受入
77-8-104
高工研図書室

THERMODYNAMIQUE RELATIVISTE DES FLUIDES*

Jean-Marie SOURIAU**

SOMMAIRE :

On sait [V], [VI] que la définition covariante relativiste d'un équilibre statistique, appliquée à un gaz parfait, met en évidence un "quadrivecteur température" Θ, de genre futur, dont la direction est la vitesse moyenne du fluide et la longueur la température réciproque.

Nous étudierons l'hypothèse selon laquelle Θ est encore une variable pertinente pour la description des mouvements dissipatifs d'un fluide simple.

La cinématique est définie par le champ de vecteur Θ et la mesure du nombre des molécules : à l'aide de deux fonctions d'état, on peut construire une (thermo-)dynamique conforme aux deux principes : conservation des grandeurs noethériennes attachées au groupe de Poincaré, production positive d'entropie.

- Un tel fluide dissipatif possède des mouvements dans lesquels la production d'entropie est nulle ; Θ est alors un vecteur de Killing ; les équations du mouvement s'intègrent complètement ; on retrouve en particulier les résultats de la théorie cinétique à l'équilibre.

- On peut étudier par cette méthode les fluides parfaits ; on retrouve les résultats classiques de Lichnérowicz [IV] ; de plus, on peut construire, même dans le cas non isentropique, une 2-forme d'espace-temps Ω qui est invariant intégral (au sens de Poincaré) du vecteur température Θ ; ce qui fournit une généralisation du théorème de Helmholtz.

Dans les mouvements faiblement dissipatifs, apparaissent naturellement les deux coefficients de viscosité, ainsi que le coefficient de conductivité thermique ; ils sont accompagnés de deux autres coefficients qui sont peut-être mesurables sur les fluides réels.

Nous décrivons, dans ce modèle, les transitions de phase et les ondes de choc.

MAI 1977
77/P.919

*Version complétée du Preprint CPT-76/PE.882

**Université de Provence, et Centre de Physique Théorique, CNRS Marseille

ADRESSE POSTALE : Centre de Physique Théorique
C.N.R.S.
31, Chemin Joseph Aiguier
F-13274 MARSEILLE CEDEX 2 (France)

I. CINEMATIQUE

Nous nous proposons de décrire un fluide simple (composé de molécules identiques) dans le cadre de la relativité restreinte.

Nous décrirons son mouvement au moyen de deux grandeurs géométriques (1), (5) :

- Un champ de vecteurs d'espace-temps

(1) $$x \mapsto \Theta$$

qu'on supposera en chaque point de genre futur ; on posera donc

(2) $$\Theta = U\,\varepsilon \qquad (U \text{ quadrivecteur unitaire du futur ; } \varepsilon > 0)$$

U s'interprétera comme vitesse unitaire du fluide, ε comme température réciproque :

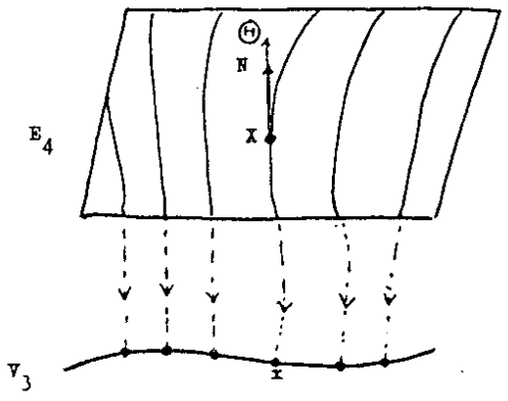
(3) $$\varepsilon = 1 / T$$

T étant la température absolue, mesurée en unités telles que la constante de Boltzmann k prenne la valeur 1.

Θ engendre un groupe à un paramètre de difféomorphismes de l'espace-temps E_4 ; les orbites du groupe -les lignes de courant du fluide- forment un espace abstrait V_3 (Fig.1) ; V_3 possède une structure de variété de dimension 3, caractérisée par le fait que la projection $X \mapsto x$ est une submersion.

Nous désignerons par 2γ la dérivée de Lie du tenseur métrique g, associée au champ de vecteurs $x \mapsto \Theta$; γ est un tenseur symétrique, dont les composantes s'écrivent

(4) $$\gamma_{\lambda\rho} = \frac{1}{2}\left[\partial_\lambda \Theta_\rho + \partial_\rho \Theta_\lambda\right]$$



(Figure 1)

- Une densité positive n de la variété quotient V_3 ; l'intégrale de n sur V_3 s'interprétera comme nombre de molécules. Le champ

(5) $$x \mapsto n$$

est un champ covariant : son image réciproque par la projection $X \mapsto x$ est un champ covariant de E_4, qui est contracté de la densité riemannienne de E_4 avec un vecteur de futur N ; le champ

(6) $$X \mapsto N$$

vérifie automatiquement les deux relations

(7) $$N = U\nu \qquad (\nu > 0)$$

(8) $$\partial_\lambda N^\lambda = 0 \ ;$$

le flux du vecteur conservatif N à travers une hypersurface de genre espace est égal au nombre de particules qui la traversent.

II. DYNAMIQUE

Le premier principe de la thermodynamique s'écrit, sous forme covariante

(9) $$\partial_\lambda T^{\lambda\mu} = 0$$

le tenseur d'énergie $T^{\lambda\mu}$ ($T^{\mu\lambda} = T^{\lambda\mu}$) devant être construit à l'aide des grandeurs cinématiques. Nous allons proposer une telle construction de façon à vérifier le second principe. Etablissons d'abord deux lemmes.

(10) Soit $(\nu, \varepsilon) \mapsto \zeta$ une fonction différentiable. Il existe alors un tenseur symétrique $\mathring{T}^{\lambda\mu}$ tel que

$$\partial_\lambda [N^\lambda \zeta] = - \mathring{T}^{\lambda\mu} \gamma_{\lambda\mu}$$

Simple calcul ; cette relation détermine le tenseur $\mathring{T}^{\lambda\mu}$, et lui donne la valeur

(11) $$\mathring{T}^{\lambda\mu} = \frac{\nu^2}{\varepsilon} \frac{\partial \zeta}{\partial \nu} \left[g^{\lambda\mu} - U^\lambda U^\mu \right] - \nu \frac{\partial \zeta}{\partial \varepsilon} U^\lambda U^\mu$$

Supposons que :

H_1) il existe une fonction

$$\varphi = \varphi(\nu, \Theta, \gamma)$$

telle que

(12) $$T^{\lambda\mu} = \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{\lambda\mu}} \quad (1)$$

(13) H_2) φ est convexe par rapport à γ ;

(1) Avec un abus de notation usuel : ($T^{\lambda\mu}$ et $\gamma_{\lambda\mu}$ sont symétriques).

H_3) pour $\gamma = 0$, les valeurs (12) de $\tau^{\lambda\mu}$ et (11) de $\dot{\tau}^{\lambda\mu}$ coïncident :

(1) $$\left\{ \gamma_{\lambda\mu} = 0 \right\} \Rightarrow \left\{ \tau^{\lambda\mu} = \dot{\tau}^{\lambda\mu} \right\}$$

- Alors le vecteur

(15) $$s^\lambda = N^\lambda \zeta + \tau^{\lambda\mu} \Theta_\mu$$

a une divergence positive

(16) $$\partial_\lambda s^\lambda \geqslant 0$$

- Grâce à (9) et (10), il vient

(17) $$\partial_\lambda s^\lambda = \left[\tau^{\lambda\mu} - \dot{\tau}^{\lambda\mu} \right] \gamma_{\lambda\mu}$$

ce qui peut encore s'écrire

(18) $$\partial_\lambda s^\lambda = \left\{ \varphi(\gamma) - \varphi(0) - \dot{\tau}^{\lambda\mu} \gamma_{\lambda\mu} \right\} + \left\{ \varphi(0) - \varphi(\gamma) - \tau^{\lambda\mu}(-\gamma_{\lambda\mu}) \right\}$$

à cause de la convexité de φ , les deux termes de cette somme sont positifs.

C.Q.F.D.

Nous nous proposons donc de définir la dynamique du fluide à l'aide des deux fonctions φ , ζ qui donnent en chaque point le tenseur d'énergie $\tau^{\lambda\mu}$ et le flux d'entropie s^λ par les formules (12,15) ; ces fonctions étant déterminées, nous disposons des 5 équations (8,9) pour déterminer les 5 variables (ν, Θ^λ) ; et, par surcroît, les s^λ ; l'identité (16) exprimera le second principe.

III. MOUVEMENTS NON DISSIPATIFS

Supposons la fonction φ strictement convexe en γ ; la décomposition (18) montre que la production d'entropie ne s'annulle qu'avec γ :

(19) $$\partial_\lambda S^\lambda = 0 \iff \gamma_{\lambda\mu} = 0$$

Dans une éventuelle solution non dissipative des équations du mouvement, Θ est donc un vecteur de Killing, associé à un élément de l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré ; il existe des constantes $\Lambda_{\lambda\mu}$, Γ_λ telles que

(20) $$\Theta_\lambda = \Lambda_{\lambda\mu} x^\mu + \Gamma_\lambda \qquad (\Lambda_{\lambda\mu} + \Lambda_{\mu\lambda} = 0)$$

Le fluide ne peut donc se rencontrer que dans une région d'espace-temps où ce vecteur est de genre futur ; pour tout X, ces formules (20) et (2) définissent les variables U^λ et ε ; un simple calcul montre que les équations du mouvement s'intègrent au moyen d'une constante arbitraire :

(21) $$\zeta + \frac{\partial \zeta}{\partial \nu} \nu = \text{Cte} ;$$

en chaque point X, cette équation permet en principe de trouver ν , ce qui achève la détermination du mouvement. On peut en déduire les diverses grandeurs thermodynamiques : le volume spécifique moléculaire est

(22) $$u = 1 / \nu$$

les composantes de $\tau^{\lambda\mu} - \dot{\tau}^{\lambda\mu}$ (14,11) fournissent la masse spécifique ρ et la pression p :

(23) $$\rho = -\nu \frac{\partial \zeta}{\partial \varepsilon} = -\frac{1}{u} \frac{\partial \zeta}{\partial \varepsilon}$$

(24) $$p = -\frac{\nu^2}{\varepsilon}\frac{\partial \zeta}{\partial \nu} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \zeta}{\partial u}$$

(15) donne l'entropie (par molécule)

(25) $$s = \zeta + \rho u \varepsilon = \zeta - \varepsilon \frac{\partial \zeta}{\partial \varepsilon}$$

formule qui permet d'interpréter ζ en

(26) $$\zeta = -\frac{F}{T}$$

$F = u\rho - Ts$ étant l'énergie libre de Helmholtz par molécule ([1]) ; ζ est donc le potentiel thermodynamique de Planck [II]. De même la constante d'intégration (21) vaut

(27) $$-\frac{F+pu}{T} = -\frac{G}{T}$$

G étant l'énergie libre de Gibbs, appelée aussi enthalpie libre.

On obtient la description des équilibres classiques si les $\Lambda_{\lambda\mu}$ sont nuls dans (20) ; dans le cas général, on obtient des équilibres relatifs à un référentiel accéléré ; on notera qu'ils ne sont pas isothermes : ainsi, pour une centrifugeuse, le fluide est plus chaud à la périphérie que sur l'axe ; cet effet relativiste n'est sensible que si la vitesse périphérique n'est pas négligeable devant celle de la lumière (cas des pulsars).

On obtient évidemment une autre classe de mouvements non dissipatifs en supposant φ affine en γ, c'est-à-dire

(28) $$T^{\lambda\mu} = \dot{\tau}^{\lambda\mu} \qquad \forall \gamma_{\lambda\mu}$$

([1]) Ne pas oublier que tous ces résultats sont relativistes, et que ρ est à la fois masse spécifique et énergie spécifique (avec bien entendu $c = 1$).

(17) montre bien que la production d'entropie est nulle dans ce cas.

L'équation $\partial_\lambda S^\lambda = \partial_\lambda [N^\lambda s] = 0$ et (8) : $\partial_\lambda N^\lambda = 0$ montrent que $N^\lambda \partial_\lambda s = 0$, donc que s est constante sur les lignes de courant ; on obtient ainsi la version relativiste des équations des fluides parfaits.

Considérons l'enthalpie (par molécule)

(29) $$h = u[p+\rho]$$

ainsi que le "covecteur enthalpie"

(30) $$\Pi_\lambda = h\, U_\lambda$$

et sa dérivée extérieure, la 2-forme.

(31) $$\Omega_{\lambda\mu} = \partial_\lambda \Pi_\mu - \partial_\mu \Pi_\lambda$$

qui joue le rôle du rotationnel classique ; en remarquant que

(32) $$T^{\lambda\mu} = N^\lambda H^\mu - p\, g^{\lambda\mu}$$

on transforme facilement les équations du mouvement

(33) $$\partial_\lambda N^\lambda = 0 \quad , \quad \partial_\lambda T^{\lambda\mu} = 0$$

en

(34) $$\partial_\lambda N^\lambda = 0 \quad , \quad \Omega_{\lambda\mu}\Theta^\mu + \partial_\lambda s = 0$$

(35) les formules de Cartan (voir [VI]) montrent alors que la dérivée de Lie de la 2-forme Ω par le champ de vecteurs Θ est nulle, c'est-à-dire que Ω est un invariant intégral (au sens de Poincaré) de Θ ; résultat qui nous semble nouveau.

(36) On retrouve des résultats connus dans le cas particulier des mouvements isentropiques (lorsque s prend la même valeur sur toutes les lignes de courant). Alors il existe une équation d'état $f(p,\rho)=0$; h coïncide avec l'indice du fluide défini par Lichnérowicz [IV]; la seconde formule (34) nous montre que Ω est un invariant intégral absolu (au sens de Cartan) du feuilletage par les lignes de courant ; c'est-à-dire que Ω est l'image réciproque, par l'application $x \mapsto x$ (figure 1) d'une 2-forme de V_3 : c'est le théorème de Helmholtz.

(37) Le rang de Ω est au plus 2 ; il suffit (grâce au théorème (35)) que Ω s'annulle dans l'espace à une date arbitraire pour qu'il soit nul à tout instant et que le mouvement soit isentropique ; on est alors dans le cas des mouvements irrotationnels au sens de Lichnérowicz [IV]; on peut utiliser les procédures classiques du cas irrotationnel (potentiel des vitesses, représentation hodographique, etc.) qui s'étendent facilement au cas relativiste. On notera d'ailleurs que la description relativiste des fluides est plus simple (mathématiquement et conceptuellement) que leur description en mécanique classique.

IV. MOUVEMENTS FAIBLEMENT DISSIPATIFS

Faute de connaitre a priori la fonction φ , on peut l'approcher par un développement au second ordre en γ :

$$\varphi = \varphi_0 + \dot{\tau}^{\lambda\mu}\,\gamma_{\lambda\mu} + \frac{1}{2}\,c^{\lambda\mu,\nu\rho}\,\gamma_{\lambda\mu}\,\gamma_{\nu\rho} \tag{38}$$

ce qui donne

$$\tau^{\lambda\mu} = \dot{\tau}^{\lambda\mu} + c^{\lambda\mu,\nu\rho}\,\gamma_{\nu\rho} \tag{39}$$

la production d'entropie, donnée par (17), vaut

$$\partial_\lambda s^\lambda = c^{\lambda\mu,\nu\rho}\,\gamma_{\lambda\mu}\,\gamma_{\nu\rho} \tag{40}$$

la symétrie

$$c^{\lambda\mu,\nu\rho} = c^{\nu\rho,\lambda\mu} \tag{41}$$

exprime la réciprocité d'Onsager (le "courant généralisé" $\tau - \dot{\tau}$ est, grâce à (39), fonction linéaire de la "force généralisée" γ ; les $c^{\lambda\mu,\nu\rho}$ sont les coefficients de transport).

A priori, il existe 55 coefficients $c^{\lambda\mu,\nu\rho}$ indépendants; mais la symétrie du fluide réduit ce nombre à 5 ([1]) ; on interprète le résultat de la formule (39) en calculant les composantes $\tau^{\lambda\mu}$ dans le référentiel propre du fluide ; ce qui donne :

a) le tenseur de contrainte :

$$\tau_{jk} = -T_{jk} = \delta_{jk}\left\{-p + \varepsilon\left[A - \frac{2E}{3}\right]\partial_\ell v^\ell - B\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\right\} + \varepsilon E\left\{\partial_j v_k + \partial_k v_j\right\} \tag{42}$$

($j, k, \ell = 1,2,3$; v_j est la vitesse, nulle au point considéré) ;

b) le flux de chaleur (dont les composantes sont les τ^{j4}) :

$$F\left[\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\varepsilon - \varepsilon\,\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right] \tag{43}$$

;

c) la masse énergie spécifique :

$$\tau^{44} = \rho + C\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} - B\,\varepsilon\,\operatorname{div}\,\vec{v} \tag{44}$$

Les 5 coefficients A, B, C, E, F sont, a priori, fonctions de u et ε ($=1/\tau$) ; la convexité stricte de φ s'exprime par les inégalités

$$A>0\ ,\ C>0\ ,\ E>0\ ,\ F>0\ ,\ |B|<\sqrt{AC} \tag{45}$$

.

([1]) Il y en aurait 6 si on ne vérifiait pas la réciprocité (41).

On a donc obtenu ainsi les deux coefficients de Navier de la viscosité

(46) $$\mu = E\,\varepsilon \qquad , \qquad \lambda = \left[A - \frac{\varrho E}{s} \right] \varepsilon$$

fonctions de la température et du volume spécifique, vérifiant

(47) $$\mu > 0 \qquad , \qquad 3\lambda + 2\mu > 0 \ ;$$

la formule (43), avec $\varepsilon = 1/T$ (3), donne la conductivité thermique

(48) $$F / T^2$$

le dernier terme de (43) est une correction relativiste à la conduction de la chaleur, permettant en particulier la non-isothermie des équilibres (voir le §III).

Les coefficients C et B sont peut-être mesurables sur les fluides réels.

V. TRANSITIONS DE PHASE ET ONDES DE CHOC

Les équations du mouvement (8,9)

(49) $$\partial_\lambda N^\lambda = 0 \qquad \partial_\lambda T^{\lambda\mu} = 0$$

peuvent éventuellement posséder des solutions discontinues sur une hypersurface

(50) $$\alpha(x) = \text{Cte} \ ;$$

sur cette surface, les équations (49) seront encore vérifiées -au sens des distributions- si on a

(51) $$\partial_\lambda \alpha \, [DN]^\lambda = 0$$

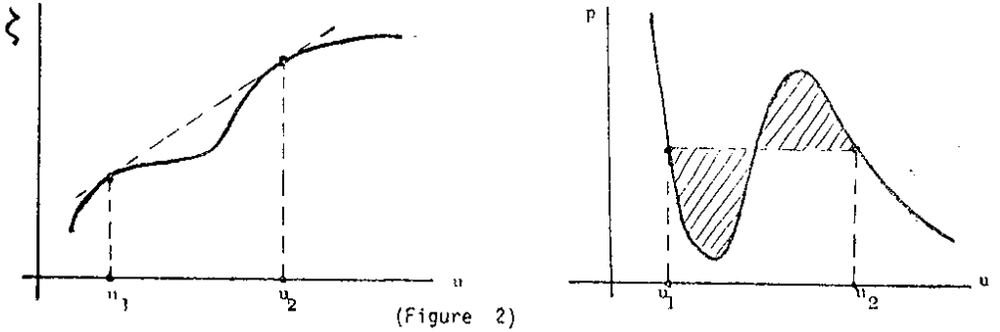
(52) $$\partial_\lambda \alpha \, [DT]^{\lambda\mu} = 0$$

D désignant la discontinuité au travers de (50).

Cette situation peut apparaître à l'équilibre, lorsque l'équation (21) possède plusieurs solutions en ν ; α est fonction de χ par l'intermédiaire de χ, la surface (50) est composée de lignes de courant. Les équations (51), (52) s'écrivent simplement

(53) $$Dp = 0 \ ;$$

sur la surface fluide concernée, u passe d'une valeur u_1 à une valeur u_2 ; la pente de l'isotherme $u \mapsto \zeta$ ayant la même valeur (fig. 2) ; en diagramme



(Figure 2)

dérivé $u \mapsto p$ (voir la formule (24)), on obtient la configuration bien connue des équilibres à deux phases liquide-vapeur, l'aire algébrique en hachures étant nulle.

Etudions le cas où l'hypersurface (50) est mobile par rapport au fluide (onde de choc) ; l'équation (51) exprime que la discontinuité DN est tangente à l'hypersurface ; si on suppose le fluide parfait (hypothèse

(28)), la condition (52) se développe en

(54) $$\begin{cases} h'^2 - h^2 = \left[u'h' + u\,h\right]\left[p' - p\right] \\ \text{DH} \quad \text{normal à l'onde} \end{cases}$$

dans ces formules apparaissent les variables (29) et (30) (enthalpie moléculaire h, (co-)vecteur enthalpie H).

Ces relations permettent de calculer la discontinuité de toutes les variables thermodynamiques et la célérité de l'onde de choc en fonction d'un paramètre ; on obtient la version relativiste des conditions de Rankine-Hugoniot.

Pour les petites valeurs de la discontinuité, on obtient la célérité du son.

Que se passe-t-il si on ne suppose plus le fluide parfait ? L'équation (12) montre que $T^{\lambda\mu}$ sera discontinu sur l'onde si on suppose seulement les dérivées premières de Θ discontinues ; la formule (52) fournit alors l'équation des caractéristiques :

(55) $$\det(M) = 0 \qquad \text{avec} \qquad M^{\lambda\mu} = C^{\lambda\rho,\sigma\mu}\,\partial_\rho\alpha\,\partial_\sigma\alpha$$

(notations (38) ; on utilise les équations linéarisées).

En fait, cette équation n'a pas de solution réelle non nulle en $\partial_\rho\alpha$: ceci résulte de la convexité stricte de φ, qui montre que la matrice $M^{\lambda\mu}$ est définie positive ; par conséquent le système des équations du mouvement est de type elliptique ([1]).

([1]) Ce résultat s'établit encore dans le cas non linéarisé.

Pour éviter le paradoxe de la vitesse infinie de la conduction de la chaleur, certains auteurs [I], [III] ont proposé d'introduire une énergie de la forme $C\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}$; Si C est négatif, l'équation de la chaleur devient en effet hyperbolique.

Nous avons bien rencontré un tel terme (voir (44)), mais avec un coefficient C positif ; $C < 0$ contredit le second principe.

Le paradoxe se résout simplement par la considération d'ondes de choc ; sur ces ondes, le tenseur $\gamma_{\lambda\mu}$ subit des discontinuités infinies, mais pas nécessairement $T^{\lambda\mu}$. C'est ce que montre le choix suivant de la fonction :

(56) $$\varphi = \overset{\bullet}{T}{}^{\lambda\mu}\gamma_{\lambda\mu} + \sqrt{u^2 + a\,C^{\lambda\mu,\nu\rho}\gamma_{\lambda\mu}\gamma_{\nu\rho}} + \text{Cte}$$

a étant une constante positive ; cette fonction est convexe, conformément à (13) (son graphe est une nappe d'hyperboloïde) ; elle est osculatrice à la fonction (38) pour $\gamma = 0$, ce qui montre qu'elle ne modifie pas les termes de viscosité et de conduction; l'ensemble de valeurs de $T^{\lambda\mu}$ qui s'en déduit par (12) est un convexe relativement compact, dont le diamètre peut être choisi arbitrairement petit (en prenant a petit).

Par un choix analogue à (56), on peut donc décrire un fluide dissipatif qui diffère peu d'un fluide parfait : les termes prépondérants dans les équations de choc seront dus aux discontinuités de pression, masse spécifique et vitesse ; une telle situation est conforme à l'expérience, puisque les conséquences des équations de choc des fluides parfaits sont approximativement vérifiées par les fluides réels.

VI. ANNEXE : CAS DU GAZ PARFAIT MONOATOMIQUE

La théorie cinétique permet, en principe, de calculer les équilibres thermodynamiques d'un gaz. Lorsque les molécules sont des points matériels relativistes, dans les hypothèses les plus simples (collisions instantanées, volume propre des molécules négligeable), on peut calculer exactement les états de Gibbs, pour lesquels la fonction de répartition est l'exponentielle d'une fonction affine de l'énergie : ainsi que les états de Gibbs généralisés, où la fonction de répartition est l'exponentielle d'une fonction affine des 10 grandeurs noethériennes associées au groupe de Poincaré (l'énergie, les composantes de l'impulsion et des moments lorentziens) ; dans les mêmes hypothèses on sait aussi calculer, en chaque point X, les valeurs de la pression et de la masse spécifique.

Il se trouve que le résultat du calcul est rigoureusement conforme au modèle ci-dessus ((20) à (27)), avec la valeur suivante du potentiel de Planck (voir [VII]) :

$$\zeta = \mathrm{Log}\left(\frac{n}{T} K_2\left(\frac{m}{T}\right)\right) + \mathrm{Cte} \tag{57}$$

m étant la masse des molécules, K_2 la fonction de Bessel modifiée d'argument 2 ([1]) ; les formules ci-dessus permettent d'en déduire toutes les grandeurs thermodynamiques.

([1]) $K_n(x) = \int_0^\infty e^{-x \operatorname{ch}\varphi} \operatorname{ch}(n\varphi)\, d\varphi$; $y = K_n(x)$ est solution de l'équation de Bessel modifiée $y'' + \frac{y'}{x} - \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0$.

- REFERENCES -

[I] C. CATTANEO
C. R. Acad. Sciences Paris 247, 431 (1958).

[II] A.I. KHINTCHIN
Mathematical Foundations of Statistical Mechanics, (Dover 1949).

[III] M. KRANYS
Nuovo Cimento 42 B, 51 (1966).

[IV] A. LICHNEROWICZ
Théories relativistes de la Gravitation et de l'Electromagnétisme, (Masson 1955).

[V] J.M. SOURIAU
Suppl. Nuovo Cimento, I, 4, 206 (1966).

[VI] J.M. SOURIAU
Structure des systèmes dynamiques (Dunod 1969).

[VII] J.L. SYNGE
The Relativistic Gas (Amsterdam 1957).