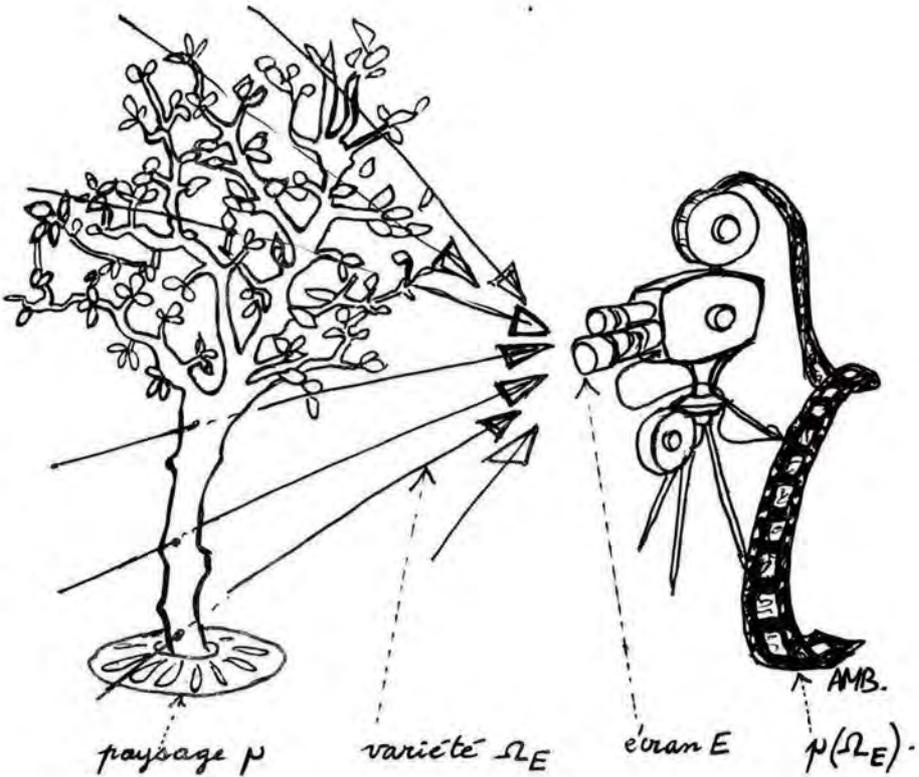


GEOMETRIE SYMPLECTIQUE ET  
PHYSIQUE MATHEMATIQUE

Par J. M Souriau (Marseille)

---



PREMIERE PARTIE,

où il est question de physique classique, relativiste et statistique.

§ 1 - DEPUIS 1788, LA MECANIQUE EST SYMPLECTIQUE.

Variété des Mouvements.

Considérons un point matériel soumis à une force  $\vec{F}$  ; on désigne sa masse par  $m$  , sa position et sa vitesse à l'instant  $t$  par  $\vec{r}$  et  $\vec{v}$  ; on suppose que  $\vec{F}$  est fonction de classe  $C^\infty$  de  $(t, \vec{r}, \vec{v})$ .

Les théorèmes généraux sur les équations différentielles montrent que les "équations du mouvement"

$$(1.1) \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \quad m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

peuvent s'intégrer en partant de conditions initiales  $(t, \vec{r}, \vec{v})$  arbitraires.

Chaque solution de (1.1) , ou "mouvement", sera désignée par  $x$  (on peut si l'on veut identifier  $x$  à l'application  $t \mapsto (\vec{r}, \vec{v})$  ; nous désignerons par  $U$  l'ensemble de tous les mouvements.

Choisissons une date  $t$  , et repérons chaque mouvement  $x$  par les 6 composantes de  $\vec{r}$  et  $\vec{v}$  à la date  $t$  : nous obtenons ainsi un système de coordonnées locales de  $U$  ; en faisant varier  $t$  , on obtiendra un atlas de  $U$  , qui lui donne une structure de variété différentiable (de dimension 6).

Structure symplectique.

Soient  $\delta$  et  $\delta'$  des variations arbitraires du mouvement ; à chaque instant  $t$  , il leur correspond des variations  $\delta\vec{r}$  ,  $\delta\vec{v}$  et  $\delta'\vec{r}$  ,  $\delta'\vec{v}$  des positions et des vitesses ; Lagrange a montré (dans sa Mécanique Analytique, rédigée dès 1788) que le nombre

$$(1.2) \quad \langle m\delta\vec{v}, \delta'\vec{r} \rangle - \langle m\delta'\vec{v}, \delta\vec{r} \rangle$$

où les  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désignent le produit scalaire dans  $\mathbb{R}^3$  est indépendant du choix de  $t$  ; on peut donc le noter

$$(1.3) \quad \sigma(\delta x, \delta'x)$$

on remarque que :

- (1.4) [
- a)  $\sigma$  est une 2-forme de  $U$  (c'est-à-dire un tenseur antisymétrique de rang 2) ;
  - b)  $\sigma$  est inversible (Lagrange définit les composantes de  $\sigma$  et celles de  $\sigma^{-1}$  dans des coordonnées quelconques de  $U$  ; ces nombres s'appellent aujourd'hui "parenthèses" et "crochets" de Lagrange) ;
  - c)  $\sigma$  est plate, en ce sens qu'il existe un atlas dans lequel les composantes de  $\sigma$  sont constantes (l'atlas indexé par le temps que nous venons de rencontrer).

Une variété munie d'une 2-forme inversible et plate s'appelle aujourd'hui variété symplectique. Cette structure symplectique de l'espace des mouvements s'étend immédiatement au cas d'un système de points matériels (si les forces dérivent d'un potentiel).

§ 2 - EMMY NOETHER ET LES GRANDEURS MESURABLES

Groupes Dynamiques.

Soit  $U$  une variété symplectique ; les difféomorphismes de  $U$  qui respectent la forme  $\sigma$  s'appellent symplectomorphismes ; ils forment un groupe, que nous noterons  $\text{Symp}(U)$  ;  $\text{Symp}(U)$  est un groupe de dimension infinie ; il peut posséder des sous-groupes de dimension finie (groupes de Lie), que l'on appelle groupes dynamiques.

Soit donc  $G$  un groupe dynamique <sup>(1)</sup>,  $\mathfrak{g}$  son algèbre de Lie (figure 1).

(1) On suppose défini un morphisme  $a \mapsto \underline{a}_U$  de  $G$  dans le groupe des symplectomorphismes de  $U$  tel que  $(a, x) \mapsto \underline{a}_U(x)$  soit une application différentiable (de  $G \times U$  dans  $U$ ).

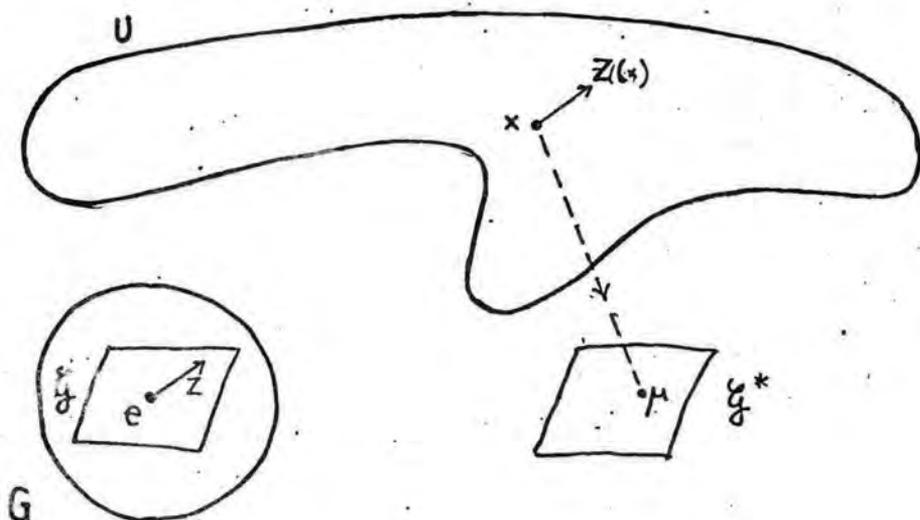
Tout élément  $Z$  de  $\mathfrak{g}$  agit infinitésimalement sur  $U$  : il fait correspondre à chaque  $x \in U$  un vecteur tangent que nous noterons  $Z(x)$ . Puisque  $G$  préserve  $\sigma$ , la dérivée de Lie correspondante de  $\sigma$  est nulle ; des formules bien connues d'E. Cartan montrent qu'il existe (au moins localement) une application

$$(2.1) \quad x \mapsto \mu$$

de  $U$  dans le dual  $\mathfrak{g}^*$  de l'algèbre de Lie, tel que

$$(2.2) \quad \sigma(\delta_x, Z(x)) = \delta \mu(Z) \quad \text{pour toute dérivation } \delta .$$

Cette formule définit  $\mu$  à une constante additive près ;  $\mu$  s'appelle moment du groupe dynamique  $G$ .



- Fig. 1 -

Exemple : soit  $U$  la variété des mouvements d'un système dynamique libre dans l'espace.

Nous admettons, comme principe de la dynamique que la structure symplectique de  $U$  est invariante par déplacement, ce qui signifie que le groupe  $G$  des déplacements euclidiens est groupe dynamique de  $U$ .

Le moment  $\mu$  associé est donc un objet à 6 composantes (puisque la dimension de  $G$  est 6) ;  $\mu$  est constitué par l'impulsion et le moment cinétique du système. Puisque  $\mu$  ne dépend que du mouvement  $x$  (voir la figure 1), ses composantes sont nécessairement des "constantes du mouvement" ; en portant cette propriété dans les équations du mouvement, on en déduit les relations

$$(2.3) \quad \sum_j \vec{F}_j = 0, \quad \sum_j \vec{r}_j \times \vec{F}_j = 0$$

où  $\vec{F}_j$  désigne la force appliquée au point  $N^{\circ} j$  (occupant la position  $\vec{r}_j$ ) ; le signe  $\times$  désigne un produit vectoriel dans  $\mathbb{R}^3$ . On peut vérifier que les formules (2.3) sont équivalentes à l'existence de forces "mutuelles"  $\vec{F}_{jk}$  telles que

$$(2.4) \quad \vec{F}_{jk} + \vec{F}_{kj} = 0, \quad [\vec{r}_j - \vec{r}_k] \times \vec{F}_{jk} = 0, \quad \vec{F}_j = \sum_k \vec{F}_{jk};$$

ainsi, l'invariance symplectique par déplacement a pour conséquence le "principe" d'égalité de l'action et de la réaction.

Un autre exemple est celui d'un système "conservatif", dont la structure symplectique est invariante par translation dans le temps ; le moment associé n'est autre que l'énergie. Le calcul est exposé dans Lagrange (1).

---

(1) A cette occasion, Lagrange écrit l'expression appelée aujourd'hui hamiltonien, et la désigne par la lettre  $H$  ; et pourtant Sir William Rowan Hamilton n'était âgé que de cinq ans à la parution de l'ouvrage.

Théorème de Noether.

Ces résultats généralisent un théorème d'Emmy Noether (qui concerne le cas d'un problème variationnel dont le lagrangien est invariant par un groupe à un paramètre) ; on voit comment la structure symplectique associée des "grandeurs conservées" aux symétries d'un système dynamique. Ces grandeurs seront mesurables expérimentalement si l'appareil de mesure possède la même symétrie que le système étudié : grâce au théorème de Noether, l'interaction du système et de l'appareil transfère simplement la grandeur  $\mu$  (exemple : on mesure l'impulsion d'une balle de fusil en la recevant sur une cible molle fixée à un pendule).

§ 3 - MASSE ET COHOMOLOGIE

Cohomologie Symplectique.

Plaçons-nous dans le cas général d'un groupe dynamique (cf. § 2). Quelques formules de géométrie différentielle permettent d'établir que la quantité

$$(3.1) \quad \sigma(Z(x), Z'(x)) - \mu[Z, Z']$$

où  $Z$  et  $Z'$  sont deux éléments de  $\xi$  et  $[Z, Z']$  leur crochet de Lie ne dépend pas de  $x$  ; nous pouvons donc écrire

$$(3.2) \quad \sigma(Z(x), Z'(x)) = \mu[Z, Z'] + f(Z, Z')$$

$f$  étant une 2-forme de l'algèbre de Lie ; on vérifie l'identité de Bargmann

$$(3.3) \quad f(Z, [Z', Z'']) + f(Z', [Z'', Z]) + f(Z'', [Z, Z']) = 0$$

$\forall Z, Z', Z'' \in \xi$

les 2-formes vérifiant (3.3) s'appellent cocycles symplectiques de l'algèbre de Lie.

On se souvient que  $\mu$  n'est définie qu'à l'addition près d'une constante ; si l'on change  $\mu$  en  $\mu - \mu_1$ , on voit sur (3.2) que  $f$  est changée en  $f + f_1$ , avec

$$(3.4) \quad f_1(Z, Z') = \mu_1 [Z, Z']$$

$f_1$  est évidemment encore un cocycle ; on l'appelle cobord de  $\mu_1$  ; on dit aussi que  $f$  et  $f + f_1$  sont cohomologues ; à cause de l'arbitraire de  $\mu_1$ , c'est la classe de cohomologie de  $f$  qui est définie par l'action d'un groupe dynamique.

Remarquons que les classes de cohomologie symplectique d'un groupe de Lie  $G$  forment un espace vectoriel de dimension finie, qui se calcule directement (par application des formules (3.3) et (3.4)) sans connaître préalablement aucune action symplectique de  $G$ . Chaque action symplectique de  $G$  définira ensuite un point de cet espace. Donnons un exemple.

#### Définition de la masse.

Depuis Galilée, on sait que les propriétés mécaniques d'un système isolé restent les mêmes, non seulement sous l'action d'un déplacement euclidien ou d'une translation temporelle, mais encore sous l'action d'une "transformation de Galilée", qui consiste à ajouter un vecteur constant à toutes les vitesses initiales  $\vec{v}_j$ .

Le calcul montre que toutes ces transformations engendrent un groupe de Lie  $G$  de dimension 10 (le "groupe de Galilée"), et que l'espace de cohomologie symplectique de  $G$  a la dimension 1. La cohomologie d'un système dynamique libre est donc un élément pris dans un espace vectoriel de dimension 1 - ce que l'on appelle, en toute rigueur métrologique, une "grandeur mesurable". Son interprétation est facile : c'est tout simplement la masse du système.

Par ailleurs, à tout mouvement du système sera associé le moment galiléen  $\mu$ , qui est une grandeur conservative à 10 composantes ;

$\mu$  est constitué avec l'impulsion, le moment cinétique, l'énergie, le mouvement (rectiligne uniforme) du barycentre. La conservation de  $\mu$  réunit donc les divers "théorèmes généraux" de la mécanique classique.

Précisons le jeu de la cohomologie ; si l'on a calculé un cocycle de  $G$  à cohomologie non nulle,  $f_0$ , il engendrera la cohomologie ; ce qui signifie que, pour chaque système dynamique libre, on pourra choisir la constante arbitraire figurant dans  $\mu$  de façon que (6) s'écrive

$$(3.5) \quad \sigma(Z(x), Z'(x)) = \mu [Z, Z'] + m f_0(Z, Z')$$

$m$  étant un nombre qui mesure la cohomologie - c'est-à-dire la masse.

### Statut de l'énergie.

-  $\mu$  est-il entièrement déterminé par cette condition ? La réponse est évidente : on tire de (3.5) la valeur de la 1-forme  $\mu$  sur les éléments de l'algèbre de Lie  $\mathcal{G}$  qui sont des crochets, donc sur l'algèbre dérivée  $\mathcal{G}'$  de  $\mathcal{G}$  ; le calcul montre que la dimension de  $\mathcal{G}'$  est 9, donc que 9 des 10 grandeurs constituant  $\mu$  sont déterminées ; c'est dans l'énergie que subsiste une constante additive irréductible.

### Décomposition barycentrique.

La structure du groupe de Galilée  $G$  permet de démontrer le résultat suivant : si  $G$  est groupe dynamique d'une variété symplectique  $U$ , et si la cohomologie symplectique associée n'est pas nulle,  $U$  est le produit cartésien de deux variétés ; la première est un espace vectoriel symplectique de dimension 6 ; la seconde possède le groupe dynamique  $SO(3) \times \mathbb{R}$ .

Dans le cas d'un système dynamique, la première s'interprète comme espace des mouvements du barycentre, doué de toute la masse (et par conséquent de toute la cohomologie galiléenne) ; la seconde comme l'espace des mouvements relativement au barycentre. Ce résultat contient les théorèmes de Koenigs de la mécanique rationnelle.

§ 4 - QU'EST-CE QU'UN AIMANT ?

Il n'est pas nécessaire, pour obtenir une structure symplectique, de se restreindre à des forces dérivant d'un potentiel : on a droit à des forces du type

$$(4.1) \quad \vec{F} = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$$

où les vecteurs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  dépendent de la date  $t$  et de la position  $\vec{r}$  ; il suffit pour cela de modifier l'expression (1.2) de la forme symplectique en lui ajoutant la quantité

$$(4.2) \quad \langle \vec{B}, \delta\vec{r} \times \delta'\vec{r} \rangle$$

et de supposer que les champs de vecteurs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  vérifient les deux équations

$$(4.3) \quad \text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad \text{div } \vec{B} = 0$$

Il se trouve - ô merveille - que c'est bien le cas pour les forces électromagnétiques (on reconnaît dans (4.3) deux des quatre équations de Maxwell), ainsi d'ailleurs que pour les forces centrifuge et de Coriolis.

Nous pouvons alors appliquer les procédures précédentes au cas d'un système de points matériels libre dans l'espace : l'exploitation des formules relatives à la cohomologie galiléenne va nous donner l'équivalent électromagnétique de l'"égalité de l'action et de la réaction". Le résultat de ce calcul est assez paradoxal : on trouve  $\vec{B} = 0$  : en mécanique galiléenne, un point matériel peut subir l'action du champ magnétique, il ne peut pas en être la source.

Est-ce à dire que la dynamique d'un système comportant des aimants échappe à la mécanique classique ? Non ; c'est à la traditionnelle décomposition en points matériels que nous devons renoncer : un aimant possède une parfaite description classique si on le considère comme un assemblage de particules à spin.

Qu'est-ce qu'une particule à spin ? Nous verrons au § 6 que c'est un objet de géométrie galiléenne (les mécaniques quantique ou relativiste ne sont pas nécessaires à son description), qui possède une structure un peu plus élaborée que le "point matériel" (il est doué, entre autres, d'un moment cinétique propre et éventuellement d'un moment magnétique, capable à la fois de subir et de créer le champ magnétique). Les modèles naïfs en "toupie" des particules à spin sont obligatoirement inadéquats, puisqu'une toupie composée de points matériels ne pourrait pas créer de champ magnétique. Tous les résultats obtenus aux §§ précédents sont applicables à de tels modèles d'aimants (par exemple la décomposition barycentrique) : seule y intervient, en effet, l'existence d'une structure symplectique douée de l'invariance galiléenne.

L'expérience confirme une telle analyse : le ferromagnétisme, dû au moment magnétique propre des électrons, peut se décrire classiquement ; ce sont les effets diamagnétiques, beaucoup plus faibles, qui exigent le recours à la relativité.

## § 5 - RELATIVITE

On passe de la mécanique classique à la mécanique de la relativité restreinte en changeant la cinématique, c'est-à-dire l'art de repérer longueurs et durées : ce changement consiste à remplacer les transformations de Galilée (addition d'un vecteur constant à toutes les vitesses) par les transformations de Lorentz bien connues ; ce qui conduit finalement à remplacer le groupe de Galilée par le groupe de Poincaré (groupe des isométries de l'espace de Minkowski), qui se trouve avoir la même dimension que celui de Galilée (dix).

Ceci étant, on ne change rien à la "dynamique", c'est-à-dire que l'on suppose toujours que l'ensemble des mouvements possède une structure symplectique ; mais c'est le groupe de Poincaré qui sera maintenant groupe dynamique pour tout système isolé.

Dans ces conditions, les différences entre les deux mécaniques reflètent simplement les différences de structure des deux groupes. Il se trouve que l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré est égale à son algèbre dérivée, et que sa cohomologie symplectique est nulle : par conséquent les moments relativistes sont définis sans constante additive arbitraire (notamment l'énergie relativiste) ; mais il n'y a plus de nombre caractéristique d'un système (jouant le rôle de la masse classique) ; on peut encore définir un barycentre relativiste (dont le mouvement est rectiligne uniforme), mais il n'y a plus de décomposition barycentrique (l'espace des mouvements n'est pas nécessairement un produit direct).

Pourquoi donc  $E = mc^2$  ?

Les mécaniques classique et relativiste sont logiquement incompatibles ; il faut pourtant une procédure de passage entre elles, pour pouvoir comparer les descriptions qu'elles proposent respectivement pour un même objet matériel (qui ne nous prévient pas s'il est "classique" ou "relativiste"...).

On notera que les groupes "abstraits" de Poincaré et de Galilée ne s'incarnent dans le monde physique que lorsqu'on définit leur action sur l'espace-temps, et que cette action dépend du choix d'un référentiel (un laboratoire terrestre ou spatial par exemple, muni d'un ensemble de prescriptions expérimentales). L'indifférence du choix de ce référentiel est vérifiée soit en physique classique, soit en physique relativiste ; elle n'est plus vraie lorsqu'on les envisage simultanément. Seule subsiste l'indifférence relative à l'intersection des deux groupes ; cette intersection est un groupe de dimension 7, produit direct du groupe des isométries spatiales par celui des isométries temporelles (on peut l'appeler groupe d'Aristote, car il préserve l'axiome de la physique aristotélicienne selon lequel tout mouvement tend naturellement vers le repos).

Nous pouvons donc comparer partiellement un moment classique et un moment relativiste, en égalant les moments induits sur le groupe d'Aristote du référentiel. Il se trouve que cette comparaison peut s'achever en identifiant les mouvements du barycentre classique et du barycentre relativiste.

On obtient ainsi par voie géométrique un code de traduction des grandeurs dynamiques classiques en grandeurs relativistes ; ce code a notamment pour effet de fixer le zéro de l'énergie classique  $E$  (en l'égalant à l'énergie relativiste) et de lui attribuer la valeur  $mc^2$ ,  $m$  étant la masse classique et  $c$  la vitesse de la lumière (on obtient du même coup neuf autres prescriptions, nettement moins populaires que la relation d'Einstein).

## § 6 - COMMENT CONSTRUIRE UNE PARTICULE ELEMENTAIRE

Le paragraphe précédent suggère d'identifier les systèmes dynamiques matériels (isolés) à des variétés symplectiques admettant le groupe de Poincaré comme groupe dynamique.

Les plus simples, a priori, de ces variétés, seront celles où le groupe agit transitivement ; il s'agira de systèmes dynamiques ne possédant pas d'autre structure que leur situation spatio-temporelle (dépourvus, si l'on veut, de "structure interne").

Il se trouve que l'on sait les construire effectivement (à partir des orbites du groupe dans la représentation duale de sa représentation adjointe, orbites dont une structure symplectique a été découverte par Kirillov). On obtient ainsi des objets géométriques, candidats à représenter quelque objet naturel. N'oublions pas que cette représentation est fort élaborée, puisqu'elle contient la valeur numérique des 10 grandeurs mesurables constituant le moment.

De fait, les particules élémentaires que l'on observe dans la nature acceptent de s'insérer dans ce schéma ; non seulement les constituants de la matière (électrons, protons, neutrons), mais même les "particules de masse nulle" (photons, neutrinos). Dans chaque cas, la variété symplectique est déterminée par les mesures physiques (sans autre ambiguïté que la précision de ces mesures) ; et cette géométrisation met en forme le catalogue

des grandeurs mesurées (spin, impulsion, énergie, hélicité, parité).

Rien n'empêche d'effectuer une construction parallèle dans le cadre de la mécanique classique (techniquement, l'existence de la cohomologie symplectique d'un groupe de Galilée conduit à remplacer son action co-adjointe par une action affine) ; on obtient ainsi des modèles classiques pour les particules à spin, (voir le § 4) et même pour les photons.

Il se trouve que chaque photon relativiste correspond à une infinité de "photons classiques", indexés par un paramètre qui s'interprète comme la "couleur" ; ceci est possible parce que la vitesse des photons classiques est infinie (pour une vitesse finie, l'effet Doppler-Fizeau changerait la couleur lors d'une transformation de Galilée).

## § 7 - THERMODYNAMIQUE ET GROUPES DE LIE

### Etats statistiques.

Un mouvement d'un système dynamique - un "état classique" - est donc un point  $x$  de la variété  $U$  des mouvements.

On passera à la "mécanique statistique" en remplaçant la variable  $x$  par une variable aléatoire : un état statistique sera par définition une loi de probabilité sur la variété  $U$  (pouvant en particulier être concentrée au point  $x$ , ce qui englobe les états classiques parmi les états statistiques).

Il se trouve que les variétés symplectiques sont munies d'une mesure complètement continue invariante par <sup>(Symplectomorphisme ?)</sup> ~~les symplectismes~~, la mesure de Liouville. Par suite, tout état statistique, s'il est complètement continu, sera le produit de la mesure de Liouville par une fonction scalaire  $\rho$ , appelée fonction de répartition.

Nous avons vu (§ 1) comment associer à chaque date  $t$  une carte

de l'espace des mouvements ; nous pouvons évidemment rapporter la fonction de répartition à ces coordonnées (mais son expression dépendra évidemment de  $t$ ) ; on constate facilement qu'elle vérifie une équation aux dérivées partielles, appelée équation de Liouville.

Ceci permet de faire le lien avec la formulation traditionnelle de la mécanique statistique : celle-ci suppose au départ l'existence d'une fonction de répartition  $\rho$ , solution de cette équation de Liouville. En particulier, Boltzmann a fondé la théorie cinétique des gaz en donnant une méthode d'approximation de l'équation de Liouville ; le résultat de cette approximation s'appelle "équation de Boltzmann".

Il est important de rechercher les états statistiques qui s'établissent spontanément dans les systèmes en équilibre thermodynamique : ce fut l'oeuvre de Maxwell (partant de ses recherches initiales sur les anneaux de Saturne), complétée par Gibbs : la formulation est très simple :  $\log(\rho)$  est une fonction affine de l'énergie (résultat qui se vérifie directement par spectroscopie des gaz chauds, et indirectement par les formules de la thermodynamique).

Puisque l'énergie se définit comme le moment du groupe des translations dans le temps, la répartition de Maxwell-Gibbs va se généraliser immédiatement à toute variété symplectique possédant un groupe dynamique.

Si nous désignons par  $E$  l'énergie généralisée (c'est-à-dire le moment qui appartient, rappelons-le, au dual de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  du groupe), nous écrivons

$$(7.1) \quad \rho = e^{E\theta - z}$$

$\theta$  étant un élément de  $\mathfrak{g}$  qui indexe l'état statistique (et qui va généraliser la température),  $z$  une constante de normalisation, que l'on détermine en écrivant que la masse de la loi de probabilité est égale à 1 :

$$(7.2) \quad z = \log \int_{\mathcal{U}} e^{E\theta} d\lambda(x)$$

formule où  $\lambda$  désigne la mesure de Liouville ;  $z$ , ainsi défini en fonction de la "température"  $\Theta$ , généralise le potentiel thermodynamique de Planck.

Il faut bien entendu que cette intégrale soit convergente ; nous définirons l'ensemble canonique de Gibbs  $\Omega$  comme le plus grand ouvert (dans l'algèbre de Lie) où cette intégrale est localement normalement convergente (en  $\Theta$ ). On montre que  $\Omega$  est convexe, et que  $z$  est une fonction  $C^\infty$  sur  $\Omega$  ; que la dérivée  $Q = \frac{\partial z}{\partial \Theta}$  coïncide avec la valeur moyenne de l'énergie  $E$  ( $Q$  généralise donc la chaleur) ; que le tenseur  $\frac{\partial Q}{\partial \Theta}$  est symétrique et positif (il généralise la capacité calorifique). Il en résulte que  $z$  est fonction convexe de  $\Theta$  ; la transformation de Legendre lui associe une fonction concave, à savoir

$$(7.3) \quad Q \mapsto s = z - Q\Theta$$

$s$  est l'entropie.

Ces résultats fournissent les bases de la thermodynamique si on les applique au groupe des translations temporelles (il suffit de définir la température absolue  $T$  par la formule  $T = 1/\Theta$ , en ayant choisi une unité de température qui donne la valeur 1 à la "constante de Boltzmann").

Quel peut être l'intérêt physique de la généralisation des états de Gibbs au cas d'un groupe dynamique plus général ? Avant de répondre à cette question, il importe de faire quelques remarques mathématiques.

Si nous appliquons la théorie au cas d'un groupe non commutatif, un fait nouveau apparaît : la symétrie est "brisée"; ce ne sont plus les états de Gibbs qui sont individuellement invariants par le groupe (dans le cas classique, ils constituaient des états "d'équilibre", c'est-à-dire qu'ils étaient invariants par translation temporelle), mais seulement l'ensemble canonique  $\Omega$  lui-même (sur lequel le groupe agit par l'intermédiaire de la représentation adjointe). Ce fait donne naissance à des formules nouvelles, caractéristique des symétries brisées. Ainsi, pour chaque "température"  $\Theta$ , définissons un tenseur  $f_\Theta$ , somme du cocycle  $f$  (défini en (3.2)) et du cobord de la chaleur :

$$(7.4) \quad f_\Theta(z, z') = f(z, z') + Q[z, z']$$

$f_{\Theta}$  jouit alors des propriétés suivantes :

a)  $f_{\Theta}$  est un cocycle symplectique ;

b)  $\Theta \in \ker f_{\Theta}$

c) Le tenseur symétrique  $g_{\Theta}$ , défini sur l'ensemble de valeurs de  $\text{ad}(\Theta)$  par

$$g_{\Theta}([\Theta, Z], [\Theta, Z']) = f_{\Theta}(Z, [\Theta, Z'])$$

est positif (et même défini positif si l'action du groupe est effective).

Ces formules sont universelles, en ce sens qu'elles ne mettent pas en jeu la variété symplectique  $U$  - mais seulement le groupe  $G$ , son cocycle symplectique  $f$  et les couples  $\Theta, Q$ . Peut-être cette "thermodynamique des groupes de Lie" a-t-elle un intérêt mathématique.

- Physiquement, la théorie donne de bons résultats si on l'applique aux divers sous-groupes du groupe de Galilée qui sont caractéristiques des appareils thermodynamiques : ainsi une boîte cylindrique dans laquelle on enferme un fluide lui laisse un sous-groupe d'invariance de dimension 2 : rotations autour de l'axe, translations temporelles. D'où résulte un vecteur température à deux dimensions, que l'on peut "transmettre" au fluide par l'intermédiaire de la boîte, (en la refroidissant, par exemple, et en la faisant tourner) ; les résultats de la théorie sont ceux-là même que l'on exploite dans les centrifugeuses (par exemple pour fabriquer du beurre, de l'uranium 235 ou des acides ribonucléiques).

- On remarquera que le processus par lequel une centrifugeuse réfrigérée transmet son propre vecteur-température à son contenu porte deux noms différents : conduction thermique et viscosité, selon la composante du vecteur-température que l'on considère ; conduction et viscosité devraient donc être unifiées dans une théorie fondamentale des processus irréversibles (théorie qui reste à construire).

- Le passage à la mécanique relativiste est immédiat (remplacement du groupe de Galilée par le groupe de Poincaré) ; on obtient ainsi, sans difficulté conceptuelle, la description d'un gaz parfait relativiste

(sa loi de compressibilité fait intervenir des fonctions de Bessel), d'une centrifugeuse relativiste, et même d'un équilibre statistique de photons.

## § 8 - POURQUOI LA TERRE TOURNE

Nous venons d'étudier des "machines thermodynamiques" associées à des sous-groupes du groupe de Galilée (ou du groupe de Poincaré) ; la machine la plus simple serait évidemment celle qui serait associée au groupe tout entier : elle consisterait simplement en un système (un gaz par exemple) libre dans l'espace.

Mais ces machines ne peuvent pas marcher : si le groupe de Galilée est groupe dynamique d'une variété symplectique quelconque, et si la cohomologie (donc la masse) n'est pas nulle, l'ensemble de Gibbs associé (§6) est vide. Ce théorème résulte immédiatement de (7.5) : en développant la relation (7.5b), on constate qu'elle n'est vérifiée dans aucun ouvert.

Un théorème analogue est valable en ce qui concerne le groupe de Poincaré. Dans le cas galiléen, la difficulté s'analyse facilement grâce au théorème de décomposition barycentrique (voir le §3) : si le système possédait un état d'équilibre, il en serait de même du mouvement de son barycentre (qui se comporte comme un point matériel libre) ; et s'il existait un état d'équilibre statistique pour un point matériel libre, il en existerait aussi pour tout gaz parfait (composé d'atomes dont on néglige les interactions). Or quiconque a trouvé un jour un pneu dégonflé sait que les gaz n'admettent d'équilibre que si leur liberté est soigneusement limitée par un dispositif adéquat.

Mais rien ne nous empêche de rechercher les équilibres thermodynamiques relatifs au barycentre : on sait définir la variété symplectique des mouvements par rapport au barycentre (§3) ; le groupe de Galilée est encore groupe dynamique, mais par l'intermédiaire de son quotient  $SO(3) \times \mathbb{R}$  ,

$f_{\Theta}$  jouit alors des propriétés suivantes :

a)  $f_{\Theta}$  est un cocycle symplectique ;

b)  $\Theta \in \ker f_{\Theta}$

c) Le tenseur symétrique  $g_{\Theta}$ , défini sur l'ensemble de valeurs de  $\text{ad}(\Theta)$  par

$$g_{\Theta}([\Theta, Z], [\Theta, Z']) = f_{\Theta}(Z, [\Theta, Z'])$$

est positif (et même défini positif si l'action du groupe est effective).

Ces formules sont universelles, en ce sens qu'elles ne mettent pas en jeu la variété symplectique  $U$  - mais seulement le groupe  $G$ , son cocycle symplectique  $f$  et les couples  $\Theta, Q$ . Peut-être cette "thermodynamique des groupes de Lie" a-t-elle un intérêt mathématique.

- Physiquement, la théorie donne de bons résultats si on l'applique aux divers sous-groupes du groupe de Galilée qui sont caractéristiques des appareils thermodynamiques : ainsi une boîte cylindrique dans laquelle on enferme un fluide lui laisse un sous-groupe d'invariance de dimension 2 : rotations autour de l'axe, translations temporelles. D'où résulte un vecteur température à deux dimensions, que l'on peut "transmettre" au fluide par l'intermédiaire de la boîte, (en la refroidissant, par exemple, et en la faisant tourner) ; les résultats de la théorie sont ceux-là même que l'on exploite dans les centrifugeuses (par exemple pour fabriquer du beurre, de l'uranium 235 ou des acides ribonucléiques).

- On remarquera que le processus par lequel une centrifugeuse réfrigérée transmet son propre vecteur-température à son contenu porte deux noms différents : conduction thermique et viscosité, selon la composante du vecteur-température que l'on considère ; conduction et viscosité devraient donc être unifiées dans une théorie fondamentale des processus irréversibles (théorie qui reste à construire).

- Le passage à la mécanique relativiste est immédiat (remplacement du groupe de Galilée par le groupe de Poincaré) ; on obtient ainsi, sans difficulté conceptuelle, la description d'un gaz parfait relativiste

(sa loi de compressibilité fait intervenir des fonctions de Bessel), d'une centrifugeuse relativiste, et même d'un équilibre statistique de photons.

## § 8 - POURQUOI LA TERRE TOURNE

Nous venons d'étudier des "machines thermodynamiques" associées à des sous-groupes du groupe de Galilée (ou du groupe de Poincaré) ; la machine la plus simple serait évidemment celle qui serait associée au groupe tout entier : elle consisterait simplement en un système (un gaz par exemple) libre dans l'espace.

Mais ces machines ne peuvent pas marcher : si le groupe de Galilée est groupe dynamique d'une variété symplectique quelconque, et si la cohomologie (donc la masse) n'est pas nulle, l'ensemble de Gibbs associé (§6) est vide. Ce théorème résulte immédiatement de (7.5) : en développant la relation (7.5b), on constate qu'elle n'est vérifiée dans aucun ouvert.

Un théorème analogue est valable en ce qui concerne le groupe de Poincaré. Dans le cas galiléen, la difficulté s'analyse facilement grâce au théorème de décomposition barycentrique (voir le §3) : si le système possédait un état d'équilibre, il en serait de même du mouvement de son barycentre (qui se comporte comme un point matériel libre) ; et s'il existait un état d'équilibre statistique pour un point matériel libre, il en existerait aussi pour tout gaz parfait (composé d'atomes dont on néglige les interactions). Or quiconque a trouvé un jour un pneu dégonflé sait que les gaz n'admettent d'équilibre que si leur liberté est soigneusement limitée par un dispositif adéquat.

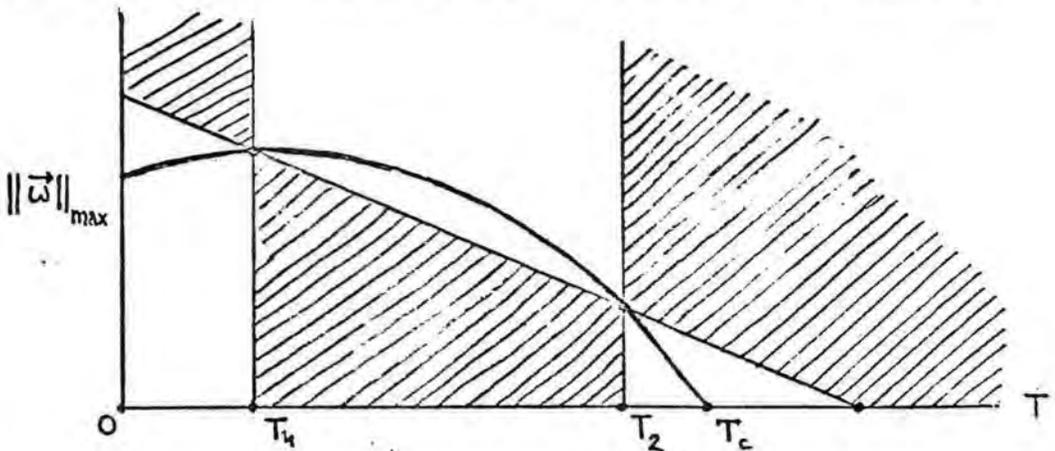
Mais rien ne nous empêche de rechercher les équilibres thermodynamiques relatifs au barycentre : on sait définir la variété symplectique des mouvements par rapport au barycentre (§3) ; le groupe de Galilée est encore groupe dynamique, mais par l'intermédiaire de son quotient  $SO(3) \times \mathbb{R}$ .

si bien qu'il n'y a plus de cohomologie ; les équilibres (au sens du §7) sont a priori possibles.

Cette recherche conduit aux résultats suivants : l'équilibre autour du barycentre est un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe principal d'inertie ; la température généralisée (à quatre dimensions) est composée de la température ordinaire  $T$  et du vecteur rotation  $\vec{\omega}$  ; la capacité calorifique généralisée associe la capacité calorifique usuelle avec le moment d'inertie autour de l'axe de rotation ; toutes les relations thermodynamiques usuelles (à une dimension) se prolongent par des formules quadridimensionnelles.

Si  $\vec{\omega}$  n'est pas nul, la symétrie est spontanément brisée ; les théorèmes du §7 donnent des résultats thermodynamiques nouveaux.

L'un des plus simples (l'ensemble de Gibbs  $\Omega$  est convexe dans l'algèbre de Lie) conduit à la proposition suivante : s'il existe, pour chaque valeur de la température  $T$ , une vitesse limite de rotation  $\|\vec{\omega}\|_{\max}$ ,  $\|\vec{\omega}\|_{\max}$  est une fonction concave de  $T$  (fig. 2) ; si donc, pour un couple de températures  $T_1, T_2$ , la fonction  $T \mapsto \|\vec{\omega}\|_{\max}$  est décroissante, il existera une température critique  $T_c$  au-delà de laquelle aucun équilibre ne pourra plus exister, même à rotation nulle.



- Fig. 2 -

L'astronomie nous fournit de nombreux exemples d'équilibres relatifs de ce type, plus ou moins parfaits : la rotation de la Terre ; le mouvement mutuel de la Terre et de la Lune (s'il était achevé, la Terre, comme la Lune, montrerait toujours la même face à sa partenaire ; les marées travaillent à ce résultat) ; les planètes Troyennes, qui réalisent approximativement, avec le Soleil et Jupiter, la solution de Lagrange du problème des trois corps (un triangle équilatéral qui tourne uniformément autour de son barycentre).

Il n'est pas impossible que les notions développées ici puissent être utiles à l'explication d'autres phénomènes astronomiques (rotation des galaxies ; explosions de supernovae) ou même à l'échelle microphysique (les particules lourdes (hadrons) explosent au-delà d'une température critique voisine de  $10^{12} \text{°K}$ ).

## § 9 - LE FOND DU CIEL

Considérons un système relativiste en équilibre thermodynamique ; la température généralisée  $\Theta$  est un élément de l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré ; elle s'interprète donc comme un champ de vecteurs  $X \mapsto \Theta(X)$  de l'espace-temps ;  $\Theta(X)$  est une isométrie infinitésimale. On obtient ainsi une réponse précise au vieux problème de la "variance de la température" ;  $\Theta(X)$  est un vecteur de genre temps, dont la longueur est l'inverse de la température absolue ; la direction de  $\Theta(X)$  définit en chaque point un référentiel d'équilibre ; enfin son sens permet de distinguer le futur du passé.

Ainsi géométrisée, la notion de vecteur-température s'étend immédiatement à la relativité générale. Il ne s'agit pas d'une généralisation gratuite : on peut la confronter à l'expérience, grâce à la radio-astronomie.

Depuis quelques années en effet, on a découvert que le fond du ciel n'est pas noir, mais infra-rouge ; son rayonnement a été étudié par

des méthodes diverses qui se recourent fort bien, on peut le considérer aujourd'hui comme une des données essentielles de la cosmologie (on l'appelle d'ailleurs "rayonnement cosmologique"). Il définit un vecteur-température (à  $2.7^\circ$  Kelvin) ; l'observation montre que son référentiel d'équilibre coïncide pratiquement avec le référentiel terrestre (parce que l'intensité et le spectre du rayonnement sont les mêmes dans toutes les directions ; une vitesse relative de quelques centaines de kilomètres/seconde serait probablement décelable). Mais  $\odot(X)$  n'est pas une isométrie infinitésimale - seulement une transformation conforme infinitésimale (c'est ce que révèle la coexistence de deux faits : a) le décalage spectral des galaxies éloignées ; b) la composition du rayonnement cosmologique, indiscernable de celle d'un "corps noir"). Cette différence avec l'état d'équilibre théorique manifeste l'expansion de l'univers.

L'existence d'un groupe à un paramètre de "conformismes" et l'équation de la gravitation d'Einstein sélectionnent des modèles d'univers du type Robertson-Walker, qui ne sont pas géodésiquement complets : on ne peut remonter dans le passé au-delà d'une singularité à température infinie, datant de 10 à 20 milliards d'années (le "big bang").

Le rayonnement cosmologique, qui jalonne obligeamment l'univers, doit bien avoir une source : la plus simple à imaginer est la matière elle-même, lorsqu'elle se trouvait dans un état très chaud et très condensé (Gamow). On peut aller un peu plus loin, et supposer que la température a pu atteindre la valeur de  $10^{12}$  K que nous avons évoquée plus haut (§8). A cet "instant initial" a pu se produire un effet inverse de l'explosion des hadrons, à savoir la création de matière à partir de "rien" ; mais cette hypothèse implique une création égale d'antimatière (et par conséquent l'existence d'autant d'antigalaxies que de galaxies dans l'univers). Dans cette cosmogonie, ce que nous voyons au fond du ciel, c'est la création même de la matière, à une distance relativement très petite de notre propre origine (une année-lumière environ) ; mais, par le jeu de l'expansion, la matière que nous voyons naître se trouve aujourd'hui à une centaine de milliards d'années-lumière.

On remarquera que c'est l'expansion elle-même qui refroidit le rayonnement (chaque photon travaille, par le jeu de la pression de radiation, à "gonfler" l'univers, perd de l'énergie et glisse progressivement dans

l'infrarouge) ; ce qui résout le paradoxe d'Olbers : notre regard, dans n'importe quelle direction, finit par rencontrer de la matière brillante ; et pourtant le ciel est noir à nos yeux.

DEUXIEME PARTIE ,

où l'on quantifie.

§ 10 - PAYSAGE.

Variété des droites.

Dans les éléments d'Euclide, on rencontre quelques exemples de variétés : courbes, plan, sphères, etc. On rencontre aussi une variété dont la structure est moins explicite : l'ensemble  $D$  des droites de l'espace.

On peut évidemment repérer une droite au moyen des coordonnées de ses points d'intersection avec deux plans parallèles, c'est-à-dire au moyen de 4 nombres. Seules échappent à ce système de coordonnées locales les droites parallèles aux plans ; par conséquent, en prenant trois paires convenables de plans parallèles, on construira un atlas de l'ensemble  $D$ , qui devient ainsi une variété à 4 dimensions.

$D$  est connexe : il n'est pas difficile de construire un arc joignant deux points quelconques de  $D$  (un enfant jouant avec un bâton sait le manipuler pour l'amener dans n'importe quelle position).

Appelons  $U$  l'ensemble des droites orientées.  $U$  aussi est connexe (on sait, par manipulation, retourner un bâton) ; la projection de  $U$  sur  $D$  qui consiste à oublier l'orientation fait de  $U$  un revêtement à deux feuillets de  $D$  (ce qui montre que  $D$  n'est pas simplement connexe). Ce revêtement est universel (on vérifie que  $U$  est difféomorphe au fibré tangent de la sphère  $S_2$ , donc simplement connexe).

### Lumière diffuse.

Il est traditionnel d'interpréter cette variété  $U$  à 4 dimensions comme l'ensemble des rayons lumineux ; Les vertus didactiques de cette assimilation sont éprouvées (un enfant admet sans difficulté qu'une visée permet de contrôler la rectitude d'une règle). Pourtant l'expérience quotidienne nous met rarement en présence d'un "rayon lumineux" tout seul : nous avons généralement affaire à de la lumière plus ou moins diffuse, qui constitue le paysage offert à nos yeux - ou à nos appareils photographiques.

Il se trouve que cette lumière diffuse peut se décrire par une axiomatique rigoureuse : le paysage est une mesure positive  $\mu$  sur la variété  $U$ .

Le mode d'emploi de  $\mu$  est le suivant : si  $E$  est un écran opaque (une surface orientée), la quantité de lumière reçue sur une face de  $E$  est égale à  $\mu(\Omega_E)$ ,  $\Omega_E$  étant la partie de  $U$  composée des rayons lumineux qui rencontrent  $E$  sur la face considérée.

En imaginant quelques circonstances exemplaires, on se rend facilement compte que cette règle interprète correctement le jeu des ombres, la règle d'inverse-carré pour l'éclairement dû à une source ponctuelle, etc., bref toute la photométrie classique.

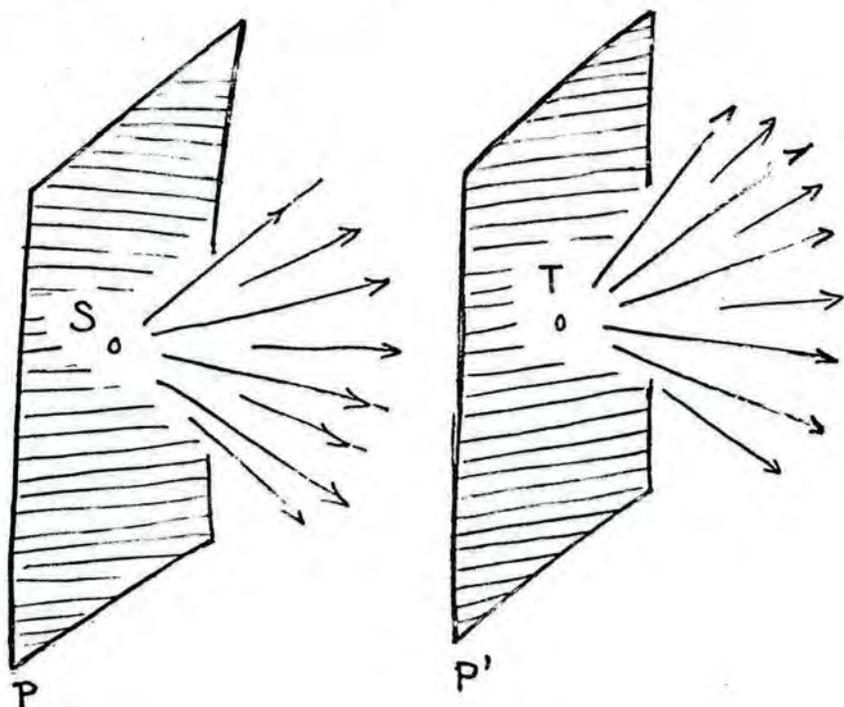
## § 11 - JEUX DANS LA CHAMBRE NOIRE

### Diffraction.

La lumière sera concentrée sur un seul rayon  $x$  si la mesure possède  $x$  comme support.

Pour créer un tel paysage, nous pourrions encore faire appel à deux plans parallèles  $P$  et  $P'$ , cette fois matériels (figure 3) ;  $P$  pourra être la fenêtre d'une chambre noire, percée d'un petit trou  $S$  ;

$P'$  sera un écran percé d'un autre petit trou  $T$ .



- Fig. 3 -

Le phénomène appelé diffraction fait échouer ce projet : si le trou  $T$  est très petit, il éclaire toute la partie de la chambre située derrière  $P'$  ; on n'arrive pas à concentrer la lumière sur le rayon  $x = ST$  , mais seulement sur la variété des rayons issus de  $T$  , dont la dimension est 2 .

Des expériences analogues montrent que l'on ne peut jamais concentrer la lumière sur des sous-variétés de  $U$  dont la dimension est inférieure à 2 ; de plus, toutes les variétés de dimension 2 ne sont pas acceptées : si l'on essaie de concentrer la lumière sur les rayons contenus dans un plan (en remplaçant les trous  $S$  et  $T$  par des fentes rectilignes parallèles), on observe dans la chambre noire tous les rayons issus de la fente ; le support de la lumière est une variété de dimension 3 .

Au § 12 , nous caractériserons les variétés de dimension 2 qui peuvent être support du paysage.

## Interférences.

L'expérience d'Young consiste à percer dans l'écran P' deux trous  $T_1$  et  $T_2$  ; on peut alors observer derrière (et recueillir sur un écran) des franges colorées, appelées franges d'interférence. (fig.4).

Le même effet peut s'observer, sans aucun matériel, en regardant Sirius: les fluctuations de l'atmosphère créent un réseau de franges d'interférence mobiles, qui défilent sur notre oeil : d'où le scintillement de l'étoile que l'on observe : sa lumière varie aléatoirement, non seulement en intensité, mais aussi en couleur.

Revenons à l'expérience d'Young ; on éliminera l'effet de couleur en intercalant, devant la chambre, un monochromateur (qui peut être construit à l'aide d'un prisme de verre). Alors les franges sont plus nettes, et leur situation est donnée par la règle d'Young (1802) : un point B est situé sur une frange brillante si la différence des longueurs des lignes brisées  $ST_1B$  et  $ST_2B$  est multiple entier d'une longueur  $\lambda$ , qui caractérise la couleur de la lumière (et que Fresnel a interprété comme longueur d'onde de la lumière).

## § 12 - LE SEJOUR DE LA LUMIERE

### Géométrisation de la Règle d'Young.

Soit  $V$  la variété de dimension 5 parcourue par la variable

$$(12.1) \quad y = (\vec{u}, \vec{r})$$

où  $\vec{r}$  est un point de l'espace, pris sur un rayon lumineux  $x$ , et  $\vec{u}$  le vecteur unitaire porté par le rayon, indiquant le sens de propagation. On notera que  $\vec{u}$  et  $\vec{r}$  caractérisent le rayon lumineux, donc qu'il existe

une application  $y \mapsto x$  ; cette application est une submersion de  $V$  sur  $U$  (fig. 4).

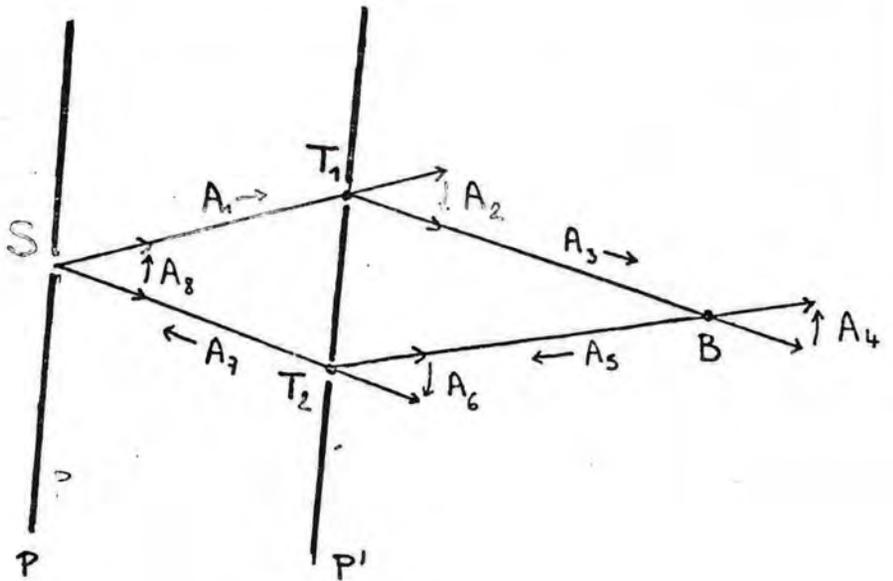
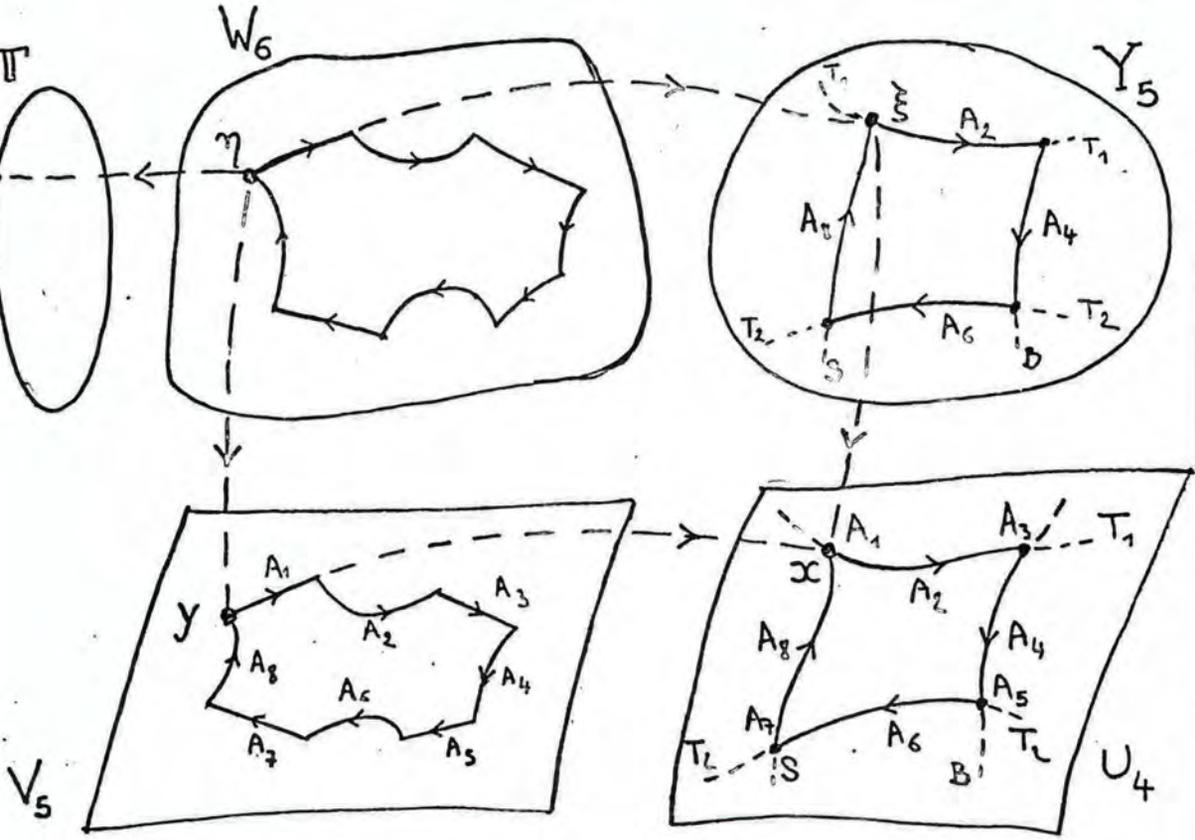
On remarque alors que l'on peut écrire

$$(12.2) \quad ST_1 B - ST_2 B = \oint \langle \vec{u}, d\vec{r} \rangle$$

l'intégrale du second membre étant prise sur un circuit fermé tracé dans  $V$ , composé de 8 arcs  $A_i$  placés bout à bout : sur  $A_1$ ,  $\vec{r}$  parcourt le segment  $ST_1$ ,  $\vec{u}$  étant fixe dans la direction de  $\vec{ST}_1$  ; sur  $A_2$ ,  $\vec{r}$  reste fixe en  $T_1$ ,  $\vec{u}$  varie (arbitrairement) depuis la direction de  $\vec{ST}_1$  jusqu'à celle de  $\vec{T_1 B}$  ; sur  $A_3$ ,  $\vec{r}$  parcourt  $T_1 B$  ; etc. (voir la figure). On remarquera que, sur les arcs  $A_5$  et  $A_7$ ,  $\vec{r}$  remonte les rayons lumineux (ce qui permet d'obtenir le signe - figurant au premier membre de (12.2)).

Nous pouvons donc écrire maintenant la règle d'Young sous la forme

$$(12.3) \quad \frac{1}{\lambda} \oint \langle \vec{u}, d\vec{r} \rangle \in \mathbb{Z}$$



- Fig. 4 -

ou encore

$$(12.4) \quad \exp\left(\frac{2i\pi}{\lambda} \oint \langle \vec{u}, d\vec{r} \rangle\right) = 1$$

Cette dernière condition va s'interpréter géométriquement en construisant une variété  $W$ , de dimension 6, produit direct de  $V$  par le tore  $\mathbb{T}$  (groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1), parcourue par la variable

$$(12.5) \quad \eta = (\vec{u}, \vec{r}, z) \quad \vec{u} \in S_2, \vec{r} \in \mathbb{R}^3, z \in \mathbb{T};$$

on définira ensuite sur  $W$  une 1-forme  $\overline{\omega}_W$  par la formule

$$(12.6) \quad \overline{\omega}_W(\delta\eta) = \frac{2\pi}{\lambda} \langle \vec{u}, \delta\vec{r} \rangle + \frac{\delta z}{iz} \quad \forall \delta\eta$$

et on remarquera que la formule (12.4) est équivalente à la condition :

7) [ On peut relever le circuit tracé dans  $V$  par un circuit tracé dans  $W$  le long duquel la forme  $\overline{\omega}_W$  s'annule.

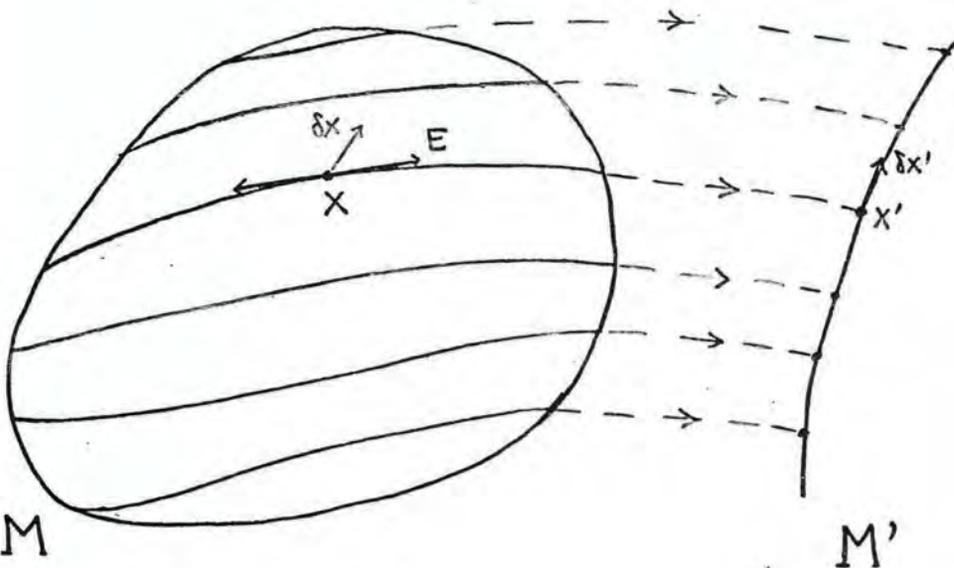
En effet, la nullité de  $\overline{\omega}_W$  peut s'écrire

$$z \times \exp\left(\frac{2i\pi}{\lambda} \int \langle \vec{u}, d\vec{r} \rangle\right) = C^{te}$$

et la condition (12.4) exprime bien que, lorsque  $\gamma$  a parcouru le circuit,  $z$  reprend sa valeur initiale (donc que  $\eta$  revient au même point).

### Réduction des Formes

Rappelons quelques résultats d'Elie Cartan.



- Fig. 5 -

Soit  $M$  une variété munie d'une forme différentielle extérieure  $\alpha$  (de degré  $p$  quelconque) ; désignons par  $\nabla\alpha$  la dérivée extérieure de  $\alpha$  ( $\nabla\alpha$  est une  $(p+1)$ -forme).

En chaque point  $X$  de  $M$  (figure 5) , on peut définir un sous-espace vectoriel  $E$  de l'espace tangent par la formule

$$E = \ker(\alpha) \cap \ker(\nabla\alpha)$$

$\ker(\alpha)$  désigne l'ensemble des vecteurs tangents qui, contractés avec  $\alpha$  donnent une forme nulle. Supposons la dimension de  $E$  constante.

Alors le champ  $X \mapsto E$  est un feuilletage (on dit aussi "distribution involutive"), appelé feuilletage caractéristique de la forme  $\alpha$  ; au moins localement, il existe une submersion  $X \mapsto X'$  de  $M$  sur une variété  $M'$  telle que

$$\delta X \in E \iff \delta X' = 0$$

ce qui implique que  $\dim(M') = \dim(M) - \dim(E)$  ; la forme  $\alpha$  passé au quotient : il existe une p-forme  $\alpha'$  de  $M'$  dont l'image réciproque par  $X \mapsto X'$  est égale à  $\alpha$  .

Nous avons ainsi réduit le couple  $(M, \alpha)$  à  $(M', \alpha')$  ; on remarque que  $(M', \alpha')$  est irréductible, parce que l'espace  $E' = \ker(\alpha')$   $\cap \ker(\nabla\alpha')$  est réduit à 0 . Traitons le cas  $M=W$ ,  $\alpha = \overline{\omega}_W$  .

La variété quotient - que nous appellerons  $Y$  (figure 4) - est de dimension 5 ; ses points  $\xi$  sont les classes d'équivalence de  $W$  pour la relation  $\sim$  :

$$(12.8) \quad [(\vec{u}, \vec{r}, z) \sim (\vec{u}', \vec{r}', z')] \Leftrightarrow [\exists s \in \mathbb{R} / \vec{u}' = s\vec{u}, \vec{r}' = \vec{r} + s\vec{u}, z' = ze^{-\frac{Ls}{\lambda}}]$$

la forme  $\overline{\omega}_Y$ , transportée de  $\overline{\omega}$  sur  $Y$ , est donnée par

$$(12.9) \quad \overline{\omega}_Y(\delta\xi) = \frac{2\pi}{\lambda} \langle \vec{u}, \delta\vec{r} \rangle + \frac{\delta z}{iz}$$

La dérivée extérieure  $\sigma_W = \nabla\overline{\omega}_W$  passe aussi sur  $Y$  :

$$(12.10) \quad \sigma_W(\delta\eta, \delta'\eta) = \sigma_Y(\delta\xi, \delta'\xi) = \frac{2\pi}{\lambda} [\langle \delta\vec{u}, \delta'\vec{r} \rangle - \langle \delta'\vec{u}, \delta\vec{r} \rangle]$$

mais elle est encore réductible sur  $Y$  ; il se trouve que sa réduction fait redescendre sur l'espace des mouvements  $U$ , qui se trouve ipso facto munie d'une structure symplectique :

$$(12.11) \quad \sigma_U(\delta x, \delta' x) = \frac{2\pi}{\lambda} [\langle \delta\vec{u}, \delta'\vec{r} \rangle - \langle \delta'\vec{u}, \delta\vec{r} \rangle]$$

les flèches reliant les variétés  $W, Y, V, U$  (figure 4) forment un diagramme commutatif.

On remarque que le tore agit sur la variété  $W$  en respectant

la forme  $\overline{\omega}_W$ , grâce à la formule :

$$(12.12) \quad \zeta(\vec{u}, \vec{r}, z) = (\vec{u}, \vec{r}, \zeta z) \quad \forall \zeta \in \mathbb{T}, \forall (\vec{u}, \vec{r}, z) \in W$$

et que cette action est compatible avec la projection de  $W$  sur  $Y$  ; ce qui montre que  $Y$  est un espace fibré principal, de groupe structural  $\mathbb{T}$ , dont la base est  $U$ . On remarque que le générateur infinitésimal de l'action du tore (que nous noterons  $\delta_{\eta}$ ) est défini, à l'aide de  $\overline{\omega}_Y$ , par les deux formules

$$(12.13) \quad \overline{\omega}(\delta_{\eta}) = 1, \quad \nabla \overline{\omega}(\delta_{\eta}) = 0$$

Le circuit composite que nous avons tracé dans  $W$  (figure 4) se projette non seulement sur  $V$ , mais aussi sur  $Y$  et  $U$  ; les arcs impairs  $A_1, A_3, \dots$ , qui suivent des rayons lumineux, se projettent selon des points  $A_1, A_3, \dots$ , de  $U$ , donc aussi de  $Y$ . Quant aux arcs pairs  $A_2, A_4, \dots$  ils se projettent sur des arcs de  $Y$  où la forme  $\overline{\omega}$  s'annule.

Ces arcs comportent une part d'arbitraire : nous les avons caractérisés par leurs deux extrémités, et par la fixité de  $\vec{r}$  ( $\vec{r} = T_1$  pour  $A_2$ ,  $\vec{r} = B$  pour  $A_4$ , etc.). Si on les change, chacun d'eux va balayer, dans  $Y$ , une variété de dimension 2 sur laquelle la forme  $\overline{\omega}$  s'annule : ce que nous appellerons variété de Planck (Nous les avons désignées respectivement par  $T_1, B, T_2, S$  sur le dessin de  $Y$ ).

Bien entendu, la dérivée extérieure de  $\overline{\omega}$  s'annule aussi sur ces variétés ; propriété qui passe en projection sur  $U$  ; les arcs  $A_2, A_4, \dots$  de  $U$  sont donc tracés sur des variétés  $T_1, B, \dots$ , de dimension 2, sur lesquelles  $\sigma$  s'annule : ce qu'on appelle des variétés lagrangiennes.

Les variétés lagrangiennes <sup>(1)</sup> sont les seules variétés de dimension 2 qui peuvent supporter un paysage, malgré la diffraction (cf. le § 11) ; l'exemple le plus simple étant la variété  $\vec{u} = Cte$  supportant la lumière venue d'une étoile.

(1) Elles sont connues, en optique géométrique, sous le nom de "congruences de normales".

## § 13 - EXISTENCE DES PHOTONS

Effet photoélectrique.

L'espace  $U$  des rayons lumineux se trouve désormais muni d'une structure symplectique, tout comme l'espace des mouvements d'un système dynamique (§ 1).

Peut-on, grâce à cette analogie, mécaniser la lumière ?

Utilisons la théorie des moments (§2) ; en effet, la structure symplectique (12.11) de  $U$  est invariante par l'action du groupe des déplacements euclidiens ; le moment associé - s'il s'agissait d'un système dynamique - serait donc composé d'une impulsion  $\vec{p}$  et d'un moment cinétique  $\vec{\ell}$ . Le calcul de ce moment est immédiat en partant de (12.11) ; on trouve

$$(13.1) \quad \vec{p} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u}, \quad \vec{\ell} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \vec{r} \times \vec{u}$$

Pour interpréter ces formules, on peut faire appel à l'effet photoélectrique : en 1905, Einstein a analysé ce phénomène, et montré que la lumière s'y comportait comme si elle était composée de particules, qu'il a nommés photons, et dont il a déterminé l'énergie et l'impulsion. Il se trouve que l'impulsion du photon est donnée par la formule

$$(13.2) \quad \vec{p} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u}$$

que nous avons écrite en (13.1), à la condition de choisir des unités de longueur, masse, temps telles que la constante de Planck

$$(13.3) \quad h = 6,6262 \dots \times 10^{-27} \text{ g cm}^2 \text{ s}^{-1}$$

prenne la valeur  $2\pi$  (ce qu'on appelle des "unités quantiques").

L'analogie de structure entre optique et mécanique peut donc dépasser le stade de la remarque mathématique.

Cristal de roche et homologie

Il importe maintenant de confronter la seconde des formules (13.1) à l'expérience, c'est-à-dire de mesurer le moment cinétique du photon.

Pour y parvenir, il faut analyser la lumière plus finement qu'avec un monochromateur ordinaire. Fresnel a découvert, en effet, qu'un rayon apparemment monochromatique pouvait encore être partagé en deux en utilisant un prisme de quartz.

Les deux rayons sont séparés d'environ une minute d'angle ; ils sont dans l'état appelé "polarisation circulaire", l'un à droite, l'autre à gauche (1).

Ce sont les photons polarisés circulairement qui se prêtent à la mesure du moment cinétique ; le résultat est le suivant (en unités quantiques)

$$(13.4) \quad \vec{\ell} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{r} \times \vec{u} \pm s \vec{u}$$

s étant un nombre appelé spin du photon ; le signe  $\pm$  dépend de l'état de polarisation.

Par conséquent, les mesures montrent que les formules (13.1) ne sont qu'approchées, et qu'il faut les remplacer par (13.2, 13.4) . Du coup, il faut corriger la structure symplectique de U .

Nous savons comment ; en effet, le couple  $(\vec{p}, \vec{\ell})$  défini par ces formules est un élément du dual de l'algèbre de Lie du groupe des déplacements euclidiens ; l'orbite engendrée est naturellement symplectique, grâce au théorème de Kirillov (voir le §6) ; ce qui nous fournit la correction nécessaire à la formule (12.11) :

---

(1) On trouve dans la nature deux espèces de "cristal de roche" ; l'une dévie plus le rayon gauche que le rayon droit, et inversement pour l'autre. La disposition des atomes dans l'un des cristaux est l'image dans un miroir de celle de l'autre.

$$(13.5) \quad \sigma(\delta x, \delta' x) = \frac{2\pi}{\lambda} [\langle \delta \vec{u}, \delta' \vec{r} \rangle - \langle \delta' \vec{u}, \delta \vec{r} \rangle] \pm s \langle \vec{u}, \delta \vec{u} \times \delta' \vec{u} \rangle$$

On peut si l'on veut faire disparaître le double signe (en ne considérant que des photons de polarisation donnée), mais il faut alors réduire le groupe des déplacements à sa composante neutre (groupe des déplacements conservant l'orientation de l'espace).

Nous sommes en face d'un problème plus délicat pour corriger la structure de la variété  $Y$  : nous voulons a priori conserver ses caractéristiques géométriques essentielles :

- a)  $Y$  est une variété munie d'une 1-forme  $\overline{\omega}$  ;  
 b) le champ de vecteur  $\xi \mapsto \delta_\xi$  de  $Y$  défini par les formules (12.13)

$$\overline{\omega}(\delta_\xi) = 1 \quad \delta_\xi \in \ker(\nabla \overline{\omega})$$

est le générateur d'une action du tore sur  $Y$  ;

- c) cette action de  $\mathbb{T}$  fait de  $Y$  un espace fibré de base  $U$  ; l'image réciproque de la forme symplectique  $\sigma$  de  $U$  par la projection coïncide avec la dérivée extérieure  $\nabla \overline{\omega}$ .

En partant de la structure symplectique (13.4), la construction de la variété  $Y$  pose un problème de topologie différentielle que l'on sait heureusement résoudre ; on montre qu'il n'existe une solution que si la classe d'homologie entière de la forme  $\sigma$  est nulle, ce qui s'écrit ici

$$(13.7) \quad 2s \in \mathbb{Z} ;$$

à chaque solution de (13.7) correspond une solution  $(Y, \overline{\omega})$  de l'axiomatique (13.6).

Le photon correspond effectivement au cas  $s = 1$  <sup>(1)</sup> ; c'est-à-dire, si on n'a pas choisi d'unités quantiques, à

$$(13.8) \quad s = \frac{h}{2\pi} = 1.05459 \times 10^{-27} \text{ g cm}^2 \text{ s}^{-1}$$

(1) Le neutrino correspond au cas  $s = 1/2$ , aussi compatible avec (13.7).

cette quantité est habituellement notée  $\hbar$ .

La géométrie correspondant à cette valeur du spin explique un certain nombre d'effets ; effets qui ont conduit Fresnel à interpréter la lumière comme une vibration transversale.

Contentons-nous de décrire un effet qualitatif de l'existence du spin : le dernier terme de (13.5) montre que la variété des rayons qui passent par un point fixe n'est plus une variété lagrangienne (faire  $\vec{r} = \text{Cte}$ ) ; cependant un faisceau de lumière parallèle ( $u = \text{Cte}$ ) est toujours lagrangien.

Ceci correspond au fait que l'expérience d'Young ne réussit que si  $\vec{u}$  varie peu (en chacun des 4 points  $S, T_1, T_2, B$ ) - faute de quoi les franges s'évanouissent : on n'obtient d'interférences qu'entre des faisceaux de lumière quasi-parallèles entre eux.

#### § 14 - MECANIQUE QUANTIQUE ET TOPOLOGIE

Généralisons : si  $U$  est la variété symplectique des mouvements d'un système dynamique quelconque, nous allons supposer qu'il existe, au-dessus de  $U$ , un espace fibré  $Y$  vérifiant l'axiomatique (13.6) ; la construction de  $Y$  s'appellera préquantification de  $U$  ;  $Y$  s'appellera variété quantique.

Nous venons de voir que l'existence de  $Y$  implique une condition homologique ; elle se trouve effectivement vérifiée, non seulement pour le photon, mais pour toutes les particules à spin (dont la variété  $U$  a été construite au § 6).

L'unicité de  $Y$  va s'exprimer par une condition homotopique. De façon précise, si la préquantification d'une variété symplectique  $U$  est possible, on démontre que le nombre de ses solutions est égal au nombre de caractères<sup>(1)</sup> du groupe fondamental d'homotopie de  $U$ .

(1) On appelle caractère d'un groupe  $G$  tout morphisme de  $G$  dans le tore  $T$ .

Il s'agit bien entendu de solutions essentiellement distinctes : deux quantifications  $Y$  et  $Y'$  sont considérées comme identiques s'il existe un difféomorphisme de  $Y$  sur  $Y'$  qui envoie la forme  $\overline{\omega}$  sur  $\overline{\omega}'$  et qui se projette sur  $U$  suivant l'identité.

Deux quantifications distinctes correspondent à des propriétés physiques distinctes : c'est ce que montre le cas d'un système dynamique composé de  $n$  particules identiques. Le groupe d'homotopie de  $U$  est alors le groupe symétrique  $S_n$  ; chacun sait qu'il possède deux caractères, le caractère trivial et la parité. A chacun de ces caractères correspond donc une pré-quantification distincte ; l'expérience nous montre laquelle est choisie par la nature : dans le premier cas, les particules s'appellent des bosons (elles se conforment à la statistique de Bose-Einstein) ; dans le second cas, des fermions (statistique de Fermi-Dirac).

Le comportement des fermions est caractérisé élémentairement par le "principe d'exclusion de Pauli" qui joue un rôle fondamental dans la chimie quantique (classification de Mendeleev), dans la physique de l'état solide, etc. Par contre, les bosons, non soumis au principe d'exclusion, peuvent présenter des états particuliers où les propriétés quantiques passent à l'échelle macroscopique : superfluidité de l'hélium, lumière cohérente des lasers, etc.

## § 15 - QUANTIFICATION

### Etats Quantiques.

Nous avons vu au § 7 que les états de la mécanique statistique non quantique pouvaient s'interpréter comme des lois de probabilité sur la variété  $U$  des mouvements.

Ces états statistiques classiques semblent n'être qu'une approximation d'objets géométriques plus raffinés, les états quantiques, que

nous allons décrire.

Donnons quelques définitions mathématiques préalables.

- Si  $Y$  est une variété quantique (§ 14), nous appellerons quantomorphismes les difféomorphismes de  $Y$  qui respectent la forme  $\omega$ ; ils forment évidemment un groupe  $\text{Quant}(Y)$ . Il résulte des axiomes (13.6) des variétés quantiques que les quantomorphismes respectent la fibration de  $Y$  au-dessus de  $U$ , donc qu'il existe un morphisme

$$(15.1) \quad \text{Quant}(Y) \longrightarrow \text{Symp}(U)$$

du groupe des quantomorphismes de  $Y$  dans le groupe des symplectomorphismes de  $U$  (§ 2). Le noyau de ce morphisme est le tore  $\mathbb{T}$  (qui est le centre de  $\text{Quant}(Y)$ ); dans certains cas, on peut montrer que (15.1) est surjectif, donc que  $\text{Quant}(Y)$  est une extension centrale de  $\text{Symp}(U)$ .

$\text{Quant}(Y)$  est donc un groupe de dimension infinie, comme  $\text{Symp}(U)$ . On pourra interpréter comme algèbre de Lie de  $\text{Quant}(Y)$  les champs de vecteurs de  $Y$  qui engendrent un groupe à un paramètre de quantomorphismes; contracté avec la forme  $\omega$ , un tel champ de vecteurs engendre un champ scalaire  $\xi \mapsto u$ ; on vérifie que  $u$  ne dépend en fait que du mouvement  $x$  (on dit que  $u$  est une variable dynamique); que la donnée de  $u$  définit complètement le champ de vecteur, que nous pourrions donc noter  $Z_u$ . On constate alors que :

$$(15.2) \quad [Z_u, Z_v] = \hbar Z_{[u,v]}$$

où  $[Z_u, Z_v]$  est un crochet de Lie,  $[u,v]$  un crochet de Poisson.

- Si  $G$  est un groupe quelconque, on appelle fonction de type positif sur  $G$  toute application  $F$  de  $G$  dans  $\mathbb{C}$  vérifiant la propriété :

$$(15.3) \quad \left[ \begin{array}{l} \text{Si } n \in \mathbb{N}, \text{ si } a_1, a_2, \dots, a_n \in G, \text{ si } z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}, \text{ alors} \\ \sum_{j,k} \bar{z}_j z_k F(a_j^{-1} a_k) \geq 0 \end{array} \right.$$

On peut alors définir (provisoirement) les états quantiques comme les fonctions  $F$  définies sur le groupe  $\text{Quant}(Y)$  et qui vérifient les axiomes :

- (15.4)  $\left[ \begin{array}{l} \text{a) } F \text{ est une fonction de } \underline{\text{type positif}} ; \\ \text{b) } F(z) = z \quad \forall z \in \mathbb{T} \text{ (on se souvient que } \mathbb{T} \text{ est le centre de } \text{Quant}(Y) \text{)} ; \\ \text{c) } F \text{ est continue (en un sens qu'il faut formuler de façon précise, à cause de la dimension infinie du groupe).} \end{array} \right.$

En utilisant le théorème de Bochner, on peut établir le résultat suivant :

Soit  $u$  une variable dynamique engendrant un groupe à un paramètre de quantomorphismes  $t \mapsto \exp(tZ_u)$  ; soit  $F$  un état quantique (15.4). Alors la fonction

(15.5) 
$$\varphi : t \mapsto F(\exp(tZ_u))$$

est la transformée de Fourier d'une loi de probabilité  $\mu$  de  $\mathbb{R}$  :

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} d\mu(s)$$

On pose comme principe de la mécanique quantique que cette loi de probabilité est la seule prédiction possible sur le résultat de la mesure de  $u$  dans l'état  $F$  ; les variables dynamiques sont aléatoires dans les états quantiques comme dans les états statistiques. Il existe cependant des différences fondamentales entre ces deux types d'états, que nous allons examiner rapidement.

- Grâce à l'axiome (15.4b), on constate que la mesure d'une variable dynamique constante  $k$  conduit sûrement à cette valeur  $k$  (la loi de probabilité  $\mu$  est la mesure de Dirac  $\delta(k)$ ). Mais si une variable dynamique prend ses valeurs dans un intervalle  $[a, b]$ , le support de la mesure peut sortir de cet intervalle : ce fait (l'effet tunnel) permet d'obtenir des valeurs interdites par la mécanique classique.

- Soit  $F$  une fonction de classe  $C^2$  sur un groupe de Lie  $G$  (d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ ) ; on peut donner un développement au second ordre de  $F$  au voisinage de l'élément neutre  $e$ , par exemple en utilisant des coordonnées exponentielles.

Si  $F$  est de type positif et normée ( $F(e) = 1$ ), on montre que

ce développement est de la forme

$$(15.6) \quad a) \quad F(\exp(z)) = 1 + i M(z) - \frac{1}{2} [M(z)^2 + V(z, z)] + o(\|z\|^2) \quad z \in \mathfrak{g}$$

M et V étant respectivement une forme linéaire et une forme bilinéaire symétrique réelles qui vérifient :

$$b) \quad V(z, z) \geq 0 \quad \forall z$$

$$c) \quad V(z, z) V(z', z') \geq V(z, z')^2 + \frac{1}{4} M([z, z'])^2 \quad \forall z, z'$$

$[z, z']$  désignant le crochet de Lie de l'algèbre  $\mathfrak{g}$ .

Ce théorème général possède une conséquence quantique : si le système étudié est une particule mobile sur un axe, on peut mesurer son impulsion  $p$  et son abscisse  $x$  ; il se trouve que le crochet de Poisson  $[p, x]$  vaut 1 ; que  $Z_x$  et  $Z_p$  engendrent un groupe de Lie de dimension 3 (le groupe de Weyl-Heisenberg) ; avec les notations (15.6),  $M(Z_x)$  et  $M(Z_p)$  sont respectivement les valeurs moyennes des variables aléatoires  $x, p$  dans l'état  $F$  ;  $V(Z_x, Z_x)$  et  $V(Z_p, Z_p)$  les variances de ces variables (carrés des écarts quadratiques moyens  $\Delta x, \Delta p$ ) ; les formules (15.2) et (15.6) donnent alors

$$(15.7) \quad \Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

c'est la relation d'incertitude de Heisenberg, sous sa forme la plus précise.

## Etats purs

Nous avons vu au §7 que les mouvements d'un système dynamique (les points  $x$  de la variété  $U$ , identifiés à la mesure de Dirac  $\delta(x)$ ) pouvaient être considérés comme des états statistiques particuliers.

On vérifie facilement que l'ensemble des états statistiques est un ensemble convexe, et que les états classiques sont les points extrémaux de ce convexe <sup>(1)</sup>.

On constate immédiatement sur (15.4) que les états quantiques forment aussi un ensemble convexe : il est donc naturel de rechercher les points extrémaux de ce convexe, que l'on appellera états purs ; ce sont les états quantiques qui "ressembleront le plus" à un mouvement classique.

Le théorème de Gelfand-Naimark-Segal nous indique, si  $F$  est une fonction de type positif sur un groupe  $G$  quelconque, qu'il existe

- a) un espace de Hilbert  $H$ ,
- b) une représentation unitaire  $a \mapsto \underline{a}$  de  $G$  sur  $H$ ,
- c) un vecteur  $\Psi \in H$

tels que

$$(15.8) \quad F(a) = \langle \Psi, \underline{a}(\Psi) \rangle \quad \forall a \in G$$

on peut même supposer que  $\Psi$  est cyclique, c'est-à-dire que l'espace engendré par les  $\underline{a}(\Psi)$  est dense dans  $H$  ; alors les éléments de cette construction sont uniques (à une équivalence unitaire près).

On associera par ce moyen une représentation unitaire de  $\text{Quant}(Y)$  à tout état quantique  $F$  ; si  $F$  est un état pur, on constate que cette représentation est irréductible.

Certains faits suggèrent que ces états purs peuvent se construire au moyen des fonctions d'onde de la mécanique quantique. Ces fonctions, solutions des diverses "équations d'onde" (équation de Schrödinger, de Dirac, de Maxwell, etc.), forment effectivement des espaces de représentation

---

(1) un point  $X$  d'un convexe  $K$  est dit extrémal si  $K - X$  est convexe.

unitaire pour divers groupes de quantomorphismes ; on peut leur associer, par la réciproque du théorème de Gelfand-Maimark-Segal, des fonctions de type positif sur ces groupes. Mais on ne sait pas, en général si ces représentations se prolongent au groupe  $\text{Quant}(Y)$  tout entier, de façon à trouver un état quantique pur. La méthode des polarisations et du pairing (développée notamment par Blattner, Kostant, Sternberg) a permis de faire des progrès en ce sens ; elle met en jeu la notion de variété de Planck et de variété lagrangienne que nous avons rencontrée en interprétant les interférences (§12) ; elle fait aussi intervenir l'indice topologique défini par Maslov (dont la définition a été précisée par Arnold et Leray).

Prenons un exemple : celui de l'oscillateur linéaire, dont l'ensemble  $\mathcal{U}$  des mouvements possède une structure d'espace vectoriel.

Les quantomorphismes qui se projettent sur  $U$  (par (15.1)) suivant des translations forment un groupe de Lie (le groupe de Heisenberg-Weyl) ; on vérifie que l'espace des solutions de l'équation de Schrödinger est un espace de représentation unitaire irréductible de ce groupe (c'est la "représentation de Schrödinger").

Mais si nous prenons un groupe plus grand, constitué des quantomorphismes qui se projettent en  $U$  selon des transformations affines, un fait nouveau apparaît : l'espace des solutions de l'équation de Schrödinger fournit une représentation unitaire irréductible d'un revêtement à deux feuillets de ce groupe, le groupe métaplectique (on obtient ainsi la représentation de Shale-Weil).

Il est donc nécessaire de modifier la définition "provisoire" (15.4) des états quantiques (en particulier on remplace le groupe  $\text{Quant}(Y)$  par un revêtement de ce groupe, ce qui ne change rien aux résultats locaux que nous avons obtenus : effet tunnel, relations d'incertitude).

L'ensemble des états quantiques ainsi défini est encore un convexe ; le groupe des symplectomorphismes de  $U$  agit sur cet ensemble, ce qui montre que les états quantiques sont des objets de géométrie symplectique (au sens de Felix Klein), de même que les mouvements classiques : expression géométrique du "principe de correspondance". Mais on ne sait pas si effectivement les solutions de l'équation de Schrödinger peuvent être interprétées comme points extrêmes de ce convexe.

- REFERENCES -

V.I. ARNOLD

Une classe caractéristique intervenant dans les conditions de quantification,  
J. Anal. Fonctionnelle (en russe) 1 (1967), p. 1-14.

V. BARGMANN

Ann. Math. 59, 1 (1954), p. 1-41.

R. BLATTNER

Quantization and Representation Theory,  
Conférence Williamstone (A.M.S.).

Pairing of Half-Form Spaces,  
Colloque International du CNRS "Géométrie symplectique et physique mathématique", Aix-en-Provence 1974 (Ed. CNRS, 1976).

E. CARTAN

Leçons sur les invariants intégraux.

A. EINSTEIN

Sur un point de vue heuristique concernant la production et la transformation de la lumière,  
Ann. Phys. (1905).

V. GUILLEMIN, S. STERNBERG

Geometrical Asymptotics (Livre à paraître).

A.I. KHINCHIN

Mathematical Foundations of Statistical Mechanics (1949).

A. KIRILLOV

Eléments de la théorie des représentations,  
(Editions de Moscou, 1975).

B. KOSTANT

Orbits and Quantization Theory,  
Int. Congr. Math., Nice (1970).

Symplectic Spinors, Symp. Mat., 14 (1974), p. 139-152.

J.L. LAGRANGE

Mécanique Analytique, (réédition A. Blanchard, 1965).

J. LERAY

Complément à la théorie d'Arnold de l'indice de Maslov,  
Symp. Mat. 14 (1974), p. 33-51.

V.P. MASLOV

Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques,  
(Dunod, 1972).

M.A. NAIMARK

Normed Rings, (Noordhoff, 1959).

L.I. SCHIFF

Quantum Mechanics, (Mc Graw Hill, 1955).

J.M. SOURIAU

Structure des systèmes dynamiques, (Dunod, 1969).

Mécanique statistique, groupes de Lie et cosmologie,  
Colloque International du CNRS "Géométrie symplectique et physique  
mathématique", Aix-en-Provence 1974 (Ed. CNRS, 1976).