QUANTIFICATION GEOMETRIQUE ET RELATIVITE GENERALE

Exposé de Jean-Marie SOURIAU ×

Marcel GROSSMANN Meeting on the Recent Progress of
the Fundamentals of General Relativity, Trieste, Juillet 1975

76/PE.813

FEVRIER 1976

× Université de Provence et Centre de Physique Théorique, CNRS, Marseille.

Adresse postale : Centre de Physique Théorique, CNRS
31, chemin Joseph Aiguier
F - 13274 MARSEILLE CEDEX 2 (France)

Introduction.

La quantification géométrique se propose de donner un contenu mathématique rigoureux au "principe de correspondance" entre mécanique classique et mécanique quantique ; l'outil utilisé se compose pour une part de géométrie et de topologie différentielles (variétés, formes différentielles, espaces fibrés, homologie et cohomologie, homotopie), pour une autre part d'analyse (fonctions de type positif, représentation de groupes de dimension infinie, opérateurs pseudo-différentiels). Des résultats satisfaisants ont été obtenus dans l'étude des systèmes dynamiques, bien que des questions fondamentales restent posées ; la "quantification géométrique des champs" , où interviennent des difficultés mathématiques supplémentaires bien connues, n'est encore qu'au stade d'ébauche.

En particulier, la quantification géométrique du champ de gravitation reste un simple projet ; d'autant plus incertain que l'expérience ne nous fournit aucun effet gravitationnel quantique qui pourrait nous indiquer ce que nous devons chercher.

Les deux théories (quantique et relativiste générale) possèdent chacune un premier stade : celui de la matière passive, soumise au champ sans en être la source ; d'un côté il s'agit de la première quantification ; de l'autre du principe de l'équivalence.

On sait bien, dans les deux cas, qu'il ne s'agit que d'une approximation (toute matière réelle est nécessairement une source) ; mais cette approximation se trouve être la partie la moins incertaine de la description ; d'un côté parce que la première quantification élude les problèmes de renormalisation ; de l'autre parce que le principe de l'équivalence n'implique pas le choix des équations de champ (on sait que l'on peut modifier les équations d'Einstein à courte distance sans altérer leurs propriétés géométriques).

On souhaite évidemment dépasser ce premier stade; quantifier les équations de champ; construire une théorie synthétique , contenant les deux précédentes au moins à titre d'approximation; il est difficile d'être physicien -de croire à l'intelligibilité de la nature - sans être obligé de parier qu'une telle théorie peut exister, qu'elle peut être mathématiquement cohérente.

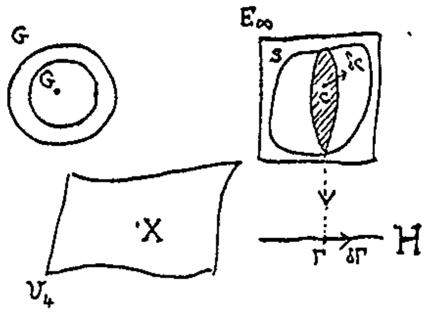
On peut aussi parier que l'obstacle qui nous en sépare n'est pas seulement technique, mais aussi épistémologique : il est peut-être nécessaire de renoncer à certains a priori, de construire de nouveaux concepts, pour pouvoir progresser.

Dans cette perspective méthodologique, il se peut que l'étude du premier stade ait encore quelques enseignements à nous donner; d'une part parce qu'on évite ainsi certains choix arbitraires, ainsi que nous venons de le remarquer; mais aussi parce que la symétrie du premier stade peut nous donner des indications sur la symétrie de la théorie synthétique.

§ I : HYPERESPACE ET ÉTATS CONDENSÉS

L'existence et la signification du "principe de relativité généralisé", au sens d'Einstein, ne peut quitter le stade de la controverse que si on lui donne un contenu mathématique suffisamment précis.

figure 1)



Soit $\mathcal{V}_4$ la variété espace-temps (figure 1); dessinons l'ensemble E_∞ de tous les champs différentiables de tenseurs covariants symétriques de degré 2 sur $\mathcal{V}_4$; E_∞ est un espace vectoriel de dimension infinie.

La métrique d'univers $X \mapsto g$ est un point C de E_∞ ; il appartient à l'ensemble S des champs dont la signature est (+ - - -) pour tout $X \in \mathcal{V}_4$.

L'ensemble G des difféomorphismes de $\mathcal{V}_4$ (bijections de classe C^∞ à

jacobien non nul) est un groupe de dimension infini; les objets géométriques différentiels (vecteurs, formes, tenseurs, connexions, densités, etc.) ont en commun la propriété d'être transportables par les éléments de G ; le principe de relativité générale postule d'une part que les objets physiques sont des objets différentiels, d'autre part que leur transport en bloc par un même difféomorphisme est inobservable : en d'autres termes que $\mathcal{V}_4$, X , g , etc. ne sont que des constructions auxiliaires abstraites; et que l'arène concrète du monde physique est le quotient d'une telle structure mathématique par l'action de G; c'est donc le choix d'une symétrie structurelle.

En particulier, l'action de G sur le tenseur g définit une représentation linéaire de G sur E_∞ , action qui laisse S invariante : S est une somme d'orbites de G (nous avons dessiné celle de C en hachures); le quotient H sera appelé hyperespace (c'est l'espace des géométries possibles de $\mathcal{V}_4$).

A ce stade apparaît une difficulté technique : H possède des singularités , parce que le stabilisateur d'un point C de E n'a pas toujours la même structure : les points singuliers de H sont les géométries possédant un groupe d'isométries non trivial.

On résout cette difficulté en remplaçant G par le sous-groupe invariant G_0 des difféomorphismes à support compact (il existe une partie compacte de $\mathcal{V}_4$ dans le complémentaire de laquelle le difféomorphisme coïncide avec l'identité); si $\mathcal{V}_4$ n'est pas compacte, G_0 ne contient d'isométrie non triviale pour aucune géométrie, H n'a plus de points singuliers.

Il est permis d'étendre cette structure en associant aux potentiels de gravitation $g_{\mu\nu}$ les potentiels électromagnétiques A_ρ , et au groupe des difféomorphismes de $\mathcal{V}_4$ le groupe des transformations de jauge électromagnétiques $A_\rho \mapsto A_\rho + \partial_\rho \alpha$, transformations qui sont elles aussi, par principe, inobservables.

De façon précise, difféomorphismes et transformations de jauge engendrent un groupe G , qui est un produit semi-direct [1]; les éléments à support compact de G forment encore un sous-groupe invariant G_0 ; G et G_0 agissent linéairement sur le nouvel espace E_∞ des potentiels $C(X \mapsto (g, A))$; les stabilisateurs de G_0 sont triviaux; c'est désormais $H = S/G_0$ que nous considérerons comme hyperespace.

[1] Compte tenu de l'action tensorielle des difféomorphismes sur les potentiels A_ρ et les scalaires α . Ce groupe apparaît plus naturellement dans l'interprétation penta-dimensionnelle de la relativité issue de la théorie de Kaluza-Klein . Voir XVIII.

On peut donner à $\mathcal{H}$ une structure différentielle (de dimension infinie); essayons par exemple de définir, au point Γ (projection de C sur $\mathcal{H}$) une <u>forme différentielle</u> μ (de degré 1); ce devra être une forme linéaire sur les variations $\delta\Gamma$, projections sur $\mathcal{H}$ des variations δC du champ, ce qui permettra de <u>relever</u> μ par une forme linéaire sur δC, donc par un <u>tenseur-distribution</u>; de plus ce tenseur-distribution devra s'annuller si $\delta\Gamma = 0$, c'est-à-dire si δC est <u>vertical</u> ; ce qui s'exprime de façon précise par le fait que δC est l'action infinitésimale d'un élément de l'<u>algèbre de Lie</u> de G_0, caractérisé par un champ de vecteurs δX et un champ scalaire $\delta\alpha$ à supports compacts. La théorie de la <u>dérivée de Lie</u> conduit alors au théorème suivant (voir la démonstration dans XXI) :

Supposons que μ se relève par une mesure complètement continue

(1) $$\mu(\delta\Gamma) = \int_{\mathcal{V}_4} \left[\frac{1}{2} T^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} + J^{\rho}\delta A_{\rho}\right] dv(X) \qquad (T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu})$$

où v désigne la mesure riemannienne de $\mathcal{V}_4$ associée à C, et δ une variation arbitraire des potentiels.

Alors les champs $X \mapsto T$ et $X \mapsto J$ <u>définis</u> par (1) vérifient les équations

(2) $$\hat{\partial}_{\rho} J^{\rho} = 0 \qquad \hat{\partial}_{\mu} T^{\mu}_{\ \nu} + F_{\nu\rho} J^{\rho} = 0$$

($\hat{\partial}$ = dérivation covariante ; $F_{\nu\rho} = \partial_{\nu} A_{\rho} - \partial_{\rho} A_{\nu}$).

On reconnaît les principes des l'électrodynamique des milieux continus, J étant la densité de courant-charge, T le tenseur d'énergie-impulsion.

Nous avons ainsi <u>mis en dualité</u> les lois du mouvement avec la structure géométrique de la théorie; cette dualité nous donne des enseignements dans les deux sens : l'<u>universalité</u> des équations (2) est corrélative du choix du groupe G_0 ;toute modification éventuelle de l'un des termes doit s'accompagner d'une modification corrélative de l'autre [1].

Cette dualité a par ailleurs un intérêt technique: elle s'adapte directement

---

[1] Le caractère élémentaire des lois (2) est donc un argument pour unifier difféomorphismes et transformations de jauge électromagnétique, ce qui n'a rien de nécessaire a priori. Si on essaye d'adopter un point de vue franchement pentadimensionnel, pour donner a G et G_0 une interprétation plus géométrique, on est conduit à modifier les équations du mouvement.

à la description des <u>états condensés</u> de la matière : il suffit de supposer que la fonctionnelle μ n'est plus complètement continue en δC, mais qu'il s'agit d'une distribution dont le support est une <u>sous-variété</u> de $\mathcal{V}_4$.

Le cas le plus simple est celui d'une <u>particule</u> : en choisissant pour support de μ une <u>ligne d'univers</u> Λ, et en supposant que μ est une <u>distribution</u> d'ordre 1, on obtient le résultat suivant (XXI) :

(a) En chaque point X de Λ, il existe un nombre q, un vecteur P^{μ}, deux tenseurs antisymétriques $S^{\mu\nu}$ et $\mathcal{M}^{\mu\nu}$, que μ <u>définit</u> par la formule

(3) $$\mu(\delta\Gamma) = \int_{\Lambda} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}\left[P^{\mu}\frac{dX^{\nu}}{ds} + \mathcal{M}^{\mu\lambda}F_{\lambda}^{\ \nu}\right]\delta g_{\mu\nu} + q\,\frac{dX^{\rho}}{ds}\,\delta A_{\rho} \\ + \frac{1}{2} S^{\lambda\mu}\frac{dX^{\nu}}{ds}\,\hat{\partial}_{\lambda}\delta g_{\mu\nu} + \mathcal{M}^{\lambda\rho}\hat{\partial}_{\lambda}\delta A_{\rho} \end{array} \right\} ds$$

(b) ces grandeurs vérifient les équations

(4) $$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dq}{ds} = 0 \\ \frac{\hat{d}P_{\sigma}}{ds} = q F_{\sigma\rho}\frac{dX^{\rho}}{ds} + \frac{1}{2}\mathcal{M}^{\mu\nu}\hat{\partial}_{\sigma}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R_{\mu\nu,\rho\sigma}S^{\mu\nu}\frac{dX^{\rho}}{ds} \\ \frac{\hat{d}S^{\mu\nu}}{ds} = P^{\mu}\frac{dX^{\nu}}{ds} - P^{\nu}\frac{dX^{\mu}}{ds} - \mathcal{M}^{\mu\rho}F_{\rho}^{\ \nu} + \mathcal{M}^{\nu\rho}F_{\rho}^{\ \mu} \end{array} \right.$$

$R_{\mu\nu,\rho\sigma}$ = tenseur de Riemann-Christoffel

Ces équations sont les équations universelles de l'électrodynamique des particules passives soumises au champ électromagnétique et gravitationnel – dans la mesure où les moments quadrupolaires sont négligeables (voir XVI, XIX); q s'interprète comme charge électrique, P comme impulsion, S comme tenseur de spin, $\mathcal{M}$ comme moment électro-magnétique; le <u>statut</u> de ces 4 grandeurs est de <u>donner naissance à une forme d'hyperespace</u> μ par la formule (3) ; les équations (4) étant simplement des conditions <u>nécessaires et suffisantes de cohérence</u> de (3) .

On peut vérifier ce statut par un argument statistique : en utilisant la bilinéarité de l'application (μ , $\delta\Gamma$) $\mapsto \mu(\delta\Gamma)$, on peut interpréter une <u>statistique de particules à spin</u> au moyen d'une <u>fonctionnelle moyenne</u> μ qui est du type (1) ; par exemple, en traitant un <u>aimant</u> comme un tel assemblage macroscopique de particules à spin, on fait apparaître non seulement l'équivalence magnétique de l'aimant avec un solénoïde. mais aussi, et obligatoirement, l'effet gyromagnétique et la magnétostriction (XXI); le caractère complet d'une telle description fait naître des doutes sérieux sur la pertinence de certaines notions, en particulier de la densité macroscopique de spin qui pourrait a priori être considérée comme une source du champ de gravitation.

Par ailleurs la structure géométrique définie par (1) ou (3) possède la conséquence suivante : toute symétrie du champ entraîne l'existence d'une grandeur conservée; résultat bien connu dans le cas d'un milieu continu.

Examinons le cas d'une particule. Nous avons remarqué que le stabilisateur de C dans G_0 est nécessairement réduit à l'élément neutre; supposons que C possède un stabilisateur non trivial dans le groupe G ; il s'agira nécessairement d'un groupe de Lie de dimension finie n ($n \leqslant 11$); les n grandeurs conservées associées sont toutes données par la formule

$$(5) \qquad P_\mu V^\mu + \frac{1}{2} S^{\mu\nu} \hat{\partial}_\mu V_\nu + q \left[u + A_\rho V^\rho \right]$$

$\delta x^\mu = V^\mu$, $\delta A_\rho = \partial_\rho u$ étant l'action infinitésimale d'un élément arbitraire de l'algèbre de Lie du stabilisateur sur les points et les potentiels. Une démonstration géométrique directe se trouve dans XXI ; le calcul permet d'ailleurs de vérifier que (5) est une intégrale première du système différentiel (4); fait d'autant plus remarquable que ces 11 équations ne constituent pas un système déterministe pour les 21 variables $X, q, P, S, \mathcal{M}$; il ne s'agit donc pas d'un théorème de type noethérien.

Une particule de type donné sera caractérisée par des équations d'état liant entre elles ces variables universelles (et éventuellement d'autres variables internes); on peut par ce moyen espérer obtenir un modèle déterministe.

Par exemple, on peut essayer les hypothèses

$$(6) \qquad S^{\mu\nu} P_\nu = 0 \qquad\qquad \mathcal{M}^{\mu\nu} = \lambda S^{\mu\nu}$$

(monolocalité, absence de moment électrique) ; la compatibilité avec les équations universelles (4) permet de montrer que les variables

$$(7) \qquad P^2 = P_\mu P^\mu , \qquad\qquad \alpha = S^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

sont liées le long de la courbe; d'où l'introduction d'une dernière équation d'état

$$(8) \qquad P^2 = f(\alpha)$$

qui indique l'énergie (en équivalent massique) fournie à la particule par une composante du champ magnétique dans la direction de son spin.

Alors le système (4) ,(6),(7) est déterministe; dans les circonstances expérimentales correspondant aux mesures fines du moment magnétique de l'électron et du muon (effet négligeable de la gravitation, champ magnétostatique constant) on retrouve les équations Bargmann-Michel-Telegdi (XVII), ce qui montre que les équations proposées collent bien avec l'expérience, au moins dans ces circonstances.

§ II : QUANTIFICATION GÉOMÉTRIQUE DES SYSTÈMES DYNAMIQUES.

La loi fondamentale de la dynamique classique d'un système de n points matériels peut se formuler au moyen du principe des travaux virtuels (ou "principe de d'Alembert")

$$(9) \qquad \sum_j \left\langle m_j \frac{d\vec{v}_j}{dt} - \vec{F}_j \, , \, \delta \vec{r}_j \right\rangle = 0$$

où les crochets $\langle \; , \; \rangle$ désignent le produit scalaire de $\mathbb{R}^3$; chaque point, de masse m_j , de position $\vec{r}_j$, de vitesse

$$(10) \qquad \vec{v}_j = \frac{d\vec{r}_j}{dt}$$

est soumis à une force $\vec{F}_j$, fonction , a priori, de

$$(11) \qquad y = (\vec{r}_1, \ldots\ldots \vec{r}_n, \vec{v}_1, \ldots\ldots \vec{v}_n, t) ;$$

$\delta \vec{r}_j$ désigne une variation arbitraire de la position $\vec{r}_j$; dans le cas d'un système lié, il est spécifié que $\delta \vec{r}_j$ est compatible avec les liaisons telles qu'elles existent à l'instant t.

Il est possible d'élargir ce principe en traitant les positions et les vitesses comme des variables indépendantes ; on considère l'expression

$$(12) \qquad \sigma(dy, \delta y) = \sum_j \left\langle m_j \, d\vec{v}_j - \vec{F}_j \, dt \, , \, \delta \vec{r}_j - \vec{v}_j \, \delta t \right\rangle - \left\langle m_j \, \delta \vec{v}_j - \vec{F}_j \, \delta t, \, d\vec{r}_j - \vec{v}_j \, dt \right\rangle$$

qui redonne bien la précédente (au facteur dt près) si on se limite aux variations telles que $\delta t = 0$, $\delta \vec{v}_j = 0$; on remarque que (12) définit un tenseur σ de l'espace d'évolution V décrit par la variable y (11); le signe − qui y figure correspond à un choix , apparemment arbitraire, fait par Lagrange dès 1808 (I), et rend σ antisymétrique; son intérêt est de fournir un invariant intégral absolu des équations du mouvement; résultat énoncé explicitement par Lagrange, et qui a été redécouvert par Elie Cartan un siècle plus tard (II).

Notons que les équations du mouvement (y compris l'équation (10)) s'écrivent maintenant

(13) $\sigma(dy, \delta y) = 0 \qquad \forall\, \delta y$

chaque mouvement (courbe décrite par y dans V) est une feuille du feuilletage de dimension 1 défini dans V par (13) (la dimension de V est $6n+1$; le rang de σ, nécessairement pair par suite d'un théorème d'algèbre, est ici égal à $6n$). Il existe une variété quotient U, de dimension $6n$ dont chaque point x est un mouvement (figure 2) ; si les forces $\vec{F}_j$ dérivent d'un potentiel (même fonction du temps) la forme σ passe au quotient : il existe une 2-forme σ_U définie par

(14) $\sigma(dy, \delta y) = \sigma_U(dx, \delta x)$

dx et δx étant les variations du mouvement x engendrées par des variations arbitraires dy, δy de la condition initiale y.

σ_U est une 2-forme inversible et plate (il existe des coordonnées de U où les composantes de σ_U sont constantes); une variété U munie d'une forme ayant ces propriétés s'appelle une variété symplectique; sa dimension est nécessairement paire.

La symétrie de la théorie est définie par le groupe Symp(U) des difféomorphismes de U qui respectent σ_U ("symplectomorphismes"); c'est un groupe de dimension infinie, apte à contenir les symétries manifestes du système. Tout groupe de Lie de symplectomorphismes est associé à un système de grandeurs conservées (le "moment"), à valeurs dans le dual de l'algèbre de Lie du groupe (voir VIII); cette construction s'accompagne de la définition d'une certaine cohomologie des groupes de Lie ("cohomologie symplectique"); à chaque action symplectique d'un groupe est associée une classe de cohomologie symplectique.

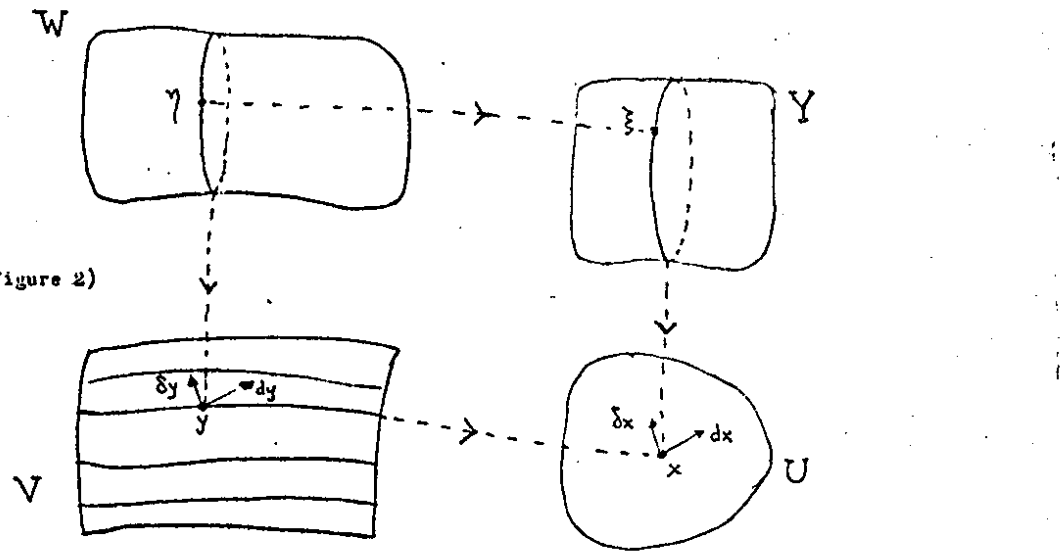
Par exemple, un système dynamique classique isolé définit une action symplectique du groupe de Galilée; la cohomologie de ce groupe possède la dimension 1; ceci associe donc au système une grandeur mesurable m : m est sa masse, dûment géométrisée.

La structure symplectique déborde largement le cadre de la mécanique classique : ainsi une particule libre, en mécanique de la relativité restreinte, définit une action symplectique du groupe de Poincaré; on caractérise l'élémentarité de la particule par le fait que cette action est transitive; comme la cohomologie du groupe est nulle, on peut montrer que c'est une action à la Kirillov (X), c'est-à-dire que U est isomorphe à une orbite du groupe de Poincaré dans la représentation duale de la représentation adjointe; ce qui fournit une classification a priori des modèles de particules; les grandeurs noethériennes associées à chaque modèle (impulsion, énergie, position, moment

cinétique propre, hélicité, parité) permettent de reconnaître, parmi ces candidats, ceux qui conviennent aux particules réelles (particules avec ou sans spin, particules de masse nulle (VIII)).

Cette structure symplectique universelle joue aussi un rôle important en mécanique statistique (voir VIII); mais elle apparaît, encore plus fondamentalement, comme indispensable à la quantification.

Le premier stade - "préquantification" dans la terminologie de Kostant - consiste à construire un espace fibré en cercles Y au dessus de U (figure 2)



(figure 2)

muni d'une 1-forme ϖ telle que

(15)
- La dérivée extérieure de ϖ coïncide avec l'image réciproque de σ_U par la projection $\xi \mapsto x$;
- ϖ ne s'annulle pas sur les fibres circulaires; la circulation sur ces fibres $\oint \varpi\left(\frac{d\xi}{ds}\right) ds$ est égale à la constante de Planck $2\pi\hbar$.

Cette construction n'est possible que si σ_U vérifie certaines conditions homologiques; elle permet alors de résoudre le problème de Dirac, c'est-à-dire de réaliser l'algèbre de Lie des variables dynamiques (munies du crochet de Poisson) sur un espace de Hilbert; à savoir sur un espace de fonctions définies sur Y .

Dans le cas où U est l'espace des mouvements d'une particule libre, on peut aller plus loin : la méthode des polarisations (Kostant, Souriau) permet d'obtenir et d'interpréter les équations d'onde classiques (Schrödinger, Klein-Gordon, Dirac, Maxwell, etc.) (VIII). Le cas des particules soumises à un champ extérieur est un problème beaucoup plus délicat, qui est en voie de résolution grâce à la technique du pairing (Blattner, Kostant, Sternberg) et de l'indice de Maslov (Maslov, Arnold, Leray)(XII, XIII, XV; V, VII, XII, XIV).

Le problème revient à construire certaines représentations unitaires du groupe des quantomorphismes de Y (difféomorphismes qui respectent la forme ϖ), ou plus exactement d'un revêtement de ce groupe. Par exemple, dans le cas d'un oscillateur linéaire (de dimension quelconque), les quantomorphismes de Y qui se projettent sur U selon des applications affines forment un groupe de Lie (groupe de Weyl-Heisenberg); le pairing et l'indice de Maslov permettent de construire un espace de représentations $\mathcal{H}$ du revêtement à 2 feuillets de ce groupe (groupe métaplectique); la représentation est isomorphe à la représentation de Shale-Weil; chaque point de $\mathcal{H}$ correspond à une solution de l'équation de Schrödinger du problème, intégrée par une formule explicite qui prolonge le noyau résolvant de Feynman (Souriau XIV).

§ III COMPLÉMENTARITÉ

Les deux descriptions que nous venons d'esquisser, bien que possibles d'un même outillage mathématique, sont conceptuellement très éloignées: dans la première l'espace-temps joue un rôle fondamental, alors qu'il est "oublié" dans la seconde; les groupes qui interviennent (difféomorphismes-jauge d'un côté, quantomorphismes de l'autre) ont des interprétations presque étrangères l'une à l'autre; la relativité générale conduit automatiquement à la définition des grandeurs dynamiques P, S, etc. (formule (3)) et à la prévision de l'action du champ (équations (4)); la description symplectique, au contraire, privilégie le cas de la particule libre, c'est-à-dire de la symétrie maximum, interprétée comme absence de champ ; dans ce cas seulement, elle donne la définition de P et S (qui sont des intégrales premières noethériennes); elle ignore, non seulement l'action du champ, mais même la permanence des grandeurs P et S lorsque la symétrie est brisée.

Corrélativement, la relativité ne nous fournit que des indications partielles sur le mouvement, et des équations non déterministes; elle ignore a priori les variables internes - tandis que la description symplectique exige une description non seulement déterministe, mais déterminée, puisque son support conceptuel

est l'espace des mouvements U, dont la définition suppose l'intégration préalable des équations du mouvement.

Le côté positif de toutes ces différences est la complémentarité des deux théories: sur un objet physique déterminé, les deux descriptions doivent pouvoir se raccorder. Examinons le cas de la particule à spin.

Comme nous l'avons dit, les équations universelles (4) et les équations d'état (6), (8) conduisent à un système déterministe dans un champ donné; on peut définir une condition initiale y de ce système au moyen d'un point X de l'espace-temps, d'un vecteur I et d'un tenseur Ω en ce point liés par les contraintes

$$\left\{\begin{array}{ll} \Omega^{\mu\nu}+\Omega^{\nu\mu}=0 & \Omega^{\mu\nu} I_\nu = 0 \\ \Omega_{\mu\nu}\Omega^{\mu\nu}=2 & I_\mu I^\mu = 1 \end{array}\right. \tag{16}$$

ce qui définit un espace d'évolution V de dimension 9; les autres variables s'en déduisent par les formules

$$\left\{\begin{array}{l} S^{\mu\nu}= s_0\,\Omega^{\mu\nu} \quad (\,s_0 \text{ est une intégrale première du système, le spin, dont la valeur est supposée donnée });\\ \alpha = s_0\,\Omega^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\ P^\mu = I^\mu f(\alpha)\;; \qquad \mathcal{H}^{\mu\nu}= \dfrac{s_0 f'(\alpha)}{f(\alpha)}\, P_\lambda \dfrac{dX^\lambda}{ds}\,\Omega^{\mu\nu} \end{array}\right. \tag{17}$$

les équations du mouvement s'écrivent $\mathcal{A}=0$, $\mathcal{B}=0$, $\mathcal{C}=0$, avec

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{A}_\sigma = \dfrac{\hat{d}P_\sigma}{ds} - q F_{\sigma\rho}\dfrac{dX^\rho}{ds} - \dfrac{1}{2}\dfrac{f'(\alpha)}{f(\alpha)} P_\lambda \dfrac{dX^\lambda}{ds} S^{\mu\nu}\hat{\partial}_\sigma F_{\mu\nu} + \dfrac{1}{2} R_{\mu\nu,\rho\sigma} S^{\mu\nu}\dfrac{dX^\rho}{ds} \\ \mathcal{B}^{\mu\nu} = \dfrac{\hat{d}}{ds} S^{\mu\nu} - P^\mu \dfrac{dX^\nu}{ds} + P^\nu \dfrac{dX^\mu}{ds} + \dfrac{f'(\alpha)}{f(\alpha)} P_\lambda \dfrac{dX^\lambda}{ds}\left[S^{\mu\rho}F_\rho{}^\nu - S^{\nu\rho}F_\rho{}^\mu\right] \\ \mathcal{C}^\sigma = \dfrac{dX^\sigma}{ds} - \dfrac{1}{f(\alpha)} P^\sigma P_\lambda \dfrac{dX^\lambda}{ds} + \dfrac{1}{s_0^2} S^\sigma{}_\mu S^\mu{}_\nu \dfrac{dX^\nu}{ds} \end{array}\right. \tag{18}$$

Comme dans le cas de la mécanique classique, ces équations peuvent se rattacher à un principe des travaux virtuels de type (9) ou mieux (12) en considérant l'expression

$$\sigma\left(\frac{dy}{ds}, \delta y\right) = \mathcal{C}^\sigma \hat{\delta} P_\sigma - \mathcal{A}_\sigma \delta X^\sigma - \frac{1}{s_0^2}\mathcal{B}^{\mu\nu} S_{\nu\rho}\,\hat{\delta} S^\rho{}_\mu\,. \tag{19}$$

Quelques transformations judicieuses montrent que l'on peut transformer (19) en

(20) $$\sigma\left(\frac{dy}{ds}, \delta y\right) = \frac{dX^\sigma}{ds}\hat{\delta}P_\sigma - \delta X^\sigma \frac{\hat{d}P_\sigma}{ds} + q F_{\sigma\rho}\frac{dX^\rho}{ds}\delta X^\sigma - \frac{1}{2}R_{\mu\nu,\rho\sigma}S^{\mu\nu}\frac{dX^\rho}{ds}\delta X^\sigma - \frac{1}{s_0^2}\frac{\hat{d}S^\mu{}_\nu}{ds}S^\nu{}_\rho\hat{\delta}S^\rho{}_\mu$$

ou apparait la remarquable propriété d'antisymétrie par rapport aux variations $\frac{d}{ds}$, δ.

La suite est analogue au cas de la mécanique classique; les équations du mouvement s'écrivent $\sigma(dy, \delta y) = 0 \ \forall\delta$ (cf. (13)), définissent un feuilletage de dimension 1 de V, et une variété quotient U de dimension 8 (figure 2) ; de plus la dérivée extérieure de σ est nulle (le calcul fait intervenir les équations de liaison (16), les équations dérivées, l'apparition du tenseur de Riemann-Christoffel dans les dérivations covariantes secondes, les identités de Bianchi); le théorème de Darboux permet alors de montrer que la forme σ passe sur le quotient U par une formule de type (14), et donne à U une structure symplectique.

Dans le cas particulier du champ nul ($A_\mu = 0$, $\mathcal{V}_4$ minkowskien), U coïncide avec une orbite coadjointe du groupe de Poincaré, déjà rencontrée comme modèle de particule à spin au § II; cette coïncidence ne signifie pas seulement l'existence d'un symplectomorphisme global, mais aussi l'égalité des grandeurs noethériennes et des grandeurs (5) associées respectivement par chaque théorie à la symétrie de Poincaré; égalité qui subsiste lorsque la dimension du groupe de symétrie du champ diminue.

Revenons au champ quelconque, et tentons de quantifier. Il faut d'abord résoudre le problème cohomologique permettant la construction du fibré Y au dessus de U ; on démontre qu'il est nécessaire pour cela que le spin s_0 (17) soit multiple entier de $\hbar/2$; traitons le cas $s_0 = \hbar/2$.

Il faut alors supposer l'existence d'une structure spinorielle associée à la métrique de $\mathcal{V}_4$ (donc à C); ceci revient à exiger l'existence d'un champ différentiable global de repères de Lorentz (tétrapodes). On pose alors

(21) $$\eta = (X, \theta)$$

X étant un point de $\mathcal{V}_4$, θ un spineur en ce point vérifiant les liaisons

(22) $$\bar{\theta}\theta = 1, \qquad \bar{\theta}\gamma_5\theta = 0 ;$$

η décrit alors une variété W de dimension 10, qui se projette sur l'espace d'évolution V (figure 2) par les formules

(23) $$\bar{\theta}\gamma_\mu\theta = I_\mu, \qquad \mathrm{Re}\left(\frac{1}{i}\bar{\theta}\gamma_\mu\gamma_\nu\theta\right) = \Omega_{\mu\nu}$$

qui assurent les liaisons (16) en laissant arbitraire la phase de θ. On définit sur W une 1-forme ϖ_W par la formule

$$\varpi_W(\delta\eta) = \hbar\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{i}\bar{\theta}\hat{\delta}\theta\right) - [P_\mu + qA_\mu]\delta X^\mu$$

où $\hat{\delta}\theta$ désigne la dérivation covariante du spineur θ dans une variation arbitraire δ de η ; la dérivée extérieure de ϖ_W coïncide avec l'image réciproque de σ par la projection $\eta \mapsto y$; en faisant le quotient de W par le feuilletage caractéristique de ϖ_W, on obtient une variété Y, de dimension 9, sur laquelle passe la forme ϖ, et un diagramme commutatif de projections entre les variétés W, V, Y, U (figure 2); Y fournit la préquantification de U, au sens (15) ; en utilisant l'homotopie de U, on peut montrer que cette préquantification est essentiellement unique.

Dans le cas du champ nul, on retrouve donc la préquantification indiquée au § II, qui conduit aux équations de Dirac; dans le cas d'un champ quelconque, le problème de la quantification n'est pas complètement résolu, parce qu'il faut utiliser des polarisations complexes (Kostant), ce qui complique la technique du pairing (voir Blattner XV). Il semble probable cependant que l'équation de Dirac avec interaction minimale ou avec un terme de Pauli (moment anormal) corresponde au cas où la fonction f définie en (8) est affine (XXII).

Conclusion.

Nous venons de constater, sur cet exemple, que le raccord entre les deux théories est possible grâce à tout une série de coïncidences; il s'agit maintenant d'interpréter cette possibilité.

Références

- Sur la structure symplectique et la quantification géométrique:

I J.L.LAGRANGE, Mécanique Analytique, 1788-1808 (réédition A.Blanchard, Paris, 1965)

II E. CARTAN, Leçons sur les invariants intégraux (Paris, 1920)

III J.M.SOURIAU, Alger Mathématiques, I, 2 (1954) p.240-265.

IV I. SEGAL, Trans. Amer. Math. Soc. 81 (1956) p.106-134

V A. MASLOV Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques, Moscou (1965) (traduction française: Dunod, Paris, 1972).

VI J.M.SOURIAU, Comm. Math. Phys., I (1966) p.374-398.

VII V.I.ARNOLD Journal d'Analyse fonctionnelle (en russe) 1 (1967) p.1-14. (traduction française dans V).

...../....

VIII J.M.SOURIAU , Structure des systèmes dynamiques (Paris, Dunod, 1969).

IX B. KOSTANT Orbits and quantization theory, Intern.Congr.of Math,Nice (1970

X A. KIRILLOV . Eléments de la théorie des représentations (en français,Moscou, 1975)

XI V.GUILLEMIN, S. STERNBERG Geometrical Asymptotics (A paraître)

- Le point sur la question et une bibliographie détaillée dans les actes des congrès suivants :

XII Geometria simplecttica e fisica matematica, Rome, janvier 1973 (Symposia Mathematica XIV, Ac.Press, London, 1974)

XIII Géométrie symplectique et physique mathématique, Aix-en-Provence, juil.1974 (Coll. internat.C.N.R.S. 237, Paris, 1976)

XIV Group theoretical Methods in Physics, Nijmegen, juin 1975 (à paraître)

XV Differential geometrical methods in mathematical physics, Bonn, juil.1975 (A paraître dans Springer Lecture Notes in Math.)

- Quelques points de repère sur les modèles de particules:

XVI A. PAPAPETROU Proc. Roy. Soc. A 209 (1951) p.248-258

XVII V.BARGMANN,L.MICHEL,V.L.TELEGDI, Phys.Rev.Lett. 2 (1959) p.435

XVIII J.M.SOURIAU, Géométrie et relativité (Hermann, Paris, 1964).

XIX W.G. DIXON , Nuovo Cim. 38, 4 (1965) p 1616.

XX H.P. KUNZLE J. Math. Phys. 13 (1972) p.729-744

XXI J.M.SOURIAU , Ann. Inst. H.Poincaré, XX , 4 (1974) p.315-364

XXII Ch. DUVAL , preprint 75 P 787, Centre Phys. Th., Marseille (1975).

-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-