UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI ROMA
FACOLTA' DI INGEGNERIA

PUBBLICAZIONI DELL'ISTITUTO DI MATEMATICA APPLICATA

N. 191

V. MARINO - L. GUALANDRI

L'INDICE DI MASLOV

Appunti tratti dalle lezioni del prof. J. M. Souriau

ROMA
1978

151. - A. CARFAGNA D'ANDREA: *Sulla rappresentazione del piano di De Sitter su un piano di Minkowski.* Le Matematiche, vol. XXIX (1974).

152. - C. BELINGERI: *Sulle formule di quadratura di Pólya.* Le Matematiche, vol. XXIX (1974).

153. - A. OSSICINI - F. ROSATI: *Sulla valutazione numerica degli integrali.* Rendiconti di Matematica, vol. 8 (1975).

154. - V. DICUONZO: *On Minkowski planes of even order.* Rendiconti di Matematica, vol. 8 (1975).

155. - C. VALENTE: *Precessioni regolari di un satellite a struttura giroscopica.* Rendiconti di Matematica, vol. 8 (1975).

156. - V. DICUONZO: *On involution geometry of a projective line over a field of characteristic 2.* Accademia Nazionale dei Lincei, vol. LVIII (marzo 1975).

157. - F. BONGIORNO: *Su una classe di equazioni funzionali.* Rendiconti di Matematica, vol. 8 (1975).

158. - A. MORELLI: *Alcune osservazioni sul teorema di Lerch nel caso di intervalli infiniti.* Rendiconti di Matematica, vol. 8 (1975).

159. - QUADERNO n. 7 - M. L. LO CASCIO: *Formule chiuse di cubatura generalizzate;* L. SANTOBONI: *Un problema di ottimo relativo ad alcune operazioni finanziarie;* R. DI FEBO MARINELLI: *Sulla geometria dei blocchi di una struttura di incidenza costruita sul campo fondamentale di caratteristica 3.* Tipo-Litografia MARVES, Roma, 1975.

160. - D. DEL PASQUA: *Un tipo di condizioni sufficienti di stabilità per polinomi a coefficienti reali.* Bollettino della Unione Matematica Italiana, 11 (1975).

161. - A. OSSICINI - F. ROSATI: *Funzioni caratteristiche nelle formule di quadratura gaussiane con nodi multipli.* Bollettino della Unione Matematica Italiana, 11 (1975).

162. - I. ANASTASIA POMILIO: *Il piano di Möbius e lo spazio di De Sitter.* Rendiconti di Matematica, vol. 8 (1975).

163. - V. SCIAMPLICOTTI: *Alcune osservazioni sull'identità di Green-Lagrange.* Le Matematiche, vol. XXX (1975).

164. - G. ROGHI: *Valutazione approssimata di integrali di Stieltjes.* Rendiconti di Matematica, vol. 9 (1976).

165. - F. GUARALDO - P. MACRÌ: *Categorie relative di indoggetti e di quozienti.* Annali di Matematica di Ferrara, vol. XXI (1975).

166. - G. FUSCO: *Sopra un metodo per generalizzare i teoremi dinamici per l'elemento materiale.* Rendiconti di Matematica, vol. 9 (1976).

167. - F. GUARALDO - P. MACRÌ: *Alcune questioni sugli spazi anellati.* Rendiconti di Matematica, vol. 9 (1976).

168. - R. LONGO: *Estensioni al continuo di vari tipi di ammortamento.* Tipo-Litografia MARVES (1976).

169. - QUADERNO n. 8 - A. GHIZZETTI: *Sistemi biortonormali collegati alle formule di quadratura gaussiane;* L. PASQUINI: *Formule di cubatura esatte per polinomi trigonometrici; generalità e prime applicazioni;* G. SELMI: *Alcune proprietà dei tensori doppi covarianti aventi i nuclei coincidenti.* Tipo-Litografia MARVES, Roma, 1976.

170. - I. CATTANEO GASPARINI: *Idéaux des automorphismes conformes symplectiques.* Comptes Rendus de l'Académie des sciences (Sezione A: Géométrie différentielle).

(Segue a pag. 3 di copertina)

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI ROMA
FACOLTA' DI INGEGNERIA

PUBBLICAZIONI DELL'ISTITUTO DI MATEMATICA APPLICATA

N. 191

V. MARINO - L. GUALANDRI

L'INDICE DI MASLOV

Appunti tratti dalle lezioni del prof. J. M. Souriau

ROMA
1978

Verita Marino et Luciano Gualandri ont bien voulu rédiger les leçons que j'ai données à l'Istituto de Matematica Applicata de l'Université de Rome, à l'initiative de Madame Ida Cattaneo, en janvier-février 1977.

En fait, cette rédaction est plus complète que les leçons elles-mêmes: ses auteurs ont tenu à exposer en détails bien des démonstrations que j'avais seulement esquissées; ils ont accompli ainsi un travail utile, mais difficile.

Le lecteur dispose grâce à eux d'un document où figure en détails une méthode explicite de calcul de l'indice de Maslov, ses principales propriétés topologiques (dans la perspective ouverte par les travaux d'Arnold et de Leray) et quelques applications.

JEAN-MARIE SOURIAU

Introduzione

Nei primi capitoli richiamiamo nozioni riguardanti gli spazi vettoriali simplettici e la struttura topologica del gruppo simplettico e della grassmanniana. Tali nozioni sono utilizzate nel dare una definizione esplicita dell'indice di Maslov che permette di dimostrare col calcolo la formula di Leray.

Negli ultimi due capitoli diamo la nozione di gruppo dinamico su una varietà simplettica ed alcuni cenni sulle varietà quantiche e relativi risultati di notevole importanza.

Desideriamo ringraziare i Proff. J. M. Souriau e J. Elhadad per averci seguito nello sviluppo di questo lavoro.

VERITA MARINO e LUCIANO GUALANDRI

L'INDICE DI MASLOV

I.1 *Spazi vettoriali simplettici*

Sia E uno spazio vettoriale (dim. m), σ un 2-tensore covariante antisimmetrico e invertibile, cioè una 2-forma invertibile, si chiama *spazio simplettico* la coppia E insieme a σ.

Siano $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ appartenenti ad E si può scrivere, una volta scelta una base per lo spazio:

$$\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sigma_{\alpha\beta}\, x^{\alpha} y^{\beta} \tag{I.1.1}$$

dove $\sigma_{\alpha\beta}$ sono le componenti del tensore σ.

Se invece si scrive: $\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\sigma(\mathbf{x}))(\mathbf{y})$ si mette in evidenza la 1- forma:

$$\sigma(\mathbf{x}) : \mathbf{y} \to \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

$$\sigma : \mathbf{x} \to \sigma(\mathbf{x})$$

che dà un'applicazione di E nel suo duale E^*.

L'invertibilità del tensore corrisponde alla biettività di tale applicazione. Anche in uno spazio simplettico si può introdurre la nozione di *ortogonalità* tra due vettori $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ di E:

$$\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \tag{I.1.2}$$

Poiché $\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\sigma(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ l'ortogonalità è una relazione simmetrica. Se E' è un sottospazio vettoriale di E, l'insieme degli $\mathbf{x}$ ortogonali ad ogni vettore di E è un sottospazio vettoriale detto di E', Ort(E'). Ovvero

$$\mathbf{x} \in \mathrm{Ort}(E') \Leftrightarrow \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \qquad \forall \mathbf{y} \in E'$$

Vale la relazione:

$$\dim E' + \dim \mathrm{Ort}(E') = \dim E \tag{I.1.3}$$

poiché σ è invertibile [1].

---

[1] I vettori di Ort(E') si ricavano da un sistema omogeneo di rango $\dim E'$.

E' si dice *isotropo* se $E' \subset \mathrm{Ort}(E')$ [2].

Ex.: Ogni spazio vettoriale di dimensione 1 è isotropo ($\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ sempre per l'antisimmetria di σ).

Si chiama *piano lagrangiano* ogni sottospazio λ isotropo massimale (rispetto l'inclusione); ogni sottospazio isotropo è contenuto in un piano lagrangiano poiché l'insieme dei sottospazi isotropi è induttivo e non vuoto. Si ha:

$$\lambda = \mathrm{Ort}(\lambda) \tag{I.1.4}$$

Pertanto ogni piano lagrangiano ha dimensione n pari alla metà di quella di E; *esistono solo spazi simplettici di dimensione pari.*

Due piani lagrangiani λ e μ si dicono *trasversali* se $\lambda \cap \mu = \{\mathbf{o}\}$ e quindi $E = \lambda \oplus \mu$.

Se λ è un piano lagrangiano di E esiste sempre un piano lagrangiano supplementare.

Fissata comunque una base di λ la si può completare ad una base di E rispetto alla quale la matrice di σ è del tipo $\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} O & B^T \\ -B & C \end{pmatrix}$ con $C = -C^T$.

E' possibile cambiare il completamento della base fissata di λ, tramite una matrice $\begin{pmatrix} I & A \\ O & X \end{pmatrix}$, in modo che la matrice di σ diventa $\begin{pmatrix} O & I \\ -I & O \end{pmatrix}$.

Si noti che la nuova matrice rappresentativa non si trova per similitudine ma secondo la formula $\tilde{\sigma}' = a^T \tilde{\sigma} a$ dove a è la matrice del cambiamento di base.

$$\begin{pmatrix} I & A \\ O & X \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} O & B^T \\ -B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A \\ O & X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & I \\ -I & O \end{pmatrix}$$

Col calcolo si ricava $X = (B^T)^{-1}$ e $A - A^T = X^T C X = M$.

Ricordando che ogni matrice è somma di una matrice antisimmetrica e di una simmetrica, si ricava $A = 1/2\, M + S$ dove S è una qualunque matrice simmetrica. Poiché la matrice del tensore σ è $\begin{pmatrix} O & I \\ -I & O \end{pmatrix}$ la parte della base che completa la base fissata di λ genera un piano lagrangiano supplementare a λ. La base di E così trovata si dice *base canonica* di E.

Se F è un altro spazio simplettico della stessa dimensione, un'applicazione lineare di E in F si dice isomorfismo della struttura simplettica o *simplettomorfismo* se è *biettivo* e $\sigma_F(a(\mathbf{x}), a(\mathbf{y})) = \sigma_E(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ per ogni $\mathbf{x}$ ed $\mathbf{y}$ appartenenti ad E. L'insieme dei simplettomorfismi di E in se stesso, $\mathrm{Sp}(E)$, è un gruppo detto

[2] Dualmente *coisotropo* $E' \supset \mathrm{Ort}(E')$ e i piani lagrangiani sono i sottospazi coisotropi minimali od anche i sottospazi coisotropi ed isotropi.

gruppo simplettico che, come sottogruppo chiuso del gruppo lineare GL (E), è un gruppo di Lie. Certamente ogni applicazione lineare che manda i vettori di una base canonica di E su quelli di un'altra base canonica di E è un simplettomorfismo; quindi per la costruzione delle basi canoniche, date due coppie di piani lagrangiani trasversi, esiste un simplettomorfismo che porta ordinatamente i piani lagrangiani della prima coppia nei rispettivi della soconda coppia. *Il gruppo* Sp (E) *agisce in maniera transitiva sulle coppie di piani lagrangiani trasversi.*

I.2 *La Grassmanniana e il gruppo simplettico*

I piani lagrangiani di E formano una varietà $\Lambda(E)$ (3) di dimensione $n(n+1)/2$ detta anche *Grassmanniana lagrangiana.*

In queste varietà i piani trasversi ad uno fissato formano un insieme aperto in corrispondenza biunivoca con l'insieme delle matrici simmetriche $(n \times n)$, di dimensione $n(n+1)/2$, che competendo all'aperto compete a tutta la grassmanniana dei lagrangiani

$$\dim \Lambda(n) = \frac{n(n+1)}{2} \tag{I.2.1}$$

Si ricorda che il gruppo simplettico $Sp(n)$ agisce transitivamente sulla grassmanniana. Data la Grassmanniana $\Lambda(n)$ di $\mathbb{R}^{2n}$ si consideri un piano lagrangiano λ e l'insieme $\Lambda_\lambda(n)$ costituito da tutti i piani lagrangiani $\mu \in \Lambda(n)$ trasversi a λ. Si ha $\Lambda_\lambda(n) \subset \Lambda(n)$.

Si può esprimere $\Lambda(n) = Sp(\mathbb{R}^{2n}/G_\lambda)$ dove G_λ è lo stabilizzatore di λ in $Sp(\mathbb{R}^{2n})$ ed è anche un gruppo di Lie essendo chiuso in $Sp(\mathbb{R}^{2n})$. Vale la seguente relazione per la dimensione della Grassmanniana.

$$\dim \Lambda(n) = \dim Sp(\mathbb{R}^{2n}) - \dim G_\lambda \tag{I.2.2.}$$

L'algebra di Lie di $Sp(\mathbb{R}^{2n})$ è costituita dalle matrici Z tali che $Z^T J + JZ = 0$ dove J è la matrice associata alla 2-forma in una base canonica.

Per trovare la dimensione di $Sp(\mathbb{R}^{2n})$ si calcoli la dimensione della corrispondente algebra di Lie $\mathfrak{S}$. Sia $Z \in \mathfrak{S}$ con $Z^T J + JZ = 0$ (*), sia $S = J^{-1} Z$ ma $J^{-1} = -J = J^T$, da cui $Z = JS$ e sostituendo nella (*) si ha

$$S^T J^T J + JJS = S^T - S = 0$$

cioè l'algebra di Lie è costituita dalle matrici $Z = JS$ con S simmetrica per cui la

(3) Nel seguito indicheremo indifferentemente $\Lambda(E)$ ed $Sp(E)$ con $\Lambda(n)$ ed $Sp(n)$ rispettivamente per evidenziare la dimensione.

dimensione di $\mathfrak{S}$ è data dalla dimensione dello spazio delle matrici simmetriche di ordine $2n$, cioè $2n(2n+1)/2 = n(2n+1)$.

Si deve calcolare ora la dimensione dello stabilizzatore G_λ che è costituita dalle matrici a appartenenti ad $Sp(\mathbb{R}^{2n})$ che lasciano fisso il piano lagrangiano λ : $\forall \mathbf{x} \in \lambda$, $a(\mathbf{x}) \in \lambda$; $a(\lambda) = \lambda$.

Una matrice Z appartenente all'algebra di Lie $\mathfrak{S}_\lambda$ di G_λ deve verificare:

(I.2.3) $$Z\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \qquad \text{con } \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \lambda$$

ma $Z = JS$ con $S^T = S$ cioè

$$S = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix} \qquad \text{con } A = A^T \text{ e } C = C^T$$

dalla (I.2.3) si ha $\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = -J\begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{x}' \end{pmatrix}$

svolgendo si ha $\begin{pmatrix} A\mathbf{x} \\ B\mathbf{x}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{x}' \end{pmatrix}$ dunque $A = 0$. Perciò $Z \in \mathfrak{S}_\lambda$ è della forma $Z = J\begin{bmatrix} 0 & B \\ B^T & C \end{bmatrix}$, $C = C^T$ cioè dipende da n^2 parametri di B e $n(n+1)/2$ parametri di C. Si è ora in grado di calcolare la dimensione della Grassmanniana $\Lambda(n)$:

$$\dim \Lambda(n) = n(2n+1) - n^2 - n(n+1)/2$$

$$\boxed{\dim \Lambda(n) = n(n+1)/2}$$

I.3 *La segnatura*

Si è visto che il gruppo $Sp(n)$ è transitivo sulla Grassmanniana, ed anzi esiste sempre una trasformazione simplettica che muta coppie di piani lagrangiani trasversi in coppie di piani lagrangiani trasversi. Si considerino ora 3 piani lagrangiani λ, μ, ν trasversi a 2 a 2 e sia

$$\sigma_{\lambda\mu} : \lambda \to \mu^*$$

definito

(I.3.1) $$\sigma_{\lambda\mu}(\mathbf{x})(\mathbf{y}) = \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \qquad \forall \mathbf{x} \in \lambda, \ \mathbf{y} \in \mu$$

sia $g_{\lambda\mu\nu} = \sigma_{\lambda\mu} \circ \sigma_{\lambda\nu}^{-1} \circ \sigma_{\mu\nu}$ un'applicazione lineare di μ in μ^*

$$\boxed{g_{\lambda\mu\nu} : \mu \xrightarrow{\sigma_{\mu\nu}} \nu^* \xrightarrow{\sigma_{\lambda\nu}^{-1}} \lambda \xrightarrow{\sigma_{\lambda\mu}} \mu^*}$$

$g_{\lambda\mu\nu}$ risulta un tensore di ordine 2 su μ; si vuole far vedere che è simmetrico per poi calcolarne la segnatura della matrice associata al tensore.

Siano $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mu$ e costruiamo $g_{\lambda\mu\nu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$; dapprima si ha:

$$(\sigma_{\lambda\nu}^{-1} \circ \sigma_{\mu\nu})(\mathbf{x}) = \mathbf{y} \qquad \mathbf{x} \in \mu, \ \mathbf{y} \in \lambda$$

Applicando alla precedente la forma $\sigma_{\lambda\nu}$, si ha

$$\sigma_{\mu\nu}(\mathbf{x}) = \sigma_{\lambda\nu}(\mathbf{y}) \in \nu^*$$

Allora per ogni $\mathbf{z} \in \nu$ si ha:

$$\sigma_{\mu\nu}(\mathbf{x})(\mathbf{z}) = \sigma_{\lambda\nu}(\mathbf{y})(\mathbf{z})$$

$$\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0$$

da cui segue $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in \nu$ perché ν è lagrangiano, $\mathbf{y}$ allora è l'unico vettore tale che $\mathbf{y} \in \lambda$ e $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in \nu$: segue quindi che per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mu$

$$g_{\lambda\mu\nu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sigma_{\lambda\mu}(\mathbf{y})(\mathbf{x}') = \sigma_{\lambda\mu}(\mathbf{y}, \mathbf{x}') = \sigma(\mathbf{y}, \mathbf{x}')$$

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mu \quad \text{e con} \quad \mathbf{y} \text{ tale che } \mathbf{y} \in \lambda, \ x - y \in \nu$$

Si calcoli ora $g_{\lambda\mu\nu}(\mathbf{x}', \mathbf{x})$

$$g_{\lambda\mu\nu}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{y}', \mathbf{x}) \text{ con } \mathbf{y}' \in \lambda, \ \mathbf{x}' - \mathbf{y}' \in \nu$$

ma $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ e $\mathbf{x}' - \mathbf{y}' \in \nu$ ed essendo ν lagrangiano

(I.3.2) $$\sigma(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x}' - \mathbf{y}') = 0$$

ma $\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0$ perché $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mu$ che è lagrangiano e anche $\sigma(\mathbf{y}, \mathbf{y}') = 0$ perché $\mathbf{y}, \mathbf{y} \in \lambda$ è lagrangiano, allora dalla (I.3.2) si ha

(I.3.3) $$\sigma(\mathbf{y}, \mathbf{x}') = -\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}') = \sigma(\mathbf{y}', \mathbf{x})$$

e confrontando le

(I.3.4) $$g_{\lambda\mu\nu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = g_{\lambda\mu\nu}(\mathbf{x}', \mathbf{x})$$

cioè $g_{\lambda\mu\nu}$ è un 2-tensore simmetrico: $g_{\lambda\mu\nu}$ dà a λ una struttura euclidea. Si può allora definire [4]

(I.3.5) $$sgn(\lambda, \mu, \nu) = sgn(g_{\lambda\mu\nu})$$

---

[4] Se g è un 2-tensore simmetrico su E, una base $\{\mathbf{x}_J\}$ si dice ortonormale se $|g(\mathbf{x}_J, \mathbf{x}_K)| = \delta_{JK}$. Allora $sgn(g)$ è la traccia della matrice di g rispetto una base ortonormale che esiste sempre; è anche pari a $p - q$ dove p e q sono le dimensioni di s.sp. maximali su cui g è definito rispettivamente positivo e negativo.

e tale numero apparterrà a $\{-n, -n+2, \ldots, n\}$ ([5]).

Si deve a Leray l'aver visto che tale segnatura gode della proprietà di antisimmetria. Se si considera un quarto piano lagrangiano ρ, trasverso a λ, μ e ν, si può scrivere la relazione:

$$sgn(\lambda, \mu, \nu) = sgn(\rho, \mu, \nu) + sgn(\lambda, \rho, \nu) + sgn(\lambda, \mu, \rho) \tag{I.3.6}$$

Questa è una formula che presenta delle analogie con formule coomologiche. Il problema è ora quello di vedere se esiste una funzione F antisimmetrica che dia

$$sgn(\lambda, \mu, \nu) = F(\lambda, \mu) + F(\mu, \nu) + F(\nu, \lambda) \tag{I.3.7}$$

cioè $sgn = dF$, per cui la relazione di cui sopra è senz'altro verificata. Dopo avere introdotto qualche nozione di topologia, si vedrà che una tale funzione esiste ma non sulla Grassmanniana bensì sul suo ricoprimento universale e sarà l'indice di Maslov.

II. STRUTTURA TOPOLOGICA DI $Sp(n)$ E $\Lambda(n)$

II.1 *Il modello complesso ed il gruppo unitario*

Si è visto che fra spazi simplettici di uguale dimensione esiste sempre un simplectomorfismo. Ci limitiamo quindi allo studio di un esempio di spazio simplettico molto ricco: C^n in cui è definito il prodotto Hermitiano.

Vediamo qualche annotazione: siano $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y} \in C^n$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad x^J \in C \quad J = 1, \ldots, n$$

Si definisce il prodotto Hermitiano:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{J=1}^{n} \overline{x^J}\, y^J \tag{II.1.1}$$

([5]) Si può dimostrare che:

$$\boxed{\begin{matrix} a(\lambda) = \lambda' \\ a(\mu) = \mu' \\ a(\nu) = \nu' \end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix} \lambda, \mu, \nu \text{ p. lagr. m.t.} \\ \lambda', \mu', \nu' \text{ p. lagr. m.t.} \\ a \text{ simpectomorfismo} \end{matrix}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{sgn(\lambda, \mu, \nu) = sgn(\lambda', \mu', \nu')}$$

Quindi il gruppo simpl. non è triplamente transitivo; le terne di p.l.m.t. (piani lagrangiani mutuamente trasversi) hanno a meno di simplettomorfismi tante configurazioni quanti sono i valori della segnatura. Tali valori sono al più $n+1$ ma come si vedrà sono proprio $n+1$.

Questa è una forma lineare rispetto alla 2ª variabile e antilineare rispetto alla prima, in breve sesquilineare: $\overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle} = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$.
C^n ha due strutture di spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e su C, di dimensioni rispettivamente $2n$ ed n.

Dalla struttura Hermitiana si possono ricavare una struttura euclidea ed una simplettica.

A tale scopo dividiamo in (II.1.1) la parte reale dalla parte immaginaria:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + i\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tag{II.1.2}$$

g e σ sono funzioni $\mathbb{R}$-bilineari e (*) $\langle \mathbf{x}, i\mathbf{y} \rangle = i\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$. Sviluppando I e II membro della (*) si ha

$$g(\mathbf{x}, i\mathbf{y}) = -\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \; ; \; \sigma(\mathbf{x}, i\mathbf{y}) = \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tag{II.1.3}$$

quindi da g si può dedurre σ e viceversa. Si vede che g è simmetrica e positiva mentre σ è antisimmetrica ed entrambe sono invertibili dalle (II.1.2), (II.1.3) e l'invertibilità del prodotto Hermitiano.
C^n riceve da g una struttura di spazio euclideo di dimensione $2n$; C^n ha una struttura di spazio vettoriale complesso e il gruppo che conserva tale struttura è $GL(n, C)$ · Inoltre C^n riceve da σ una struttura simplettica e il gruppo che la conserva è $Sp(n) = \{ a \in GL(C^n, \mathbb{R}) \mid \sigma(a\mathbf{x}, a\mathbf{y}) = \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \}$.

Infine C^n ha una struttura Hermitiana, data da g e da σ, e il gruppo che la conserva è il gruppo unitario:

$$\begin{aligned} U(n) &= \{a \in GL(n, C) \mid \langle a\mathbf{x}, a\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in C^n\} = \\ &= \{a \in GL(n, C) \mid a^{-1} = a^* = C(a^T) = C(a)^T\} \end{aligned} \tag{II.1.4}$$

dove C è il coniugio complesso.

Si consideri ora $a \in Sp(n) \cap GL(n, C)$ ovvero

$$\sigma(a\mathbf{x}, a\mathbf{y}) = \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \qquad a \in GL(C^n, \mathbb{R})$$

$$a(i\mathbf{x}) = i\,a(\mathbf{x}) \quad \text{e quindi} \quad a \in GL(C^n, C) = GL(n, C)$$

Allora a conserva tutte le strutture ed $a \in U(n)$.

$$U(n) = GL(n, C) \cap Sp(n) \tag{II.1.5}$$

Inoltre $U(n) \subseteq Sp(n)$ e perciò risulta anche $U(n)$ un gruppo di Lie. Si può considerare l'algebra di Lie del gruppo; è costituita dalle matrici Z tali che:

$$-Z = C(Z^T) \tag{II.1.6}$$

Infatti $(\exp tZ)^{-1} = C (\exp tZ)^T$. Per ogni $t \in \mathbb{R}$ allora

$$\begin{aligned} \exp(-tZ) &= \exp(t(CZ)^T) = \exp(tC(Z^T)) \qquad \forall t \in \mathbb{R} \\ -tZ &= tC(Z^T) \\ -Z &= C(Z^T) \end{aligned}$$

Queste matrici si dicono antihermitiane e ci permettono di calcolare la dimensione del gruppo $U(n)$ cioè n^2. Infatti la matrice Z ha n parametri reali sulla diagonale principale e $n(n-1)/2$ parametri complessi in tutto quindi $n + 2n(n-1)/2 = n^2$ parametri reali.

II.2 *Rappresentazione unitaria della Grassmanniana*

Si può vedere ora che $U(n)$ *agisce transitivamente sulla Grassmanniana* $\Lambda(n)$, che è quindi uno spazio omogeneo di $U(n)$.

Preso $\lambda \in \Lambda(n)$ esiste in λ una base $\{\mathbf{a}_k\}_{k=1,\ldots,n}$ ortogonale rispetto a g: $g(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = \delta_{ij}$, $\mathbf{a}_i \in C^n$ inoltre $\sigma(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = 0$ essendo λ piano lagrangiano, quindi si ha $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle = g(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = \delta_{ij}$.

Perciò la matrice $a = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$ è una matrice di $U(n)$. In breve, con $x^i \in \mathbb{R}$,

$$\text{(II.2.1)} \qquad \mathbf{x} \in \lambda \Leftrightarrow \mathbf{x} = x^i \mathbf{a}_i \Leftrightarrow \mathbf{x} = a \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \Leftrightarrow x \in a(\mathbb{R}^n) \; ; \; \lambda = a(\mathbb{R}^n)$$

Viceversa se $a \in U(n)$ e $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in a(\mathbb{R}^n)$ cioè $\mathbf{x} = a\mathbf{x}'$ e $\mathbf{y} = a\mathbf{y}'$ con $\mathbf{x}', \mathbf{y}' \in \mathbb{R}^n$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle a\mathbf{x}', a\mathbf{y}' \rangle = \langle \mathbf{x}', \mathbf{y}' \rangle \in \mathbb{R}$$

Essendo la a unitaria e $\mathbf{x}', \mathbf{y}'$ reali. Da ciò $\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ quindi $a(\mathbb{R}^n)$ è isotropo, ma essendo di dimensione n in uno spazio di dimensione $2n$ è lagrangiano: $\lambda = a(\mathbb{R}^n)$. In particolare se $a = I$ allora $\lambda = \mathbb{R}^n$ particolare piano lagrangiano.

Quindi

$$\text{(II.2.2)} \qquad \Lambda(n) = \{a(\mathbb{R}^n)\}_{a \in U(n)}$$

Questo dimostra che $U(n)$ agisce transitivamente su $\Lambda(n)$, allora

$$\Lambda(n) \leftrightarrow U(n)/\mathrm{Stab}(\mathbb{R}^n)$$

dove $\mathrm{Stab}(\mathbb{R}^n) = \{a \in U(n) \mid a(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n\} = U(n) \cap GL(n, \mathbb{R}) = O(n)$

cioè
$$\boxed{\Lambda(n) \simeq U(n)/O(n)}$$

$\Lambda(n)$ è una varietà connessa compatta come lo è $U(n)$. Nuovamente la dimensione di $\Lambda(n)$ è uguale alla dimensione di $U(n)$ meno la dimensione di $O(n)$:

$$dim\, \Lambda(n) = n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

D'altra parte $\Lambda(n)$ si può pensare immerso in $U(n)$. Prese $a, a' \in U(n)$

$$\lambda = a(\mathbb{R}^n) = a'(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow a'^{-1} a(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n = a^{-1} a'(\mathbb{R}^n)$$

cioè
$$a^{-1} a' \in \mathrm{Stab}(\mathbb{R}^n) = O(n)$$

Questo si ha se e solo se $a^{-1} a' = C(a^{-1} a') = C(a^{-1}) C(a')$ da cui $a' C(a'^{-1}) = a C(a^{-1})$ ed essendo $a, a' \in U(n)$: $a' a'^{T} = a a^{T}$.

Quindi l'applicazione

$$F : \lambda \rightarrow a a^{T} \in U(n)$$

è ben definita ed iniettiva ed è l'immersione cercata. Si può dimostrare che l'immagine di F è l'insieme delle matrici unitarie simmetriche. Per tale immersione si possono dimostrare

(II.2.3) $$\boxed{\mathbf{x} \in \lambda \Leftrightarrow \mathbf{x} = F(\lambda) C(\mathbf{x})}$$

dove C è l'operazione di coniugio complesso,

(II.2.4) $$\boxed{\lambda, \lambda' \text{ trasversi} \Leftrightarrow F(\lambda) - F(\lambda') \text{ invertibile}}$$

e per l'azione di $a \in U(n)$ su $\lambda \in \Lambda(n)$ si ha

(II.2.5) $$\boxed{F(a(\lambda)) = a F(\lambda) a^{T}}$$

Si è visto che $U(n) \subset Sp(n)$, per lo studio delle proprietà topologiche di $Sp(n)$ è utile la decomposizione di Cartan che riportiamo senza dimostrazione:

$$x \in Sp(n) \Leftrightarrow x = a \circ \exp(b \circ C)$$

con $a \in U(n)$, $b = b^{T}$, C coniugio complesso. Tale decomposizione è univoca e quindi la corrispondenza $x \rightarrow (a, b)$ dà un diffeomorfismo

(II.2.6) $$Sp(n) \simeq U(n) \times \mathbb{R}^{n(n+1)}$$

Essendo $U(n)$ e $\mathbb{R}^{n(n+1)}$ connessi, $Sp(n)$ è connesso. Per i gruppi di omotopia si ha

$$\Pi(Sp(n)) \simeq \Pi(U(n) \times \mathbb{R}^{n(n+1)}) \simeq \Pi(U(n)) \times \Pi(\mathbb{R}^{n(n+1)})$$

in quanto spazi isomorfi hanno gruppi fondamentali isomorfi.

Allora essendo $\Pi(\mathbb{R}^{n(n+1)}) \simeq 0$ perché $\mathbb{R}^{n(n+1)}$ è contraibile:

$$\boxed{\Pi(Sp(n)) \simeq \Pi(U(n))} \tag{II.2.7}$$

II.3 *Richiami sui rivestimenti*

Per poter calcolare il gruppo fondamentale $\Pi(Sp(n))$ occorrono nozioni di omotopia per i gruppi di Lie. Primo risultato interessante è che ogni gruppo di Lie connesso G ha (come spazio topologico) un rivestimento universale, $\hat{G} \xrightarrow{p} G$, che è possibile rendere (a meno di isomorfismi) gruppo in modo che la proiezione p sia un omomorfismo fra gruppi.

$\Gamma = \operatorname{Ker} p$ è un sottogruppo normale chiuso e discreto di $\hat{G}$, ed è contenuto nel centro di $\hat{G}$. Inoltre $\Gamma \simeq \Pi(G)$, sicché ogni gruppo di Lie connesso ha un gruppo fondamentale abeliano e $\hat{G}$ è una estensione centrale di G tramite il gruppo di omotopia.

Se Γ_0 è un sottogruppo di Γ, $G_0 = \hat{G}/\Gamma_0$ risulta un rivestimento connesso di G (con la proiezione canonica p_0) e in tal modo si possono ottenere tutti i rivestimenti connessi di G.

Per esempio sia $G = Sp(n)$, si vedrà che $\Pi(Sp(n)) \simeq Z$ e se $\Gamma_0 = 2Z$, cioè il sottogruppo di Z dei numeri pari, allora $G_0 = \hat{G}/\Gamma_0$ è un rivestimento connesso di $Sp(n)$ ed è detto gruppo metaplettico (Weil). Si consideri ora un $\hat{G}$ che sia gruppo di Lie semplicemente connesso, sia G_1 un sottogruppo di $\hat{G}$, allora $\hat{G}/G_1$ è una varietà. Il gruppo fondamentale di $\hat{G}/G_1$, $\Pi(\hat{G}/G_1)$, è isomorfo al gruppo delle componenti connesse di G_1 e in particolare se G_1 è connesso, $\hat{G}/G_1$ è una varietà semplicemente connessa. Nel caso di omomorfismo p fra gruppi di Lie G e G' connessi se il $\operatorname{Ker} p$ è un sottogruppo discreto di G, G risulta rivestimento di G'.

II.4 *Omotopia della lagrangiana*

Si consideri ora $U(n)$, si vede che il rivestimento universale è

$$\hat{U}(n) = \{a, \varphi) \mid a \in U(n),\ \det a = e^{i\varphi}, \varphi \in \mathbb{R}\} \tag{II.4.1}$$

ponendo

$$(a, \varphi) \times (a', \varphi') = (a a', \varphi + \varphi')$$

$U(n)$ diviene un gruppo di Lie e la proiezione

$$(\mathrm{II}.4.2) \qquad \left\| \begin{array}{l} p : \widehat{U(n)} \to U(n) \\ (a, \varphi) \to a \end{array} \right.$$

è un morfismo, il cui nucleo $\{(I, 2k\pi)\}_{k \in Z}$ è un sottogruppo discretto di $\widehat{U(n)}$. Quindi per le proprietà viste precedentemente, (II.4.2) dà $\widehat{U(n)}$ come rivestimento di $U(n)$. Perché $\widehat{U(n)}$ sia un rivestimento universale di $U(n)$ resta da vedere che è semplicemente connesso. Si consideri l'applicazione

$$\left\| \begin{array}{ll} \tilde{F} : SU(n) \times \mathbb{R} \to \widehat{U(n)} & b \in SU(n) = \{b \in U(n) \mid \det b = 1\} \\ (b, \varphi) \to (b e^{i\varphi}, n\varphi) & \varphi \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

Infatti $\det(b e^{i\varphi}) = \det b \det(e^{i\varphi} I) = 1 \ (e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}$.

$$\text{Inoltre:} \qquad \left\| \begin{array}{l} \tilde{F}^{-1} : \widehat{U(n)} \to SU(n) \times \mathbb{R} \\ (a, \varphi) \to (a e^{-i\varphi/n}, \varphi/n) \end{array} \right.$$

è l'inversa di $\tilde{F}$. (N.B. $\tilde{F}$ è un morfismo di gruppi). Quindi $\widehat{U(n)} \simeq SU(n) \times \mathbb{R}$ è semplicemente connesso in quanto $SU(n)$ e $\mathbb{R}$ lo sono. Allora

$$(\mathrm{II}.4.3) \qquad p : \widehat{U(n)} \to U(n)$$

è un rivestimento universale e sfruttando le premesse topologiche segue che

$$\Pi(U(n)) \simeq \operatorname{Ker} p = \{(I, 2k\pi)\}_{k \in Z} \simeq Z$$

e dalla (II.2.7) si ha

$$(\mathrm{II}.4.4) \qquad \boxed{\Pi(Sp(n)) \simeq Z}$$

Analogamente per calcolare $\Pi(\Lambda(n))$ si costruisce il rivestimento universale $\widehat{\Lambda(n)}$ di $\Lambda(n)$.

La varietà

$$\widehat{\Lambda(n)} = \{(\lambda, \theta) \mid \lambda \in \Lambda(n), \theta \in \mathbb{R}, \lambda = a(\mathbb{R}^n), \det(a a^T) = e^{i\theta}\}$$

con la proiezione

$$\left\| \begin{array}{l} p : \widehat{\Lambda(n)} \to \Lambda(n) \\ (\lambda, \theta) \to \lambda \end{array} \right.$$

e con l'azione che ora definiremo, del sottogruppo discreto $\{L^k\}$ di $\widehat{U(n)}$ generato da $L = (I, \pi)$, diventa un rivestimento di $\Lambda(n)$. Si deve dimostrare inoltre che $\widehat{\Lambda}(n)$ è semplicemente connesso.

L'azione di $U(n)$ su $\Lambda(n)$ si può sollevare ad un'azione di $\widehat{U}(n)$ su $\widehat{\Lambda}(n)$ considerate le coppie $(a, \varphi) \in \widehat{U}(n)$ e $(\lambda, \theta) \in \widehat{\Lambda}(n)$, l'azione è definita

$$(a, \varphi)[(\lambda, \theta)] = (a(\lambda), \omega)$$

Si ricordi che se $\quad \lambda = b(\mathrm{IR}^n)\ ,\ F(\lambda) = b\,b^T$

allora $\qquad F(a(\lambda)) = a\,F(\lambda)\,a^T \quad$ e $\quad \det F(a(\lambda)) = e^{i\omega}$

ma $\det(a(F(\lambda)\,a^T) = \det^2(a)\det F(\lambda) = e^{2i\varphi}\cdot e^{i\theta} = e^{i(2\varphi+\theta)} = e^{i\omega}$ da cui si ha $2\varphi + \theta \equiv \omega \bmod 2\pi$. Poniamo pertanto

Definizione: $\qquad (a, \varphi)(\lambda, \theta) = (a(\lambda), 2\varphi + \theta)$

In particolare per l'azione degli $\{L^k\}$ si ha

$$L^k(\lambda, \theta) = (I, \pi)^k(\lambda, \theta) = (\lambda, \theta + 2k\pi)$$

L'azione di $\widehat{U}(n)$ è transitiva su $\widehat{\Lambda}(n)$ e quindi

$$\widehat{\Lambda}(n) \simeq \widehat{U}(n)/\mathrm{Stab}(\mathrm{IR}^n, 0)$$

ma $a \in \mathrm{Stab}(\mathrm{IR}^n, 0)$ implica $a(\mathrm{IR}^n) = \mathrm{IR}^n$ e $2\varphi = 0$, ovvero $a = C(a)$ e $\det a = e^{io} = 1$ e matrici che verificano queste relazioni appartengono ad $SO(n)$ e viceversa. Quindi

$$\boxed{\widehat{\Lambda}(n) \simeq \widehat{U}(n)/SO(n) \times \{0\}}$$

$\widehat{U}(n)$ è semplicemente connesso, $SO(n) \times \{0\}$, isomorfo ad $SO(n)$, è connesso e chiuso, quindi $\widehat{\Lambda}(n)$ è semplicemente connesso. Pertanto il gruppo di omotopia di $\Lambda(n)$ è isomorfo al gruppo degli $\{L^k\}$ che è isomorfo a Z

$$\boxed{\Pi(\Lambda(n)) \simeq Z}$$

III. CALCOLO DELL'INDICE DI MASLOV ED APPLICAZIONI

III.1 *Esponenziale e logaritmo di una matrice.*

Sia a una matrice, $n \times n$, si definisce

(III-1.1) $$\exp a = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}$$

il secondo membro converge ad una nuova matrice appartenente a $GL(\mathrm{C}^n)$. Se b è una matrice invertibile si può verificare che:

$$\text{(III.1.2)} \qquad \left\| \begin{array}{lcl} b \exp(a) b^{-1} = \exp(b a b^{-1}) & ; & \exp(a^T) = (\exp(a))^T \\ \exp(C(a)) = C(\exp(a)) & ; & \exp(a^*) = (\exp a)^* \end{array} \right.$$

La relazione caratteristica dell'esponenziale di matrice è:

$$\text{(III.1.3)} \qquad \exp(a+b) = \exp(a) \cdot \exp(b) = \exp(b) \cdot \exp(a)$$

se $a\, b = b\, a$. Se si prendono a e b opposte, $b = -a$ si ha $\exp O = I$ dunque si ha

$$\text{(III.1.4)} \qquad \exp(-a) = (\exp(a))^{-1}$$

Segue perciò che $\exp(a) \in GL(n, \mathrm{C})$, cioè sono tutte matrici invertibili. Se $t \in \mathrm{IR}$ si ha: $d/t \exp(t\, a) = a \exp(t\, a)$: $\exp(t\, a)$ è soluzione dell'equazione differenziale $d\, x/d\, t = a\, x$ con $x \in \mathrm{C}^n$. L'applicazione $\gamma : a \rightarrow \exp a$ con a valori in C^n è una applicazione differenziale e analitica, reale se a ha elementi in IR. Questa applicazione non è iniettiva, infatti la matrice I corrisponde sia alla

$$\begin{bmatrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{bmatrix} \text{ che } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{cioè } \exp \begin{pmatrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix} = \exp \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = I$$

Inoltre vale

$$\text{(III.1.5)} \qquad \det \exp(a) = e^{\mathrm{tr}(a)}$$

Per $\exp(a)$ esiste una funzione che è inversa a destra. Poniamo

$$\text{(III.1.6)} \qquad \boxed{\log a = \int_{-\infty}^{0} (\{s\, I - a\}^{-1} - \{s\, I - I\}^{-1})\, d\, s \qquad s \in \mathrm{IR}}$$

se l'integrando esiste ed è definito per tutti i valori negativi, cioè $\mathrm{spec}(a) \cap \mathrm{IR}^- = \phi$ allora $\exp(a)$ è invertibile a destra

$$\text{(III.1.7)} \qquad \exp \log(a) = a\,.$$

Per esempio si calcoli $\log(i\, I)$ dalla (III.1.6) si ha

$$\log(i\, I) = \int_{-\infty}^{0} I \left(\frac{1}{s-i} - \frac{1}{s-1} \right) d\, s = I \left[\mathrm{Log} \frac{s-i}{s-1} \right]_{-\infty}^{0} = i \frac{\pi}{2}\, I$$

dove Log è il valore principale del logaritmo complesso.

Si può verificare anche che:

$$\text{(III.1.8)} \qquad \left\| \begin{array}{ll} \log(a^T) = (\log a)^T & \log(b\, a\, b^{-1}) = b \log(a)\, b^{-1} \\ \log C(a) = C \log(a) & \log(a^{-1}) = -\log(a) \end{array} \right.$$

Se a è invertibile. Inoltre $\log(I + a) = a - a^2/2 + a^3/3 - \ldots$ serie che converge se lo spettro di a è interno al cerchio unitario. Si è visto che $\Lambda(n)$ si può identificare all'insieme delle matrici unitarie simmetriche: se $\lambda \in \Lambda(n)$, $\lambda = a(\mathbb{R}^n)$ e $a \in U(n)$, $F(\lambda) = a\, a^T$; per comodità porremo $a\, a^T = \lambda$. Allora $\lambda = \lambda^T = C(\lambda^{-1})$.

Si osservi che se $a \in U(n)$ e $z \in \mathrm{Spec}(a)$ con autovettore $\mathbf{x}$ ($a\,\mathbf{x} = z\,\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \neq 0$ si ha:

$$\langle a\,\mathbf{x}, a\,\mathbf{x}\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle = \bar{z}\, z \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle$$

ed essendo $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle \neq 0$, deve essere $\bar{z}\, z = 1 = |z|^2$ e $z = e^{i\theta}$ e che tutti i valori propri di $a \in U(n)$ sono sulla frontiera del cerchio unitario. Inoltre si ricordi che perché $\lambda, \lambda' \in \Lambda(n)$ siano trasversi occorre e basta che $\lambda - \lambda'$ sia invertibile, ovvero che $I - \lambda'\lambda^{-1}$ sia invertibile, che $I - (-1)(-\lambda'\lambda^{-1})$ sia invertibile e che $-1 \notin \mathrm{Spec}(-\lambda'\lambda^{-1})$ cioè spettro $(-\lambda'\lambda^{-1}) \cap \mathbb{R}^- = \phi$. Allora l'esistenza di $\log(-\lambda'\lambda^{-1})$ equivale a dire che λ, λ' sono trasversi.

Si vuole ora definire una funzione di due variabili nel rivestimento universale $\widehat{\Lambda}(n)$ di $\Lambda(n)$: indice di Maslov $m(\hat{\lambda}, \hat{\lambda}')$.

III.2 *Definizione dell'indice di MASLOV*

Si considerino $\lambda, \lambda' \in \Lambda(n)$ trasversi, per sollevamento nel $\widehat{\Lambda}(n)$ si trovano

$$\text{(III.2.1)} \qquad \begin{aligned} \hat{\lambda} &= \{\lambda, \theta\}, \ \det(\lambda) = e^{i\theta} \\ \hat{\lambda}' &= \{\lambda', \theta'\}, \ \det(\lambda') = e^{i\theta'} \end{aligned}$$

Essendo λ e λ' trasversi esiste $\log(-\lambda'\lambda^{-1})$ e sia uguale a b allora $\exp(b) = -\lambda'\lambda^{-1}$ per (III.1.7) e per (III.1.5)

$$\text{(III.2.2)} \qquad \det(\exp(b)) = e^{\mathrm{tr}(b)} = (-1)^n \det\lambda'/\det\lambda = (-1)^n e^{i(\theta-\theta')}$$

Si può definire una funzione di due variabili nel rivestimento universale, detta l'*indice di Maslov*.

$$\text{(III.2.3)} \qquad \boxed{m(\hat{\lambda}, \hat{\lambda}') = \frac{1}{2\pi}\left[\theta - \theta' + i\,\mathrm{tr}\log(-\lambda\lambda'^{-1})\right]}$$

e la (III.2.2) dà

$$\text{(III.2.4)} \qquad e^{2i\pi m(\lambda,\lambda')} = (-1)^n$$

Se n è pari $m(\hat{\lambda}, \hat{\lambda}')$ appartiene a $\mathbb{Z}$ e se n è dispari $m(\hat{\lambda}, \hat{\lambda}')$ appartiene a

$\mathbb{Z} + 1/2$; per la (III.2.4) quindi $m(\cdot, \cdot)$ è una funzione analitica continua a valori interi o seminteri e localmente costante mandando intorni connessi in punti di $\mathbb{Z}$.

Dalla definizione dell'indice di Maslov e ricordando che $\log(a^{-1}) = -\log(a)$ è immediata l'antisimmetria di $m(\cdot, \cdot)$:

$$\boxed{m(\widehat{\lambda}, \widehat{\lambda}') = -m(\widehat{\lambda}', \widehat{\lambda})} \tag{III.2.5}$$

inoltre da $L^p(\lambda) = (\lambda, \theta + 2\pi p)$ e $L^q(\lambda') = (\lambda', \theta' + 2\pi q)$ con $p, q \in \mathbb{Z}$ si ha

$$\boxed{m(L^p(\widehat{\lambda}), L^q(\widehat{\lambda}')) = p - q + m(\widehat{\lambda}, \widehat{\lambda}')} \tag{III.2.6}$$

Il gruppo simplettico $Sp(n)$ agisce su $\Lambda(n)$ conservando la trasversalità tra piani lagrangiani. Sia $\widehat{Sp}(n)$ il rivestimento universale di $Sp(n)$. L'azione del gruppo simplettico sulla grassmanniana si può sollevare ai rispettivi rivestimenti:

$$\begin{array}{ccc}
\widehat{Sp}(n) \times \widehat{\Lambda}(n) & \xrightarrow{a_2} & \widehat{\Lambda}(n) \\
p \downarrow & & \downarrow \text{Proiez.} \\
Sp(n) \times \Lambda(n) & \xrightarrow[a_1]{} & \Lambda(n)
\end{array}$$

L'azione a_2 esiste in quanto

$$\Pi(\widehat{Sp}(n) \times \widehat{\Lambda}(n)) = \Pi(\widehat{Sp}(n)) \times \Pi(\widehat{\Lambda}(n)) = 0$$

e quindi sono rispettate le condizioni di un noto criterio di sollevamento di topologia algebrica ([6]).

Si consideri ora $\widehat{a} \in \widehat{Sp}(n)$, $\lambda, \lambda' \in \Lambda(n)$ che siano trasversi, $a(\lambda)$, $a(\lambda')$ saranno trasversi si può dunque definire l'applicazione

$$\rho : \widehat{a} \to m(\widehat{a}(\widehat{\lambda}), \widehat{a}(\widehat{\lambda}'))$$

essendo $\widehat{a}(\widehat{\lambda})$ e $\widehat{a}(\widehat{\lambda}')$ su $a(\lambda)$ e $a(\lambda')$. Tale applicazione è continua ($m(\cdot, \cdot)$ è ana-

---

([6]) Sia $p : (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to (X, x_0)$ un rivestimento, $(Y, y_0) \to (X, x_0)$ applic. continua e Y connesso e localmente connesso per archi, esiste il sollevamento $\widetilde{f} : (Y, y_0) \to (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ $(p \circ \widetilde{f} = f)$ se e solo se $f_\cdot(\Pi(Y, y_0)) \subseteq p_\cdot \Pi(X, x_0)$ essendo $f_\cdot$, $p_\cdot$ i morfismi indotti fra i gruppi di omotopia.

litica e l'azione a_2 continua) ed ha valori interi o seminteri; ma $\widehat{Sp}(n)$ è connesso e quindi ρ risulta costante.

In particolare $\rho(\hat{a}) = \rho(\hat{I})$ quindi l'indice di Maslov è invariante per l'azione di $Sp(n)$:

$$\text{(III.2.7)} \qquad \boxed{m(\hat{a}(\hat{\lambda}), \hat{a}(\hat{\lambda}')) = m(\hat{\lambda}, \hat{\lambda}')}$$

III.3 *La formula di Leray*

Per l'indice di Maslov vale una formula detta di Leray che lo collega alla segnatura:

$$\text{(III.3.1)} \qquad \boxed{m(\hat{\lambda}, \hat{\mu}) + m(\hat{\mu}, \hat{\nu}) + m(\hat{\nu}, \hat{\lambda}) = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\lambda, \mu, \nu)}$$

dove $\hat{\lambda}, \hat{\mu}$ e $\hat{\nu} \in \hat{\Lambda}(n)$ rispettivamente su λ, μ e $\nu \in \Lambda(n)$ trasversi a due a due.

Cominciamo col verificare la (III.3.1) per una particolare scelta di λ, μ, ν:

$$\text{(III.3.2)} \qquad \left| \begin{array}{l} \lambda = \{(x^1, \ldots, x^n, 0, \ldots, 0)\}_{x^i \in \mathbb{R}} \\ \mu = \{(0, \ldots, 0, y^1, \ldots, y^n)\}_{y^i \in \mathbb{R}} \\ \nu = \{(z^1, \ldots, z^n, w^1, \ldots, w^n)\}_{z^i = w^i \in \mathbb{R}} \end{array} \right.$$

Per calcolare il secondo membro della (III.3.1) si considera il tensore $g_{\lambda\mu\nu}$

$$g_{\lambda\mu\nu}: \mu \xrightarrow{\sigma_{\mu\lambda}} \lambda^* \xrightarrow{\sigma^{-1}_{\nu\lambda}} \nu \xrightarrow{\sigma_{\nu\mu}} \mu^*$$

e la matrice rappresentativa di $g_{\lambda\mu\nu}$ è ottenuta per prodotto delle matrici associate a $\sigma_{\mu\nu}$, $\sigma^{-1}_{\nu\lambda}$, $\sigma_{\nu\mu}$ dopo aver fissato le basi canoniche $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$; $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$; $\mathbf{e}_1 + \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{e}_n + \mathbf{f}_n$ in λ, μ e ν.

Per $\sigma_{\mu\lambda}: \mu \rightarrow \lambda^*$ si considera la forma $\sigma_{\mu\lambda}\begin{pmatrix} \mathbf{o} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}$ che agisce su vettori di λ definita

$$\left(\sigma_{\mu\lambda}(y^i \mathbf{f}_i) \right) \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{o} \end{pmatrix} = \left(\sigma_{\mu\lambda}\begin{pmatrix} \mathbf{o} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{o} \end{pmatrix} = \sigma\left(\begin{pmatrix} \mathbf{o} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{o} \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \sum_1^n - x^i y^i = \left| - y^i \mathbf{e}_i^* \right] \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{o} \end{pmatrix}$$

da cui la matrice associata a $\sigma_{\mu\lambda}$ è $-I$.

Analogamente si possono calcolare le matrici associate a $\sigma_{\nu\lambda}$ e $\sigma_{\nu\mu}$ che risultano rispettivamente $-I$ e I. La matrice G rappresentativa di $g_{\lambda\mu\nu}$ sarà $G = (-I)(-I)^{-1}(I) = I$ quindi

$$\text{(III.3.3)} \qquad \boxed{\frac{1}{2}\,\operatorname{sgn}(\lambda, \mu, \nu) = \frac{1}{2}\,\operatorname{tr}(I) = \frac{n}{2}}$$

Per il calcolo del 1° membro della (III.3.1) si ricorda che un piano lagrangiano α, pensato in $\mathbb{C}^n$ [7], è rappresentato dalla matrice $a\,a^T$ con $\alpha = a(\mathbb{R}^n)$ e $a \in U(n)$. Nel nostro caso si osserva che [8]

$$\text{(III.3.4)} \qquad \boxed{\lambda = I(\mathbb{R}^n), \quad \mu = i\,I(\mathbb{R}^n), \quad \nu = \frac{I + i\,I}{\sqrt{2}}(\mathbb{R}^n)}$$

Pertanto le matrici che intervengono nell'indice di Maslov sono:

$$\lambda = I\,I^T = I$$

$$\mu = (i\,I)(i\,I)^T = i^2 I = -I$$

$$\nu = \frac{(I + i\,I)}{\sqrt{2}} \cdot \frac{(I + i\,I)^T}{\sqrt{2}} = \frac{I^2 - I^2 + 2\,i\,I}{2} = i\,I$$

Allora per la (III.2.3)

$$m(\widehat{\lambda}, \widehat{\mu}) + m(\widehat{\mu}, \widehat{\nu}) + m(\widehat{\nu}, \widehat{\lambda}) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\{(\theta_{\hat\lambda} - \theta_{\hat\mu}) + (\theta_{\hat\mu} - \theta_{\hat\nu}) + (\theta_{\hat\nu} - \theta_{\hat\lambda}) +$$

$$+ i[\operatorname{tr}\log(-\lambda\,\mu^{-1}) + \operatorname{tr}\log(-\mu\,\nu^{-1}) + \operatorname{tr}\log(-\nu\,\lambda^{-1})]\}$$

$$= \frac{i}{2\pi}[\operatorname{tr}\log I + \operatorname{tr}\log(-i\,I) + \operatorname{tr}\log(-i\,I)] = \frac{i}{\pi}\operatorname{tr}\log(-i\,I)$$

ma $\log(-i\,I) = \int_{-\infty}^{0} [(s\,I + i\,I)^{-1} - (s\,I - I)^{-1}]\,d\,s = I\left[\operatorname{Lg}\frac{s + i}{s - i}\right]_{-\infty}^{0} =$

$$= I\left(-i\,\frac{\pi}{2}\right)$$

dove Lg è il valore principale del logaritmo complesso (che risulta discontinuo solo sul semiasse negativo delle x). Allora:

$$\text{(III.3.5)} \qquad \boxed{m(\widehat{\lambda}, \widehat{\mu}) + m(\widehat{\mu}, \widehat{\nu}) + m(\widehat{\nu}, \widehat{\lambda}) = \frac{i}{\pi}\operatorname{tr}\left(I\left(-i\,\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{n}{2}}$$

---

[7] R^{2n} è complessificato mediante $\left(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{y}}\right) \rightarrow \mathbf{x} + i\mathbf{y}$.

[8] Il fattore $\sqrt{2}$ fa sì che la matrice sia unitaria.

Resta perciò verificata la formula di Leray, espressa dalla (III.3.1), nel nostro caso particolare. Per il caso generale si considerano altre scelte particolari di terne di piani lagrangiani mutuamente trasversi (l.m.t.) che danno tutti i possibili valori della segnatura e per cui la verifica della (III.3.1) sarà analoga al caso particolare già visto. Inoltre ogni terna di piani l.m.t. si può portare con un simplettomorfismo in una delle terne particolari dato che due terne di piani l.m.t. hanno la stessa segnatura se e solo se esiste un simplettomorfismo che porta una terna nell'altra. Allora la formula di Leray sarà sempre verificata data l'invarianza per simplettomorfismi della segnatura e dell'indice di Maslov.

Si scelgano piani λ, μ, ν, l.m.t.

$$\begin{aligned} \lambda &= \{(x^1, \ldots, x^n, 0, \ldots, 0)\}_{x^i \in \mathbb{R}} \\ \mu &= \{(0, \ldots, 0, y^1, \ldots, y^n)\}_{y^i \in \mathbb{R}} \\ \nu &= \{(z^1, \ldots, z^n, w^1, \ldots, w^n) \mid z^i = \varepsilon^i w^i \text{ con} \\ &\qquad \varepsilon^i = 1\ (i \leq p) \text{ e } \varepsilon^i = -1\ (i > p)\} \end{aligned} \tag{III.3.6}$$

fissando via via p tra 1 e n si ottengono diversi ν in corrispondenza dei quali si hanno n terne di piani l.m.t.

Si consideri nuovamente il tensore $g_{\lambda\mu\nu} : \mu \to \lambda^* \to \nu \to \mu^*$, si fissino le basi $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$; $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$; $\mathbf{e}_1 + \varepsilon^1 \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{e}_n + \varepsilon^n \mathbf{f}_n$, allora si possono calcolare le matrici fattore della matrice G : sono $-I$, $-\varepsilon$, I dove ε è la matrice diagonale costituita dagli ε^i. Segue che $G = \varepsilon$, allora per la formula di Leray si ha:

$$\boxed{\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\lambda, \mu, \nu) = \frac{\operatorname{tr}(\varepsilon)}{2} = \frac{2p - n}{2}} \tag{III.3.7}$$

Per il 1° membro della formula si ha:

$$\lambda = I(\mathbb{R}^n), \quad \mu = iI(\mathbb{R}^n), \quad \nu = \frac{I + i\varepsilon}{\sqrt{2}}(\mathbb{R}^n)$$

e per le matrici associate:

$$\lambda = I I^T = I, \quad \mu = -I, \quad \nu = i\varepsilon$$

Ripetendo il calcolo per gli indici di Maslov si ha:

$$m(\widehat{\lambda}, \widehat{\mu}) + m(\widehat{\mu}, \widehat{\nu}) + m(\widehat{\nu}, \widehat{\lambda}) = \frac{i}{\pi} \operatorname{tr} \log(-i\varepsilon)$$

ma

$$\log(-i\varepsilon) = \int_{-\infty}^{0} [(sI + i\varepsilon)^{-1} - (sI - I)^{-1}]\, ds = \varepsilon \left(-i\frac{\pi}{2}\right)$$

e quindi

(III.3.8)

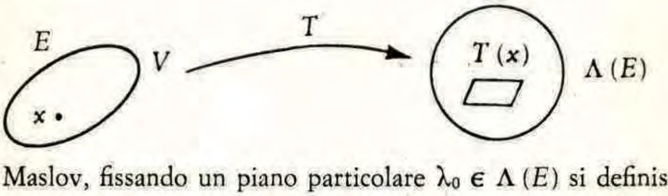
$$\boxed{m(\hat{\lambda},\hat{\mu}) + m(\hat{\mu},\hat{\nu}) + m(\hat{\nu},\hat{\lambda}) = \frac{i}{\pi}\,\mathrm{tr}\,\varepsilon\left(-i\,\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\mathrm{tr}\,\varepsilon}{2} = \frac{2p-n}{2}}$$

Dal confronto di (III.3.7) e (III.3.8) si ha la formula di Leray.

III.4 *Significato dell'indice di Maslov ed applicazioni*

La definizione qui proposta dell'indice di Maslov (differente per una costante da quella di Leray) si può collegare alla definizione originale di Maslov.

Una varietà V, immersa in uno spazio vettoriale simplettico E, è detta *lagrangiana* se il piano tangente in ogni suo punto è lagrangiano. Si può allora definire un'applicazione T che ad ogni punto $x \in V$ associa il piano $T(x)$ appartenente alla grassmanniana $\Lambda(E)$.



Secondo Maslov, fissando un piano particolare $\lambda_0 \in \Lambda(E)$ si definisce *contorno apparente* di V secondo la direzione λ_0 l'insieme degli $x \in V$ tali che $T(x)$ sia non trasverso a λ_0.

L'indice di Maslov originariamente era associato ad un arco F sulla varietà V e si può definire nuovamente a partire dalla $m(\cdot\,,\cdot)$. Sia $F:[0,1] \to V$ un arco di curva su V i cui estremi $F(0)$ e $F(1)$ non appartengono al contorno apparente di V secondo λ_0. L'applicazione $T \circ F : [0,1] \to \Lambda(E)$ si può sollevare su $\widehat{T\circ F} : [0,1] \to \hat{\Lambda}(E)$. Scelto $\hat{\lambda}_0 \in \hat{\Lambda}(E)$ sollevamento di λ_0 il numero

(III.4.0)
$$\boxed{k = m(\hat{\lambda}_0, \widehat{T\circ F}(1)) - m(\hat{\lambda}_0, \widehat{T\circ F}(0))}$$

è un intero perché, se la dimensione n dei piani è pari, $m(\cdot\,,\cdot)$ assume valori in $\mathbb{Z}$, se n è dispari assume valori solo in $\mathbb{Z} + 1/2$. Il numero k non dipende né dalla scelta del sollevamento di $T \circ F$, né da quello di λ_0 perché per (III.2.6) scegliendo $\widehat{T\circ F} = L^r(\widehat{T\circ F'})$ e $\hat{\lambda}'_0 = L^s(\hat{\lambda}_0)$ si ha

$$\begin{aligned}
k' &= m(\hat{\lambda}'_0, \widehat{T\circ F}'(1)) - m(\hat{\lambda}'_0 - \widehat{T\circ F}'(0)) = \\
&= m(L^s(\hat{\lambda}_0), L^r(\widehat{T\circ F}(1)) - m(L^s(\hat{\lambda}_0), L^r(\widehat{T\circ F}(0))) = \\
&= (s-r) + m(\hat{\lambda}_0, \widehat{T\circ F}(1)) - (s-r) - m(\hat{\lambda}_0, \widehat{T\circ F}(0)) = \\
&= m(\hat{\lambda}_0, \widehat{T\circ F}(1)) - m(\hat{\lambda}_0, \widehat{T\circ F}(0)) = k
\end{aligned}$$

k *è l'indice di Maslov dell'arco* F. Se l'arco F non incontra il contorno apparente di V secondo λ_0 allora la funzione $t \to m(\lambda_0, \widehat{T} \circ F(t))$ è sempre definita continua e a valori discreti, quindi costante; per tale arco l'indice di Maslov sarà nullo. In altre parole, se l'indice di Maslov di un arco F è non nullo, tale arco incontra necessariamente il contorno apparente di V secondo λ_0. Se l'arco in questione è un *cappio* si ha $\widehat{T} \circ F(1) = L^k(\widehat{T} \circ F(0))$ dove k è l'indice del cappio, pertanto k *rappresenta la classe di omotopia di* $T \circ F$ *e non dipende da* λ_0. Come conseguenza un cappio il cui indice di Maslov è non nullo incontra il contorno apparente di V secondo qualsiasi $\lambda_0 \in \Lambda(E)$.

Ad un problema variazionale sono associate equazioni differenziali del tipo:

$$F\left(q_1, q_2, \ldots, q_n, \frac{\partial s}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial s}{\partial q_n}\right) = 0 \tag{III.4.1}$$

dette equazioni di Jacobi del problema. Si trasporti il problema in $\mathbb{R}^{2n}$ riscrivendo la (III.4.1) in

$$\begin{cases} p_i = \dfrac{\partial s}{\partial q_i} \quad i = 1, \ldots, n \\ F(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) = 0 \end{cases} \tag{III.4.2}$$

L'equazione $F(q_i, p_i) = 0$ rappresenta un'ipersuperficie $\mathcal{F}$ di dimensione $2n - 1$ in $\mathbb{R}^{2n}$ che è coisotropa e le equazioni $\begin{cases} q_i = q_i \\ p_i = \dfrac{\partial s}{\partial q_i} \end{cases}$ con $s = s(q_i)$ fissato, $i = 1, \ldots, n$, rappresentano una varietà S che è lagrangiana, avendosi

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 s}{\partial q_i \partial q_j} = \frac{\partial^2 s}{\partial q_j \partial q_i} = \frac{\partial p_j}{\partial q_i}$$

Infatti se $\sigma((q, p), (q', p')) = \sum_{i=1}^{n} (q_i p_i' - p_i q_i')$ è il prodotto simplettico di $\mathbb{R}^{2n}$, un generico piano tangente ad S è generato dai vettori tangenti ad S

$$\delta \mathbf{q}_i = \left(0, \ldots, \underset{i}{\underset{\sim}{1}}, \ldots, 0, \frac{\partial p_1}{\partial q_i}, \ldots, \frac{\partial p_n}{\partial q_i}\right)$$

ottenuti per « derivazione » rispetto ai parametri $\{q_i\}$, e si ha

$$\sigma(\delta \mathbf{q}_i , \delta \mathbf{q}_j) = \Sigma \left(-1 \cdot \frac{\partial p_j}{\partial q_i} + 1 \cdot \frac{\partial p_i}{\partial q_j} \right) = 0 \, ;$$

quindi ogni piano tangente ad S è isotropo, di dimensione n e quindi lagrangiano, segue che S è una varietà lagrangiana.

Ricordando la complessificazione di $\mathbb{R}^{2n}$, $(x, y) \to x + iy$, e la relazione $g(\mathbf{u}, i\mathbf{v}) = -\sigma(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ che lega il prodotto euclideo usuale e il prodotto simplettico e indicando con $T_x(\mathcal{F})$ il piano tangente ad $\mathcal{F}$ in x, si ha

$$\mathbf{v} \in \mathrm{Ort}_\sigma(T_x(\mathcal{F})) \Rightarrow i\mathbf{v} \in \mathrm{Ort}_g(T_x(\mathcal{F})) \text{ e } \mathbf{v} \perp_g i\mathbf{v}$$

e poiché $\dim T_x(\mathcal{F}) = 2n - 1$

$$\mathbf{v} \in T_x(\mathcal{F})$$

quindi $\mathrm{Ort}_\sigma(T_x(\mathcal{F})) \subseteq T_x(\mathcal{F})$, ovvero $T_x(\mathcal{F})$ è coisotropo ed $\mathcal{F}$ è una varietà coisotropa. Allora $S_0 = S \cap \mathcal{F}$ risulta una sottovarietà lagrangiana di $\mathcal{F}$ associata alla soluzione s del sistema (III.4.2). Viceversa ad una sottovarietà lagrangiana S_0 di $\mathcal{F}$ si può associare una soluzione s del sistema (III.4.2)

Osservando che $\dim \mathrm{Ort}_\sigma(T_x(\mathcal{F})) = \dim \mathrm{Ort}_g(T_x(\mathcal{F})) = 1$ l'applicazione $\psi : x \to \mathrm{Ort}_\sigma(T_x(\mathcal{F}))$ risulta una 1-distribuzione su $\mathcal{F}$ associando ad ogni punto $x \in \mathcal{F}$ un sottospazio vettoriale di dimensione 1 dello spazio tangente $T_x(\mathcal{F})$. Se $x \in S_0$, $\mathrm{Ort}_\sigma(T_x(S_0)) \supseteq \mathrm{Ort}_\sigma(T_x(\mathcal{F}))$ sicché ψ risulta una 1-distribuzione su S_0. Poiché ogni 1-distribuzione è involutoria, cioè se $x, y \in \psi(x) \Rightarrow [x, y] \in \psi(x)$, per il teorema di Frobenius la 1-distribuzione è globalmente integrabile e le curve integrali dette caratteristiche rigano sia la $\mathcal{F}$ che la S_0.

La varietà S_0 associata alla soluzione s come è stato visto è lagrangiana e si può quindi definire l'applicazione

$$\begin{aligned} T : S_0 &\to \Lambda(n) \\ : x &\to T_x(S_0) \end{aligned}$$

se S_0 è semplicemente connessa l'applicazione T si può sollevare all'applicazione

$$\widehat{T} : S_0 \to \widehat{\Lambda(n)}$$

fissato $\lambda_0 \in \Lambda(n)$ e un suo sollevamento $\widehat{\lambda_0} \in \widehat{\Lambda(n)}$, si definisce la funzione $f : x \to m(\widehat{T}(x), \widehat{\lambda_0})$.

La funzione f ha valori interi o semiinteri.

Secondo la definizione data per $m(\cdot, \cdot)$, la f non è definita nei punti x in cui il piano $T(x)$ non risulta trasverso a λ_0, tali punti corrispondono al contorno apparente di S_0 secondo λ_0 e sono detti anche di « caustiques ». Se la funzione f

ha valori diversi in due punti x e x', allora ogni arco che li congiunge deve incontrare alcune « caustiques ».

IV. GRUPPO DINAMICO

IV.1 *Richiami su derivazione esterna e simplettomorfismi*

Si consideri una varietà simplettica V, che può essere pensata come una varietà su cui è definita una 2-forma σ con opportune proprietà. Le proprietà sono le seguenti:

1) la forma σ è invertibile per ogni punto $v \in V$ sul quale la si consideri.

2) esistono delle coordinate locali in cui le componenti $\sigma_{\alpha\beta}$ di σ sono costanti.

Conseguenza dell'invertibilità della σ è che la dimensione della varietà V è pari.

Esiste un teorema, teorema di Darboux, per cui la proprietà 2) è verificata se e solo se

$$\nabla \sigma = 0 \tag{IV.1.1}$$

L'operazione ∇ è il differenziale esterno ed è tale che ad una forma differenziale di grado p associa una forma differenziale di grado $p+1$.

Allora se si applica il differenziale esterno ad una 0-forma s si ha l'usuale operazione di derivazione.

Per le componenti si ha: $[\nabla s]_\alpha = \partial_\alpha s$.

Considerando una 1-forma ω, si ha: $[\nabla \omega]_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \omega_\beta - \partial_\beta \omega_\alpha$.

Considerando una 2-forma σ, si ha: $[\nabla \sigma]_{\alpha\beta\gamma} = \partial_\alpha \sigma_{\beta\gamma} + \partial_\beta \sigma_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma \sigma_{\alpha\beta}$.

Se l'operazione di differenziazione è operata 2 volte si ottiene la forma nulla

$$\nabla \nabla \omega = 0$$

Allora il teorema di Poincaré asserisce che se è valida la (IV.1.1) esiste sempre localmente una 1-forma ω tale che

$$\sigma = \nabla \omega$$

Si considerino ora due varietà V e V' e un diffeomorfismo $a: V \rightarrow V'$, se (V, σ) è una varietà simplettica allora tramite il diffeomorfismo a si può dotare V' della struttura simplettica in modo che a diventa un simplettomorfismo:

$$\sigma_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sigma'_{p'}(\mathbf{x}', \mathbf{y}') \qquad \text{dove} \qquad \begin{array}{l} p \in V \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in T_p(V) \\ p' = a(p) \quad \mathbf{x}' = a^*(\mathbf{x}) \quad \mathbf{y}' = a^*(\mathbf{y}) \end{array}$$

Se $V = V'$, un diffeomorfismo a di V in sé stessa verificante

$$\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sigma(a^*(\mathbf{x}), a^*(\mathbf{y}))$$

è detto un *simplettomorfismo* di V. L'insieme dei simplettomorfismi di una varietà V forma un gruppo con l'usuale composizione e si indica *Simpl* (V). Simpl (V) è l'analogo del gruppo delle isometrie di una varietà Riemanniana ed ha dimensione infinita.

Se F è un campo di vettori di una varietà V, $x = x(t)$ è una curva integrale di F, per ogni suo punto x si ha $\dfrac{dx}{dt} = F(x)$

e la soluzione di questa equazione differenziale passante per x_0 si indica $x = \exp(tF)(x_0)$.

Tale soluzione esiste sempre ed è unica localmente se F è differenziabile e la varietà separata. Se le soluzioni possono essere prolungate su tutta la varietà, ovvero $\exp(tF)(x_0)$ esiste per ogni t e per ogni x_0, il campo F si dice *completo*. Ponendo

$$a_t = \exp(tF)$$

si verifica che $a_t \circ a_{t'} = a_{t+t'}$,per ogni t e t' ; quindi a_t è un gruppo ad un parametro di diffeomorfismi.

Se V è una varietà simplettica, F completo, ci domandiamo se $a_t = \exp(tF)$ rappresenta simplettomorfismi per ogni t. Il campo F viene allora detto *simplettomorfismo infinitesimale*.

C.N.E.S. affinché F sia un simplettomorfismo infinitesimale è che

(IV.1.2) $$\nabla(\sigma(F(x))) = 0$$

Allora, ricordando il teorema di Poincaré, localmente esisterà una funzione h tale che

(IV.1.3) $$\sigma(F(x)) = -\nabla h$$

ovvero tramite le componenti $\sigma_{\alpha\beta} F^\alpha = -\partial_\beta h$.

Essendo σ invertibile la (IV.1.3) si può riscrivere

(IV.1.4) $$F(x) = -\sigma^{-1}(\nabla h)$$

D'altra parte se h è una 0-forma a supporto compatto la (IV.1.4) definisce un campo di vettori completo e quindi un simplettomorfismo infinitesimale.

IV.2 *Azione di un gruppo di Lie su una varietà e azione aggiunta*

Si dice che un gruppo di Lie G agisce su una varietà V se:

1) esiste un morfismo di gruppi $G \to \{\text{Diff.}(V)\}$

$$a \to a_V$$

essendo Diff. (V) il gruppo dei diffeomorfismi di V.

2) la seguente applicazione sia differenziabile

$$\text{(IV.2.1)} \qquad \alpha : G \times V \to V$$
$$(a, x) \to a_V(x)$$

L'insieme $x_0^G = \{x \in V \mid x = a_V(x_0)\ ,\ a \in G\ ,\ x_0 \in V\}$ è chiamata *orbita* di x_0. Le orbite formano una partizione di V, $G_{x_0} = \{g \in G \mid g_V(x_0) = x_0\}$ è un sottogruppo chiuso di G, detto *stabilizzatore* di x_0 o *gruppo di isotropia* di x_0. Inoltre ogni orbita x_0^G è una sottovarietà di V che risulta diffeomorfa alla varietà quoziente G/G_{x_0}. Se $x_0, x'_0 \in x_0^G$, G_{x_0} e $G_{x'_0}$ sono coniugati in G.

L'azione di un gruppo di Lie si può considerare da un punto di vista infinitesimale, dando un'applicazione dell'algebra di Lie G di G all'insieme dei campi di vettori $\mathfrak{X}(V)$. Sia $a(t)$ una curva in G che ha $Z \in G$ come vettore tangente nel suo punto e (elemento neutro di G), $a(t)_V(x_0)$ sarà una curva in G per x_0 e il vettore tangente in x_0 si indica $Z_V(x_0)$ (9); $Z_V(x_0)$ varia differenzialmente con x_0.

In formula

$$\text{(IV.2.2)} \qquad \partial \left[a(t)_V(x_0) \right]_{\substack{x_0 \text{ fissato} \\ a(0) = e \\ \partial a(t) = Z}} = Z_V(x_0)$$

cioè l'applicazione che per $Z \in G$ fa corrispondere $Z_V \in \mathfrak{X}(V)$.

$Z_V(x_0)$ è un vettore tangente all'orbita x_0^G, e così si possono ottenere tutti i vettori tangenti a tale orbita. Inoltre si può calcolare la dimensione dell'orbita e di conseguenza la dimensione dello stabilizzatore. Si può ora dare una generalizzazione dell'esponenziale per un qualunque gruppo di Lie, più precisamente essa sarà l'applicazione (*) $\exp : G \to G$ caratterizzata da

$$\text{(IV.2.3)} \qquad \exp(Z)_V = \exp(Z_V)$$

per ogni $Z \in G$, per ogni varietà V e per ogni azione di G su V. Si può dimostrare che il campo Z_V è sempre completo, pertanto esiste globalmente la soluzione unica, $\exp(t Z_V)(x)$, dell'equazione differenziale $dx/dt = Z_V(x)$ e il secondo membro della (IV.2.3) fornisce la soluzione calcolata per $t = 1$ che al variare di x è un diffeomorfismo di V come il primo membro.

Si definisce la funzione exp indipendentemente dall'azione di G su una va-

(9) Si deve ricordare che l'algebra di Lie G può essere considerata come lo spazio tangente in $e \in G$: $T_e(G)$. Allora fissato un $x_0 \in V$, si consideri $\bar{\alpha} : G \times \{x_0\} \to V$ restrizione della α in (IV.2.1); $\bar{\alpha}(G \times x_0)$ è l'orbita di x_0. L'applicazione indotta $\bar{\alpha}^* : T_e(G) \to T_{x_0}(V)$ è tale che $Z_V(x_0) = \bar{\alpha}^*(Z)$, per ogni $Z \in T_e(G) = G$.

rietà. Un elemento $Z \in G$ è un campo di vettori di G invariante a sinistra per cui è completo ed individua quindi globalmente $\exp(tZ)(a)$.

Si ponga $\exp(Z) = \exp(1\,Z)(e)$ e si dimostra la (IV.2.3): la curva integrale passante per x del campo di vettori $Z_V(x)$ è l'immagine in V, secondo l'azione di G su V, della curva integrale per e del campo di vettori Z; ovvero $\exp(t\,Z_V)\,x$ è l'immagine, secondo l'azione di G su V, di $\exp(t\,Z)\,e$ e in formula

$$\exp(t\,Z_V)\,x = \exp(t\,Z)\,e_V\,x$$

e per $t = 1$

$$\exp(Z_V)\,x = \exp(Z)\,e_V\,x$$

ovvero

$$\exp(Z_V) = \exp(Z)\,e_V = \exp(Z)_V$$

D'altra parte si può vedere che la definizione di exp che è stata data è l'unica possibile perché sia valida sempre la (IV.2.3): basta considerare il caso speciale di G che agisce su se stesso per moltiplicazione.

Esempio: si consideri $G = GL(n, \mathbb{R}^n)$ e $V = \mathbb{R}^n$ (l'azione di G su V è il prodotto di una matrice $a \in G$ per un vettore $x \in \mathbb{R}^n$). L'algebra di Lie G di G è costituita da tutte le matrici invertibili e no, cioè $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, allora (*) è l'applicazione $\exp : L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ e risulta proprio l'esponenziale di una matrice già definito.

Sia F un morfismo fra gruppi di Lie, $F : G \rightarrow G'$, e G' agente su V, allora G agisce su V tramite F:

$$a_V = F(a)_V$$

Sia φ la derivata di F calcolata in $e \in G$ allora per $Z \in G$ si ha $F(\exp(Z)) = \exp(\varphi(Z))$.

Esempio: sia $G = GL(n, \mathbb{R})$ e $G' = \mathbb{R} - \{0\}$ con $(\cdot)$, F = determinante, allora φ = traccia, cioè $\det(\exp(Z)) = \exp(\text{traccia}(Z))$.

Caso di particolare interesse è quello in cui $G = G'$ ed F è il coniugio secondo $b \in G$, cioè per $a \in G$, $F(a) = b.a.b^{-1}$, allora $\varphi : T_e(G) \rightarrow T_e(G)$ è in $L(G, G)$, dipende da b e si indica con b_G, cioè l'azione di $b \in G$ sull'algebra di Lie G che è individuata dall'automorfismo interno.

L'azione $b \rightarrow b_G$ (10) si chiama *azione aggiunta,* ma anzi essendo lineare è detta anche *rappresentazione aggiunta.*

Si vuole ora considerare *l'azione infinitesimale* indotta dall'azione aggiunta, che ad un $Z \in G$ associa un campo di vettori Z_G appartenente a $\mathfrak{X}(G)$, precisamente si pone

$$-Z_G = \mathrm{ad}(Z) \tag{IV.2.4}$$

(10) L'azione aggiunta è considerata sull'algebra di Lie G che è una varietà in quanto spazio vettoriale.

Il campo Z_G risulta anche lineare, dato che si ha

(IV.2.5) $$-Z_G(Z') = [Z, Z']$$

per ogni $Z' \in G$.

La (IV.2.5) si può assumere come definizione di bracket e in quanto tale verifica le proprietà di bilinearità, antisimmetria e l'identità di Jacobi. Si ricorda ora *la forma di Killing*: ad (Z) è un'applicazione lineare dell'algebra di Lie in se stessa, si può calcolare la traccia del quadrato:

$$\mathrm{Tr}\,[\mathrm{ad}\,(Z)^2] = \text{forma quadratica di Killing}$$

Se tale forma è invertibile, G è semisemplice; assumendo G connesso, G è compatto se e solo se la forma di Killing è definita negativa.

IV.3 *Rappresentazione coaggiunta di* G

La rappresentazione coaggiunta di G va definita su G^*, per ogni $\mu \in G^*$ si pone:

(IV.3.2) $$a_{G^*}(\mu) = \mu \cdot a_G^{-1}$$

dove la scelta di a_G^{-1} è opportuna per fare sì che la rappresentazione $a \rightarrow a_{G^*}$

(IV.3.2) $$G \rightarrow L(G^*, G^*)$$

sia un morfismo di gruppi, anziché un antimorfismo. All'azione coaggiunta è associata una azione *coaggiunta infinitesimale* e per $Z \in G$ e $\mu \in G^*$ risulta

(IV.3.3) $$Z_{G^*}(\mu) = \mu \cdot \mathrm{ad}\,(Z)$$

IV.4 *Gruppo dinamico su una varietà simplettica*

Si applichi quanto visto fino ad ora alle varietà simplettiche. Sia V una varietà simplettica, G un gruppo di Lie, si dice che G ha una azione simplettica su V se a_V è un simplettomorfismo per ogni $a \in$ G e G è detto *gruppo dinamico su V*.

In tale caso per ogni $Z \in G$ il campo Z_V risulta per definizione un simplettomorfismo infinitesimale e quindi applicando la (IV.1.2) si ha

$$\nabla\,[\sigma(Z_V(x))] = 0$$

e per il teorema di Poincaré localmente si può scrivere

(IV.4.1) $$\sigma\,[Z_V(x)] = -\nabla h$$

con h campo scalare. Se il campo scalare è globalmente definito (per esempio se la varietà è semplicemente connessa) la (IV.4.1) è valida globalmente. Si noti che h è determinato a meno di una costante.

Tuttavia si possono scegliere tali costanti in modo tale che h dipenda linearmente da Z : basta fissare una base z_i, $i = 1, \ldots, n$, nell'algebra di Lie ed associare a questi vettori ben determinate h_i. Si ponga $h = \mu_x(Z)$ con $\mu_x \in G^*$ e determinata a meno di una costante. La (IV.4.1) diventa

$$\sigma[Z_V(x)] = -\nabla[\mu_x(Z)] \qquad \forall x \in V, \ \forall Z \in G. \tag{IV.4.2}$$

il campo $\psi : x \to \mu_x$ è differenziale e a valori in G^* e si chima *momento del gruppo dinamico*.

IV.5 *Coomologia del gruppo dinamico*

Sia G un gruppo dinamico sulla varietà V che ha ψ come momento, in generale le azioni ψ o a_V e a_{G^*} o ψ di G su G^* sono diverse: differiscono per una funzione θ di $a \in$ G :

$$\theta(a) = \psi(a_V(x)) - a_{G^*}(\psi(x)). \tag{IV.5.1}$$

L'applicazione θ non dipende da x ed è differenziabile: $\theta : G \to G^*$. L'applicazione definita in (IV.5.1) verifica

$$\theta(a\, b) = \theta(a) + a_{G^*}(\theta(b)) \tag{IV.5.2}$$

infatti sfruttando la (IV.5.1) e l'indipendenza di θ da x, si ha, ponendo $b_V(x) = x'$

$$\theta(a\, b) = \psi(a_V \circ b_V(x)) - a_{G^*} b_{G^*}(\psi(x))$$

e

$$\theta(b) = \psi(b_V(x)) - b_{G^*}(\psi(x))$$

allora ricavando $b_{G^*}(\psi(x))$

$$\begin{aligned} \theta(a\, b) &= \psi(a_V \circ b_V(x)) - a_{G^*}[\psi(b_V(x)) - \theta(b)] = \\ &= \psi(a_V \circ b_V(x)) - a_{G^*}(\psi(b_V(x))) + a_{G^*}(\theta(b)) = \\ &= \psi(a_V(x')) - a_{G^*}(\psi(x')) + a_{G^*}(\theta(b)) = \\ &= \theta(a) + a_{G^*}(\theta(b)). \end{aligned}$$

Per definizione le applicazioni $\theta : G \to G^*$ che soddisfano la (IV.5.2) per ogni $a, b \in$ G si dicono *cocicli di* G. Si può dare una struttura di spazio vettoriale all'insieme delle applicazioni $\theta : G \to G^*$ e i cocicli formano un sottospazio.

Si ricordi che il momento ψ è definito a meno di una costante, si vuole ora vedere come varia $\theta(a)$ se si cambia $\psi(x)$ con $\psi'(x) = \psi(x) - \mu_0$.

$$\begin{aligned} \theta'(a) &= \psi'(a_V(x)) - a_{G^*}(\psi'(x)) = \\ &= \psi(a_V(x)) - \mu_0 - a_{G^*}(\psi(x) - \mu_0) = \\ &= \psi(a_V(x)) - \mu_0 - a_{G^*}(\psi(x)) + a_{G^*}(\mu_0) = \\ &= \theta(a) + (a_{G^*}(\mu_0) - \mu_0) \end{aligned}$$

$$\text{(IV.5.3)} \qquad \theta'(a) - \theta(a) = (a_{G^*}(\mu_0) - \mu_0) \qquad = \textit{cobordo di } \mu_0$$

I cobordi sono particolari cocicli e l'insieme dei cobordi è un sottospazio vettoriale dello spazio dei cocicli. Lo spazio quoziente cocicli/cobordi è detto spazio di *coomologia simplettica del gruppo.*

In definitiva ad ogni sistema dinamico dotato di momento si può dare una classe di coomologia.

Esempio: il gruppo di Galileo ha uno spazio di coomologia di dimensione 1 e quindi ogni momento dipende sostanzialmente da un parametro che è la massa.

Nel caso in cui l'azione dinamica sia a coomologia nulla vale la seguente identità

$$\sigma[Z_V(x), Z'_V(x)] = \mu_x[Z, Z'] \qquad \forall x \in V, \ \forall Z, Z' \in G.$$

Considerando una varietà V, ci si pone il problema di vedere su quale sottovarietà G opera simpletticamente.

Il problema è stato risolto, almeno in parte, da Kirillov.

Sia $V = G^*$. Per ogni cociclo θ, *l'azione θ-coaggiunta* di G in G^* è definita:

$$\text{(IV.5.4)} \qquad a^{\theta}_{G^*}(\mu) = a_{G^*}(\mu) + \theta(a)$$

Se $\theta = 0$ si ha l'azione coaggiunta.

Proposizione: Se θ è tale che $\theta(e) : G \to G^*$ è una 2-forma di G, allora

1) ogni orbita dell'azione θ-coaggiunta è una sottovarietà di G^*;

2) su tali orbite si può definire una struttura simplettica;

3) G agisce dinamicamente su μ^{G^θ}, che è l'orbita di μ secondo l'azione θ-coaggiunta.

È da notare che se θ e θ' sono coomologhe, le rispettive orbite μ^{G^θ} e $\mu^{G^{\theta'}}$ differiscono in G^* per una traslazione ed hanno anche la stessa struttura simplettica. In particolare se la coomologia simplettica è nulla, cioè ogni cociclo è un cobordo, allora basta studiare le orbite per $a = 0$, cioè l'orbita dell'azione coaggiunta definita in (IV.3.1), essendo tutte le altre orbite possibili simplettomorfe. Si vuole ora invertire quanto visto nella proposizione precedente:

Proposizione: Sia G un gruppo dinamico connesso su una varietà simplettica V, μ il momento e θ il cociclo associato a μ, allora

1) $\psi : x \to \mu_x$ applica V in U dove U è l'orbita θ-coaggiunta e $\dim V = \dim U$.

2) Se G_μ, stabilizzatore di μ secondo l'azione θ-coaggiunta, è connesso, allora ψ è un simplettomorfismo

$$\psi : V \to U = \mu^{G^\theta}$$

V. IDEE SULLA PREQUANTIFICAZIONE

Prima di parlare di varietà quantiche, occorre dare qualche definizione: sia Y una varietà, $\bar{\omega} \neq 0$ una 1-forma ivi definita, $\sigma = \nabla \bar{\omega}$, $\operatorname{Ker} \bar{\omega} = \{ v \in Y \mid \bar{\omega}(v) = 0 \}$ tale che $\operatorname{Ker} \bar{\omega}$ forma un iperpiano di dimensione $2n$.

Definizione: Se le relazioni: $\dim(\operatorname{Ker} \sigma) = 1$

$$\dim(\operatorname{Ker} \bar{\omega} \cap \operatorname{Ker} \sigma) = 0 \tag{V.1}$$

sono verificate, si dice che $\bar{\omega}$ dà una *struttura di contatto* alla varietà Y di dimensione dispari.

La forma σ è di rango dispari ed è non invertibile mentre risulta $\sigma \mid_{\operatorname{Ker}\bar{\omega}}$ invertibile.

Si consideri ora un toro $T^1 = S^1$ (gruppo di Lie) che agisca su Y. Se le linee di forza determinate sono delle linee chiuse si può calcolare per $\xi \in Y$

$$\oint \bar{\omega} \frac{d\xi}{ds} ds \tag{V.2}$$

Il valore dell'integrale (V.2) è costante se Y è connesso.

Definizione: si dice *varietà quantica*, una varietà che abbia una struttura di contatto e tale che $\oint \bar{\omega} \dfrac{d\xi}{ds} ds = 2\pi$.

Si vuole ora precisare quanto detto: sia ξ un punto di Y e $i(\xi) \in T_\xi(Y)$ tale che $\sigma(i(\xi)) = 0$ e $\bar{\omega}(i(\xi)) = 1$. L'equazione $\dfrac{d\xi}{dt} = i(\xi)$ è risolta in $\xi = \exp(t\, i)\xi_0$ allora $\exp(2\pi i)\xi_0 = \xi_0$ se la varietà è quantica. E quindi l'azione $(t, \xi_0) \to$ $\to \exp(t\, i)\xi_0$ dà l'azione di T^1 sulla varietà, ovvero $(Z, \xi) \to \exp(\varphi\, i)\xi$ con $Z =$ $= e^{i\varphi} \in T^1$.

Siano Y e Y' due varietà quantiche con 1-forme $\bar{\omega}$ ed $\bar{\omega}'$, sia $\alpha : Y \to Y'$ un diffeomorfismo; si dice che α è un *quantomorfismo* se l'immagine tramite α di $\bar{\omega}$ è la forma $\bar{\omega}'$:

$$\xi' = \alpha(\xi) \Rightarrow \overline{\omega'}(\delta\xi') = \omega(\delta\xi) \qquad \delta\xi' = \alpha^*(\delta\xi)$$

ed anche

$$\alpha(Z_Y(\xi)) = Z_{Y'}(\alpha(\xi))$$

dove $\delta\xi$ e $\delta\xi'$ indicano vettori rispettivamente di $T_\xi(Y)$ e $T_{\xi'}(Y')$.

Dunque i quantomorfismi sono isomorfismi delle strutture quantiche. I quantomorfismi formano un gruppo che si indica *Quant* (Y). Dalle definizioni risulta che T^1 agisce su una varietà quantica per quantomorfismi, ovvero per una varietà quantica Y esiste un morfismo di gruppi: $T^1 \to \text{Quant}(Y)$.

L'immagine di T^1 è contenuta in Quant (Y) e ne risulta il centro. Se si considera la varietà quoziente $Y/T^1 = U$ si ha una varietà simplettica, detta varietà di base, su cui è anche definita la 2-forma σ ; infatti se $p : Y \rightarrow U$, tale che $p(\xi) = x$ per ξ variabile sulla sua linea di forza, si ha $\sigma(\delta_1 \xi, \delta_2 \xi) = \sigma(\delta_1 \mathbf{x}, \delta_2 \mathbf{x})$ per $\delta_1 \xi, \delta_2 \xi \in T_\xi(Y)$ e $\delta_1 \mathbf{x}, \delta_2 \mathbf{x}$ le rispettive proiezione. È da notare che la 1-forma $\bar{\omega}$ non è definita su U . Viceversa se U è una varietà simplettica ci si chiede se esiste una varietà quantica Y la cui varietà di base sia simplettomorfa ad U : si parla in tal caso di *quantificazione della varietà simplettica* U . In generale sono posibili quantificazioni « diverse » per una stessa varietà simplettica.

Se Y ed Y' quantificano rispettivamente due varietà simplettiche U ed U' , si dimostra che il quantomorfismo α , $\alpha : Y \rightarrow Y'$, discende su U ed U' in $\tilde{\alpha}$ e risulta un simplettomorfismo $\tilde{\alpha} : U \rightarrow U'$.

Se $U = U'$ ed α è tale che $\tilde{\alpha} = I_U$, si dice che le quantificazioni (Y, p) ed (Y', p') sono equivalenti.

Alcuni risultati di notevole importanza:

Applicando alle varietà quantiche la teoria della omologia si ha che: se U è una varietà quantificabile, U possiede tante quantificazioni non equivalenti quanti sono i caratteri distinti (irriducibili) del gruppo di omotopia di U . Ne discende che se U è una varietà quantificabile e semplicemente connessa allora è monoquantificabile. Se il gruppo di omotopia è il gruppo simmetrico, vi sono solo 2 quantificazioni non equivalenti perché vi sono solo 2 caratteri distinti (irriducibili) nel gruppo di omotopia; nei sistemi di particelle elementari sono dette quantificazioni di Bose-Einstein e Fermi-Dirac.

Sia ora (Y, p) una quantificazione di una varietà simplettica U , G un gruppo di Lie che operi su Y per quantomorfismi, G risulta un gruppo dinamico su Y.

Allora se un gruppo dinamico di una varietà simplettica è quantificabile, la sua coomologia simplettica è nulla.

BIBLIOGRAFIA

J. LERAY: *Complément à la théorie d'Arnold de l'indice de Maslov,* Symposia Mathematica, Vol. XIV.

V. P. MASLOV: *Théorie des Perturbations et Methodes Asymptotiques,* Dunod (1972).

J. M. SOURIAU: *Structure des Sistémes dinamiques,* Dunod Université (1970).

A. WEIL: *Sur certains groupes d'opérateurs unitaires,* Symposia Mathematica (1964, p. 143-211.

INDICE

171. - QUADERNO n. 9 - M. BRUSCHI: *Sul teorema di Lerch per intervalli infiniti;* F. BONGIORNO: *Un problema ai limiti per l'equazione iperbolica del quart'ordine;* M. LO SCHIAVO - G. MASCHIO: *Massimizzazione di un'entropia per un sistema gran-canonico nel caso classico continuo;* B. GERMANO: *Considerazioni sui polinomi ortonormali in* $[0, +\infty)$ *rispetto al peso* e^{-x^α}, $(\alpha > 0)$. Tipo-Litografia MARVES, Roma, 1977.

172. - P. G. BORDONI: *Sugli insiemi di grandezze meccaniche derivate.* Annali di Matematica pura ed applicata, vol. CXI, pp. 45-57.

173. - A. CARFAGNA D'ANDREA: *Su una classe di piani metrici gruppali finiti di ordine dispari a debole struttura di incidenza.* Rendiconti di Matematica, vol. 9 (1976).

174. - I. ANASTASIA POMILIO: *La geometria delle catene della retta proiettiva complessa e lo spazio di De Sitter.* Rendiconti di Matematica, vol. 9 (1976).

175. - L. NICOLÒ - AMATI GORI: *Osservazioni sulle formule generalizzate di quadratura convergenti.* Rendiconti di Matematica, vol. 9 (1976).

176. - C. VALENTE: *Condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di un particolare tipo di funzioni di Ljapunov.* Rendiconti di Matematica, vol. 10 (1977).

177. - L. PANELLA MARTINELLI: *Una generalizzazione dell'invariante di Mehmke-Segre.* Rendiconti di Matematica, vol. 10 (1977).

178. - A. M. CONTIGLIOZZI PENNA: *Su una geometria di Minkowski.* Rendiconti di Matematica, vol. 10 (1977).

179. - A. OSSICINI - F. ROSATI: *Procedimenti interpolatori nella valutazione Gaussiana di integrali a valore principale.* Le Matematiche, vol. XXXI (1976).

180. - QUADERNO N. 10 - L. FIORAVANTI PICCOLELLA: *Sulle superficie algebriche con retta multipla.* G. FUSCO: *Funzioni posizionali m-indipendente per i moti unidimensionali.* P. NEGRINI - L. TRIOLO: *Questioni di stabilità in un problema di biforcazione.* Tipo-Litografia MARVES, Roma 1977.

181. - G. VACCARO: *Commemorazione di Enrico Bompiani.* Bollettino Unione Matematica Italiana (1976).

182. - G. VACCARO: *Sulla evoluzione di nozione di contatto.* Archimede, fasc. 2/3 (1977).

183. - M. LO SCHIAVO - C. MARIANI: *Introduzione alla meccanica Statistica.* Quaderno C.N.R. (1977).

184. - L. FIORAVANTI PICCOLELLA: *Sopra alcune proprietà proiettive delle curve e delle superficie iperspaziali.* Rendiconti di Matematica, vol. 10, fasc. 2/3 (1977).

185. - G. FUSCO: *Moti piani: Determinazione delle funzioni M-indipendente funzionale.* Rendiconti di Matematica, fasc. 2/3 (1977).

186. - V. DICUONZO: *On a class of finite pseudo Möbius Planes of even order.* Rendiconti di Matematica, (2/3), Vol. 10, Serie VI (1977).

187. - L. MANNA CIARRAPICO: *Calotta superficiale non parabolica di un S4.* Rendiconti di Matematica, Vol. 10 (1977).

188. - C. BOLDRIGHINI - L. TRIOLO: *Absence of Turbulence in a unidimensional model of fluid motion (Burgers model)*, Meccanica, 1977.

189. - P. MACRÌ: *Sulla classificazione dei fibrati.* Tipo-Litografia MARVES, Roma 1978.

190. - QUADERNO n. 11 - A. GHIZZETTI - B. GERMANO: *Sulla completezza in* $L^2\ [0, +\infty)$ *di certi sistemi di polinomi ortonormali*; A. MORELLI: *Completezza in* $L^2\ (-\infty, +\infty)$ *di certi sistemi di polinomi ortonormali*; G. SELMI: *Gruppo degli operatori che lasciano invariata la rappresentazione canonica di una particolare classe di tensori doppi covarianti a nuclei non coincidenti*; D. PASQUALI - COLUZZI: *Sulle simmetrie assiali del piano iperbolico*; S. ZOFREA: *Sulle tangenti sfero-coniugate in un punto di una superficie.* Tipo-Litografia MARVES, Roma, 1978.