcul montre que cette condition est en fait suffisante.

§3 - REVÊTEMENT DE LA GRASSMANNIENNE LAGRANGIENNE

Considérons l'espace vectoriel complexe $\mathbb{C}^n$, muni de la structure hermitienne définie par la forme sesquilinéaire positive

(3.1) $\langle x,y\rangle = \overline{x^1}\, y^1 + \overline{x^2}\, y^2 + \ldots + \overline{x^n}\, y^n$ (x^j, y^j = coordonnées de x,y) ;

si l'on sépare la partie réelle et la partie imaginaire de $\langle x,y\rangle$:

(3.2) $\langle x,y\rangle = g(x,y) - i\,\sigma(x,y)$

on constate que σ munit $\mathbb{C}^n$ d'une structure d'espace vectoriel symplectique réel de dimension 2n ; on peut le prendre comme <u>modèle</u> pour un tel espace ; son groupe symplectique sera noté $Sp(n)$.
Le <u>groupe unitaire</u> $U(n)$ est défini comme l'ensemble des

(3.3) $\{ a \in GL(n,\mathbb{C}) \ / \ \langle a(x), a(y)\rangle = \langle x,y\rangle \quad \forall x,y \in \mathbb{C}^n \}$

tout $a \in U(n)$ respecte évidemment la forme σ ; donc

(3.4) $U(n) \subset Sp(n)$;

on peut vérifier que tout élément du groupe symplectique $Sp(n)$ s'écrit, d'une seule façon, sous la forme

(3.5) $a \circ \exp(b \circ C)$

$a \in U(n)$, b étant une matrice complexe symétrique, C la conjugaison complexe de $\mathbb{C}^n$. Ceci montre que $Sp(n)$ est connexe et que son groupe d'homotopie est le même que celui de $U(n)$ (nous allons constater qu'il s'agit de $\mathbb{Z}$).

(3.6) La grassmannienne lagrangienne de $\mathbb{C}^n$ sera notée $\Lambda(n)$; si $\lambda \in \Lambda(n)$, on peut choisir une base $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ de λ qui soit <u>orthonormale</u> pour la structure euclidienne définie par le tenseur g (3.2) ; on a donc, $\forall\, j,k$

$$g(a_j, a_k) = \delta_{jk} \quad , \quad \sigma(a_j, a_k) = 0$$

ce qui s'écrit simplement

$$\langle a_j, a_k \rangle = \delta_{jk} \quad ;$$

cette relation exprime que la matrice formée avec les colonnes a_j

$$a = (a_1\ a_2 \ldots\ a_n)$$

est unitaire :

(3.7) $\left[\ \lambda \in \Lambda(n)\ \right] \iff \left[\ \text{Il existe } a \in U(n)\ ,\ \lambda = a(\mathbb{R}^n)\ \right]$

(3.8)

Ainsi, dans l'action de $Sp(n)$ sur la grassmannienne lagrangienne $\Lambda(n)$, $\Lambda(n)$ est orbite du sous-groupe compact connexe $U(n)$, donc elle-même une variété compacte connexe ; le stabilisateur de $\mathbb{R}^n$ dans $U(n)$ est par définition le groupe orthogonal $O(n)$; $U(n)$ est donc difféomorphe à la variété quotient $U(n)/O(n)$ (Arnold, [II]).

(3.9) De même, l'ensemble des plans lagrangiens orientés est difféomorphe à $U(n)/SO(n)$; c'est un revêtement connexe à deux feuillets de $\Lambda(n)$, la projection sur $\Lambda(n)$ consistant à "oublier" l'orientation.

Au lieu de considérer $\Lambda(n)$ comme un quotient de $U(n)$, on peut aussi la plonger dans $U(n)$([III]) ; en effet, si a et a' sont deux éléments de $U(n)$, il est clair que

$$\left[\ a(\mathbb{R}^n) = a'\ (\mathbb{R}^n)\right] \iff \left[\ a\, C(a^{-1}) = a'\, C(a'^{-1})\ \right] \qquad (\ C = \text{conjugaison complexe}) \ ,$$

donc que l'on peut identifier $\Lambda(n)$ à l'image de $U(n)$ par l'application

(3.10) $\quad a \mapsto \lambda = a\, C(a^{-1})$

image qui est l'ensemble des matrices unitaires symétriques ; l'identification d'un plan lagrangien λ et d'une matrice λ est donnée par la règle

(3.11) $\quad [x \in \lambda] \iff [x = \lambda\, C(x)]$

$C(x)$ étant la colonne conjuguée d'une colonne $x \in \mathbb{C}^n$; on en déduit les règles

(3.12) $\quad [\lambda \text{ et } \lambda' \ \underline{\text{transverses}}] \iff [\lambda - \lambda' \text{ inversible}]$

(3.13) $\quad \boxed{\underline{a}(\lambda) = a\,\lambda\, C(a^{-1})} \qquad \forall a \in U(n) , \forall \lambda \in \Lambda(n)$

où $\underline{a}$ désigne l'<u>action</u> (3.8) d'un élément a de $U(n)$ sur $\Lambda(n)$.
Désignons par $\widehat{U(n)}$ l'ensemble des couples

(3.14) $\quad (a, \varphi) \qquad a \in U(n) , \varphi \in \mathbb{R}$

vérifiant l'équation

(3.15) $\quad \det(a) = e^{i\varphi}$;

si l'on munit $\widehat{U(n)}$ de la loi de composition $\times$:

(3.16) $\quad (a, \varphi) \times (a', \varphi') = (aa', \varphi+\varphi')$

$\widehat{U(n)}$ devient un groupe de Lie ; $(a,\varphi) \mapsto a$ est un morphisme de $\widehat{U(n)}$ sur $U(n)$, dont le noyau est le sous-groupe discret des $(I, 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$; $\widehat{U(n)}$ est donc un <u>revêtement</u> de $U(n)$.

On remarque que l'application

(3.17) $\quad (b, \varphi) \mapsto (be^{i\varphi}, n\varphi) \qquad b \in SU(n) , \varphi \in \mathbb{R}$

est un isomorphisme du produit direct $SU(n) \times \mathbb{R}$ sur le groupe $\widehat{U(n)}$, donc que $\widehat{U(n)}$ est simplement connexe : $\widehat{U(n)}$ est donc <u>revêtement universel</u> de $U(n)$.

(3.18) Grâce à la décomposition (3.5) , $\widehat{U(n)}$ pourra s'identifier à la partie du revêtement $\widehat{Sp(n)}$ située au-dessus du sous-groupe $U(n)$ de $Sp(n)$; en particulier, le générateur K du groupe d'homotopie de $Sp(n)$ s'identifie à l'élément

(3.19) $\quad K = (I\ ,\ 2\pi)$

de $\widehat{U(n)}$.

De même, si on considère la variété $\widehat{\Lambda(n)}$ des

(3.20) $\quad (\lambda, \theta) \qquad [\lambda \in \Lambda(n),\ \theta \in \mathbb{R}\ ,\ \det(\lambda) = e^{i\theta}]$

le groupe discret des L^k :

(3.21) $\quad L(\lambda\ ,\theta\ ) = (\lambda,\ \theta + 2\pi\ )\quad ,\quad k \in \mathbb{Z}$

et la projection

(3.22) $\quad (\lambda, \theta) \longmapsto \lambda$

font de $\widehat{\Lambda(n)}$ un revêtement de $\Lambda(n)$; l'action (3.13) de $U(n)$ sur $\Lambda(n)$ se relève par l'action de $\widehat{U(n)}$ sur $\widehat{\Lambda(n)}$:

(3.23) $\quad (a, \varphi)\ (\lambda, \theta) = (a\ \lambda\ C(a^{-1})\ ,\ 2\varphi + \theta\ )$

qui est encore transitive ; on constate que le stabilisateur de l'élément $(I,0)$ de $\widehat{\Lambda(n)}$ est l'ensemble des $(a,0)$, a vérifiant $[\ a \in U(n)$, $a = C(a)$, $\det(a) = 1\ ]$, c'est-à-dire $[\ a \in SO(n)]$; $\widehat{\Lambda(n)}$ est donc difféomorphe au quotient du groupe simplement connexe $\widehat{U(n)}$ par le groupe connexe $SO(n)$, donc simplement connexe ; $\widehat{\Lambda(n)}$ est donc le <u>revêtement universel</u> de
(3.24) $\Lambda(n)$; le groupe fondamental (3.21) de $\Lambda(n)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$ (Arnold, [II])

§4 - INDICE DE MASLOV [I]

Si A est une matrice carrée, nous définirons le logarithme de A par la formule

(4.1) $$\boxed{\mathrm{Log}(A) = \int_{\infty}^{0} \left\{ [sI-A]^{-1} - [sI-I]^{-1} \right\} ds}$$

qui s'applique chaque fois que A ne possède pas de valeur propre négative ou nulle ; Log est une application C^{∞} qui vérifie

(4.2) $$\boxed{\exp(\mathrm{Log}(A)) = A} \qquad \text{si } \mathrm{Log}(A) \text{ existe ;}$$

d'où découle

(4.3) $$\boxed{e^{\mathrm{Tr}(\mathrm{Log}(A))} = \det(A)} \quad ;$$

on notera que

(4.4) $$\boxed{\mathrm{Log}(A^{-1}) = -\,\mathrm{Log}(A)} \quad .$$

Nous définirons l'indice de Maslov $m(u,u')$ de deux points

$$u = (\lambda, \theta) \quad , \qquad u' = (\lambda', \theta')$$

de $\widehat{\Lambda(n)}$ par la formule

(4.5) $$\boxed{m(u,u') = \frac{1}{2\pi}\left[\theta - \theta' + i\,\mathrm{Tr}\left(\mathrm{Log}(-\lambda\lambda'^{-1})\right)\right]}$$

$m(u,u')$ existe si la matrice $-\lambda\lambda'^{-1}$ n'a pas de valeur propre négative ou nulle. Comme il s'agit d'une matrice unitaire, il suffit qu'elle n'ait pas la valeur propre -1, c'est-à-dire que $I - \lambda\lambda'^{-1}$ soit inversible ; donc que λ et λ' soient transverses (3.12).

En utilisant (4.3), on trouve

$$e^{2i\pi\, m(u,u')} = e^{in\pi}$$

ce qui montre que

$$(4.6)\qquad \boxed{\begin{array}{ll} m(u,u') \in \mathbb{Z} & \text{si } n \text{ pair} \\ m(u,u') \in \mathbb{Z}+\frac{1}{2} & \text{si } n \text{ impair} \end{array}} \quad ;$$

toutes les valeurs permises par cette règle sont effectivement atteintes, car

$$(4.7)\qquad \boxed{m(L^k(u)\ ,\ L^{k'}(u')) = k-k' + m(u,u')}$$

L étant le générateur (3.21) du groupe d'homotopie de $\Lambda(n)$.

Le groupe symplectique $Sp(n)$ agit sur $\Lambda(n)$ en conservant la transversalité des couples de plans lagrangiens ; comme $Sp(n)$ est connexe, cette action se relève en une action de son revêtement universel $\widehat{Sp(n)}$ sur le revêtement $\widehat{\Lambda(n)}$. Donnons-nous un couple de points $u,u' \in \widehat{\Lambda(n)}$ tels que $m(u,u')$ existe, donc que u et u' se projettent en des points transverses de $\Lambda(n)$; si $a \in \widehat{Sp(n)}$, $\underline{a}(u)$ et $\underline{a}(u')$ se projetteront aussi en des points transverses de $\Lambda(n)$; par suite, l'application $a \mapsto m\big(\underline{a}(u), \underline{a}(u')\big)$ envoie la variété connexe $\widehat{Sp(n)}$ dans $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z} + 1/2$; comme elle est continue, elle est constante :

$$(4.8)\qquad \boxed{m\big(a(u)\ ,\ a(u')\big) = m(u,\ u') \qquad \forall\, a \in \widehat{Sp(E)}}$$

l'indice de Maslov est donc <u>invariant par l'action de</u> $\widehat{Sp(E)}$; sa définition (4.5) ne dépend qu'en apparence de la structure hermitienne par laquelle nous avons complété la structure symplectique de $\mathbb{C}^n$; (4.5) est en fait une <u>formule pratique de calcul</u>.

La formule

$$(4.9)\qquad \boxed{m(u,u') + m(u',u) = 0}$$

est évidente sur (4.5) (utiliser (4.4)) ; quant à la formule de Leray

$$(4.10)\qquad \boxed{m(u,u') + m(u',u'') + m(u'',u) = \frac{1}{2}\ \mathrm{sgn}(\lambda, \lambda', \lambda'')}$$

où $\lambda, \lambda', \lambda''$ sont les projections de u, u', u'' sur $\Lambda(n)$, elle se vérifie facilement en utilisant un choix particulier de λ, λ', λ'' correspondant à chaque signature ; elle s'étend ensuite au cas général par l'action du groupe symplectique (3.13) et de son revêtement universel (3.23). (4.9) et (4.10) impliquent immédiatement l'antisymétrie de "sgn" et la formule cohomologique (1.11) : la demi-signature apparaît comme le cobord de l'indice de Maslov.

La définition proposée ici pour l'indice de Maslov diffère d'une constante de celle de Leray (III). Indiquons comment elle se rattache à la définition originale de Maslov (I).

Une variété V , plongée dans un espace vectoriel symplectique E , est dite lagrangienne si son plan tangent est lagrangien en tout point ; on définit ainsi une application T de V dans $\Lambda(E)$ (figure 1). Maslov privilégie une direction lagrangienne particulière λ_0 ; l'ensemble des $x \in V$ tels que $T(x)$ ne soit pas transverse à λ_0 s'appelle contour apparent de V .

Soit F un arc de courbe tracé sur V , dont les extrémités F(0) et F(1) n'appartiennent pas au contour apparent. $T \circ F$ est une application de $[0,1]$ dans $\Lambda(E)$, qui possède un relèvement $\widehat{T \circ F}$ à $\widehat{\Lambda(E)}$. Si l'on choisit un relèvement $\hat{\lambda}_0$ de λ_0 , le nombre

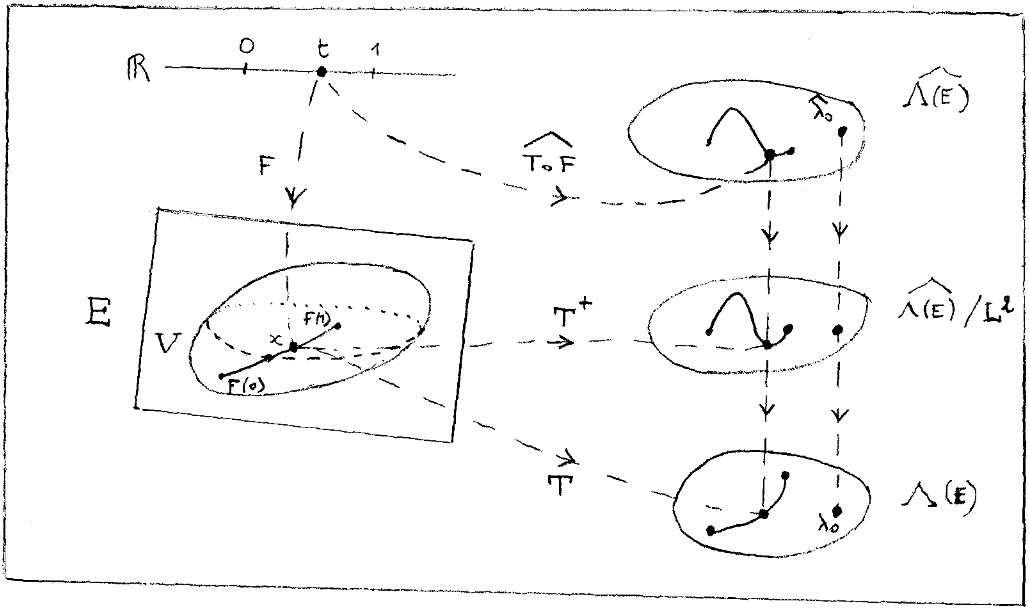
$$(4.11) \qquad k = m\left(\hat{\lambda}_0, \widehat{T \circ F}(1)\right) - m\left(\hat{\lambda}_0, \widehat{T \circ F}(0)\right)$$

est un entier qui ne dépend ni du choix du relèvement de $T \circ F$, ni de celui de λ_0 (voir (4.7)) ; c'est l'indice de Maslov proprement dit de l'arc F . Il est nul si l'arc ne rencontre pas le contour apparent (parce qu'alors $t \mapsto m\left(\hat{\lambda}_0, \widehat{T \circ F}(t)\right)$ est une fonction continue à valeurs entières).

Si la courbe est un lacet $\left(F(1) = F(0)\right)$, la formule (4.7) montre que $\widehat{T \circ F}(1) = L^k\left(\widehat{T \circ F}(0)\right)$, L étant le générateur (3.21) du groupe d'homotopie de $\Lambda(E)$, k l'indice du lacet. Par conséquent k repère la classe d'homotopie de $T \circ F$, et ne dépend pas de λ_0 ; un lacet dont l'indice de Maslov n'est pas nul rencontre donc les contours apparents attachés à toutes les directions lagrangiennes.

Si V est orientable, l'application T se relève par une application T^+ à la variété des plans lagrangiens orientables, qui est un revêtement connexe à deux feuillets de $\Lambda(E)$ (3.9) , donc identifiable au quotient de

$\widehat{\Lambda(E)}$ par L^2. Alors l'indice de tout lacet tracé sur V est un nombre pair.



- Figure 1 -

§5 - DENSITÉS

Soit α un nombre positif, E un espace vectoriel réel de dimension n. Appelons repère toute application linéaire S de $\mathbb{R}^n$ dans E ; α-densité de E toute fonction f définie sur les repères et vérifiant

(5.1) $$f(SM) = f(S) \left|\det(M)\right|^{\alpha} \quad \text{pour toute matrice } M .$$

Les α-densités réelles forment un espace vectoriel ordonné de dimension 1 ; le produit d'une α-densité et d'une β-densité est une $(\alpha+\beta)$-densité ; la puissance β d'une α-densité positive est une $(\alpha\beta)$-densité positive.

On appellera α-densité d'une variété V tout champ continu de α-densités de l'espace tangent ; les difféomorphismes de V agissent linéairement sur les α-densités.
On sait définir l'intégrale sur V

(5.2) $$\int_V \theta$$

d'une 1-densité θ à support compact ; cette intégrale est invariante par difféomorphisme.

L'espace H_V des 1/2-densités complexes à support compact de V est muni d'une structure préhilbertienne si l'on pose

(5.3) $$\boxed{\langle \varphi, \psi \rangle_V = \int_V \overline{\varphi(x)} \times \psi(x) \qquad \forall \varphi, \psi \in H_V}$$

(5.4) Si a est un difféomorphisme de V sur une variété V' , l'image par a d'un élément de H_V est un élément de $H_{V'}$, et cette application est <u>unitaire</u> ; elle passe évidemment aux complétés $\mathcal{H}_V$, $\mathcal{H}_{V'}$. En particulier, le groupe des difféomorphismes de V sur V se représente unitairement sur H_V et $\mathcal{H}_V$.

Si V et V' sont deux variétés de dimension n et n' , un repère S de V en x et un repère S' de V' en x' définissent naturellement un repère du produit cartésien V x V' au point (x , x') ; nous le noterons S $\otimes$ S' ; si ψ et ψ' sont des α-densités de V et V' , il existe une α-densité de V x V' , que nous noterons $\psi\otimes\psi'$, telle que

(5.5) $$[\psi\otimes\psi'](S\otimes S') = \psi(S)\ \psi'(S')$$ en tout point de V x V' ;

nous l'appellerons <u>produit tensoriel</u> de ψ et ψ' ; ce produit est bi-linéaire.

§6 - REPRESENTATION DE SCHRÖDINGER.

Désignons par $\mathbb{T}$ le tore (groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1). E étant un espace vectoriel symplectique de dimension 2n , considérons la variété $Y = E \times \mathbb{T}$ parcourue par la variable

$$(6.1) \qquad \xi = (x,z) \qquad \left[x \in E\ ,\ z \in \mathbb{T} \right]$$

Y peut être considérée comme un fibré principal au-dessus de E , par la projection

$$(6.2) \qquad \xi \mapsto x\ ,$$

et l'action du tore

$$(6.3) \qquad Z(x,z) = (x,Zz) \qquad \left[\forall\, Z \in \mathbb{T}\ ,\ \forall\,(x,z) \in Y \right]$$

Munissons Y de la 1-forme ϖ définie par

$$(6.4) \qquad \boxed{\varpi(\delta\xi) = \frac{1}{2}\,\sigma(x)(\delta x) + \frac{\delta z}{iz}}$$

Il est immédiat que la dérivée extérieure de ϖ est l'image réciproque, par la projection (6.2) de la forme σ de E , que le générateur $I(\xi)$ du tore est le vecteur <u>vertical</u> tel que

$$(6.5) \qquad \varpi(I(\xi)) = 1$$

Soit Quant(Y) le groupe des difféomorphismes de Y qui respectent la forme ϖ ("quantomorphismes") ; tout quantomorphisme respecte la fibration, et commute avec le tore ; il se projette donc sur E selon un difféomorphisme qui respecte σ ("symplectomorphisme") ; on définit ainsi un morphisme de groupe

$$(6.6) \qquad \mathrm{Quant}(Y) \longrightarrow \mathrm{Sympl}(E)\ ;$$

ce morphisme est surjectif ; son noyau est le tore, centre de Quant(Y) ; Quant(Y) est donc une extension centrale de Sympl(E) .

Le groupe $(E,+)$ des translations de E est inclus dans $\mathrm{Sympl}(E)$; son image réciproque par le morphisme (6.6) sera appelé groupe de Heisenberg ; il agit transitivement et librement sur Y, si bien qu'il s'identifie à Y en choisissant arbitrairement son élément neutre e ; nous prendrons

$$(6.7) \qquad e = (0,1)$$

ce qui fournit sur Y la loi de groupe

$$(6.8) \qquad \boxed{(x,z) \times (x',z') = \left(x+x',\ zz'\, e^{-\frac{i}{2}\sigma(x)(x')}\right)} \ ;$$

le tore $\mathbb{T}$ est encore le centre de Y.

En choisissant une base canonique de E, on constate que l'algèbre de Lie de Y est celle des "relations de commutation" de Heisenberg ; le groupe lui-même a été introduit par Hermann Weyl.

Soit λ un plan lagrangien de E ; l'ensemble des

$$(6.9) \qquad (x,1) \quad \left[x \in \lambda\right]$$

est un sous-groupe abélien de Y, que nous noterons Y_λ ; les algèbres de Lie des Y_λ sont les sous-algèbres maximales incluses dans $\ker(\varpi)$.

Notons Y/λ la variété quotient de Y par Y_λ ; Y/λ est une variété de dimension $n+1$ sur laquelle agit Y, et en particulier $\mathbb{T}$; l'action de $\mathbb{T}$ est libre.

Puisque $\mathbb{T}$ est le centre de Y, l'espace H_λ des $\Psi \in H_{Y/\lambda}(5.3)$ qui vérifient la "condition de circulation"

$$(6.10) \qquad \boxed{z(\Psi) = z \times \Psi}$$

est invariant par l'action de Y : il constitue donc un espace de représentation unitaire du groupe de Heisenberg : c'est la représentation de Schrödinger ; nous allons chercher si l'on peut identifier les représentations de Schrödinger associées aux divers plans lagrangiens $\lambda \in \Lambda(E)$.

§7 - PAIRING

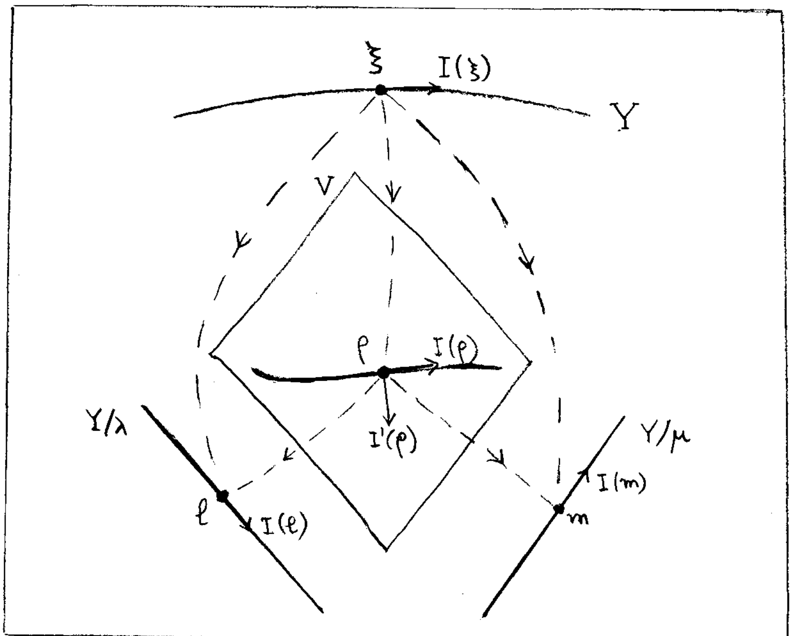
Soient $\lambda, \mu \in \Lambda(E)$, λ et μ transverses. ξ étant un point de Y , désignons par ℓ et m ses projections sur Y/λ et Y/μ (figure 2) ; l'application $\xi \mapsto \rho = (\ell, m)$ de Y dans le produit cartésien $V = [Y/\lambda] \times [Y/\mu]$ est un plongement (parce que λ et μ sont transverses).

(7.1) Soit I le générateur infinitésimal du tore agissant sur chacune des variétés Y , Y/λ , Y/μ , V ; $I(\rho) = (I(\ell), I(m))$ est l'image de $I(\xi)$ par le plongement $\xi \mapsto \rho$; par contre le vecteur $I'(\rho) = \frac{1}{2}\big(I(\ell), -I(m)\big)$ est transversal à l'image de Y .

Soient $\varphi \in H_\lambda$, $\psi \in H_\mu$; $\bar{\varphi} \otimes \psi$ (5.5) est une semi-densité à support compact de V , invariante par l'action du tore (parce que φ et ψ vérifient chacune la condition de circulation (6.10)) ; si S est un repère de Y en ξ , l'application

$$(7.2) \qquad \boxed{\omega : \qquad S \mapsto [\bar{\varphi} \otimes \psi]\left(I'(\rho), \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \circ S\right)}$$

est une semi-densité de Y , elle aussi invariante par $\mathbb{T}$.



- Figure 2 -

Par ailleurs le groupe de Lie Y possède une semi-densité positive invariante ω_0 ; $\omega\,\omega_0$ est une 1-densité ; posons (cf.(5.2))

(7.3) $$\boxed{\langle \varphi, \psi \rangle_{\lambda\mu} = \int_Y \omega\,\omega_0}$$;

on définit ainsi une forme sesqui-linéaire entre H_λ et H_μ, appelée "pairing" de H_λ et H_μ ; bien qu'elle ne fasse pas intervenir la structure symplectique, cette définition est équivalente à la définition originale de Kostant [IV], et Sternberg. Notons que :

Le pairing possède la symétrie hermitienne, en ce sens que

(7.4) $$\boxed{\overline{\langle \varphi, \psi \rangle_{\lambda\mu}} = \langle \psi, \varphi \rangle_{\mu\lambda}}$$;

il est invariant par l'action du groupe de Heisenberg :

(7.5) $$\boxed{\langle \underline{a}(\varphi), \underline{a}(\psi) \rangle_{\lambda\mu} = \langle \varphi, \psi \rangle_{\lambda\mu} \quad \text{si } a \in Y}$$

$a \mapsto \underline{a}$ désignant la représentation de Schrödinger (§ 6)

Théorème :

(7.6) Soient $\mathcal{H}_\lambda$ et $\mathcal{H}_\mu$ les hilbertiens complétés de H_λ et H_μ ; il existe une application unitaire $\mathcal{F}_{\lambda\mu}$ de $\mathcal{H}_\lambda$ sur $\mathcal{H}_\mu$ caractérisée par

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{\lambda\mu} = \langle \varphi, \mathcal{F}_{\lambda\mu}(\psi) \rangle_{\mathcal{H}_\lambda} \qquad \forall \varphi \in H_\lambda, \forall \psi \in H_\mu$$

Ce théorème suppose une normalisation convenable de la demi-forme invariante ω_0, à savoir

(7.7) $$\boxed{\omega_0 = [2\pi]^{-n/2} \sqrt{\ell \otimes h}}$$

ℓ étant la densité de Liouville de E, h la densité de Haar de $\mathbb{T}$;

il se vérifie en choisissant une base canonique de E associée au couple λ, μ (voir (2.1)), ce qui permet d'identifier chacun des espaces à $L^2(\mathbb{R}^n)$; on constate alors que

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{\lambda\mu} = \frac{1}{[2\pi]^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \overline{\varphi(p)}\, \psi(q)\, e^{i\langle p,q\rangle}\, dp\, dq \tag{7.8}$$

donc que $\mathcal{F}_{\lambda\mu}$ est simplement une transformation de Fourier entre $\mathcal{H}_\lambda$ et $\mathcal{H}_\mu$; on peut donc considérer le pairing comme une "géométrisation" de la transformée de Fourier.

L'unitarité de $\mathcal{F}_{\lambda\mu}$ et la formule (7.4) impliquent la formule

$$\boxed{[\mathcal{F}_{\lambda\mu}]^{-1} = \mathcal{F}_{\mu\lambda}} \tag{7.9}$$

Une question se pose alors naturellement : le pairing est-il transitif ? a-t-on $\mathcal{F}_{\lambda\mu} \circ \mathcal{F}_{\mu\nu} = \mathcal{F}_{\lambda\nu}$ si λ, μ, ν sont transverses deux à deux ? Dans le cas particulier le plus simple $(n = 1, \operatorname{sgn}(\lambda, \mu, \nu) = 1)$, on constate, en choisissant naturellement les coordonnées, que cette question devient :

la fonctionnelle $\mathbb{F}$:

$$F(\varphi)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i}{4}[x^2+y^2+4xy]}\, \varphi(y)\, dy$$

vérifie-t-elle $F^3 = 1$?

La réponse est non ; c'est seulement F^{24} qui est égal à l'identité ; un calcul élémentaire montre en effet que F^2 est le produit de la conjuguée de F (égale à F^{-1}) par l'intégrale de Fresnel

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iy^2/2}\, dy$$

dont la valeur est $e^{i\pi/4}$; on a donc $\mathcal{F}_{\lambda\mu} \circ \mathcal{F}_{\mu\nu} = e^{i\pi/4}\, \mathcal{F}_{\lambda\nu}$; le cas général se ramène à celui-ci en choisissant une base de l'espace μ qui soit orthonormale pour la métrique $g_{\lambda\mu\nu}$ (1.8) et en la complétant canoniquement dans λ (resp. dans ν) ; ce qui conduit à la formule générale

$$\boxed{\mathcal{F}_{\lambda\mu} \circ \mathcal{F}_{\mu\nu} = e^{\frac{i\pi}{4}\, \mathrm{sgn}(\lambda,\mu,\nu)}\, \mathcal{F}_{\lambda\nu}} \tag{7.10}$$

sgn étant la fonction définie en (1.9).

Quel parti peut-on tirer de cette formule ? On peut songer à se débarrasser du terme gênant en déphasant la définition du pairing ; ce qui revient à résoudre le problème cohomologique implicitement posé par la formule (1.11) , c'est-à-dire à considérer le cocycle "sgn" comme un cobord : nous savons que ce n'est globalement possible qu'en passant au revêtement, et que la solution est fournie par l'indice de Maslov.

§8 - ESPACE DE SCHRÖDINGER

Soit donc $\widehat{\Lambda(E)}$ le revêtement universel de la grassmannienne lagrangienne $\Lambda(E)$, P la projection de $\widehat{\Lambda(E)}$ sur $\Lambda(E)$ (voir le §3).

A tout $u \in \widehat{\Lambda(E)}$, nous associerons l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_{P(u)}$, que nous pourrons noter $\mathcal{H}_u$; l'ensemble des couples

$$(u, \psi) \qquad \left[\, u \in \widehat{\Lambda(E)},\ \psi \in \mathcal{H}_u \right]$$

peut être considéré comme un fibré hilbertien de base $\widehat{\Lambda(E)}$ (figure 3).

Nous dirons que u et v sont transverses si les plans lagrangiens $P(u)$ et $P(v)$ le sont ; nous poserons alors

$$\boxed{F_{uv} = e^{-\frac{i\pi}{2} m(u,v)} \mathcal{F}_{P(u),\, P(v)}} \tag{8.1}$$

m étant l'indice de Maslov (4.5), $\mathcal{F}$ la "transformation de Fourier" définie en (7.6).

Il est clair alors que

$$\left\{\begin{array}{l} F_{uv} \text{ est une application unitaire de } \mathcal{H}_v \text{ sur } \mathcal{H}_u \\ F_{uv}^{-1} = F_{vu} \\ F_{uv} \circ F_{vw} = F_{uw} \end{array}\right. \tag{8.2}$$

si u, v, w sont deux à deux transverses ; la définition (8.1) a été choisie pour assurer la dernière de ces identités, grâce à la formule de Leray (4.10).

Théorème :

(8.3) On peut prolonger l'application $(u,v) \mapsto F_{uv}$ à tous les couples de $\widehat{\Lambda(E)}$ (transverses ou non) de façon que les formules (8.2) restent valables : ce prolongement est unique.

Etablissons d'abord deux lemmes :

(8.4) Il existe une partie Θ de $\Lambda(E)$ telle que

- Deux éléments distincts t, t' de Θ sont transverses ;
- Pour toute partie finie $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ de $\widehat{\Lambda(E)}$, il existe $t \in \Theta$ qui est transverse à $u_1, u_2, \ldots, u_p$.

Il suffit évidemment de choisir une telle partie dans $\Lambda(E)$ et de relever arbitrairement chacun de ses éléments. En supposant que E est l'espace $\mathbb{C}^n$, on choisira l'ensemble des matrices zI ,$\{z \in \mathbb{T}\}$ (avec l'identification (3.11) des plans lagrangiens à des matrices). Les propriétés (8.4) résultent immédiatement de (3.12) , qui implique

$$\left[\lambda \text{ transverse à } zI\right] \Leftrightarrow \left[\lambda \text{ n'admet pas la valeur propre } z\right].$$

C.Q.F.D.

(8.5) Pour tout couple $u,v \in \widehat{\Lambda(E)}$, il existe une application Φ_{uv} telle que

$$\Phi_{uv} = F_{vt} \circ F_{tv} \qquad \left[\forall t \in \Theta \text{ , } t \text{ transverse à } u \text{ et } v\right]$$

Il suffit de montrer, si t et $t' \in \Theta$, t et t' étant transverses à u et v , que

$$F_{ut} \circ F_{tv} = F_{ut'} \circ F_{t'v}$$

ceci résulte des formules

$$F_{ut'} = F_{ut} \circ F_{tt'}, \quad F_{t'v} = F_{t't} \circ F_{tv} \quad , \quad F_{tt'} = F_{t't}^{-1}$$

valables en raison de (8.2) parce que t et t' sont transverses (8.4).

C.Q.F.D.

Il est alors élémentaire de vérifier que Φ_{uv} est le prolongement unique cherché de F_{uv} ; exemple : quels que soient u, v, w, il existe $t \in \Theta$ transverse à u, v, w (8.4) ; on a alors

$$\Phi_{uv} \circ \Phi_{vw} = F_{ut} \circ F_{tv} \circ F_{vt} \circ F_{tw} = F_{ut} \; F_{tw} = \Phi_{uw}$$

ce qui vérifie la dernière des formules (8.2).

C.Q.F.D.

Théorème :

(8.6)	$F_{uu} = I_{\mathcal{H}_u}$	$\forall u \in \widehat{\Lambda(E)}$

(8.7) $\boxed{F_{L^k(u),\,L^{k'}(u)} = i^{k'-k}\, I_{\mathcal{H}_u} \qquad \forall\, k,k' \in \mathbb{Z}}$

L étant le générateur (3.21) du groupe d'homotopie de $\Lambda(E)$.

Il suffit de choisir t transverse à u, d'écrire $F_{uu} = F_{ut} \circ F_{tu}$, $F_{L(u)u} = F_{L(u)t} \circ F_{tu}$, d'utiliser la définition (8.1) de F, la formule (7.9) et les propriétés (4.9), (4.7) de l'indice de Maslov.

C.Q.F.D.

(8.8) - La formule (8.7) montre que $F_{L^{4k}(u),\, L^{4k'}(u)} = I_{\mathcal{H}_u}$,

donc qu'il n'est pas nécessaire d'utiliser le revêtement universel de $\Lambda(E)$ pour parvenir au résultat : on peut si l'on veut se contenter d'utiliser la "variété de Maslov", revêtement à 4 feuillets de la grassmannienne lagrangienne (et par conséquent revêtement à 2 feuillets de la variété des plans lagrangiens orientés) ; mais ce n'est pas indispensable.

- Nous pouvons maintenant utiliser ces résultats pour <u>trivialiser</u> le fibré hilbertien de la figure 3, en identifiant toutes ses fibres à une fibre-type $\mathcal{H}_E$, que nous appellerons "espace de Schrödinger" ; en effet (7.13) et (7.16) montrent que la relation $\sim$:

(8.9) $$\left[(u,\psi) \sim (u',\psi') \right] \iff \left[\psi' = F_{u'u}(\psi) \right]$$

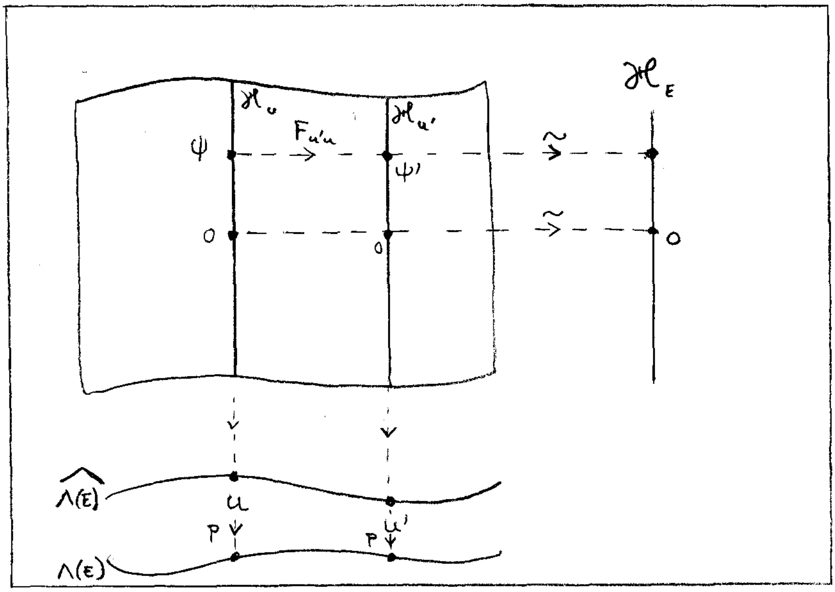
est une équivalence, et que la structure hilbertienne du quotient $\mathcal{H}_E$ définie par l'unitarité de l'application

(8.10) $$\psi \mapsto \text{classe } (u,\psi)$$

est indépendante de u.

- La relation (7.5) indique que les "opérateurs de Schrödinger" $\underline{a}$ commutent avec les $\mathcal{F}_{\lambda\mu}$, donc avec les F_{uv}, ce qui montre que l'on peut <u>directement définir la représentation de Schrödinger sur l'espace</u> $\mathcal{H}_E$ par la formule

(8.11) $$\underline{a}\,(\text{classe } (u,\psi)) = \text{classe } (u, \underline{a}(\psi))$$



- Figure 3 -

§9 - REPRESENTATION METAPLECTIQUE

La variété Y a été munie, au §6 , d'une structure de "variété quantique" définie par la forme ϖ (6.4) et d'une structure de groupe de Lie (6.8) . Il est facile de trouver les automorphismes simultanés de ces deux structures : ce sont les images du groupe symplectique Sp(E) , agissant sur Y selon la règle

(9.1) $\underline{a}(x,z) = (a(x), z)$ $\quad \left[a \in Sp(E),\ x \in E,\ z \in \mathbb{T} \right]$

- Si a désigne un automorphisme d'un groupe de Lie G , H un sous-groupe fermé de G , il est clair que a définit un difféomorphisme de la variété G/H sur la variété G/a(H) par la formule

(9.2) $\qquad a(\text{classe}_H(x)) = \text{classe}_{a(H)}(a(x)) \qquad \forall x \in G$

En appliquant ce procédé au cas $G = Y$, $H = Y_\lambda$, $a \in Sp(E)$ (notations du §6), on voit que (9.2) définit un difféomorphisme de la variété Y/λ sur la variété $Y/a(\lambda)$, donc une application unitaire de H_{Y_λ} sur $H_{Y_{a(\lambda)}}$ (5.4) ; a étant un quantomorphisme, commute avec le tore (6.6) , si bien qu'il applique le sous-espace H_λ (défini par la condition de circulation (6.10)) sur l'espace $H_{a(\lambda)}$; cette application unitaire passe aux complétés $\mathcal{H}_\lambda$, $\mathcal{H}_{a(\lambda)}$.

Il résulte de la construction du pairing que a dédouble fonctoriellement la figure 2 - donc que

(9.3) $$\langle \underline{a}(\psi), \underline{a}(\varphi) \rangle_{a(\lambda), a(\mu)} = \langle \psi, \varphi \rangle_{\lambda\mu}$$

ce qui se traduit (Cf. (7.6)) en

(9.4) $$\mathcal{F}_{a(\lambda), a(\mu)} = \underline{a} \circ \mathcal{F}_{\lambda\mu} \circ \underline{a}^{-1}$$

Si donc nous choisissons un élément b du groupe $\widehat{Sp(E)}$, revêtement universel de $Sp(E)$ qui agit sur le revêtement $\widehat{\Lambda(E)}$ de $\Lambda(E)$, et si nous désignons par $\Pi(b)$ sa projection sur $Sp(E)$, nous aurons (Cf. (8.1))

(9.5) $$F_{b(u)\, b(v)} = \underline{\Pi(b)} \circ F_{uv} \circ \underline{\Pi(b)}^{-1}$$

ce qui montre que $\widehat{Sp(E)}$ <u>agit unitairement sur l'espace de Schrödinger</u> $\mathcal{H}_E$ selon la formule

(9.16) $$b(\text{classe}\ (u, \psi)) = \text{classe}\ \big(b(u), \pi(b)(\psi)\big)$$

c'est la <u>représentation de Shale-Weil</u> ([V]).

Cette représentation n'est pas fidèle ; considérons en effet le générateur $K = (I, 2\pi)$ du groupe d'homotopie de $Sp(n)$ (3.19) ; son action sur $\widehat{\Lambda(n)}$, donnée par la formule (3.23) , est

$$(\lambda, \theta) \longmapsto (\lambda, \theta + 4\pi)$$

elle coïncide donc avec celle de L^2 (3.21) . Il résulte alors de (8.7) que

$$(9.7) \qquad \underline{K}(\Psi) = -\Psi$$

donc que K^2 appartient au noyau de la représentation : la représentation de Shale-Weil est donc une représentation unitaire de $\widehat{Sp(E)}/K^2$, c'est-à-dire du revêtement à deux feuillets de $Sp(E)$, appelé groupe métaplectique (d'où son nom de représentation métaplectique).

- On remarquera que le groupe métaplectique et le groupe de Heisenberg engendrent un produit semi-direct, extension par $[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}] \times \mathbb{T}$ du groupe des symplectomorphismes affines de E , et que celui-ci se représente sur l'espace de Schrödinger $\mathcal{H}_E$; cette "représentation de Weil-Weyl" contient les deux précédentes.

§10 - APPLICATION A L'OSCILLATEUR HARMONIQUE

On appelle oscillateur harmonique à n dimensions un point q mobile dans un espace euclidien de dimension n , les équations du mouvement dérivant du lagrangien

$$(10.1) \qquad \frac{1}{2} m \left\| \frac{dq}{dt} \right\|^2 - v(q)$$

où l'énergie potentielle v est une forme quadratique positive.

On peut choisir une base orthogonale où cette forme est décomposée en carrés :

$$(10.2) \qquad v(q) = \frac{m}{2} \sum_{j=1}^{n} \omega_j^2 \, q_j^2 \qquad\qquad \omega_j > 0$$

ce qui fournit n "mouvements propres" de l'oscillateur, de périodes respectives $2\pi / \omega_j$.

La linéarité des équations du mouvement et le calcul des crochets de Lagrange montrent que l'ensemble E des mouvements possède une structure d'espace vectoriel symplectique ; elle s'identifie à celle de $\mathbb{C}^n$ (§3) si :

(10.3) 1°) on a choisi des unités de longueur, masse, temps telles que la masse m soit égale à 1 et la constante de Planck à 2π ;
2°) on désigne par p_j les variables $\frac{dq_j}{dt}$ et on pose

(10.4) $$x = \begin{pmatrix} \frac{p_1}{\sqrt{\omega_1}} + i\sqrt{\omega_1}\, q_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{p_n}{\sqrt{\omega_n}} + i\sqrt{\omega_n}\, q_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

les valeurs des p_j et q^j étant prises à la date $t = 0$.

Nous nous proposons de construire et d'interpréter l'<u>espace de Schrödinger</u> associé $\mathcal{H}_E$ (§8).

Faisons quelques remarques préalables :

(10.5) Si on désigne par a_τ l'opération qui consiste à <u>retarder</u> un mouvement d'une durée arbitraire τ ,

$$\tau \longmapsto a_\tau$$

est un morphisme du groupe additif $\mathbb{R}$ dans le groupe symplectique $Sp(E)$; ici, dans le groupe unitaire, car

$$a_\tau = \begin{pmatrix} e^{-i\omega_1\tau} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{-i\omega_n\tau} \end{pmatrix}$$ ■

(10.6) - t étant une date arbitraire, les mouvements dans lesquels le point q passe à l'origine à l'instant t forment un plan lagrangien λ_t, et l'on a

$$\lambda_{\tau+t} = a_\tau(\lambda_t)$$

comme on a visiblement $\lambda_o = \mathbb{R}^n$, on a donc $\lambda_t = a_t(\mathbb{R}^n)$; d'où avec l'identification matricielle (3.10)

$$\lambda_t = a_t\ \mathcal{C}(a_t^{-1}) = a_{2t}$$

■

(10.7) - Les applications $\tau \mapsto a_\tau$, $t \mapsto \lambda_t$ se relèvent respectivement aux revêtements universels $\widehat{Sp(E)}$, $\widehat{\Lambda(E)}$ par

$$\tau \mapsto b_\tau \;, \qquad t \mapsto u_t$$

de sorte que

$$b_\tau \circ b_{\tau'} = b_{\tau+\tau'} \qquad ; \; u_{\tau+t} = b_\tau(u_t) \quad ;$$

on pourra choisir

$$b_\tau = (a_\tau, -[\omega_1+\ldots+\omega_n]\tau), \quad u_t = (a_{2t}, -2[\omega_1+\ldots+\omega_n]t)$$

■

(10.8) - L'indice de Maslov $m(u_t, u_{\tau+t})$ ne dépend que de τ ; en effet $m(u_t, u_{\tau+t}) = m(b_t(u_o), b_t(u_\tau)) = m(u_o, u_\tau)$ (formule (4.8)) ; la définition (4.5) donne alors

$$m(u_t, u_{\tau+t}) = \frac{1}{2\pi}\Big[2(\omega_1+\ldots+\omega_n)\tau + i\ \mathrm{Tr}(\mathrm{Log}(-a_{-2\tau}))\Big] \quad ;$$

en utilisant le résultat auxiliaire

$$\mathrm{Log}(-e^{i\alpha}) = i\Big[\alpha - \pi - 2\pi\ \mathrm{Ent}(\alpha/2\pi)\Big] \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$$

où Ent désigne la partie entière, il vient

$$\boxed{m(u_t\,,\,u_{\tau+t}) = \frac{n}{2} + \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Ent}(\omega_j\,\tau/\pi)}\qquad ;$$

on voit en particulier que u_t et $u_{\tau+t}$ sont transverses si τ n'est pas demi-période d'un mouvement propre. ∎

(10.9) La variété Y/λ_t peut se repérer par les variables

$$q_1, q_2, \ldots, q_n\,, \qquad \zeta = z\, e^{\frac{i}{2}\sum_j p_j q_j}$$

les valeurs des q_j et p_j étant prises à l'instant t ; un élément de l'espace $\mathcal{H}_{\lambda_t}$ s'écrit

$$\psi(q_1, \ldots q_n)\,\zeta\,\rho$$

ρ étant une demi-densité invariante sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}$, ψ étant à carré sommable.

Alors un élément de l'espace de Schrödinger $\mathcal{H}_E$ pourra être considéré comme une classe d'équivalence de couples $(x_t\,,\,\psi_t)$ pour la relation $\sim$ (8.9) ; en effectuant le calcul du pairing (Figure 2) et en utilisant l'indice de Maslov (10.8), on constate que cette relation s'écrit

$$\boxed{\begin{aligned}\psi_{\tau+t}(q_1,\ldots q_n) &= \prod_{j=1}^{n} \sqrt{\frac{\omega_j}{2\pi\,|\sin(\omega_j\tau)|}}\; e^{\frac{i\pi}{2}\left[\frac{1}{2} + \mathrm{Ent}\left(\frac{\omega_j\tau}{\pi}\right)\right]} \\ &\times \int_{\mathbb{R}^n} \psi_t(q'_1\cdots q'_n)\, e^{\frac{i}{2}\sum_j \frac{\omega_j}{\sin(\omega_j\tau)}\left[2q_jq'_j - [q_j^2+q_j'^2]\cos(\omega_j\tau)\right]}\, dq'_1\ldots dq'_n\end{aligned}} \tag{10.10}$$

chaque fois que u_t et $u_{\tau+t}$ sont transverses, c'est-à-dire quand

τ n'est pas une demi-période.

Nous savons donc que $\mathcal{H}_\varepsilon$ est l'ensemble des fonctions des variables $t, q_1, \ldots, q_n$, qui sont à carré sommable en $q_1, \ldots, q_n$ pour chaque valeur de t, et qui vérifient cette équation (10.10) ; nous savons d'ailleurs qu'elles constituent un espace de Hilbert, le carré de leur norme étant

$$(10.11) \qquad \int_{\mathbb{R}^n} \left| \psi(q_1, \ldots, q_n) \right|^2 \quad dq_1 \ldots dq_n$$

qui est indépendante de t.

- En effectuant quelques dérivations sous le signe $\int$, le lecteur se convaincra sans trop de peine (voir Bérenguier [VII]), que les solutions de (10.10) vérifient l'<u>équation de Schrödinger</u>

$$(10.12) \qquad \frac{1}{2} \Delta \psi - v(q) \psi = i \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

qui se trouve donc <u>explicitement intégrée</u> (10.10).

- Cette formule est d'ailleurs un prolongement de celle de Feynman ([VI]) qui s'applique seulement au cas où $|\tau|$ est inférieur à la plus petite des demi-périodes (alors l'indice de Maslov se simplifie en $\frac{n}{2}$ sgn(τ)).

- On peut interpréter (10.10) de la façon suivante : un retard de τ sur une fonction d'onde ψ la transforme en $b_\tau(\psi)$, b_τ étant l'élément de $\widehat{Sp(E)}$ calculé en (10.7) , b_τ agissant sur $\mathcal{H}_\varepsilon$ par la <u>représentation métaplectique</u> (9.6) .

Utilisons cette remarque pour calculer $\psi_{\tau+t}$ dans un cas <u>non transverse</u> : traitons le cas d'un oscillateur isotrope (toutes les fréquences propres étant égales) ; prenons pour τ la demi-période $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}$. On trouve facilement (en utilisant (10.5), (10.7), (3.21))

$$(10.13) \qquad a_{T/2} = -I \ , \ b_{T/2} = (-I, -n\pi) \ , \ u_{t+T/2} = b_{T/2}(u_t) = L^{-n}(u_t)$$

d'où, par application de (9.6) , (8.9), (8.7)

$$\psi_{t-T/2} = i^{-n} \psi \circ [-I]$$

ce qui peut encore s'écrire

(10.14) $$\psi_{t+T/2}(q_1, \ldots, q_n) = i^n \psi_t(-q_1, -q_2, \ldots, -q_n)$$

Cette propriété des solutions de l'équation de Schrödinger (10.12) peut se vérifier directement sur chaque solution stationnaire (la vérification fait intervenir l'énergie du point 0 et la parité des polynômes d'Hermite). Elle entraîne évidemment

(10.15) $$\psi_{t+T} = [-1]^n \psi_t \qquad ;$$

lorsque la dimension n est impaire, les solutions de l'équation de Schrödinger ont une période double de celle des mouvements classiques.

- REFERENCES -

[I] V.P. MASLOV
Théorie des Perturbations et Méthodes Asymptotiques, Dunod (1972)

[II] V. ARNOLD
Journal d'Analyse Fonctionnelle, n°1, p. 1. Traduction française : Supplément à la traduction française du livre de Maslov.

[III] J. LERAY
Communication Colloque de Rome, Janvier 1973, Acta Matematica, vol. XIV.

[IV] B. KOSTANT
Communication Colloque de Rome, Janvier 1973 Acta Matematica, vol. XIV.

[V] A. WEIL
Sur certains groupes d'opérateurs unitaires, Acta Matematica (1964), p. 143-211.

[VI] R.P. FEYNMAN
Quantum Mechanics and Path Integrals, Mc Graw Hill (1965).

[VII] G. BERENGUIER
Géométrie et Quantogéométrie de l'Oscillateur Harmonique, Thèse de 3e cycle, Université de Provence, Mars 1975.