

G R O U P E S D I F F E R E N T I E L S

J . M . S O U R I A U

Université de Provence
Centre de Physique théorique, CNRS, Marseille

Adresse postale

Centre de Physique théorique
CNRS - LUMINY - CASE 907
F - 13288 MARSEILLE CEDEX 2 (France)

Ce travail fait partie d'une tentative de formalisation de la mécanique quantique; mais il est rédigé sous forme mathématique autonome.

L'axiomatique des "difféologies" (§1) définit la catégorie des groupes différentiels ; catégorie suffisamment vaste pour contenir, par exemple, tous les groupes de difféomorphismes; cependant les groupes différentiels conservent la plupart des propriétés élémentaires des groupes de Lie, que nous passons en revue:

- Topologie (§ 4) : un groupe différentiel est canoniquement un groupe topologique; la structure topologique est construite par des méthodes d'analyse harmonique, exposées au § 3 , et qui seront utilisées systématiquement aux §§ 5,6.
- Homotopie (§ 2) : on définit directement les revêtements des groupes différentiels; tout groupe différentiel connexe possède un revêtement universel, donc un groupe d'homotopie, qui sont construits explicitement.
- Analyse infinitésimale (§ 5) : tout groupe différentiel G possède un espace tangent $\mathcal{G}$, qui est canoniquement un espace vectoriel topologique localement convexe, et sur lequel agit la représentation adjointe; on peut définir le crochet de Lie de deux vecteurs tangents, et extraire de $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie $\mathcal{G}_0$. On définit corrélativement un espace cotangent $\hat{\mathcal{G}}$ (partie séparante du dual $\mathcal{G}'$), et la représentation coadjointe.
- Enfin certains vecteurs de $\mathcal{G}$ (les vecteurs complets) possèdent une exponentielle dans le groupe; cette opération conserve quelques propriétés caractéristiques (§ 6). ■

Le présent exposé est destiné à montrer l'existence d'une telle théorie; nous n'abordons ici aucune application.

—0—0—0—0—0—0—0—0—0—0—

§ 0 : NOTATIONS

- (0.1) F, G étant des applications quelconques, l'ensemble de définition de F sera noté $\text{def}(F)$; son ensemble de valeurs $\text{im}(F)$; nous noterons $<$ la relation d'ordre du prolongement : $\left\{ \begin{array}{l} \text{def}(F) \\ \text{def}(G) ; x \in \text{def}(F) \Rightarrow G(x) = F(x) \end{array} \right\}$. Toute famille F_j qui est compatible $\left\{ \forall x \in \text{def}(F_j) \cap \text{def}(F_k) \quad F_j(x) = F_k(x) \right\}$ admet une borne supérieure pour la relation $<$ (le plus petit prolongement commun des F_j) qui sera noté $\text{sup}(F_j)$.
- (0.2) Les variétés que nous rencontrerons seront de dimension finie, de classe C^∞ , séparées. X et Y étant deux variétés, $C^\infty(X, Y)$ désigne la classe des applications (infiniment) différentiables de X dans Y ; nous noterons $D(X, Y)$ l'ensemble des applications infiniment différentiables d'un ouvert de X dans Y . Dans cette notation X ou Y pourront en particulier être des espaces numériques $\mathbb{R}^n$.
- (0.3) En général, nous noterons $\times$ une loi de groupe, e l'élément neutre. Nous appellerons morphisme de groupe $\tilde{\Phi} : G \rightarrow G'$ toute application d'un groupe G dans un groupe G' vérifiant $\tilde{\Phi}(g_1 \times g_2) = \tilde{\Phi}(g_1) \times \tilde{\Phi}(g_2) \quad \forall g_1, g_2 \in G$.

§ 1 : DIFFÉOLOGIES ET GROUPES DIFFÉRENTIELS

Définitions

- (1.1) Soit $G, \times$ un groupe.
- Nous appellerons difféologie de G le choix, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, d'un ensemble $D(\mathbb{R}^n, G)$, dont les éléments sont des applications d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dans G , si les 5 axiomes suivants sont vérifiés:
- a) Toute application constante $\mathbb{R}^n \rightarrow G$ appartient à $D(\mathbb{R}^n, G)$.
 - b) Si $\mathcal{F}_j \in D(\mathbb{R}^n, G)$, $\mathcal{F}_j$ compatibles (voir (0.1)), $\text{sup}(\mathcal{F}_j) \in D(\mathbb{R}^n, G)$.
 - c) $\forall \mathcal{F} \in D(\mathbb{R}^n, G)$, $\forall A \in D(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $\mathcal{F} \circ A \in D(\mathbb{R}^m, G)$.
 - d) $\forall \mathcal{F} \in D(\mathbb{R}^n, G) \quad [x \mapsto \mathcal{F}(x)^{-1}] \in D(\mathbb{R}^n, G)$.

$$e) \forall f \in D(\mathbb{R}^n, G), \forall f' \in D(\mathbb{R}^{n'}, G) \left[(r, r') \mapsto f(r) f'(r') \right] \in D(\mathbb{R}^{n+n'}, G)$$

- (1.2) Une difféologie D' de G sera dite plus fine que D si elle a moins d'éléments : $\forall n, D'(\mathbb{R}^n, G) \subset D(\mathbb{R}^n, G)$ (nous verrons ci-dessous que la topologie associée est aussi plus fine).
- (1.3) Si des $\mathcal{F}_j$ sont des applications quelconques d'ouverts de $\mathbb{R}^{n_j}$ dans un groupe G , la difféologie la plus fine contenant les $\mathcal{F}_j$ existe, et sera dite engendrée par les $\mathcal{F}_j$; en particulier, la difféologie la plus fine de G est la difféologie discrète : les éléments $\mathcal{F}$ de $D(\mathbb{R}^n, G)$ sont alors les applications localement constantes ($\mathcal{F}$ ne prend qu'une valeur sur chaque composante connexe de l'ouvert $\text{def}(\mathcal{F})$).
- (1.4) Nous appellerons groupe différentiel un groupe G muni d'une difféologie. Les applications appartenant à l'un des $D(\mathbb{R}^n, G)$ seront alors dites différentiables.

Exemples de groupes différentiels.

- (1.5) Soit G un groupe de Lie réel; $\mathbb{R}^n$ et G étant considérés comme variétés, nous pouvons définir $D(\mathbb{R}^n, G)$ par la règle (0.2); les axiomes (1.1) des groupes différentiels sont satisfaits : tout groupe de Lie est un groupe différentiel.

- (1.6) Soit X une variété; l'ensemble des difféomorphismes de X , sous-groupe du groupe $X!$ des permutations de X :

$$\text{diff}(X) = \left\{ g \in X! \mid g \text{ et } g^{-1} \in D(X, X) \right\}$$

devient un groupe différentiel si on note $D(\mathbb{R}^n, \text{diff}(X))$ l'ensemble des applications $\mathcal{F}$ ($\text{im}(\mathcal{F}) \subset \text{diff}(X)$) telles que

$$\left[(r, x) \mapsto \mathcal{F}(r)(x) \right] \in D(\mathbb{R}^n \times X, X)$$

[la vérification de l'axiome (1.1 d) utilise le théorème de différentiabilité des solutions d'équations implicites dépendant de paramètres]

Morphismes de groupes différentiels.

- (1.7) Soient G et G' deux groupes différentiels; Φ un morphisme de groupe $G \rightarrow G'$ (0.3).

Nous dirons que Φ est un morphisme de groupe différentiel (en abrégé D-morphisme) si

$$\mathcal{F} \in D(\mathbb{R}^n, G) \Rightarrow \Phi \circ \mathcal{F} \in D(\mathbb{R}^n, G')$$

(1.8) Exemple: si G est un groupe de Lie, X une variété, un D-morphisme $G \rightarrow \text{diff}(X)$ est ce qu'on appelle une action différentiable de G sur X .

(1.9) Il est clair que les D-morphismes se composent, constituant les flèches de la catégorie des groupes différentiels.

En particulier, un D-isomorphisme $\Phi: G \rightarrow G'$ est un isomorphisme de groupe tel que Φ et Φ^{-1} soient des D-morphismes.

(1.10) Exemple: Tout automorphisme intérieur

$$g \mapsto a \times g \times a^{-1} \quad (a \text{ choisi dans } G)$$

d'un groupe différentiel est un D-automorphisme (conséquence facile des axiomes (1.1)).

Produit direct

(1.11) Si G_1 et G_2 sont des groupes différentiels, on munit le produit direct $G = G_1 \times G_2$ de la difféologie la moins fine pour laquelle les projections canoniques $i_1: G \rightarrow G_1$ et $i_2: G \rightarrow G_2$ soient des D-morphismes. Explicitement, $\mathcal{F} \in D(\mathbb{R}^n, G)$ ssi $i_1 \circ \mathcal{F}$ et $i_2 \circ \mathcal{F}$ appartiennent à $D(\mathbb{R}^n, G_1)$ et $D(\mathbb{R}^n, G_2)$.

Sous-groupes

(1.12) Soit $\mathcal{G}$ un sous-groupe d'un groupe différentiel G' . On définit sur $\mathcal{G}$ une difféologie (difféologie induite) en posant

$$[\mathcal{F} \in D(\mathbb{R}^n, G)] \iff [\mathcal{F} \in D(\mathbb{R}^n, G') \text{ et } \text{im}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{G}]$$

c'est la difféologie la moins fine pour laquelle l'injection canonique $\mathcal{G} \rightarrow G'$ soit un D-morphisme.

(1.13) Exemple : tout groupe de difféomorphismes est canoniquement un groupe différentiel, comme sous-groupe d'un groupe différentiel $\text{diff}(X)$ (voir (1.6)).

(1.14) Si G est un sous-groupe d'un groupe différentiel G' , et si k appartient au normalisateur de G dans G' , l'application

$$g \mapsto k \times g \times k^{-1} \quad [g \in G]$$

est un D-automorphisme de G (muni de sa difféologie induite).

Quotients

(1.15) Soit G un groupe différentiel, H un sous-groupe invariant; notons G' le groupe quotient G/H , Φ le morphisme canonique $G \rightarrow G'$.

Nous munirons G' de la difféologie la plus fine qui fait de Φ un D-morphisme; explicitement

$$[\mathcal{F}' \in D(\mathbb{R}^n, G')] \iff [\exists \mathcal{F}_j \in D(\mathbb{R}^n, G) \quad \mathcal{F}' = \sup \Phi \circ \mathcal{F}_j]$$

(notation (0.1)).

Morphismes stricts

(1.16) Soit $\Phi : G \rightarrow G'$ un D-morphisme. On peut factoriser canoniquement Φ sous la forme

$$G \rightarrow G/\ker(\Phi) \xrightarrow{\Psi} \text{im}(\Phi) \rightarrow G' ;$$

on vérifie que Ψ est un isomorphisme de groupe et un D-morphisme ($G/\ker(\Phi)$ et $\text{im}(\Phi)$ étant munis de leurs D-structures (1.15) et (1.12)). Nous dirons que Φ est un D-morphisme strict si Ψ est un D-isomorphisme, c'est-à-dire si Ψ^{-1} est aussi un D-morphisme.

Exemples:

(1.17) ■ Soit X une variété, G un groupe de difféomorphismes de X (voir (1.13)). Soit Y l'espace fibré des vecteurs tangents à X (resp. des covecteurs tangents, des repères, des tenseurs de variance donnée, des α -densités, des connexions linéaires,

etc.). Nous savons relever chaque élément g de G par un difféomorphisme de Y (technique des "objets géométriques"); on définit ainsi un D -morphisme injectif $G \rightarrow \text{diff}(Y)$. C'est un D -morphisme strict: on le constate en utilisant la différentiabilité de la projection $Y \rightarrow X$.

Ainsi, si un groupe différentiel est D -isomorphe à un groupe de difféomorphismes, il l'est d'une infinité de façons; il est en particulier isomorphe à un groupe de symplectomorphismes (il suffit de choisir pour Y le fibré cotangent).

(1.18) ■ Soit G un groupe différentiel quelconque.

Nous appellerons arc de G toute application γ de $\mathbb{R}$ dans G qui est différentiable (Cf.(1.4)) et qui vérifie la condition

$$\spadesuit \quad \gamma(0) = e$$

On constate que l'ensemble Γ des arcs de G devient un groupe différentiel si on convient que :

$$\heartsuit \quad [\gamma \times \gamma'](t) = \gamma(t) \times \gamma'(t) \quad \forall \gamma, \gamma' \in \Gamma, \forall t \in \mathbb{R}$$

et que

$$\diamondsuit [\mathbb{F} \in D(\mathbb{R}^n, \Gamma)] \Leftrightarrow [(r, t) \mapsto \mathbb{F}(r)(t)] \in D(\mathbb{R}^{n+1}, G);$$

on vérifie alors que l'application P :

$$\clubsuit \quad P(\gamma) = \gamma(1) \quad \forall \gamma \in \Gamma$$

est un D -morphisme strict de Γ dans G . ■

§ 2 HOMOTOPIE DES GROUPES DIFFÉRENTIELS

(2.1) Soit G un groupe différentiel; considérons l'ensemble

$$G_0 = \left\{ g_0 \in G \mid \text{il existe un arc } \gamma, \gamma(0)=e, \gamma(1)=g_0 \right\}$$

G_0 est l'image du groupe des arcs de G par le D -morphisme $\gamma \mapsto \gamma(1)$ (voir ci-dessus (1.18)); c'est donc un sous-groupe de G , que nous appellerons composante neutre de G (voir pour-quoi en (4.13)).

(2.2) Soient G et G' deux groupes différentiels, Φ un D -morphisme $G \rightarrow G'$. Si nous désignons par Γ et Γ' les groupes des arcs correspondants, il est immédiat qu'il existe un relèvement

$$\bar{\Phi} : \Gamma \rightarrow \Gamma'$$

de Φ qui est un D-morphisme :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \xrightarrow{\bar{\Phi}} & \Gamma' \\ P \downarrow & & \downarrow P' \\ G & \xrightarrow{\Phi} & G' \end{array}$$

il suffit de poser $\bar{\Phi}(\gamma) = \Phi_0 \gamma \quad \forall \gamma \in \Gamma$. On a évidemment $\Phi(P(\Gamma)) \subset P'(\Gamma')$; par conséquent :

- (2.3) [L'image par un D-morphisme $G \rightarrow G'$ de la composante neutre de G est incluse dans la composante neutre de G' .
Il en résulte en particulier que tout D-isomorphisme $G \rightarrow G'$ envoie la composante neutre de G sur celle de G' ; en considérant le cas des automorphismes intérieurs (voir (1.10)), on voit que la composante neutre G_0 est un sous-groupe invariant de G . Les classes selon G_0 s'appelleront composantes de G (ce seront les composantes connexes de la topologie qui sera définie au § 4); on vérifie la proposition:

- [Soit G un groupe différentiel, G_0 sa composante neutre.
a) La difféologie quotient du groupe des composantes G/G_0 est discrète (voir (1.15) et (1.3)) ;
b) [G discret] $\Leftrightarrow$ [$G_0 = \{e\}$]]

- (2.4) Nous dirons qu'un groupe différentiel est connexe s'il est égal à sa composante neutre (définition compatible avec la topologie du § 4); le diagramme (2.2) montre que l'image par un D-morphisme d'un groupe connexe est connexe et contenue dans la composante neutre du groupe d'arrivée. Par conséquent tout sous-groupe connexe d'un groupe différentiel G est contenu dans la composante neutre de G .

- (2.5) Exemple : pour tout groupe différentiel G , le groupe des arcs Γ est connexe.

[Si $\gamma \in \Gamma$, $t \in \mathbb{R}$, la fonction $\gamma_0 \cdot t$ définie par $[\gamma_0 \cdot t](u) = \gamma(tu) \quad \forall u \in \mathbb{R}$ est un arc; il est immédiat que $\tilde{\gamma} : t \mapsto \gamma_0 \cdot t$ est un arc de Γ , et que $P(\tilde{\gamma}) = \gamma$ (notation (1.18))]

Revêtements

(2.6) Soit G un groupe différentiel, H un sous-groupe invariant de G .

Puisque les $h \mapsto g \times h \times g^{-1}$ associés aux éléments g de G sont des D -automorphismes de H (voir (1.14)), ils laissent fixe la composante neutre H_0 de H (voir (2.3)); H_0 est donc sous-groupe invariant, non seulement de H (2.3), mais aussi de G .

On connaît dans ce cas l'isomorphisme de groupes

$$\diamond \quad G/H \sim [G/H_0] / [H/H_0]$$

qui correspond à la factorisation suivante du morphisme canonique $P : G \rightarrow G/H$:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\Psi} & G/H_0 \\ P \downarrow & & \nwarrow \pi \\ G/H & & \end{array}$$

où $\ker(\pi) = \Psi(H)$.

On vérifie facilement que la relation $\diamond$ est en fait un isomorphisme de groupes différentiels; plus précisément

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi \text{ est un } D\text{-morphisme strict (1.16);} \\ - \ker(\pi) \text{ est discret ((1.12), (1.3)).} \end{array} \right.$$

(2.7) Soient G et $\tilde{G}$ deux groupes différentiels; nous dirons que $\tilde{G}$ est un revêtement de G si G est isomorphe au quotient de $\tilde{G}$ par un sous-groupe discret (pour sa difféologie induite); en d'autres termes, s'il existe un D -morphisme $\pi : \tilde{G} \rightarrow G$, surjectif, strict, à noyau discret. Avec cette terminologie, le résultat (2.6) exprime que G/H_0 est un revêtement de G/H .

On vérifie aisément les deux propositions suivantes :

(2.8) Soient G, G_1, G_2 des groupes différentiels; Φ_1 et Φ_2 des D -morphisms sur G :

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{G} & \\ \theta_1 \swarrow & & \searrow \theta_2 \\ G_1 & & G_2 \\ \Phi_1 \swarrow & & \searrow \Phi_2 \\ & G & \end{array}$$

On considère le produit croisé $\bar{G}$:

$$\bar{G} = \left\{ (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in G_1 \times G_2 \mid \Phi_1(\varepsilon_1) = \Phi_2(\varepsilon_2) \right\}$$

sous-groupe du produit direct $G_1 \times G_2$ (voir (1.11)), muni des

D-morphismes $\theta_1 : (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \mapsto \varepsilon_1$ et $\theta_2 : (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \mapsto \varepsilon_2$.

Si (G_2, Φ_2) est un revêtement de G , $(\bar{G}, \theta_1)$ est un revêtement de G_1 ; de même, si (G_1, Φ_1) est un revêtement de G , $(\bar{G}, \theta_2)$ est un revêtement de G_2 .

(2.9) Tout revêtement de revêtement est un revêtement: si (G, π) est un revêtement de G' , (G', π') un revêtement de G'' , $(G, \pi' \circ \pi)$ est un revêtement de G'' .

(2.10) Exemple de revêtement : Soit G le groupe des difféomorphismes d'une variété connexe X ; soit $\hat{X}$ la variété revêtement universel de X , P la projection de $\hat{X}$ sur X . Le groupe d'homotopie H de X est un sous-groupe de $\text{diff}(\hat{X})$; soit $\hat{G}$ son normalisateur dans $\text{diff}(\hat{X})$. $\forall \hat{g} \in \hat{G}$, il existe un difféomorphisme $\Pi(\hat{g})$ de X défini par $\Pi(\hat{g})(P(\hat{x})) = P(\hat{g}(\hat{x}))$ $\forall \hat{x} \in \hat{X}$.

On peut montrer que $(\hat{G}, \Pi)$ est un revêtement de $\text{diff}(X)$, au sens (2.7); de plus le noyau de Π est discret dans $\hat{G}$, non seulement pour sa difféologie induite, mais aussi comme partie de l'espace topologique $\hat{G}$ (voir le §4).

(2.11) Lemme : Soit G un groupe différentiel, $(\tilde{G}, \pi)$ un revêtement de G ; soit $\mathcal{F} \in D(\mathbb{R}^n, G)$.

Si $\text{def}(\mathcal{F}) = \mathbb{R}^n$, il existe un relèvement global $\tilde{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{F}$: $\tilde{\mathcal{F}} \in D(\mathbb{R}^n, \tilde{G})$, $\mathcal{F} = \pi \circ \tilde{\mathcal{F}}$

[désignons par E l'ensemble non vide des nombres $r > 0$ tels que $\mathcal{F}$ soit relevable dans la boule $B(0, r)$ (Cf. (1.15)); on peut fixer le relèvement $\tilde{\mathcal{F}}_r$ en choisissant $\tilde{\mathcal{F}}_r(0)$, ce qui rend compatibles les $\tilde{\mathcal{F}}_r$. La borne supérieure de toute partie majorée de E appartient à E ; en recouvrant la sphère $S(0, r)$ par des boules releposables, on montre que $[r \in E] \Rightarrow \exists r' > r, [0, r'] \subset E$; d'où $E = \mathbb{R}^+$; il suffit de prendre $\tilde{\mathcal{F}} = \sup \tilde{\mathcal{F}}_r$]

(2.12) Soit G' un groupe différentiel, (G, Π) un revêtement de G' .

Posons $H = \ker(\Pi)$ et définissons τ par

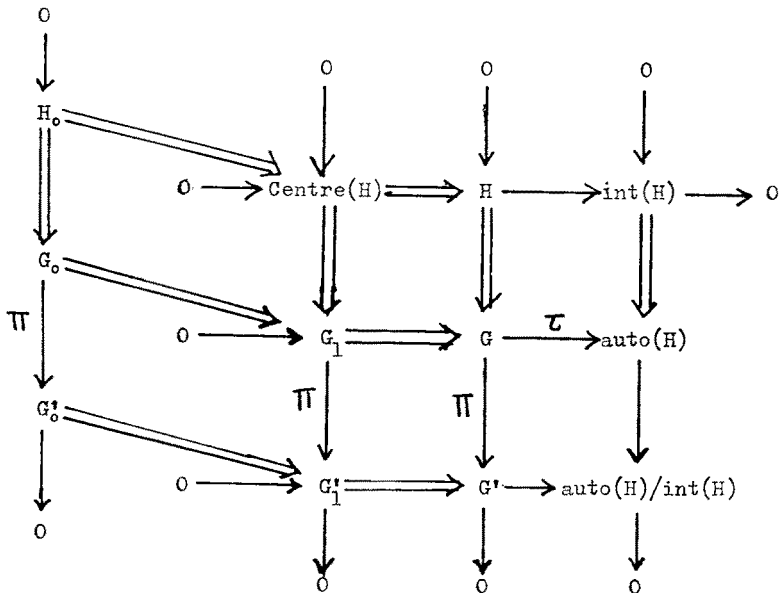
$$\tau(g)(h) = g \times h \times g^{-1} \quad \forall g \in G, \forall h \in H$$

τ est un morphisme de groupe $G \rightarrow \text{auto}(H)$, dont le noyau G_1 est le commutant de H dans G .

Soit γ un arc de G , $h \in H$. L'application $\mathbb{R} \rightarrow H \quad t \mapsto \tau(\gamma(t))(h)$ est différentiable à valeurs dans le groupe discret H , donc localement constante, donc constante; en faisant $t=0$ et $t=1$, on voit que la composante neutre G_0 de G est incluse dans le commutant G_1 de H .

Le morphisme Π envoie G_0 dans la composante neutre G'_0 de G' ; le lemme (2.11), avec $n=1$, montre que $\Pi(G_0)$ est égal à G'_0 ; on vérifie ensuite que (G_0, Π) est un revêtement de G'_0 .

Quelques raisonnements standard permettent alors de construire un diagramme commutatif de D-morphismes:



où les suites horizontales et verticales sont exactes; les flèches doubles indiquent une injection canonique sous-groupe $\implies$ groupe.

Revêtement universel

(2.13) Nous nous occupons ici des revêtements connexes : si G est un revêtement connexe de G' , G' est lui-même connexe; avec les notations (2.12), on a alors $G = G_0 = G_1 = \text{commutant}(H)$; H est central, donc abélien : tout revêtement connexe est donc une extension centrale .

(2.14) Soit G un groupe différentiel connexe quelconque.
Notons Γ le groupe des arcs de G (1.18); P le morphisme $\Gamma \rightarrow G$ défini par $P(\gamma) = \gamma(1)$; K son noyau.

Le fait que G soit connexe signifie que P est surjectif; puisque P est strict (1.18), G est isomorphe au quotient G/K . En considérant la composante neutre K_0 de K , on peut donc effectuer la construction (2.6) :

$$\begin{array}{ccc} & \Gamma & \\ & \searrow \Psi & \\ P \downarrow & & \hat{G} \\ & \nearrow \pi & \\ & G & \end{array}$$

on note $\hat{G}$ le quotient Γ / K_0 , Ψ le morphisme canonique $\Gamma \rightarrow \hat{G}$, π le morphisme $\hat{G} \rightarrow G$ défini par $\pi \circ \Psi = P$. Nous savons alors que $(\hat{G}, \pi)$ est un revêtement de G : π est surjectif et strict, son noyau $H = \Psi(K)$ est discret.

Nous savons d'autre part que Γ est connexe (2.5); puisque Ψ est surjectif, $\hat{G}$ est connexe; il en résulte que H est central (2.13), donc commutatif.

(2.15) Définition, théorème:

Un groupe différentiel G sera dit simplement connexe s'il est isomorphe à tous ses revêtements connexes.

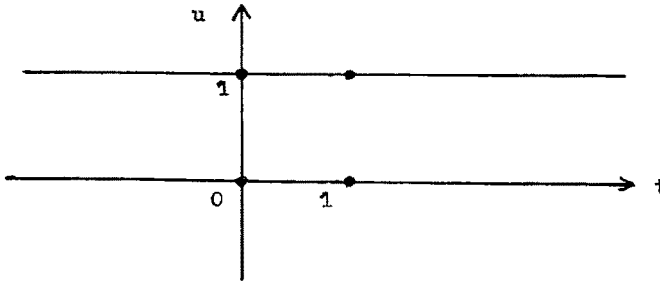
Pour que G soit simplement connexe, il faut et il suffit que le groupe H construit en (2.14) soit égal à $\{e\}$.

a) L'implication est triviale dans un sens.

b) Supposons H réduit à e ; soit $(\tilde{G}, \pi)$ un revêtement connexe de G ; $\tilde{g}$ un élément du noyau de π ; il s'agit de montrer que $\tilde{g} = \tilde{e}$.

Puisque $\tilde{G}$ est connexe, il existe un arc $\tilde{\gamma}$ de $\tilde{G}$ tel que

$\tilde{\gamma}(1) = \tilde{e}$; posons $\gamma = \pi \circ \tilde{\gamma}$. Alors $\gamma \in \Gamma$, et $P(\gamma) = \gamma(1) = \pi(\tilde{e}) = e$. Donc $\gamma \in \ker(P) = K$. Puisque H est réduit à $\{e\}$, et que $H \sim K/K_0$, $K = K_0$; donc K est connexe; il existe un arc $\mathcal{F}$ de K tel que $\mathcal{F}(1) = \gamma$. Par construction, l'application $(u, t) \mapsto \mathcal{F}(u)(t)$ appartient à $D(\mathbb{R}^2, G)$, est définie dans tout le plan et prend la valeur e sur les trois droites dessinées.



Le lemme (2.11), avec $n=2$, montre qu'il existe une application différentiable $\tilde{\mathcal{F}}$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\tilde{G}$ telle que $\pi(\tilde{\mathcal{F}}(t, u)) = \mathcal{F}(t)(u)$; on peut la choisir telle que $\tilde{\mathcal{F}}(0, 0) = \tilde{e}$. Puisque $\ker(\pi)$ est discret, $\tilde{\mathcal{F}}(t, u)$ est localement constante sur chacune de ces trois droites; puisque elle vaut $\tilde{e}$ à l'origine, elle vaut $\tilde{e}$ sur chaque droite; donc la fonction différentiable $\tilde{\gamma}' : u \mapsto \tilde{\mathcal{F}}(1, u)$ vérifie $\tilde{\gamma}'(0) = \tilde{\gamma}'(1) = \tilde{e}$ et $\pi(\tilde{\gamma}'(u)) = \tilde{\mathcal{F}}(1)(u) = \gamma(u) = \pi(\tilde{\gamma}(u))$; la fonction différentiable $u \mapsto \tilde{\gamma}(u) \times \tilde{\gamma}'(u)^{-1}$ prend ses valeurs dans $\ker(\pi)$ et donc est localement constante, donc constante; $u=0$ et $u=1$ donnent $\tilde{e} = \tilde{\gamma}(1) = \tilde{e}$.

C.Q.F.D.

Théorème :

(2.16) [Pour tout groupe différentiel connexe G , le revêtement $\hat{G}$ construit en (2.14) est simplement connexe.

Soit $\hat{\Gamma}$ le groupe des arcs de $\hat{G}$; $\hat{P} : \hat{\gamma} \mapsto \hat{\gamma}(1)$ sa projection sur $\hat{G}$; $\hat{K}$ le noyau de $\hat{P}$; d'après (2.15), il suffit de montrer que $\hat{K}$ est connexe.

On définit deux morphismes $\bar{\pi} : \hat{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ et $\bar{\psi} : \Gamma \rightarrow \hat{\Gamma}$ (notations (2.14)) par

$$\begin{aligned}\bar{\pi}(\hat{\gamma})(t) &= \pi(\hat{\gamma}(t)) \\ \bar{\psi}(\gamma)(t) &= \psi(\gamma, t) \quad (\text{cf. (2.5)}); \end{aligned}$$

il est élémentaire que $\bar{\pi} \circ \bar{\psi} \circ \bar{\pi} = \bar{\pi}$; puisque $H = \ker(\pi)$ est

discret, on en déduit que $\overline{\Psi} \circ \overline{\pi}$ est le morphisme identique $\hat{\Gamma} \rightarrow \hat{\Gamma}$; il en résulte élémentairement que le noyau $\hat{K}$ de $\hat{P}$ est égal à $\overline{\Psi}(K_0)$, K_0 étant le noyau de Ψ , connexe par hypothèse (2.14); par conséquent $\hat{K} = \overline{\Psi}(K_0)$ est connexe (2.4).

C.Q.F.D.

Théorème:

(2.17) Soit $\Phi: G_1 \rightarrow G$ un D-morphisme; $(\tilde{G}, \pi)$ un revêtement de G . Si G_1 est simplement connexe, il existe un seul D-morphisme $\tilde{\Phi}: G_1 \rightarrow \tilde{G}$ qui relève Φ :

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{G} & \\ \tilde{\Phi} \nearrow & & \downarrow \pi \\ G_1 & \xrightarrow{\Phi} & G \end{array}$$

D'après (2.8), le produit croisé

$$\overline{G} = \left\{ (g_1, \tilde{g}) \in G_1 \times \tilde{G} / \Phi(g_1) = \pi(\tilde{g}) \right\}$$

et le morphisme $P: (g_1, \tilde{g}) \mapsto g_1$ définissent un revêtement de G_1 ;

$Q: (g_1, \tilde{g}) \mapsto \tilde{g}$ est un morphisme de $\overline{G}$ sur $\tilde{G}$, qui vérifie $\pi \circ Q = \Phi \circ P$.

Puisque G_1 est connexe, la composante neutre $\overline{G}_0$ et la restriction P_0 de P à $\overline{G}_0$ constituent un revêtement connexe de G_1 (2.12); puisque G_1 est simplement connexe, P_0 est un isomorphisme (définition (2.15)).

Alors $\tilde{\Phi} = Q \circ P_0^{-1}$ est un D-morphisme de G_1 dans $\tilde{G}$, qui vérifie $\pi \circ \tilde{\Phi} = \Phi \circ P \circ P_0^{-1} = \Phi$. - L'unicité est immédiate.

C.Q.F.D.

Plaçons nous dans le cas particulier où (G_1, Φ) est un revêtement de G . Le théorème (2.8) montre que $(\overline{G}, Q)$ est un revêtement de $\tilde{G}$; si $\tilde{G}$ est lui-même connexe, $(\overline{G}_0, Q)$ sera encore un revêtement de $\tilde{G}$ (2.12); en composant avec l'isomorphisme P_0^{-1} , on voit que $(G_1, \tilde{\Phi})$ est un revêtement de $\tilde{G}$. D'où, après un changement de notations, le théorème :

- (2.18) Soient G_1 et G_2 deux revêtements connexes d'un groupe différentiel G .
 Si G_1 est simplement connexe, il existe un seul D -morphisme ψ qui factorise π_1 :

$$\begin{array}{ccc} G_1 & \xrightarrow{\psi} & G_2 \\ \pi_1 \searrow & & \swarrow \pi_2 \\ & G & \end{array}$$

(G_1, ψ) est un revêtement de G_2 .

- (2.19) Pour tout groupe différentiel connexe G , tout revêtement simplement connexe G_1 est donc universel, en ce sens que l'on obtient tous les revêtements connexes de G en faisant le quotient de G_1 par un sous-groupe de $H_1 = \ker(\pi_1)$; en particulier tout autre revêtement simplement connexe lui est D -isomorphe; le groupe abstrait H_1 ainsi défini à un isomorphisme près s'appellera groupe d'homotopie de G .

Nous savons qu'un tel revêtement universel existe, parce que nous l'avons rencontré (construction (2.14), théorème (2.16)); le groupe H construit en (2.14) est donc un exemplaire du groupe d'homotopie de G ; (2.15) exprime donc que les groupes simplement connexes sont ceux dont l'homotopie est triviale.

§ 3 HARMONIES

- (3.1) Soit G un groupe, m une fonction $G \rightarrow \mathbb{C}$.
 On dit que m est de type positif, et on notera $m \in P(G)$, si $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}, \forall g_1, \dots, g_n \in G$, on a

$$\diamond \sum_{k, \ell} \overline{c_k} c_\ell m(g_k^{-1} \times g_\ell) \geq 0$$

Exemples : tout caractère de G (: morphisme dans $U(1)$) est de type positif; la fonction caractéristique de tout sous-groupe de G aussi.

L'inégalité $\diamond$ signifie que la matrice d'éléments $m(g_k^{-1} \times g_\ell)$ est hermitienne positive; elle a donc un déterminant ≥ 0 . On

en déduit les formules suivantes, valables $\forall g, g' \in G$:

$$\begin{aligned}
 (3.2) \quad & m(g^{-1}) = \overline{m(g)} \\
 (3.3) \quad & |m(g)| \leq m(e) \quad (n=2) \\
 (3.4) \quad & |m(g \times g') m(e) - m(g) m(g')| \leq \\
 & \sqrt{m(e)^2 - |m(g)|^2} \times \sqrt{m(e)^2 - |m(g')|^2} \quad (n=3)
 \end{aligned}$$

cette dernière formule entraîne

$$(3.5) \quad |m(g) - m(g')| \leq \sqrt{2 m(e) [m(e) - \operatorname{Re}(m(g^{-1} \times g'))]}$$

- (3.6) - Il est évident que $P(G)$ est un cône convexe (dans l'espace vectoriel des fonctions bornées sur G) ; nous noterons $P_0(G)$ l'ensemble des fonctions m de $P(G)$ normalisées par la condition

$$m(e) = 1$$

il est clair (grâce à (3.3)) que

$$P(G) = \mathbb{R}^+ \times P_0(G)$$

$P_0(G)$ est évidemment un convexe.

- Quelques propriétés élémentaires des matrices positives montrent que :

$$(3.7) \quad m \in P(G) \Rightarrow \bar{m} \in P(G) \quad \left[\bar{m} = g \mapsto \overline{m(g)} \right]$$

$$(3.8) \quad m, m' \in P(G) \Rightarrow m m' \in P(G) \quad [m m' = g \mapsto m(g) m'(g)]$$

$$\begin{aligned}
 (3.9) \quad & \left[\begin{aligned}
 & \text{- Soit } m \in P(G) ; \text{ choisissons } n \in \mathbb{N}^*, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}, g_1, \dots, g_n \in G. \text{ Il est immédiat que la fonction } m' : \\
 & m'(g) = \sum_{k, \ell} \overline{c_k} c_\ell m(g_k^{-1} \times g \times g_\ell)
 \end{aligned} \right. \\
 & \text{est elle-même de type positif ; nous dirons qu'elle est } \underline{\text{subordonnée}} \text{ à } m ; \text{ cette relation est transitive.}
 \end{aligned}$$

Théorème:

$$(3.10) \quad \left[\text{Soit } G \text{ un groupe, } m \text{ une fonction de type positif sur } G. a \text{ et } b \right.$$

des éléments de G .

Il existe trois fonctions m_0, m_1, m_2 , de type positif sur G , subordonnées à m , telles que, $\forall g \in G$:

$$m(a * g * b) = \frac{1}{3} [m_0(g) + j m_1(g) + j^2 m_2(g)]$$

$$\left[j = e^{2i\pi/3} \right]$$

[Il suffit de poser, pour $p = 0, 1, 2$: $c_{p,1} = 1$, $c_{p,2} = j^p$

$g_1 = b$, $g_2 = a^{-1}$ et

$$m_p(g) = \sum_{k, l \in \{1, 2\}} \overline{c_{p,k}} c_{p,l} m(g_k^{-1} * g * g_l)]$$

Définition :

(3.11)

Soit G un groupe.

Nous appellerons harmonie de G tout ensemble M , non-vide, de fonctions de type positif sur G , vérifiant les 2 conditions

- a) $[m_1, m_2 \in M] \Rightarrow [m_1 + m_2 \in M]$
- b) $[m \in M, m' \text{ subordonnée à } m \text{ (3.9)}] \Rightarrow$
- $$[m' \in M]$$

En faisant $n=1$, $g_1 = e$ dans (3.9), on constate qu'une harmonie est un cône convexe.

Théorème :

(3.12)

a) Soit p un morphisme de groupe $G \rightarrow G'$, M' une harmonie de G' . L'image réciproque

$$M = M' \circ p = \left\{ m' \circ p / m' \in M' \right\}$$

est une harmonie de G .

b) Soit M une harmonie d'un groupe G . Le "noyau" de M :

$$\ker(M) = \left\{ g \in G / m(g) = m(e) \forall m \in M \right\}$$

est un sous-groupe invariant de G ; il existe une harmonie M' du groupe quotient $G' = G/\ker(M)$ caractérisée par la relation $M = M' \circ p$ (p : morphisme canonique). Nous dirons que M' est l'harmonie réduite de M .

c) Une harmonie sera dite irréductible si son noyau est égal à $\{e\}$; toute harmonie réduite (voir b) est irréductible.

[simple conséquence de (3.10) et (3.4)]

Théorème :

(3.13)

Soit G un groupe; M une harmonie de G .

a) La topologie la moins fine de G qui rende continus les éléments de M est une topologie de groupe : l'application $G \times G \rightarrow G$ $(g, g') \mapsto g^{-1} \times g'$ est continue.

b) Une partie V de G est un voisinage de e si et seulement si il existe $m \in M$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$V \supset U_{m, \varepsilon}; \quad U_{m, \varepsilon} = \left\{ g \in G / \rho_e(m(g)) > m(e) - \varepsilon \right\}$$

c) Pour que cette topologie soit séparée (Hausdorff), il faut et il suffit que l'harmonie M soit irréductible (3.12 c).

[La démonstration est basée sur (3.2), (3.10) et sur les remarques suivantes : les ensembles $U_{m, \varepsilon}$ définis en b), contiennent e , sont symétriques : $U_{m, \varepsilon}^{-1} = U_{m, \varepsilon}$ et vérifient les propriétés suivantes : $\forall m_1, \varepsilon_1, m_2, \varepsilon_2, m, \varepsilon$

$$U_{m_1, \varepsilon_1} \cap U_{m_2, \varepsilon_2} \supset U_{m', \varepsilon'} \quad \text{si } m' = m_1 + m_2, \varepsilon' = \inf(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$$

$$U_{m, \varepsilon} \supset U_{m', \varepsilon'} \times U_{m'', \varepsilon''} \quad \text{si } m' = m, \varepsilon' = \frac{1}{2} \left[\sqrt{m(e) + 2\varepsilon} - \sqrt{m(e)} \right]^2$$

cette dernière propriété est une conséquence de (3.5)]

§ 4 TOPOLOGIE DES GROUPES DIFFÉRENTIELS

États.

(4.1)

Soit G un groupe différentiel.

Nous noterons $DP(G)$ l'ensemble des fonctions $m: G \rightarrow \mathbb{C}$ qui sont de type positif (3.1) et qui vérifient

$$[\varphi \in D(\mathbb{R}^n, G)] \Rightarrow [m \cdot \varphi \in D(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})]$$

(notations (1.4), (0.2)).

Nous appellerons états de G les éléments m de $DP(G)$ qui sont normalisés : $m(e) = 1$ (Cf. (3.6)); leur ensemble sera noté $DP_0(G)$.

- (4.2) Il est clair que $DP(G) = \mathbb{R}^+ \times DP_0(G)$; que $DP(G)$ est une harmonie (3.11), donc un cône convexe ; que le conjugué d'un état (3.7), le produit de deux états (3.8) sont encore des états ; ainsi que la partie réelle $\Re_0 m$ d'un état.
- (4.3) Si Φ est un D-morphisme $G \rightarrow G'$, et si m' est un état de G' , alors $m = m' \circ \Phi$ est un état de G .

Topologie canonique

Puisque $M = DP(G)$ est une harmonie , il suffit d'appliquer le théorème (3.13) pour obtenir :

- (4.4)
 Tout groupe différentiel G peut être muni canoniquement d'une topologie de groupe , définie comme la moins fine qui rende continus les états de G .
 Une partie V de G est un voisinage de e si et seulement si il existe un état m et un nombre $\varepsilon > 0$ tels que

$$V \supset U_{m,\varepsilon} \quad ; \quad U_{m,\varepsilon} = \left\{ g \in G / \Re(m(g)) > 1 - \varepsilon \right\}$$

On vérifie immédiatement les résultats suivants, dans lesquels nous adoptons systématiquement la topologie (4.4) :

- (4.5) Si $f \in D(\mathbb{R}^n, G)$, $\mathcal{F}$ est continue .
- (4.6) Tout D-morphisme est continu ; les D-isomorphismes sont des homéomorphismes.
- (4.7) Une difféologie plus fine définit une topologie plus fine.
- (4.8) Si G est un sous-groupe du groupe différentiel G' , muni de sa difféologie induite (1.12) , la topologie de G est plus fine que la topologie induite de celle de G' .
- (4.9) Tout sous-groupe d'un groupe différentiel séparé est séparé.
- (4.10) Tout sous-groupe topologiquement discret est muni de la difféologie discrète.
- (4.11) La topologie d'un groupe quotient (1.15) est moins fine que la topologie quotient.
- (4.12) Pour qu'un quotient G/H soit séparé, il est nécessaire que H soit fermé dans G ; la condition suivante est nécessaire et suffisante :
- $$\left[g \in G, \quad g \notin H \right] \Rightarrow \left[\text{il existe un état } m / m(g) \neq 1, m(H) = \{1\} \right]$$

-Le vocabulaire topologique que nous avons adopté au § 2 (en particulier dans (2.1), (2.3), (2.4)) sera justifié si on établit la proposition suivante :

(4.13) $\left[\begin{array}{l} \text{Soit } G \text{ un groupe différentiel, } G_0 \text{ le sous-groupe:} \\ \left\{ g_0 \in G \mid \text{il existe un arc } \gamma \text{ tel que } \gamma(0) = e, \gamma(1) = g_0 \right\} \\ \text{Alors } G_0 \text{ est la composante neutre de } G \text{ pour la topologie (4.4)} \end{array} \right.$

Puisque les arcs sont continus (4.5) , G_0 est connexe par arcs, donc connexe; nous allons montrer que G_0 est le plus grand sous-groupe connexe (pour la topologie) en établissant que G_0 est ouvert et fermé .

Soit m_0 la fonction caractéristique de G_0 ; on sait que m_0 est de type positif (3.1); $\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n, G)$ on vérifie que $m_0 \circ \varphi$ (qui ne prend que les valeurs 0 ou 1) est localement constante , donc différentiable; la condition (4.1) est vérifiée , m_0 est un état, et par conséquent $m_0^{-1}([1/2, 3/2[) = G_0$ est ouvert; de même $G - G_0$ est ouvert.

C.Q.F.D.

Exemples

(4.14) ■ Soit X une variété; désignons par φ un champ infiniment différentiable, à support compact, de demi-densités complexes de X . Si g est un difféomorphisme de X , nous savons définir l'image $g(\varphi)$ de φ par g (Cf. (1.17)). Le produit $\overline{\varphi} g(\varphi)$ est une 1-densité différentiable à support compact, et possède donc une intégrale intrinsèque sur X . Nous pouvons donc poser

$$m_{\varphi}(g) = \int_X \overline{\varphi} g(\varphi) \quad \forall g \in \text{diff}(X);$$

on vérifie que $m \in DP(\text{diff}(X))$ (Cf. (1.6), (4.1)).

Si g n'est pas l'élément neutre e de $\text{diff}(X)$, il est facile de choisir φ pour que $m_{\varphi}(g) \neq m_{\varphi}(e)$; d'où le théorème:

$\left[\begin{array}{l} \text{Tout groupe de difféomorphismes est un groupe différentiel } \underline{\text{séparé}} \\ \text{(appliquer (3.13 c) et (4.9))}. \end{array} \right.$

■ La même technique des demi-densités (ou, si l'on préfère, des mesures de Haar) conduit au résultat suivant :

(4.15) $\left[\begin{array}{l} \text{Si } G \text{ est un } \underline{\text{groupe de Lie}}, \text{ sa topologie de variété et sa topologie de groupe différentiel (1.5), (4.4) } \underline{\text{coïncident}}, \text{ et sont donc séparées.} \end{array} \right.$

(4.16) ■ Nous pourrions munir le même groupe de Lie G d'une autre difféologie D' (moins fine) en désignant par $D'(\mathbb{R}^n, G)$ l'ensemble des applications continues d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dans G ; on peut vérifier dans ce cas que G n'est plus séparé - et plus précisément que le noyau de l'harmonie $D'P(G)$ est égal à la composante neutre de G .

(4.17) ■ Le quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ ($\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$ étant considérés comme groupes additifs) est un groupe différentiel connexe; son revêtement universel est $\mathbb{R}$; $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ n'est pas séparé en vertu de (4.12) ■

Axiome de séparation.

(4.18) Les exemples précédents nous montrent que certaines circonstances qui peuvent sembler pathologiques sont évitées si on se restreint aux groupes différentiels qui sont séparés: l'axiome de Hausdorff apparaît donc comme un 6ème axiome facultatif que l'on peut adopter pour les groupes différentiels.

Il existe d'ailleurs une méthode systématique pour se ramener à ce cas :

(4.19) [Soit G un groupe différentiel quelconque; soit K le noyau de l'harmonie $DP(G)$ (3.12 b). Alors le groupe différentiel G/K est séparé.

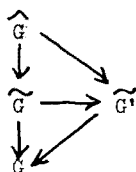
[On vérifie que $DP(G/K)$ coïncide avec l'harmonie réduite de $DP(G)$, au sens (3.12 b); elle est donc irréductible; par conséquent G/K est séparé (3.13c)]

Homotopie séparée

(4.20) Nous allons donner un exemple de cette réduction (4.19) : on se donne un groupe différentiel connexe séparé G ; soit $(\hat{G}, \Pi)$ son revêtement universel (2.14), (2.19).

Si $\hat{G}$ n'est pas séparé, on vérifie en appliquant à G la condition (4.12) que le noyau K de l'harmonie $DP(\hat{G})$ est un sous-groupe du groupe d'homotopie $H = \ker(\Pi)$; que $\tilde{G} = \hat{G}/K$ est un revêtement connexe de G , séparé grâce à (4.19); que tout revêtement connexe séparé $\tilde{G}'$ est de la forme $\hat{G}/K'$, $K' \supset K$; par conséquent le D -morphisme $\hat{G} \rightarrow \tilde{G}'$ (voir (2.18)) se factorise par l'intermédiaire de $\tilde{G}$: $\tilde{G}$ est un revêtement séparé universel; le groupe d'homotopie séparée, noyau de $\tilde{G} \rightarrow G$, est iso-

morphe à H/K ; il est encore central dans $\tilde{G}$:

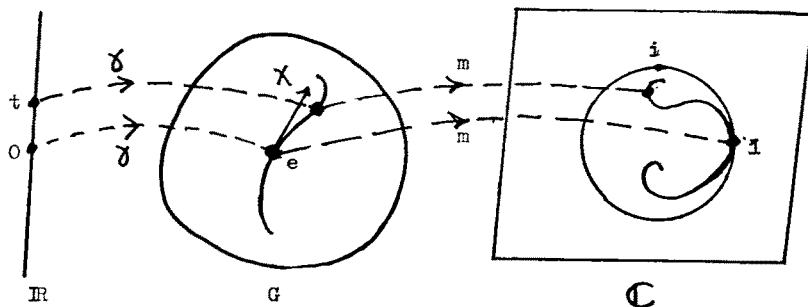


§ 5 TANGENT ET COTANGENT D'UN GROUPE DIFFÉRENTIEL

(5.1) Soit G un groupe différentiel quelconque.

Si γ et γ' sont deux arcs de G (Cf. (1.18)) et m un état de G (4.1), les fonctions $m \circ \gamma$ et $m \circ \gamma'$ sont deux applications différentiables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, qui prennent la valeur 1 à l'origine; nous dirons que les arcs γ et γ' sont tangents si, $\forall m$, $m \circ \gamma$ et $m \circ \gamma'$ ont même dérivée à l'origine.

Cette relation est évidemment une équivalence; les classes correspondantes - les "jets" des arcs - s'appelleront vecteurs tangents à G (au point e).



Si γ est un arc et m un état, on sait que $[m \circ \gamma](0) = 1$ et que m prend ses valeurs dans le disque unité $|z| \leq 1$ (3.3); ceci suffit à montrer que le développement de MacLaurin de $m \circ \gamma$ à l'ordre 2 s'écrit :

$$(5.2) \quad m(\gamma(t)) = 1 + it\rho - \frac{t^2}{2} [\rho^2 + \sigma^2 + i\tau] + o(t^3)$$

avec $\rho, \sigma, \tau \in \mathbb{R}$, $\sigma \geq 0$. On en tire d'ailleurs :

$$(5.3) \quad |m(\gamma(t))|^2 = 1 - t^2\sigma^2 + o(t^3)$$

Le jet de γ sera caractérisé par l'application $m \mapsto \rho$; nous

pourrons donc poser

(5.4)

$$\text{jet}(\gamma)(m) = \frac{1}{i} \frac{d}{dt} \left[m(\gamma(t)) \right]_{t=0}$$

identifiant ainsi les vecteurs tangents à G avec des fonctions réelles définies sur le convexe des états.

- Soit γ' un autre arc quelconque; posons $\gamma'' = \gamma \times \gamma'$ (le produit des arcs étant défini comme en (1.18 ♡)), et effectuons les développements homologues de (5.2) pour γ' et γ'' . Nous savons, grâce à (3.4), que

(5.5)

$$|m(\gamma(t)) m(\gamma'(t)) - m(\gamma''(t))|^2 \leq [1 - |m(\gamma(t))|^2] [1 - |m(\gamma'(t))|^2]$$

compte tenu de (5.3) on en déduit entre les trois développements les relations suivantes :

(5.6)

$$\rho + \rho' = \rho''$$

(5.7)

$$[\tau + \tau' - \tau'']^2 \leq (\sigma + \sigma' + \sigma'')(\sigma + \sigma' - \sigma'')(\sigma - \sigma' + \sigma'')(-\sigma + \sigma' + \sigma'')$$

que nous allons interpréter.

(5.6) peut évidemment s'écrire

(5.8)

$$\text{jet}(\gamma \times \gamma') = \text{jet}(\gamma) + \text{jet}(\gamma')$$

en remarquant d'autre part (notation (2.5)) que

(5.9)

$$\text{jet}(\gamma, r) = r \text{ jet}(\gamma) \quad \forall r \in \mathbb{R}$$

on voit que l'ensemble $\hat{\mathcal{G}}$ des "vecteurs tangents" est un espace vectoriel.

En dualité, nous dirons que deux états m et m' sont tangents si, pour tout arc γ , $m \circ \gamma$ et $m' \circ \gamma$ ont même dérivée à l'origine; nous pourrons poser

(5.10)

$$\text{jet}(m)(\gamma) = \frac{1}{i} \frac{d}{dt} \left[m(\gamma(t)) \right]_{t=0}$$

Soit $\hat{\mathcal{G}}$ l'ensemble des jets des états; ceux-ci constituant un convexe, on remarque que

(5.11)

$$\text{jet}(r m + (1-r) m') = r \text{ jet}(m) + (1-r) \text{ jet}(m') \quad \forall r \in [0,1]$$

donc que $\hat{\mathcal{G}}$ est un convexe; en utilisant (4.2), on établit

(5.12)

$$\text{jet}(\bar{m}) = - \text{jet}(m)$$

qui montre que ce convexe est symétrique, et

$$(5.13) \quad \text{jet}(m \ m') = \text{jet}(m) + \text{jet}(m')$$

et en particulier $\text{jet}(m^2) = 2 \text{jet}(m)$, qui montre que $\hat{\mathcal{E}}$ est en fait un espace vectoriel; nous l'appellerons cotangent de G.

La comparaison de (5.4) et (5.10) montre que le réel $\frac{1}{i} \frac{d}{dt} m(\gamma(t))_{t=0}$ ne dépend de m et de γ que par l'intermédiaire de leurs jets respectifs μ et χ ; nous le noterons

$$(5.14) \quad \{\mu, \chi\}$$

mettant ainsi $\hat{\mathcal{E}}$ et $\mathcal{E}$ en dualité: chacun de ces espaces vectoriels s'identifie à une partie séparante du dual algébrique de l'autre.

Topologie de $\mathcal{E}$

(5.15) La formule (5.8) exprime que $\gamma \mapsto \text{jet}(\gamma)$ est un morphisme de groupe $(G, \times) \rightarrow (\mathcal{E}, +)$; ce qui permet de munir $\mathcal{E}$ d'une structure de groupe différentiel quotient et, partant, d'une topologie; on peut vérifier qu'elle est séparée.

Nous allons procéder autrement, en utilisant l'inégalité (5.7)

$$(5.16) \quad [\tau + \tau' - \tau'']^2 \leq (\sigma + \sigma' + \sigma'')(\sigma + \sigma' - \sigma'')(\sigma - \sigma' + \sigma'')(-\sigma + \sigma' + \sigma'')$$

Remarquons d'abord que trois nombres $\sigma, \sigma', \sigma''$ positifs (5.2) ne peuvent vérifier (5.16) que s'ils forment les côtés d'un triangle; l'aire de ce triangle, on le sait, est

$$A = \frac{1}{4} \sqrt{(\sigma + \sigma' + \sigma'')(\sigma + \sigma' - \sigma'')(\sigma - \sigma' + \sigma'')(-\sigma + \sigma' + \sigma'')}$$

et il est clair que $A \leq \frac{1}{2} \sigma \sigma'$; en portant dans (5.16) on obtient donc

$$(5.17) \quad |\tau + \tau' - \tau''| \leq 2\sigma\sigma'$$

(5.18) Soit χ un vecteur tangent à G; choisissons un état m.

A tout arc γ tel que $\text{jet}(\gamma) = \chi$, les formules (5.2), (5.3) associent un nombre positif σ ; nous noterons

$$\|\chi\|_m$$

la borne inférieure de ces nombres.

le fait que $\sigma, \sigma', \sigma''$ soient les côtés d'un triangle permet d'établir l'inégalité triangulaire

$$(5.19) \quad \|\chi + \chi'\|_m \leq \|\chi\|_m + \|\chi'\|_m ;$$

l'égalité

$$(5.20) \quad \|r\chi\|_m = |r| \|\chi\|_m \quad \forall r \in \mathbb{R}, \forall \chi \in \mathcal{G}$$

résulte de (5.9) ; on voit donc que $\chi \mapsto \|\chi\|_m$ est une semi-norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{G}$.

En utilisant la convexité de l'ensemble des états, on trouve

$$(5.21) \quad \|\chi\|_{(m+m')/2} \geq \frac{1}{4} \{ \mu - \mu', \chi \}^2 + \frac{1}{2} \|\chi\|_m^2 + \frac{1}{2} \|\chi\|_{m'}^2$$

formule qui devient, dans le cas $m' = \bar{m}$, l'égalité

$$(5.22) \quad \boxed{\|\chi\|_{\text{Re}, m}^2 = \{ \mu, \chi \}^2 + \|\chi\|_m^2}$$

ce qui montre que

$$[\|\chi\|_m = 0 \quad \forall m] \Rightarrow [\{ \mu, \chi \} = 0 \quad \forall \mu] \Rightarrow \chi = 0 :$$

les semi-normes associées aux divers états forment donc un système complet, et donnent à $\mathcal{G}$ une structure d'espace vectoriel topologique localement convexe ; on constate même, grâce à (5.21) que les convexes symétriques

$$(5.23) \quad U_{m, \varepsilon} = \{ \chi \in \mathcal{G} / \|\chi\|_m < \varepsilon \}$$

constituent un système fondamental de voisinages de 0 ; ainsi d'ailleurs que les $U_{m, 1}$. Enfin, en utilisant la notion de fonction conditionnellement de type positif, on peut établir la proposition suivante :

$$(5.24) \quad \text{Le morphisme de groupe } \text{jet} : \Gamma \rightarrow \mathcal{G} \quad (5.8) \text{ est continu (pour la topologie du groupe différentiel des arcs } \Gamma \text{ et la topologie (5.23) de l'espace tangent } \mathcal{G}).$$

-Il résulte de (5.22) que les éléments μ de $\hat{\mathcal{G}}$ s'identifient à des formes linéaires continues sur $\mathcal{G}$, donc que

$$(5.25) \quad \hat{\mathcal{G}} \subset \mathcal{G}'$$

$\mathcal{G}'$ désignant le dual topologique de $\mathcal{G}$.

Représentations adjointe et co-adjointe

Soit $\Phi : G_1 \rightarrow G_2$ un D-morphisme.

Si γ est un arc de G_1 et m un état de G_2 , $\Phi \cdot \gamma$ est un arc de G_2 , $m \cdot \Phi$ un état de G_1 (4.3), et on a clairement

$$(5.26) \quad \left\{ \text{jet}(m \cdot \Phi), \text{jet}(\gamma) \right\} = \left\{ \text{jet}(m), \text{jet}(\Phi \cdot \gamma) \right\}$$

il en résulte l'existence de deux applications linéaires, $T\Phi$ (tangente à Φ) et $T^*\Phi$ (cotangente à Φ) définies par

$$(5.27) \quad T\Phi(\text{jet}(\gamma)) = \text{jet}(\Phi \cdot \gamma)$$

$$(5.28) \quad T^*\Phi(\text{jet}(m)) = \text{jet}(m \cdot \Phi)$$

$T\Phi$ applique $\mathcal{G}_1$ dans $\mathcal{G}_2$, $T^*\Phi$ $\hat{\mathcal{G}}_2$ dans $\hat{\mathcal{G}}_1$, et elles sont transposées:

$$(5.29) \quad \left\{ T^*\Phi(\mu), \chi \right\} = \left\{ \mu, T\Phi(\chi) \right\} \quad \forall \mu \in \hat{\mathcal{G}}_2, \forall \chi \in \mathcal{G}_1$$

ce qui permet de prolonger $T^*\Phi$ du dual $\mathcal{G}_2^*$ dans le dual $\mathcal{G}_1^*$, $T\Phi$ du dual $\hat{\mathcal{G}}_1^*$ au dual $\hat{\mathcal{G}}_2^*$.

La formule immédiate :

$$(5.30) \quad \|T\Phi(\chi)\|_m \leq \|\chi\|_{m \cdot \Phi}$$

montre que l'application linéaire $T\Phi$ est continue. Il en résulte que le prolongement de $T^*\Phi$ défini par (5.29) envoie le dual topologique $\mathcal{G}_2'$ dans $\mathcal{G}_1'$.

La composition de deux D-morphismes Φ et Ψ conduit aux formules

$$(5.31) \quad \left\{ \begin{array}{l} T[\Phi \cdot \Psi] = T\Phi \cdot T\Psi \\ T^*[\Phi \cdot \Psi] = T^*\Psi \cdot T^*\Phi \end{array} \right.$$

(5.32) Considérons un D-automorphisme intérieur (1.10) d'un groupe différentiel G $\Phi_g : g' \mapsto g \times g' \times g^{-1}$ et posons

$\text{Ad}(g) = T\Phi_g$. Il résulte de (5.31) que Ad , ainsi défini, est une représentation linéaire de G sur son espace tangent $\mathcal{G}$, que nous appellerons représentation adjointe; $\text{Ad}(g)$ est continu, et peut se définir explicitement par

(5.33)

$$\text{Ad}(g)(\text{jet}(\gamma)) = \text{jet}(t \mapsto g \times \gamma(t) \times g^{-1})$$

Parallèlement, on définit la représentation coadjointe Ad^* de G sur $\hat{\mathcal{G}}$ par $\text{Ad}^*(g) = T\bar{\Phi}_{g^{-1}}$ ou

(5.34)

$$\text{Ad}^*(g)(\text{jet}(m)) = \text{jet}(g' \mapsto m(g^{-1} \times g' \times g))$$

Ad et Ad^* sont liées par la relation d'équivariance

(5.35)

$$\{\text{Ad}^*(g)(\mu), \text{Ad}(g)(\chi)\} = \{\mu, \chi\}$$

qui permet de prolonger $\text{Ad}^*(g)$ sur le dual topologique $\mathcal{G}'$ ou sur le dual algébrique $\mathcal{G}^*$.

Enfin, si Φ est un D-morphisme $G \rightarrow G'$, on trouve grâce à (5.31)

(5.36)

$$\begin{cases} T\Phi \circ \text{Ad}(g) = \text{Ad}(\Phi(g)) \circ T\Phi \\ T^*\Phi \circ \text{Ad}^*(\Phi(g)) = \text{Ad}^*(g) \circ T^*\Phi \end{cases} \quad \forall g \in G$$

Crochet de Lie

Théorème:

(5.37)

Soit G un groupe différentiel, m un état (4.1), γ et γ' deux arcs (1.18).

Le nombre

$$\diamond \quad \frac{1}{i} \left[\frac{\partial^2}{\partial t \partial u} m(\gamma(t) \times \gamma'(u) \times \gamma(t)^{-1} \times \gamma'(u)^{-1}) \right]_{(t,u)=0}$$

est réel et ne dépend que des jets μ, χ, χ' de m, γ, γ' ; nous le noterons

$$\{\mu, \chi, \chi'\}$$

$\{\mu, \chi, \chi'\}$ est une forme trilinéaire sur $\hat{\mathcal{G}} \times \mathcal{G} \times \mathcal{G}$, antisymétrique pour ses deux arguments vectoriels:

$$\heartsuit \quad \{\mu, \chi', \chi\} = - \{\mu, \chi, \chi'\}$$

On a aussi

$$\clubsuit \quad \{\mu, \chi, \chi'\} = \frac{d}{dt} \{\mu, \text{Ad}(\gamma(t))(\chi')\}_{t=0}$$

Soit $\varphi(t, u) = m(\gamma(t) \times \gamma'(u) \times \gamma(t)^{-1} \times \gamma'(u)^{-1})$

φ est une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$; les axiomes (1.1) et la définition (4.1) montrent que φ est C^∞ .

Posons, pour t fixé, $\gamma'_t(u) = \gamma(t) \times \gamma'(u) \times \gamma(t)^{-1}$; on a alors

$$\frac{1}{i} \frac{d}{du} \varphi(t, u) \Big|_{u=0} = \frac{1}{i} \frac{d}{du} m([\gamma'_t \times \gamma'^{-1}](u)) \Big|_{u=0} =$$

$\{\mu, \text{jet}(\gamma'_t) - \chi'\}$ (grâce à (5.8)); d'où, en utilisant la définition (5.33) de Ad :

$$\spadesuit \quad \frac{1}{i} \frac{d}{du} \varphi(t, u) \Big|_{u=0} = \left\{ \mu, [\text{Ad}(\gamma(t)) - I](\chi') \right\}$$

en dérivant par rapport à t pour $t=0$, on trouve que $\spadesuit$ est égal au second membre de $\clubsuit$, et par conséquent ne dépend de m et γ' que par leurs jets μ et χ' , et bi-linéairement.

Si on échange les arcs γ et γ' , la formule (3.2) montre que $\varphi(t, u)$ est remplacée par $\overline{\varphi(u, t)}$; la commutation des dérivées partielles montre que $\spadesuit$ change de signe; $\spadesuit$ ne dépend donc de γ que par l'intermédiaire de son jet χ , et est antisymétrique en χ et χ' ; la tri-linéarité en découle immédiatement.

C.Q.F.D.

La fonction φ que nous venons d'utiliser vérifie évidemment $\varphi(t, 0) = \varphi(0, u) = 1 \quad \forall t, u \in \mathbb{R}$; son développement de Taylor à l'origine se déduit alors immédiatement de (5.37 $\spadesuit$) :

$$(5.38) \quad m(\gamma(t) \times \gamma'(u) \times \gamma(t)^{-1} \times \gamma'(u)^{-1}) = 1 + i t u \{\mu, \chi, \chi'\} + o((t^2 + u^2)^{3/2})$$

Posons maintenant $\gamma''_I = \gamma \times \gamma'$, $\gamma''_{II} = \gamma' \times \gamma$, et considérons les développements limités analogues à (5.2) :

$$m(\gamma''_I(t)) = 1 + i t \rho'' - \frac{t^2}{2} [\rho''^2 + \sigma_I''^2 + i \tau_I''] + o(t^3) \quad \spadesuit$$

$$m(\gamma''_{II}(t)) = 1 + i t \rho'' - \frac{t^2}{2} [\rho''^2 + \sigma_{II}''^2 + i \tau_{II}'] + o(t^3) \quad \heartsuit$$

avec $\rho'' = \rho + \rho'$ (Cf (5.6)); l'inégalité (5.17) nous donne

$$|\tau + \tau' - \tau''_I| \leq 2 \sigma \sigma'$$

$$|\tau + \tau' - \tau''_{II}| \leq 2 \sigma \sigma'$$

$\odot$
 $\heartsuit$

en utilisant (5.5), (5.38) et les développements $\spadesuit$ et $\heartsuit$ ci-dessus, il vient tous calculs faits

$$t^4 \left[(\sigma_{\mathbf{I}}''^2 - \sigma_{\mathbf{II}}''^2)^2 + (\tau_{\mathbf{I}}'' - \tau_{\mathbf{II}}'' + 2 \{ \mu, \chi, \chi' \})^2 \right] = o(t^5)$$

d'où

$$\sigma_{\mathbf{II}}'' = \sigma_{\mathbf{I}}'' \quad \text{et} \quad \{ \mu, \chi, \chi' \} = \frac{1}{2} (\tau_{\mathbf{II}}'' - \tau_{\mathbf{I}}'')$$

la soustraction de $\diamond$ et $\heartsuit$ donne alors

$$(5.39) \quad m(\chi(t) \times \chi'(t)) - m(\chi'(t) \times \chi(t)) = it^2 \{ \mu, \chi, \chi' \} + o(t^3)$$

et le collationnement avec $\odot$ et $\mathcal{Q}$:

$$|\{ \mu, \chi, \chi' \}| \leq 2 \sigma \sigma'$$

d'où, en choisissant judicieusement χ et χ' dont les jets valent χ et χ' :

$$(5.40) \quad |\{ \mu, \chi, \chi' \}| \leq 2 \|\chi\|_m \|\chi'\|_m$$

dans cette inégalité, μ est arbitraire dans $\hat{\mathcal{G}}$, χ et χ' dans $\mathcal{G}$, et m désigne n'importe quel état dont le jet est égal à μ ; elle implique que $\{ \mu, \chi, \chi' \}$ est fonction continue de χ et de χ' .

- Soit Φ un D-morphisme $G_1 \rightarrow G_2$; soient $\mu \in \hat{\mathcal{G}}_2$, $\chi, \chi' \in \mathcal{G}_1$.

En utilisant la définition (5.37 $\diamond$), on vérifie la formule

$$(5.41) \quad \{ \mu, T\Phi(\chi), T\Phi(\chi') \} = \{ T^*\Phi(\mu), \chi, \chi' \}$$

avec comme cas particulier la formule d'équivariance

$$(5.42) \quad \{ \text{Ad}^*(g)(\mu), \text{Ad}(g)(\chi), \text{Ad}(g)(\chi') \} = \{ \mu, \chi, \chi' \}$$

- Soient χ et χ' deux vecteurs tangents à G . Nous définirons leur crochet de Lie

$$(5.43) \quad [\chi, \chi']$$

comme l'application linéaire

$$\mu \mapsto \{ \mu, \chi, \chi' \} \quad \mu \in \hat{\mathcal{G}}$$

$[\chi, \chi']$ est donc un élément du dual $\mathcal{G}^*$; il dépend linéairement de χ et de χ' , et il est antisymétrique :

$$(5.44) \quad [\chi', \chi] = -[\chi, \chi']$$

Théorème:

- (5.45) Soit G un groupe différentiel, $\mathcal{G}$ son tangent et $\hat{\mathcal{G}}$ son cotangent.
- Désignons par $\mathcal{G}_0$ l'ensemble des $\chi_0 \in \mathcal{G}$ ayant les deux propriétés suivantes :
- a) $\forall \chi \in \mathcal{G}$, le crochet $[\chi_0, \chi] : \mu \mapsto \{\mu, \chi_0, \chi\}$ appartient à $\mathcal{G}$;
 - b) $\forall \mu \in \hat{\mathcal{G}}$, l'application linéaire $\chi \mapsto \{\mu, \chi_0, \chi\}$ appartient à $\hat{\mathcal{G}}$.
- Alors $\mathcal{G}_0$, muni du crochet (5.43), est une algèbre de Lie.

Cet énoncé utilise évidemment l'identification de chacun des espaces $\mathcal{G}$, $\hat{\mathcal{G}}$ avec une partie du dual de l'autre (5.14).

Si $\chi_0 \in \mathcal{G}_0$, nous pouvons utiliser cette identification pour définir $\alpha(\chi_0) \in L(\mathcal{G}, \mathcal{G})$ et $\beta(\chi_0) \in L(\hat{\mathcal{G}}, \hat{\mathcal{G}})$ par

$$(5.46) \quad \{\mu, \chi_0, \chi\} = \{\mu, \alpha(\chi_0)(\chi)\} = \{\beta(\chi_0)(\mu), \chi\}$$

$\forall \mu \in \hat{\mathcal{G}}, \forall \chi \in \mathcal{G}$

$\alpha(\chi_0)(\chi)$ et $\beta(\chi_0)(\mu)$ sont précisément les applications linéaires dont l'existence est exigée en a) et b).

— Soient χ_1 et χ_2 deux éléments de $\mathcal{G}_0$; désignons par γ_1 et γ_2 deux arcs dont ils soient les jets.

Soit γ un arc quelconque, dont le jet sera noté χ , et m un état, de jet μ .

Posons, $\forall t, t', s, s' \in \mathbb{R}$:

$$\omega(t, t', s, s') =$$

$$m(\gamma(t) \times \gamma_1(s) \times \gamma(t)^{-1} \times \gamma(t') \times \gamma_2(s') \times \gamma(t')^{-1} \times \gamma(t) \times \gamma_1(s)^{-1} \times \gamma(t)^{-1})$$

il résulte des axiomes (1.1) et de (4.1) que la fonction ω est de classe C^∞ ; donc aussi la fonction ψ :

$$\psi(t, t', s) = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial s'} \omega(t, t', s, s') \Big|_{s'=0}, \text{ qui est égale (grâce}$$

à (5.14) et (5.33)) à

$$\{\mu, \text{Ad}(\gamma(t) \times \gamma_1(s) \times \gamma(t)^{-1} \times \gamma(t'))(\chi_2)\};$$

ou encore, grâce à (5.35)

$$\left\{ \text{Ad}^* (\gamma(t)^{-1})(\mu), \text{Ad}(\gamma_1(s)) \left(\text{Ad}(\gamma(t)^{-1} \times \gamma(t'))(\chi_2) \right) \right\}$$

donc enfin la fonction φ :

$$\varphi(t, t') = \frac{\partial}{\partial s} \Psi(, t, t', s) \Big|_{s=0} \quad \text{qui vaut, grâce à (5.37) } \heartsuit$$

$$\left\{ \text{Ad}^* (\gamma(t)^{-1})(\mu), \chi_1, \text{Ad}(\gamma(t)^{-1} \times \gamma(t'))(\chi_2) \right\};$$

d'où finalement, par usage de (5.42) :

$$\varphi(t, t') = \left\{ \mu, \text{Ad}(\gamma(t))(\chi_1), \text{Ad}(\gamma(t'))(\chi_2) \right\} \quad \heartsuit$$

Il est immédiat (5.46) que

$$\varphi(0, t') = \left\{ \beta(\chi_1)(\mu), \text{ad}(\gamma(t'))(\chi_2) \right\};$$

en dérivant par rapport à t' on trouve

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t'} \varphi(t, t') \Big|_{(t, t')=0} &= - \left\{ [\beta(\chi_2) \circ \beta(\chi_1)](\mu), \chi \right\} \\ &= - \left\{ \mu, [\alpha(\chi_1) \circ \alpha(\chi_2)](\chi) \right\} \end{aligned}$$

On trouve de même en dérivant $\varphi(t, 0)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, t') \Big|_{(t, t')=0} &= \left\{ [\beta(\chi_1) \circ \beta(\chi_2)](\mu), \chi \right\} \\ &= \left\{ \mu, [\alpha(\chi_2) \circ \alpha(\chi_1)](\chi) \right\} \end{aligned}$$

d'où finalement

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \varphi(u, u) \Big|_{u=0} &= \left\{ [\beta(\chi_1) \circ \beta(\chi_2) - \beta(\chi_2) \circ \beta(\chi_1)](\mu), \chi \right\} \\ \heartsuit \quad &= \left\{ \mu, [\alpha(\chi_2) \circ \alpha(\chi_1) - \alpha(\chi_1) \circ \alpha(\chi_2)](\chi) \right\} \end{aligned}$$

D'autre part la relation d'équivariance (5.42) appliquée à $\diamond$ donne

$$\begin{aligned} \varphi(u, u) &= \left\{ \text{Ad}^* (\gamma(u)^{-1})(\mu), \chi_1, \chi_2 \right\} \\ &= \left\{ \text{Ad}^* (\gamma(u)^{-1})(\mu), \alpha(\chi_1)(\chi_2) \right\} \quad (5.46) \\ &= \left\{ \mu, \text{Ad}(\gamma(u))(\alpha(\chi_1)(\chi_2)) \right\} \quad (5.35) \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{d}{du} \varphi(u, u) \Big|_{u=0} = \{ \mu, \chi, \alpha(\chi_1)(\chi_2) \} \quad (5.37 \frac{1}{2})$$

$$= -\{ \mu, \alpha(\chi_1)(\chi_2), \chi \} \quad (5.37 \heartsuit)$$

La comparaison avec $\heartsuit$ montre que le vecteur $\chi_0 = \alpha(\chi_1)(\chi_2)$ vérifie les conditions (5.45 a et b), donc que c'est un élément de $\mathcal{G}_0$; en appliquant (5.46), on trouve

$$(5.47) \quad \begin{cases} \alpha(\alpha(\chi_1)(\chi_2)) = \alpha(\chi_1) \circ \alpha(\chi_2) - \alpha(\chi_2) \circ \alpha(\chi_1) \\ \beta(\alpha(\chi_1)(\chi_2)) = \beta(\chi_2) \circ \beta(\chi_1) - \beta(\chi_1) \circ \beta(\chi_2) \end{cases}$$

La démonstration du théorème (5.45) s'achève par les remarques suivantes :

$\mathcal{G}_0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{G}$;

le vecteur $\chi_0 = \alpha(\chi_1)(\chi_2)$ dont nous avons montré qu'il est un élément de $\mathcal{G}_0$ est égal à $[\chi_1, \chi_2]$;

en appliquant la première des égalités (5.47) à un troisième vecteur χ_3 pris dans $\mathcal{G}_0$, on trouve

$$[[\chi_1, \chi_2], \chi_3] = [\chi_1, [\chi_2, \chi_3]] - [\chi_2, [\chi_1, \chi_3]]$$

soit l'identité de Jacobi.

C.Q.F.D.

On vérifie immédiatement, si $g \in G$ et $\chi_0 \in \mathcal{G}_0$ que $\text{Ad}(g)(\chi_0)$ est encore un élément de $\mathcal{G}_0$; et plus précisément que

$$(5.48) \quad \begin{cases} \alpha(\text{Ad}(g)(\chi_0)) = \text{Ad}(g) \circ \alpha(\chi_0) \circ \text{Ad}(g^{-1}) \\ \beta(\text{Ad}(g)(\chi_0)) = \text{Ad}^*(g) \circ \beta(\chi_0) \circ \text{Ad}^*(g^{-1}) \end{cases}$$

en appliquant la première de ces égalités à $\text{Ad}(g)(\chi_1)$ $[\chi_1 \in \mathcal{G}_0]$, on trouve

$$(5.49) \quad [\text{Ad}(g)(\chi_0), \text{Ad}(g)(\chi_1)] = \text{Ad}(g)([\chi_0, \chi_1])$$

ce qui s'interprète de la façon suivante :

$$(5.50) \quad \left[\begin{array}{l} \text{La représentation adjointe de } G \text{ sur } \mathcal{G} \text{ induit sur l'algè-} \\ \text{bre de Lie } \mathcal{G}_0 \text{ une représentation de } G \text{ par automorphismes.} \end{array} \right.$$

- (5.51) Il est clair que $\mathcal{G}_0$ coïncidera avec $\mathcal{G}$ si G est commutatif, ou si $\mathcal{G}$ est de dimension finie; en particulier, bien entendu, si G est un groupe de Lie.

§ 6 EXPONENTIELLE

Rayons

- (6.1) Soit G un groupe différentiel.
Nous appellerons rayon de G tout D -morphisme $\mathbb{R} \rightarrow G$.

La composition des D -morphisms (1.9) nous montre aussitôt que:

- (6.2) [Si f est un rayon de G , si $t \in \mathbb{R}$, $f_0 t$ est un rayon.
- (6.3) [Si Φ est un D -morphisme $G \rightarrow G'$, si f est un rayon de G ,
 $\Phi_0 f$ est un rayon de G' ,
 et dans le cas où Φ est un automorphisme intérieur;
- (6.4) [Si f est un rayon de G , si $g \in G$
 $t \mapsto g \times f(t) \times g^{-1}$
 est un rayon.

En revenant à la définition (1.7) des D -morphisms, on transforme la définition (6.1) en:

- (6.5) [Soit G un groupe différentiel. Un rayon f de G est un arc de G (1.18) vérifiant

$$f(t+t') = f(t) \times f(t') \quad \forall t, t' \in \mathbb{R}$$

Soit f un rayon de G , m un état. Alors $m_0 f$ est un état de $\mathbb{R}$ (4.3), c'est-à-dire une fonction de type positif sur $\mathbb{R}$ qui est différentiable. Le théorème de Bochner nous apprend qu'il existe une loi de probabilité ν de $\mathbb{R}$ (: une mesure positive de masse 1) dont $m_0 f$ est la transformée de Fourier:

$$(6.6) \quad m(f(t)) = \int_{\mathbb{R}} e^{it\omega} d\nu(\omega)$$

la différentiabilité de $m_0 f$ signifie que ν possède des moments de tous les ordres. On peut obtenir sur l'expression (6.6) le développement de MacLaurin (voir (5.2)) :

$$(6.7) \quad m(f(t)) = 1 + it\rho - \frac{t^2}{2} [\rho^2 + \sigma^2 + i\tau] + o(t^3)$$

on trouve immédiatement :

$$(6.8) \quad \rho = \{\mu, \varphi\} = \int_{\mathbb{R}} \omega \, d\mathcal{V}(\omega) = \text{valeur moyenne de la variable aléatoire } \mathcal{V}$$

(μ et φ sont les jets de m et f)

$$(6.9) \quad \sigma^2 = \int_{\mathbb{R}} (\omega - \rho)^2 \, d\mathcal{V}(\omega) = \text{variance de } \mathcal{V}$$

σ est donc l'écart-type (standard error) de $\mathcal{V}$.

$$(6.10) \quad \tau = 0.$$

Si f' est un autre rayon de G , auquel m associe un écart-type σ' , l'inégalité (5.40) nous montre que

$$(6.11) \quad \sigma\sigma' \geq \frac{1}{2} |\{\mu, \varphi, \varphi'\}|$$

[dans le cas particulier où G est le groupe de Weyl-Heisenberg associé au plan symplectique $\mathbb{R}^2$, et où les rayons f et f' sont associés aux hamiltoniens-coordonnées p et q , (6.11) nous fournit la relation d'incertitude de Heisenberg , sous sa forme la plus précise (le facteur $\frac{1}{2}$ ne peut pas être majoré)] .

Théorème:

$$(6.12) \quad \left[\begin{array}{l} \text{Soit } G \text{ un groupe différentiel ; } (\tilde{G}, \Pi) \text{ un revêtement de } G. \\ \text{La correspondance (voir (6.3))} \end{array} \right.$$

$$\diamond \quad \tilde{f} \mapsto \Pi_* \tilde{f}$$

entre rayons de $\tilde{G}$ et rayons de G est bijective.

-L'injectivité est immédiate (du fait que $\ker(\Pi)$ est discret).

-Soit f un rayon de G . Le lemme (2.11) montre qu'il existe $\tilde{f} \in D(\mathbb{R}, \tilde{G})$ tel que $\Pi_* \tilde{f} = f$; $\tilde{f}$ est déterminé $\text{mod } \ker(\Pi)$, et peut être choisi pour que $\tilde{f}(0) = \tilde{e}$. L'application $\mathbb{R}^2 \rightarrow \ker(\Pi) : (t, t') \mapsto \tilde{f}(t)^{-1} \times \tilde{f}(t+t') \times \tilde{f}(t')^{-1}$ est localement constante donc constante; il en résulte que $\tilde{f}$ est un rayon de $\tilde{G}$ (Cf. (6.5)), envoyé sur f par (6.12 $\diamond$).

G.O.P.N

Difféologie forte

- (6.13) [Soit G un groupe différentiel.
 Nous appellerons difféologie forte de G la difféologie engendrée par les rayons (voir (1.3), (6.5)).

Désignons par D la difféologie donnée de G , par D' la difféologie forte. Si on choisit $g \in G$, des rayons $f_1 \dots f_p$ de G , et une application différentiable $(r_1, \dots, r_n) \mapsto (u_1, \dots, u_p)$ il est clair que la fonction $\mathcal{F}$:

- (6.14) $\mathcal{F}(r_1, \dots, r_n) = g \times f_1(u_1) \times \dots \times f_p(u_p)$
 appartient à $D'(\mathbb{R}^n, G)$. Réciproquement on vérifie (en utilisant (6.4)) que tout élément de $D'(\mathbb{R}^n, G)$ est borne supérieure (0.1) de fonctions du type (6.14) .

- (6.15) Par construction même de la difféologie D' , les D -rayons et les D' -rayons sont les mêmes; il en résulte que le passage de D à D' est idempotent.

- (6.16) La difféologie forte D' est plus fine que la difféologie initiale D (1.3); elle implique donc une topologie plus fine (4.7); si la topologie D était séparée, la topologie D' le sera.

La composante neutre forte est donc un sous-groupe (invariant) de la composante neutre initiale; à l'aide de (6.14), on voit que cette composante neutre forte est l'ensemble des produits finis

- (6.17) $f_1(t_1) \times \dots \times f_p(t_p) \quad (f_j = \text{rayons})$

ou , si on préfère, des produits finis

- (6.18) $f_1(1) \times \dots \times f_p(1)$

(utiliser (6.2)).

- (6.19) Soit G un groupe différentiel, $(\tilde{G}, \pi)$ un revêtement de G . A l'aide de (6.14) et (6.12) , on constate que $(\tilde{G}, \pi)$ reste un revêtement de G si on munit $\tilde{G}$ et G de la difféologie forte. S'ils étaient connexes initialement, ils ne sont pas nécessairement fortement connexes; la situation s'analyse alors par les considérations du § 2 (en particulier (2.12)) qui sont valables pour les difféologies fortes comme pour les autres.

- (6.20) Si G est un groupe différentiel fort, il résulte de (6.14) que l'espace vectoriel tangent $\mathcal{G}$ est engendré par les jets des rayons.

Exemples:

- (6.21) ■ La difféologie standard des groupes de Lie (1.5) est forte.
- (6.22) ■ Nous avons construit pour les groupes de Lie une "mauvaise" difféologie non séparée (4.16); la difféologie forte correspondante est "la bonne" (1.5). ■

Exponentielle.

Tout rayon d'un groupe différentiel G est caractérisé par son germe à l'origine; ceci résulte du théorème suivant :

- (6.23) Soit G un groupe différentiel, $\mathcal{F}$ une fonction $\in D(\mathbb{R}, G)$ définie sur un intervalle I contenant 0, et vérifiant
- $$\diamond \quad \mathcal{F}(t+t') = \mathcal{F}(t) \times \mathcal{F}(t') \quad \text{si } t, t' \text{ et } t+t' \in I$$
- alors il existe un seul rayon f prolongeant $\mathcal{F}$.

[On peut construire f en remarquant qu'il existe un seul prolongement $A(\mathcal{F})$ de $\mathcal{F}$, défini sur l'intervalle $2 \times I$ et vérifiant la relation $\diamond$; à savoir $A(\mathcal{F})(t) = \mathcal{F}(t/2)^2$; alors $f = \sup A^n(\mathcal{F})$.]

Si le groupe G est séparé, un rayon est même défini par son jet :

- (6.24) Soit G un groupe différentiel séparé, φ un vecteur tangent à G . Nous dirons que φ est complet s'il existe un rayon f tel que $\text{jet}(f) = \varphi$. Alors f est unique.

Supposons qu'il existe deux rayons f_1 et f_2 de même jet φ ; soit m un état. On considère la fonction :

$$\Psi(t, u) = m(f_1(t) \times f_2(u))$$

Quels que soient t_0 et $u_0 \in \mathbb{R}$, on a

$$\Psi(t_0+t, u_0+u) = m(f_1(t_0) \times [f_1(t) \times f_2(u)] \times f_2(u_0)),$$

et le théorème (3.10) nous montre qu'il existe trois états m_0, m_1, m_2 et trois complexes c_0, c_1, c_2 tels que

$$\Psi(t_0+t, u_0+u) = \sum_{p=0}^2 c_p m_p(f_1(t) \times f_2(u))$$

On en déduit la valeur des dérivées $\frac{\partial \Psi}{\partial t}$ et $\frac{\partial \Psi}{\partial u}$ pour $t=t_0$, $u=u_0$: $i \sum_p c_p \{ \text{jet}(m_p), \varphi \}$ dans les deux cas; par consé-

quent $\frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{\partial \Psi}{\partial u}$ est identiquement nul, $\Psi(t, -t) = Cte = \Psi(0,0) = 1$; on a donc $m(f_1(t) \times f_2(-t)) = 1$ pour tout état m ; G étant séparé, ceci entraîne $f_1(t) \times f_2(-t) = e$, d'où $f_1 = f_2$.

C.Q.F.D.

(6.25) Si G est séparé et si φ est un vecteur complet, nous poserons

$$\exp(\varphi) = f(1)$$

f étant le rayon vérifiant

$$\text{jet}(f) = \varphi$$

$\forall t \in \mathbb{R}$, on sait que $\text{jet}(f, t) = t \text{ jet}(f)$ (5.9); par conséquent

(6.26)

$$\boxed{f(t) = \exp(t\varphi)} \quad t \in \mathbb{R}$$

-Si Ψ est un D -morphisme $G \rightarrow G'$, si G et G' sont séparés et si φ est un vecteur complet de G , il résulte de (6.3) que

$T\Psi(\varphi)$ est un vecteur complet de G' , et que

(6.27)

$$\boxed{\exp(T\Psi(\varphi)) = \Psi(\exp(\varphi))}$$

En particulier, si G est séparé, φ complet et $g \in G$

$\text{Ad}(g)(\varphi)$ est complet et

(6.28)

$$\boxed{\exp(\text{Ad}(g)(\varphi)) = g \times \exp(\varphi) \times g^{-1}}$$

Théorème :

(6.29)

Si G est un groupe séparé, φ_1 et φ_2 des vecteurs complets de G , et si

$$[\varphi_1, \varphi_2] = 0$$

$\varphi_1 + \varphi_2$ est complet, et

$$\exp(\varphi_1 + \varphi_2) = \exp(\varphi_1) \times \exp(\varphi_2) = \exp(\varphi_2) \times \exp(\varphi_1)$$

Posons $f_1(t) = \exp(t\varphi_1)$, $f_2(t) = \exp(t\varphi_2)$; soit m un état,

μ son jet, et considérons la fonction réelle Ψ :

$$\Psi(t) = \{\mu, \text{Adj}(f_1(t))(\varphi_2)\}$$

$\forall t_0 \in \mathbb{R}$, on trouve $\Psi(t_0 + t) = \{\mu_0, \text{Adj}(f_1(t))(\varphi_2)\}$, avec $\mu_0 =$

$\text{Adj}^*(f_1(-t_0))(\mu)$; d'où grâce à (5.37 $\bullet$), $\Psi'(t_0) =$

$\{\mu_0, \varphi_1, \varphi_2\} = [\varphi_1, \varphi_2](\mu_0) = 0$ (Cf. (5.43)); d'où
 $\psi(t) = \psi(0) = \{\mu, \varphi_2\}$. μ étant arbitraire, on a $\text{Ad}(f_1(t))(\varphi_2)$
 $= \varphi_2$; d'où, grâce à (6.28), $f_1(t) \times f_2(t') \times f_1(t)^{-1} =$
 $f_2(t')$ $\forall t, t' \in \mathbb{R}$.

$f_1(t)$ et $f_2(t')$ commutent, $f_1 \times f_2$ est donc un rayon; on
sait que son jet est égal à $\varphi_1 + \varphi_2$; donc $\exp(\varphi_1 + \varphi_2) = [f_1 \times f_2](1)$
 $= \exp(\varphi_1) \times \exp(\varphi_2)$.

C.Q.F.D.

Ce résultat comprend comme cas particulier la formule

$$(6.30) \quad \exp([t+t']\varphi) = \exp(t\varphi) \times \exp(t'\varphi)$$

évident sur la définition (6.26).

(6.31) On peut construire des exemples de vecteurs complets φ_1 et φ_2
dont la somme $\varphi_1 + \varphi_2$ n'est pas un vecteur complet [ainsi,
dans le groupe des symplectomorphismes de $\mathbb{R}^2$, les vecteurs
associés aux hamiltoniens $p^2/2$ et $q^3/3$]: l'ensemble des vec-
teurs complets est donc une étoile du plan tangent $\mathcal{G}$ (:une
partie invariante par les homothéties), invariante par la
représentation adjointe (Cf. (6.28)), mais pas nécessairement
un espace vectoriel. Dans le cas de la difféologie forte, on
sait que l'espace vectoriel engendré est égal à $\mathcal{G}$ (6.20).