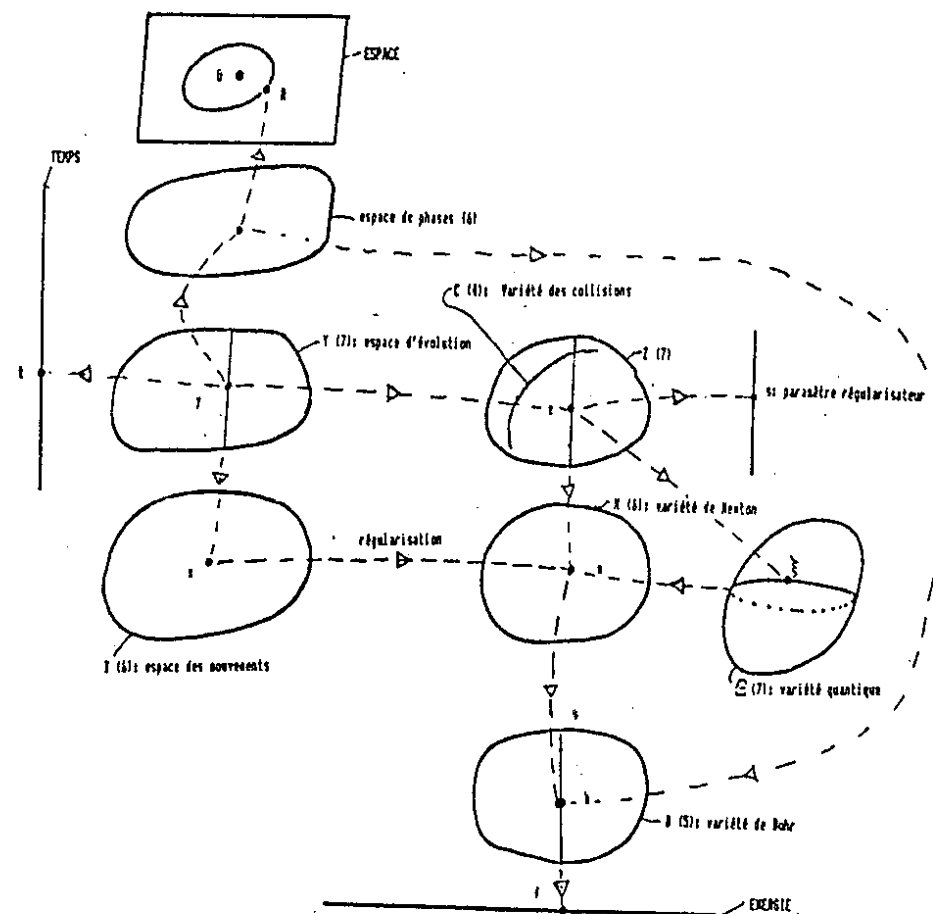


Université de Provence et Centre de Physique Théorique, Marseille

INTRODUCTION

Mais beaucoup de questions restent ouvertes: existence de polarisations réelles ou complexes; syédtries; etc.



§1: INTEGRATION ELEMENTAIRE

Il existe un paramètre s , défini globalement, qui a la propriété suivante: le temps t et la position R , exprimés en fonction de s , vérifient une même équation différentielle linéaire. Ceci permet une intégration explicite en fonction de conditions initiales quelconques.

Considérons un point matériel, soumis à un champ coulombien. En choisissant convenablement les unités de longueur et de temps, on écrit les équations du mouvement sous la forme:

$$(1-1) \quad \frac{dR}{dt} = V; \quad \frac{dV}{dt} = -R / r^3; \quad r^2 = \langle R, R \rangle$$

les crochets $\langle , \rangle$ désignant le produit scalaire dans R^3 .

On remarquera que cette écriture contient à la fois les cas d'une force attractive ($r > 0$) ou répulsive ($r < 0$).

On constate par quelques dérivations que

$$(1-2) \quad f = V^2 - 2/r$$

est une constante du mouvement (c'est l'"intégrale des forces vives", double de l'énergie), et que la variable s définie par

$$(1-3) \quad s = \langle V, R \rangle - f t$$

vérifie

$$(1-4) \quad \frac{ds}{dt} = \frac{1}{r}$$

ce qui permet d'utiliser s au lieu de t pour paramétrer les solutions. On pose donc:

$$(1-5) \quad \cdot = \frac{d}{ds} = r \frac{d}{dt},$$

et on trouve immédiatement:

(1-6)

$t' = r$	$R' = V r$
$t'' = \langle V, R \rangle$	$R'' = V \langle V, R \rangle - R/r$

(1-7)

(1-7) s'écrit aussi

(1-8)

$t'' = t f + s$	$R = R' t'' - R'' t'$
-----------------	-----------------------

d'où

(1-9)

$t''' = t' f + 1$	$R''' = R' f$
-------------------	---------------

par conséquent la matrice-colonne

(1-10)

$$X = \begin{pmatrix} t \\ R \end{pmatrix}$$

est solution de l'équation différentielle LINEAIRE

(1-11)

$$X'''' = X'' f$$

Introduisons aussi la matrice 4x4

(1-12)

$$M = (X \quad X' \quad X'' \quad X''')$$

solution de

(1-13)

$$M' = M A$$

si on pose

(1-14)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & f \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

L'équation (1-13) possède une solution standard, fournie par l'exponentielle $\exp(uA)$; on définit cette exponentielle comme la fonction $\phi(u)$ vérifiant:

(1-15)

$$\phi'(u) = A \phi(u); \quad \phi(0) = I = \text{matrice unité}$$

d'où résulte

(1-16)

$$\phi(u+v) = \phi(u) \phi(v); \quad \phi(-u) = \phi(u)^{-1}.$$

Choisissons arbitrairement un réel s_0 ; on constate, grâce à (1-13) et (1-15), que la matrice M_0 définie par

$$(1-17) \quad M_0 = M \Phi(s_0, -s_0)$$

a une dérivée nulle, donc que ses éléments constituent SEIZE CONSTANTES DU MOUVEMENT; grâce à (1-16), on a

$$(1-18) \quad M = M_0 \Phi(s - s_0);$$

cette formule donne la valeurs de M , donc en particulier de t et de R , en fonction du paramètre

$$(1-19) \quad u = s - s_0,$$

et de conditions initiales quelconques (il suffit de calculer la valeur correspondante

$$(1-20) \quad M_0$$

de la matrice M); LES EQUATIONS DU MOUVEMENT SONT DONC INTEGREES.

Formules explicites.

- La matrice A vérifie l'équation

$$(1-21) \quad A^4 = f A^2;$$

une technique standard permet alors d'obtenir l'exponentielle par la formule

$$(1-22) \quad \Phi = I \gamma'''' + A \gamma'' + (A^2 - If) \gamma' + (A^3 - Af) \gamma,$$

la fonction γ étant définie par le système

$$(1-23) \quad \begin{cases} \gamma'''' - \gamma''f = 0 \\ \gamma''''(0) = 1; \gamma''(0) = \gamma'(0) = \gamma(0) = 0 \end{cases};$$

on vérifie d'ailleurs immédiatement que l'expression (1-22) est bien solution du système (1-15) caractéristique de l'exponentielle.

γ et ses trois premières dérivées sont des fonctions entières de u et de $u^2 f$, qui constituent une BASE pour l'espace des solutions de l'équation différentielle (1-23); notamment les solutions particulières u et 1 se développent en

$$(1-24) \quad \begin{cases} u = \gamma'' - \gamma f \\ 1 = \gamma''' - \gamma' f \end{cases}$$

- L'expression explicite de γ est:

$$(1-25) \quad \gamma(u) = \begin{cases} \frac{\sinh(u\sqrt{f}) - u\sqrt{f}}{f\sqrt{f}} & \text{pour } f > 0, \\ u^3/6 & \text{pour } f = 0, \\ \frac{u\sqrt{-f} - \sin(u\sqrt{-f})}{-f\sqrt{-f}} & \text{pour } f < 0. \end{cases}$$

La formule (1-22) s'écrit

$$(1-26) \quad \Phi = \begin{pmatrix} \gamma'''' - \gamma'f & 0 & 0 & 0 \\ \gamma''' - \gamma f & \gamma'' - \gamma'f & 0 & 0 \\ \gamma' & \gamma'' & \gamma''' & \gamma''f \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' & \gamma''' \end{pmatrix}$$

et (1-18) donne enfin la solution explicite:

$$(1-27) \quad \begin{cases} t = t_0 \gamma'''' + t'_0 \gamma''' + s_0 \gamma'' + \gamma \\ R = R_0 \gamma'''' + R'_0 \gamma''' + E_0 \gamma'' \\ r = r_0 \gamma'''' + r'_0 \gamma''' + \gamma' \\ R' = R'_0 \gamma'''' + R''_0 \gamma''' \end{cases}$$

la seule variable nouvelle qui apparaît ici est

$$(1-28) \quad E = R'' - R f;$$

il résulte de (1-9) que E est une CONSTANCE DU MOUVEMENT, donc que $E_0 = E$.

§2: QUELQUES APPLICATIONS

Les équations linéaires formulées au §1 et leurs conditions initiales possèdent un certain nombre d'intégrales premières quadratiques. Nous donnons quelques applications élémentaires à l'étude du mouvement.

- En portant l'expression (1-22) dans (1-16) on trouve la formule d'addition

$$(2-1) \quad \gamma(u+v) = \gamma(u) + \gamma'(u) \gamma''(v) + \gamma''(u) \gamma'(v) + \gamma(v)$$

valable quel que soit f , et les identités quadratiques

$$(2-2) \quad \gamma'^2 - \gamma'(2+f\gamma') = 0, \quad \gamma''^2 - f\gamma'^2 = 1.$$

Les formules d'addition des dérivées de γ se déduisent de (2-1); indiquons

(2-3)

$$\gamma'(u) = 2 \gamma''\left(\frac{u}{2}\right)^2$$

qui montre que γ' est positive quels que soient u et f .

- Des formules quadratiques pour R et ses dérivées s'obtiennent à partir de (1-6) et (1-7); telles les identités

$$(2-4) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} R^2 & = & t^2 \\ \langle R, R' \rangle & = & t' t'' \\ \langle R, R'' \rangle & = & t'^2 - t' \\ R'^2 - f t'^2 & = & 2t' \\ \langle R', R'' \rangle - f t' t'' & = & t'' \\ \langle R', R''' \rangle - f t' t''' & = & f t' \\ R''^2 - f t''^2 & = & 1 \\ \langle R'', R''' \rangle - f t'' t''' & = & 0 \\ R'''^2 - f t'''^2 & = & -f \end{array} \right.$$

- Le MOMENT CINÉTIQUE L est une intégrale première classique:

(2-5)

$$L = R \times V = R' \times R'';$$

l'identité de Lagrange

(2-6)

$$L^2 = R^2 V^2 - \langle R, V \rangle^2$$

donne:

(2-7)

$$t'^2 - t'(2+ft') = -L^2$$

(à rapprocher de (2-2)); enfin la définition (1-28) de E donne

(2-8)

$$E^2 = 1 + f L^2$$

et

(2-9)

$$\langle E, R \rangle + L^2 = t' = r;$$

cette formule signifie que la trajectoire est contenue dans une CONIQUE de foyer O , d'excentricité $\|E\|$, et de paramètre L^2 .

Théorème de Lambert

- Choisissons deux instants-points arbitraires du mouvement, (t_+, R_+) et (t_-, R_-) , et affectons l'indice $\pm$ à la valeur MEDIANE de s ; le système (1-26) donne

$$(2-10) \quad \frac{t_+ - t_-}{2} = t'_\pm \gamma'' + \gamma$$

(2-11)

$$\frac{R_+ - R_-}{2} = R'_\pm \gamma''$$

et

(2-12)

$$\frac{r_+ + r_-}{2} = t'_\pm \gamma''' + \gamma';$$

un peu de calcul montre que t_+ et γ' se tirent de (2-11) et (2-12), en fonction de $(R_+ - R_-)^2$ et de $r_+ + r_-$; γ' , fonction paire, donne ensuite la valeur absolue de

$$u = \frac{s_+ - s_-}{2}$$

d'où $|t_+ - t_-|$ en portant dans (2-10).

Ainsi la durée de parcours d'un arc quelconque ne dépend que de l'énergie, de la somme $r_+ + r_-$ des rayons vecteurs et de la corde $\|R_+ - R_-\|$: c'est le théorème de Lambert (l'énoncé demande quelques précisions supplémentaires dans le cas des mouvements périodiques).

Equation de Kepler

- La construction des éphémérides ou le calcul des perturbations requièrent de connaître u en fonction de t , c'est-à-dire de résoudre l'équation:

$$(2-13) \quad t \cdot \gamma'''(u) + t' \cdot \gamma''(u) + s \cdot \gamma'(u) + \gamma(u) = t;$$

(cf. (1-27)); le premier membre est une fonction monotone de u (sa dérivée est égale à r); il est immédiat qu'elle n'est ni majorée ni minorée, et constitue donc un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$; par conséquent, DANS TOUS LES CAS, l'équation de Kepler (2-13) possède une solution unique.

§3: RÉGULARISATION D'UNE VARIÉTÉ

Après le rappel de quelques résultats classiques relatifs à la structure de variété, nous définissons la "régularisée" d'une variété non séparée.

Sous-variétés et variétés quotient

- Les variétés que nous allons considérer sont de dimension finie constante, de classe C^∞ , possèdent une base dénombrable des ouverts; nous ne les supposons pas séparées a priori.

(3-1)- Soit X et Y deux variétés, et A une application différentiable (C^∞) $X \rightarrow Y$; si, pour tout x , le rang de l'application linéaire tangente $D(A)(x)$ est égal à la dimension de Y , on dit que A est une SUBMERSION; si ce rang est égal à la dimension de X , A est une IMMERSION.

(3-2) Soit X un ensemble muni d'une application A dans une variété Y ; s'il existe une structure de variété sur X telle que A soit une immersion, cette structure est unique; une application F à valeurs dans X sera différentiable si

et seulement si $A \circ F$ l'est.

- Toute immersion injective s'appelle un PLONGEMENT; un plongement A est dit PROPRE s'il est FERME (= l'image de toute partie fermée est fermée). Alors A est un homéomorphisme de X avec une partie fermée de Y , munie de la topologie induite de celle de Y .

- Un cas particulier important est celui d'une PARTIE V de Y , munie de l'injection canonique dans Y ,

$$I: v \mapsto v.$$

Si cette structure de variété de V existe, nous dirons que V est une VARIÉTÉ PLONGÉE dans Y ; si I est propre, que V est une SOUS-VARIÉTÉ.

Les fonctions différentiables sur une sous-variété V de Y sont celles qui sont prolongeables par une fonction différentiable sur un ouvert de Y .

Par exemple les OLVERTS de Y sont les sous-variétés qui ont même dimension que Y .

l'IMAGE V d'une variété X par un plongement A dans Y est elle-même une variété plongée dans Y , et une sous-variété si A est propre.

(3-3) Soit X une variété, Y un quotient de X , c'est-à-dire un ensemble muni d'une application SURJECTIVE $A: X \rightarrow Y$.

Si Y possède une structure de variété telle que A soit une submersion, cette structure est UNIQUE; on dit que Y est une VARIÉTÉ QUOTIENT de X .

Régularisation

(3-4) - Nous dirons qu'une variété X est RÉGULARISABLE s'il existe une VARIÉTÉ QUOTIENT $\bar{X}$, telle que

(3-4 a) $\bar{X}$ est SÉPARÉE;

(3-4 b) toute application différentiable $x \mapsto q$ de X dans une variété SÉPARÉE Q se factorise en

$$x \mapsto \bar{x} \mapsto q,$$

$x \mapsto \bar{x}$ étant l'application canonique de X sur $\bar{X}$.

(3-5) On constate facilement que l'application $\bar{x} \mapsto q$ (3-4 b) est unique et différentiable; que la dimension de $\bar{X}$ est égale à celle de X ; que $\bar{x}$ est unique à un difféomorphisme près, c'est-à-dire que toute autre solution $\tilde{x}$ de (3-4) est obtenue en composant $x \mapsto \bar{x}$ avec un difféomorphisme $\bar{x} \mapsto \tilde{x}$.

(3-6) Si une variété X est séparée, elle constitue évidemment sa propre régularisée.

(3-7) Il existe des variétés non régularisables, par exemple celle qu'on obtient en recollant deux copies de $\mathbb{R}$ sur leur partie négative.

§4: INTEGRATION GLOBALE ET REGULARISATION D'UN SYSTEME DYNAMIQUE

Les constructions de §3 sont appliquées au cas d'un système dynamique classique; elles permettent de donner à l'ensemble des solutions des équations du mouvement une structure canonique de variété, pas nécessairement séparée, et le cas échéant d'appliquer l'algorithme topologique de régularisation. Parallèlement, nous caractérisons les intégrales premières globales.

Espace d'évolution et espace des mouvements

Nous allons étudier ici le cas d'un point matériel soumis à un champ de forces - mais les résultats peuvent s'étendre à un cadre plus général.

Ecrivons les équations du mouvement du point:

$$(4-1) \quad dR/dt = V \quad dV/dt = F(t, R, V)$$

F étant une fonction différentiable, donc définie dans un ouvert.

Cet ouvert Y , ensemble des "conditions initiales"

$$(4-2) \quad y = (t, R, V);$$

s'appellera ESPACE D'EVOLUTION du système; on le considère comme VARIÉTÉ plongée dans $\mathbb{R}^7$ (3-2); sa dimension est donc 7.

(4-3) Nous appellerons MOUVEMENT du système toute solution connexe maximale x des équations (4-1); les théorèmes généraux sur les équations différentielles permettent d'établir les résultats suivants:

(4-3 a): par tout point y de Y passe un mouvement x et un seul; par conséquent la relation

$$y \in x$$

définit une application

$$y \mapsto x$$

et fait de l'ensemble X des mouvements un quotient de Y .

(4-3 b): L'espace des mouvements possède une structure de VARIÉTÉ QUOTIENT de la variété d'évolution.

La dimension de cette variété est inférieure d'une unité à celle de Y , et vaut donc 6.

Intégrales premières

(4-4) Nous allons utiliser la notation variationnelle de Leibniz-Lagrange: un VECTEUR TANGENT à Y en y , sera noté δy ; son image par $y \mapsto x$ s'écrira δx . Par définition même d'une équation différentielle, δy sera tangent au mouvement si et seulement si $\delta x = 0$.

(4-5) -Définissons les INTEGRALES PREMIERES (ou CONSTANTES DU MOUVEMENT) comme les applications différentiables

$$y \mapsto q$$

de l'espace d'évolution Y dans un espace numérique $\mathbb{R}^n$, vérifiant la condition

$$(4-5 a) \quad \delta y \text{ tangent au mouvement} \implies \delta q = 0;$$

cette condition entraîne l'existence d'une factorisation de $y \mapsto q$ par l'intermédiaire de X :

$$(4-6) \quad y \mapsto x \mapsto q,$$

$x \mapsto q$ étant différentiable.

(4-7) Réciproquement, toute application différentiable $x \mapsto q$ de X dans $\mathbb{R}^n$ définit une intégrale première $y \mapsto q$ par cette formule (4-6).

(4-8) Intégrer le système, au sens classique du terme, c'est construire une intégrale première

$$y \mapsto q \in \mathbb{R}^n$$

qui suffise à caractériser chaque mouvement; en d'autres termes, l'application (4-6)

$$x \mapsto q$$

doit être injective.

Comme $\mathbb{R}^n$ est séparé, une telle intégration n'est possible que si la variété des mouvements est elle-même séparée. Cette condition est suffisante: un théorème classique de Whitney nous apprend que toute variété séparée de dimension p possède

un plongement propre dans $\mathbb{R}^n$ (au moins pour $n > 2p$); il existe donc une intégration

$$(4-9) \quad y \mapsto v$$

vérifiant en plus la condition d'immersion (3-1), qui s'écrit

$$(4-10) \quad \delta x = 0 \iff \delta v = 0.$$

ou encore, compte tenu de (4-4):

$$(4-11) \quad \delta y \text{ tangent au mouvement } \iff \delta v = 0$$

(à comparer avec (4-5 a)).

Grâce à cette condition et au fait que $x \mapsto v$ soit propre, l'image V de Y par $y \mapsto v$ est ELLE-MEME UNE SOUS - VARIETE DE $\mathbb{R}^n$ (3-2), difféomorphe à l'espace des mouvements; et toute intégrale première $y \mapsto q$ se factorise en

$$(4-12) \quad y \mapsto v \mapsto q,$$

$v \mapsto q$ étant différentiable sur V , donc prolongeable par une fonction différentiable au voisinage de V . $y \mapsto v$ est donc une INTEGRALE PREMIERE UNIVERSELLE; nous l'appellerons INTEGRATION GLOBALE du système.

Systèmes éternels

(4-13) Un cas particulièrement simple où l'espace des mouvements est séparé, c'est celui où tous les mouvements sont éternels; on obtient un plongement de l'espace des mouvements en choisissant une date t , et en associant à chaque mouvement x son intersection avec la variété plongée dans Y définie par:

$$t = t_0.$$

variété que l'on peut considérer comme l'ESPACE DE PHASES du système. Dans ce cas particulier, espace de phase et espace des mouvements sont donc difféomorphes.

Systèmes régularisables

(4-14) Examinons maintenant le cas plus général où la variété des mouvements X est REGULARISABLE, au sens (3-4); la régularisation est caractérisée par le triplet

$$(X, K, \bar{X})$$

où l'application K fait d'une variété $\bar{X}$ le "plus grand" quotient séparé de X .

Alors toute intégrale première $y \mapsto q$ se factorise en

$$y \mapsto x \xrightarrow{K} \bar{x} \mapsto q,$$

si bien que les intégrales premières (globales) ne permettent pas de distinguer deux mouvements qui ont même image dans $\bar{X}$. Les classes de mouvements ainsi équivalents s'appelleront "mouvements régularisés".

Grâce au théorème de Whitney, la variété séparée $\bar{X}$ possède un plongement propre $\bar{x} \mapsto v$ dans un espace numérique.

LA PROPRIETE D'UNIVERSALITE (4-12) SUBSISTE: l'image de Y est une sous-variété V de $\mathbb{R}^n$, et toute intégrale première est obtenue à l'aide d'une fonction différentiable sur V :

$$v \mapsto q$$

par la composition:

$$y \mapsto v \mapsto q;$$

nous dirons encore que $y \mapsto v$ est une INTEGRATION GLOBALE du système.

(4-15) On notera que la difféologie de V ne dépend pas de la manière d'intégrer globalement; c'est celle de la régularisée de l'espace des mouvements (Voir (3-5)).

§5: REGULARISATION ET INTEGRATION EFFECTIVES DU PROBLEME DE NEWTON

Revenons au problème de Newton:

(5-1) L'ESPACE D'EVOLUTION Y est l'ensemble des triplets de $\mathbb{R}^7$:

$$y = (t, R, V),$$

pour lesquels $R \neq 0$.

(5-2) Les équations du mouvement s'écrivent

$$\frac{dR}{dt} = V \quad \frac{dV}{dt} = -R/r^3$$

avec

$$r = \|R\|$$

ε étant égal à ± 1 selon que le champ est attractif ou répulsif.

(5-3) L'ESPACE DES MOUVEMENTS est une variété X de dimension 6; dans le cas attractif, nous allons constater que cette variété N'EST PAS SEPARÉE, mais qu'elle est REGULARISABLE; nous appellerons VARIETE DE NEWTON sa régularisée $\bar{X}$.

La méthode consiste à RACCORDER la VARIETE D'EVOLUTION Y (de dimension 7) avec une VARIETE DES COLLISIONS C à 4 dimensions, de

façon à constituer une variété Z qui peut subir l'action du groupe des réels; action qui intègre les équations du mouvement. La variété de Newton cherchée N est le QUOTIENT de Z par cette action.

N , variété de dimension 4, peut être plongée dans un espace numérique, ce qui fournit l'INTÉGRATION GLOBALE, au sens du §4.

(5-4) Considérons un couple

$$z = (f, M)$$

où f désigne un réel et M une matrice 4×4 qui se décompose en

$$M = \begin{pmatrix} t & t' & t'' & t''' \\ R & R' & R'' & R''' \end{pmatrix};$$

on peut considérer z comme une variable qui parcourt $\mathbb{R}^{17}$.

Proposition

(5-5) On considère la fonction $F : \mathbb{R}^{17} \rightarrow \mathbb{R}^{10}$ définie par :

$$F(z) := \begin{pmatrix} R - R' t'' + R'' t' \\ R''' - R' f \\ t''' - t' f - 1 \\ R'^2 - f t'^2 - 2 t' \\ \langle R', R'' \rangle - f t' t'' - t'' \\ R''^2 - f t''^2 - 1 \end{pmatrix}$$

et l'ensemble

$$Z = \{ z \in \mathbb{R}^{17} / F(z) = 0 \};$$

Z est une SOUS-VARIÉTÉ de $\mathbb{R}^{17}$, de dimension 7.

On le vérifie en constatant que le rang de l'application linéaire tangente $D(F)(z)$ est égal à 10 pour tout $z \in Z$ et en utilisant un théorème classique.

Avec l'écriture (1-14)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & f \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

posons, pour tout $u \in \mathbb{R}$:

$$(5-6) \quad \lambda(u) (f, M) = (f, M \exp(uA));$$

il est immédiat que

$$(5-7) \quad \lambda(u+v) = \lambda(u) \circ \lambda(v),$$

c'est-à-dire qu'on a défini une ACTION du groupe additif $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{17}$.

Cette action est engendrée par le champ de vecteurs $z \mapsto \delta_1 z$ défini par

$$(5-8) \quad \delta_1 f = 0, \quad \delta_1 M = M A;$$

en dérivant les formules (5-5), on constate que

$$\delta_1 F(z) = 0,$$

ce qui montre que :

(5-9) La formule (5-6) définit une action différentiable du groupe $\mathbb{R}$ sur la variété Z .

Définissons, dans $\mathbb{R}^{17}$ comme dans Z , la fonction s :

$$(5-10) \quad s(z) = t'' - t f$$

(Cf. (1-3) et (1-7); on constate que

$$(5-11) \quad \delta_1 s(z) = 1$$

(notation (5-8)), ce qui entraîne

$$(5-12) \quad s(\lambda(u)(z)) = s(z) + u.$$

Cette formule signifie que la fonction s est une projection de Z sur $\mathbb{R}$ EQUIVARIANTE pour l'action (5-6).

Il en résulte que, pour tout réel s_0 , l'équation

$$s(z) = s_0$$

définit une SECTION des orbites du groupe; choisissons une telle section (nous prendrons $s_0 = 0$), que nous désignerons par N :

$$(5-13) \left[\begin{array}{l} N = \left\{ n \in Z / s(n) = 0 \right\} \end{array} \right.$$

N est l'image de Z par l'application différentiable idempotente:

$$(5-14) \quad z \mapsto n = \lambda(-s(z))(z)$$

(notations (5-10) et (5-6)), et constitue à la fois une sous-variété de Z et une variété quotient de Z (par la fonction (5-14)); sa dimension est 6. Il en résulte la proposition:

$$(5-15) \left[\begin{array}{l} \text{l'équation} \\ \quad z = \lambda(u)(n), \text{ avec } u \in R, \quad n \in N \\ \text{définit un DIFFEOMORPHISME} \\ \quad (u, n) \mapsto z \\ \text{entre le produit cartésien } R \times N \text{ et la variété } Z. \end{array} \right.$$

Montrons maintenant que:

$$(5-16) \left[\begin{array}{l} \text{La variété } Z \text{ possède deux composantes connexes:} \\ \quad Z^+ \text{ définie par } t' \geq 0, \\ \quad Z^- \text{ définie par } t' < 0. \end{array} \right.$$

Remarquons d'abord que la définition

$$t' < 0$$

de Z^- en fait une partie ouverte de Z; d'autre part l'une des équations (5-5) qui définit Z:

$$R'^2 = t'(2+ft')$$

montre que, dans Z:

$$(t' < 0) \iff (2+ft' \leq 0 \text{ et } f > 0)$$

le second membre est donc une autre définition de Z^- qui en fait un ensemble fermé; son complémentaire dans Z, Z^+ , est donc aussi ouvert et fermé. Il reste à montrer que Z^+ et Z^- sont connexes.

Nous verrons en (5-18) que Z^- est difféomorphe à l'espace d'évolution Y, donc connexe. Nous verrons aussi que Z^+ contient un ouvert connexe Y^+ (5-19), et que tout point de Z^+ qui n'appartient pas à Y^+ peut lui être joint par un arc (5-27); ce qui établit la connexité de Z^+ .

Chacune de ces composantes connexes est nécessairement stable pour l'action du groupe connexe E; par conséquent:

$$(5-17) \left[\begin{array}{l} \text{la variété } N \text{ possède deux composantes connexes } N^+ \text{ et } N^-, \text{ définies} \\ \text{respectivement par } t' \geq 0 \text{ et } t' < 0; Z^+ \text{ est difféomorphe à } R \times N^+, Z^- \\ \text{à } R \times N^-. \end{array} \right.$$

Proposition:
(5-18)

Les formules

$$\left\{ \begin{array}{l} t := t \\ R := R \\ f := V^2 - 2/r \\ t' := r \\ t'' := \langle V, R \rangle \\ t''' := 1 + ft' \\ R' := Vt' \\ R'' := (R't'' - R)/t' \\ R''' := R'f \end{array} \right.$$

définissent un DIFFEOMORPHISME de l'espace d'évolution Y avec un ouvert de Z.

Ce résultat est VALABLE DANS LES DEUX CAS (attractif ou répulsif, $\varepsilon = \pm 1$); l'image de Y sera désignée respectivement par Y^+ ou Y^- ; on a:

$$(5-19) \quad \begin{aligned} Y^+ &= \{ z \in Z / t' > 0 \} \\ Y^- &= \{ z \in Z / t' < 0 \} \end{aligned}$$

La vérification est élémentaire: il suffit de constater que le difféomorphisme réciproque de (5-18) est:

$$(5-20) \quad \left\{ \begin{array}{l} t := t \\ R := R \\ V := R'/t' \end{array} \right.$$

L'image par ce difféomorphisme (5-20) du champ de vecteur (5-8) se calcule immédiatement; on trouve

$$(5-21) \quad \delta_1(t, R, V) = (1, V, -R/r^3) r$$

Proposition:

(5-22) Les MOUVEMENTS sont les composantes connexes des intersections avec Y des orbites de l'action (5-6).

(bien entendu cet énoncé identifie l'espace d'évolution Y avec l'ouvert Y^+ ou Y^- qui résulte de (5-18,19)).

La comparaison de (5-21) avec les équations du mouvement (5-2) montre que chaque composante connexe de l'intersection d'une orbite avec Y est contenue dans un mouvement (voir la définition (4-3)).

La formule (5-10), qui s'écrit après l'identification

$$s = \langle V, R \rangle - ft$$

et la formule d'équivariance (5-12) montrent que tout mouvement est contenu dans une orbite.

CAS ATTRACTIF

L'espace des mouvements Y , ici Y^+ , a pour complément dans Z^+ l'ensemble

$$(5-23) \quad C = \left\{ z \in Z / t' = 0 \right\};$$

les formules (5-4) montrent que sur C on a aussi

$$(5-24) \quad \begin{cases} t'' = 0; t''' = 1 \\ R = R' = R'' = 0; \|R'''\| = 1 \end{cases}$$

et que par conséquent R'' appartient à la sphère S^2 . Plus précisément, l'application

$$(5-25) \quad \left[\begin{array}{l} (f, t, R'') \mapsto \\ z = \begin{pmatrix} f & t & 0 & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 & R'' & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right]$$

est un plongement propre du produit cartésien $\mathbb{R}^2 \times S^2$ dans Z , dont l'image est C ; d'où la proposition:

$$(5-26) \quad \left[\begin{array}{l} \text{L'ensemble } C \text{ est une sous-variété de } Z, \text{ de dimension } 4, \text{ difféomorphe à } \\ \mathbb{R}^2 \times S^2. \end{array} \right]$$

Orbites de collision

Etudions une orbite qui rencontre C ; soit z_0 un point d'intersection; d'après (5-25) on peut poser

$$z_0 = \begin{pmatrix} t_0 & 0 & 0 & 1 \\ f & & & \\ & 0 & 0 & R'_0 & 0 \end{pmatrix}$$

R'_0 étant un vecteur unitaire; la formule (1-26) donne toutes les composantes de $\lambda(u)(z_0)$, en particulier

$$t' = \gamma'(u);$$

on sait que

$$\gamma'(u) = 2 \gamma''(u/2)^2$$

(2-3); par conséquent les points d'intersection de l'orbite avec C (d'équation $t' = 0$) sont les zéros de $\gamma''(u/2)$; donc

$$(5-27) \quad \begin{cases} u=0 \text{ seul si } f \geq 0; \\ (2\pi/\sqrt{-f}) \mathbb{Z} \text{ si } f < 0. \end{cases}$$

Ces points séparent les mouvements contenus dans cette orbite, donnés grâce à (1-26) par

$$(5-28) \quad \begin{cases} t = t_0 + \gamma(u) \\ R = R'_0 \gamma'(u) \\ V = R'_0 \frac{\gamma''(u)}{\gamma'(u)} \end{cases}$$

γ étant croissante, il s'agit de mouvements SUCCESSIFS, visiblement rectilignes. Lorsque u tend vers zéro, la vitesse tend vers l'infini, il s'agit donc d'une chute sur le centre attractif se terminant par une collision. Le mouvement qui lui succède dans l'orbite est une réflexion sur ce centre (parce que γ est une fonction impaire); le point reste d'un même côté de 0 (parce que γ' est positive).

Théorème:

(5-29) La réunion des λ -orbites qui rencontrent C est une sous-variété connexe D^+ de dimension 5; son complémentaire est dense dans Z^+ .

Nous nous contentons d'indiquer quelques étapes de la démonstration, qui précisent le résultat:

Lemme:

(5-30) Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ parcouru par la variable

$$k = (f, t', t'')$$

l'équation

$$t''^2 - t'(2+ft') = 0$$

définit une sous-variété K , de dimension 2.

Proposition:

(5-31) La réunion D des orbites constituées de mouvements rectilignes est définie dans Z par l'équation:

$$L = R' \times R'' = 0$$

(cf. (2-5)); l'application

$$(t, k, E) \mapsto \begin{pmatrix} t & t' & t'' & 1+t'f \\ f & Et' & Et'' & E(1+t'f) \end{pmatrix}$$

est un plongement propre du produit cartésien $\mathbb{R} \times K \times S^2$ DANS Z , dont l'image est D , et dont la réciproque est

$$z \mapsto (t, f, t', t'', R'' - Rf).$$

Lemme:

(5-32) K possède deux composantes connexes, K^+ et K^- ; K^+ , définie par $t' \geq 0$, est difféomorphe au cylindre $\mathbb{R} \times S^1$; K^- , définie par $t' < 0$, est difféomorphe au plan $\mathbb{R}^2$.

Lemme:

(5-33) Soit

$$k = (f, t', t'') \in \mathbb{R}^3;$$

pour qu'il existe $u \in \mathbb{R}$ tel que

$$t' = \gamma'(u), \quad t'' = \gamma''(u)$$

(cf. (1-25)), il faut et il suffit que $k \in K^+$.

Proposition:

(5-34) L'intersection D^+ de Z^+ et D est une composante connexe de D , difféomorphe à

$$\mathbb{R}^2 \times S^1 \times S^2;$$

c'est la réunion des orbites qui rencontrent C .

Proposition:

(5-35) L'intersection du complémentaire de D^+ avec Y^+ est l'ensemble des triplets

$$y = (t, R, V)$$

pour lesquels R et V constituent un système libre; il est dense dans Y^+ et dans Z^+ (faire l'identification (5-18)).

(5-36) En d'autres termes, tout ouvert non vide de Y^+ contient un point z dont l'orbite ne rencontre pas C - et constitue donc un mouvement éternel (5-22).

Régularisation de l'espace des mouvements

Théorème:

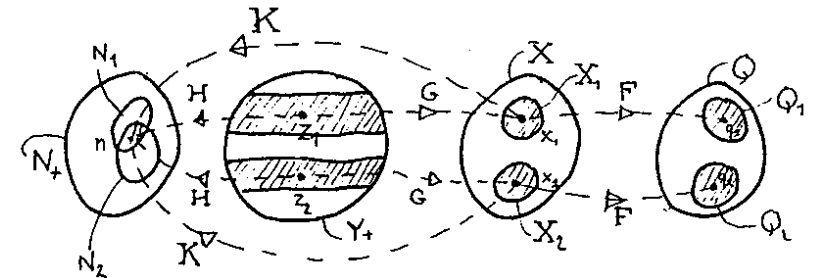
Soit X l'espace des mouvements dans le cas attractif; tout mouvement $x \in X$ est contenu dans une orbite du groupe (5-6,9), qui coupe la variété N^+ en un point $K(x)$.

Alors (X, K, N^+) est la REGULARISATION du problème, au sens (4-14).

Démonstration:

(Voir la figure 2). Désignons par G la submersion surjective de l'espace d'évolution Y sur l'espace des mouvements X (4-3 a,b); utilisons l'identification (5-18,19) de Y avec Y^+ ; désignons par H la submersion de Y^+ dans N^+ , induite de (5-14,17); puisque toute orbite contient un mouvement, donc une condition initiale, H est surjective.

Figure 2



Tout mouvement x est contenu dans une seule orbite de Z^+ , qui rencontre N^+ en un point n ; l'application $K: x \mapsto n$ donne une factorisation de H :

$$H = K \circ G;$$

puisque H et G sont des submersions surjectives, il en est de même de K , et par conséquent N^+ est une VARIÉTÉ QUOTIENT de X ; puisque N^+ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{17}$, elle est SÉPARÉE.

Soit maintenant

$$F: x \mapsto q$$

une application différentiable de X dans une variété séparée Q ; considérons deux mouvements x_1 et x_2 tels que $q_1 = F(x_1)$ et $q_2 = F(x_2)$ soient distincts.

G étant surjective, il existe z_1 et z_2 dans Y_+ tels que $x_1 = G(z_1)$, $x_2 = G(z_2)$.

D'après l'axiome de Hausdorff, il existe des voisinages ouverts disjoints Q_1 et Q_2 de q_1 et de q_2 ; leurs images réciproques par F sont des voisinages ouverts disjoints X_1 et X_2 de x_1 et de x_2 ; les nouvelles images réciproques par G , Z_1 et Z_2 , sont des voisinages ouverts de z_1 et z_2 dans Y_+ .

Supposons maintenant que $K(x_1) = K(x_2)$, et désignons ce point par n .

Toute submersion est une application ouverte; par conséquent les images N_1 et N_2 de Z_1 et Z_2 par H sont des ouverts de N_+ ; ils contiennent tous les deux n ; leur intersection est donc un ouvert non vide de N_+ ; l'image réciproque de cette intersection est un ouvert non vide de Y_+ , qui contient nécessairement un point z' appartenant au complémentaire de D (Cf. (5-29)), point dont l'orbite constitue un mouvement éternel x' (5-36); on a $G(z') = x'$, donc $K(x') = H(z')$; ce point n' appartient à $N_1 \cap N_2$.

Puisque $n' \in N_1$, et que N_1 est l'image de Z_1 par H , il existe $z'_1 \in Z_1$ tel que $H(z'_1) = n' = H(z')$; z'_1 appartient donc à la même orbite que z' , à savoir x' ; puisque x' est un mouvement, $G(z'_1) = x'$; puisque Z_1 est l'image réciproque de X_1 par G , $x' \in X_1$. De même, on voit que $x' \in X_2$; d'où contradiction, puisque X_1 et X_2 sont disjoints.

Ainsi l'hypothèse $K(x_1) = K(x_2)$ est incompatible avec $F(x_1) \neq F(x_2)$; par conséquent F se factorise en $L \circ K$, et le quotient N_+ de X constitue une REGULARISATION, au sens (3-4); N_+ est donc la VARIÉTÉ DE NEWTON cherchée (5-3).

C.Q.F.D.

Les MOUVEMENTS REGULARISES sont par définition les images réciproques par H des points de N_+ ; en dehors du cas trivial des mouvements éternels, ce sont des ensembles de mouvements qui appartiennent à une même orbite, et qui se succèdent donc, après chaque collision, par réflexion sur O selon la description (5-27, 28).

Enfin, puisque N_+ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{17}$, l'application H est une INTEGRATION GLOBALE du problème, au sens (4-14); toute autre intégrale première s'obtient par composition avec une fonction différentiable sur N_+ .

Plongement dans $\mathbb{R}^9$.

Considérons un point

$$(5-38) \quad z_0 = \begin{pmatrix} t_0, t'_0, t''_0, t'''_0 \\ f_0, R_0, R'_0, R''_0, R'''_0 \end{pmatrix}$$

de la variété de Newton N_+ , vérifiant donc les équations (5-5) et (5-13) de N , ainsi que la condition

$$(5-39) \quad t'_0 \geq 0$$

caractérisant N_+ .

On remarque que le système des équations de N peut se partager en deux groupes:

$$(5-40) \quad \begin{cases} R_0 = R'_0 t'_0 - R''_0 t''_0 \\ R'_0 = R'_0 f_0 \\ t'_0 = t_0 f_0 \\ t''_0 = t'_0 f_0 + 1 \end{cases}$$

et

$$(5-41) \quad \begin{cases} R_0^2 = t'_0 (2 + f_0 t'_0) \\ \langle R'_0, R'_0 \rangle = f_0 t_0 (1 + f_0 t'_0) \\ R_0'^2 = 1 + f_0^3 t_0^2 \end{cases}$$

il résulte de (5-40) que le mouvement régularisé est caractérisé par la seule variable

$$(5-42) \quad n_0 = (f_0, t_0, t'_0, R'_0, R''_0);$$

les résultats précédents peuvent donc se transcrire comme suit:

$$(5-43) \quad \begin{cases} \text{La variété de Newton possède un plongement propre dans l'espace numérique} \\ \mathbb{R}^9, \text{ obtenu par l'application } z \mapsto n; \text{ l'image est la sous-variété } N_+ \\ \text{définie par les équations (5-41, 39).} \end{cases}$$

Donnons de façon explicite l'intégration globale correspondante:

$y = (t, R, V)$ étant une condition initiale quelconque, le mouvement régularisé associé n_0 est obtenu par les formules (5-44, 45, 46):

$$(5-44) \quad \left\{ \begin{array}{l} t' = \sqrt{R^2} \\ t'' = \langle R, V \rangle \\ f = V^2 - 2/t' \\ s = t'' - ft' \\ t''' = 1 + ft' \\ R' = V t' \\ R'' = V t'' - R/t' \end{array} \right.$$

$$(5-45) \quad \gamma(s) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sinh(s\sqrt{f}) - s\sqrt{f}}{f\sqrt{f}} \text{ pour } f > 0, \\ s^3/6 \text{ pour } f = 0, \\ \frac{s\sqrt{-f} - \sin(s\sqrt{-f})}{-f\sqrt{-f}} \text{ pour } f < 0. \end{array} \right.$$

$$(5-46) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_* = f \\ t_* = t'''[t - \gamma] - t''[t' - \gamma'] \\ t'_* = t' - t'' \gamma'' + t''' \gamma' \\ R'_* = R' \gamma''' - R'' \gamma'' \\ R''_* = R'' \gamma''' - R' f \gamma'' \end{array} \right.$$

- n_+ vérifie automatiquement les équations (5-41, 39) de N_+ ;
- toute intégrale première globale est fonction différentiable de n_+ .

Réciproquement, chaque mouvement s'obtient en fonction de $n_+ \in N_+$ et d'un paramètre s par les formules:

$$(5-47) \quad \left\{ \begin{array}{l} t = \gamma(s) + t_* \gamma'''(s) + t'_* \gamma''(s) \\ R = R'_* [\gamma''(s) + f_* t_*] + R''_* [\gamma'(s) - t'_*] \\ V = \frac{R'_* \gamma'''(s) + R''_* \gamma''(s)}{\|R\|} \end{array} \right.$$

Les éphémérides s'obtiennent en choisissant t et en résolvant en s la première de ces équations (Cf. 2-13).

CAS REPULSIF

Ce cas est beaucoup plus simple: il n'y a pas de collisions, tous les mouvements sont éternels, la variété des mouvements X est séparée, on obtient une intégration globale grâce à l'espace de phases (voir (4-13)).

Cependant on peut remarquer que l'espace d'évolution s'identifie à Y_- , et que l'application H de Y_- sur N_- constitue une autre intégration globale; N_- est donc difféomorphe à l'espace de phases (voir (4-15)).

On peut aussi utiliser le plongement dans R^9 , simplement en changeant la première des formules (5-44) en $t' = -\|R\|$; le point n_+ ainsi obtenu appartient à la variété N définie par les équations (5-41), et plus précisément à la seconde composante connexe caractérisée par:

$$(5-48) \quad t' < 0$$

(voir (5-16)).

§6: GROUPE VIRIEL

Le problème des n corps possède une symétrie particulière - qui est à l'origine du "théorème du viriel": on peut donc appeler "groupe viriel" le groupe correspondant. Dans le cas du problème de Newton il engendre, avec les symétries définies au §5, une action sur Z du groupe affine réel.

On vérifie immédiatement que les équations du mouvement (5-2) sont invariantes par les substitutions:

$$(6-1) \quad (t, R, r, V) \mapsto (ta^3, Ra^2, ra^2, Va^{-1}) \quad (a \neq 0);$$

plus précisément, ces formules définissent une action du groupe multiplicatif $\mathbb{R}^*$ sur l'espace d'évolution Y ; action telle que l'image d'un mouvement soit un mouvement.

Utilisons l'identification (5-18) de Y avec une partie de la variété Z ; alors la substitution (6-1) s'écrit

$$(6-2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{cccc} t & t' & t'' & t''' \\ R & R' & R'' & R''' \end{array} \right) \mapsto \\ \left(\begin{array}{cccc} ta^3 & t'a^2 & t''a & t''' \\ fa^{-2} & Ra^2 & R'a & R'' \\ & & R'' & R'''a^{-1} \end{array} \right) \end{array} \right.$$

Il est commode de poser

$$(6-3) \quad K(a) = \begin{pmatrix} a^3 & & & \\ & a^2 & & \\ & & a & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$(6-4) \quad L(a) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & a & & \\ & & a & \\ & & & a \end{pmatrix}$$

ce qui définit deux morphismes K et L du groupe $\mathbb{R}^*$ dans le groupe linéaire $GL(4, \mathbb{R})$; ceci permet d'écrire la substitution (6-2) sous la forme

$$(6-5) \quad \mu(a)(f, M) = (fa^{-2}, L(a)^{-1} M K(a))$$

écrite sous cette forme, l'action de $\mathbb{R}^*$ se trouve évidemment prolongée par une action μ sur les variétés Z , Z^+ , Z^- ; nous appellerons GROUPE VIRIEL ce groupe

de difféomorphismes.

La formule (6-2) donne, par dérivation, le générateur du groupe viriel; c'est le champ de vecteurs

$$(6-6) \quad z \mapsto \delta_z = \begin{pmatrix} -2f & 3t & 2t' & t'' & 0 \\ & 2R & R' & 0 & -R''' \end{pmatrix}$$

Remarquons que la fonction s (5-10) vérifie

$$(6-7) \quad s(\mu(a)(z)) = a s(z)$$

et que la substitution correspondante sur la matrice A (1-14) peut s'écrire:

$$(6-8) \quad A \mapsto K(a^{-1}) a^{-1} A K(a)$$

Une propriété classique de l'exponentielle fournit la formule

$$(6-9) \quad \exp(u K(a^{-1}) a^{-1} A K(a)) = K(a^{-1}) \exp(ua^{-1} A) K(a)$$

Le lecteur pourra rattacher à ces formules (6-8,9) la propriété de la fonction γ et de ses trois premières dérivées qui a été constatée au §1, à savoir que ce sont des fonctions entières de u et $u^2 f$.

On tire immédiatement de (6-9):

$$(6-10) \quad \mu(a) \circ \lambda(u) = \lambda(au) \circ \mu(a)$$

formule qui relie les actions (6-5) et (5-6).

Cette relation montre que le groupe viriel permute, non seulement les mouvements, mais aussi les orbites; donc qu'il agit, non seulement sur la variété X des mouvements, mais aussi sur sa régularisée, la variété de Newton N .

En fait l'action sur N peut se définir de deux façons: comme quotient d'une part; d'autre part parce que le plongement de N comme sous-variété de Z est stable pour l'action (voir (5-13) et (6-6)). Il se trouve que ces deux définitions coïncident; ceci résulte de la propriété de commutation

$$(6-11) \quad \mu(a) \circ \pi = \pi \circ \mu(a)$$

où π désigne la projection définie en (5-14); cette formule est une conséquence de (6-6) et (6-9).

Autre conséquence de (6-10): les actions λ et μ engendrent un produit semi-direct; on peut le considérer comme l'action du groupe des matrices réelles

$$(6-12) \quad g = \begin{pmatrix} a & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (a \neq 0)$$

définie par

$$(6-13) \quad \gamma(g) = \lambda(u) \circ \mu(a)$$

ce groupe est isomorphe au groupe affine réel, ainsi qu'en témoigne la substitution subie par la variable s :

$$(6-14) \quad s \mapsto as + u$$

obtenue par composition de (6-6) et (5-12).

§7: STRUCTURE SYMPLECTIQUE

On suppose ici connues les règles essentielles de calcul relatives aux formes différentielles. La forme symplectique "naturelle" qui existe sur l'espace des mouvements I possède un potentiel - dû à l'existence du groupe viriel. Il se trouve que cette forme et ce potentiel s'étendent à la variété prolongée Z ; il en résulte que la structure symplectique de I passe sur la régularisée M .

Revenons au cas d'un point matériel de masse m , soumis à une force F (voir (4-1)).

On peut définir une 2-FORME σ de l'espace des mouvements, en considérant deux vecteurs tangents quelconques δy et $\delta' y$ (notation (4-4)), et en posant

$$(7-1) \quad \sigma(\delta y)(\delta' y) = \langle \delta V - F \delta t, \delta' R - V \delta' t \rangle - \langle \delta' V - F \delta' t, \delta R - V \delta t \rangle$$

Il est clair que les équations du mouvement peuvent s'écrire:

$$(7-2) \quad \delta y \text{ tangent au mouvement} \iff \sigma(\delta y)(\delta' y) = 0 \quad \forall \delta' y$$

ce qui s'énonce aussi:

$$\sigma(\delta y) = 0$$

ou

$$\delta y \in \ker(\sigma);$$

cette formulation est une extension du "principe des travaux virtuels" de d'Alembert (où l'on se contente de choisir $\delta' V = 0$, $\delta' t = 0$).

Nous appelons "principe de Maxwell" la condition

$$(7-3) \quad \boxed{\nabla \sigma = 0},$$

où ∇ désigne l'opération de DERIVATION EXTERIEURE des formes; cette condition est réalisée si la force F est indépendante de la vitesse et dérive d'un potentiel - comme dans le cas du problème de Newton. Cette propriété (7-3) et la condition

$$(7-4) \quad \text{rang}(\sigma) = \text{cte}$$

sont alors vérifiées sur l'espace d'évolution Y : on dit que Y est une variété PRESYMPLECTIQUE.

Il résulte de (7-3) que la forme σ passe sur l'espace des mouvements X par la formule

$$(7-5) \quad \sigma_X(\delta x)(\delta' x) = \sigma_Y(\delta y)(\delta' y)$$

(notation (4-4)), qui exprime que σ est un INVARIANT INTEGRAL ABSOLU, au sens d'Elie Cartan; ce résultat a été établi primitivement par Lagrange.

Cette définition (7-5) de σ_X fait de X une variété SYMPLECTIQUE, c'est-à-dire présymplectique (7-3,4), la condition (7-4) étant renforcée en:

$$(7-6) \quad \text{rang}(\sigma_X) = \dim(X)$$

qui s'écrit aussi:

$$(7-7) \quad \ker(\sigma_X) = 0$$

un théorème classique d'algèbre montre que (7-6) n'est possible que si la dimension de X est paire (ici elle vaut 6).

Limitons nous désormais au cas de Newton, où:

$$(7-8) \quad \sigma(\delta y)(\delta' y) = \langle \delta V + R/r^3 \delta t, \delta' R - V \delta' t \rangle - \langle \delta' V + R/r^3 \delta' t, \delta R - V \delta t \rangle.$$

Il est clair que l'action (6-1) du groupe viriel se traduit par la substitution

$$(7-9) \quad \sigma \mapsto a\sigma;$$

ce groupe est donc constitué de SIMILITUDES SYMPLECTIQUES. Cette formule a une traduction infinitésimale:

$$(7-10) \quad [\delta_2]_L \sigma = \sigma,$$

où la notation $[\delta_2]_L$ désigne la DERIVÉE DE LIE associée au champ de vecteurs $\delta_2 y$, générateur du groupe viriel, calculé en (6-6).

Considérons maintenant la 1-forme:

$$(7-11) \quad \boxed{\omega = \sigma(\delta_2 y)} \quad (\delta_2 y = \text{vecteur (6-6)})$$

dont l'expression explicite se déduit de (6-6) et (7-1):

$$(7-12) \quad \omega(\delta y) = \langle 3Rt/r^3 - V, \delta R \rangle + \langle 3Vt - 2R, \delta V \rangle + f \delta t \quad \forall \delta y$$

et que quelques transformations ramènent à:

$$(7-13) \quad \boxed{\omega(\delta y) = \frac{1}{2} t \delta f - \langle R, \delta V \rangle - \delta s}$$

s étant la variable définie en (1-3).

On déduit aisément de (7-10) la formule

$$(7-14) \quad \boxed{\sigma = \nabla \omega},$$

qui signifie que ω est un POTENTIEL de la forme (pré)symplectique σ .

Utilisons maintenant l'identification de l'espace des mouvements Y avec un ouvert de la variété Z (5-18); grâce à l'identité:

$$(7-15) \quad \langle R, \delta V \rangle = \langle R', \delta R'' \rangle - t''' \delta t'' - \frac{t' t''}{2} \delta f$$

(7-13) s'écrit

$$(7-16) \quad \omega(\delta y) = \frac{1}{2} (t + t' t'') \delta f + t''' \delta t'' - \langle R', \delta R'' \rangle - \delta s$$

formule qui montre que ω se prolonge par une 1-forme ω_2 différentiable SUR LA VARIÉTÉ Z TOUTE ENTIÈRE, sans singularité sur la variété C des collisions. Un tel prolongement est évidemment UNIQUE, puisque le complémentaire de C est dense. Bien entendu l'opération de dérivation extérieure permet d'en déduire l'unique

prolongement différentiable σ_2 de σ : $\sigma_2 = \nabla \omega_2$.

On obtient immédiatement - par prolongement - l'action finie et infinitésimale du groupe viriel:

$$(7-17) \quad \omega_2 \mapsto a \omega_2; \quad \sigma_2 \mapsto a \sigma_2;$$

$$(7-18) \quad [\delta_2]_L \omega_2 = \omega_2; \quad [\delta_2]_L \sigma_2 = \sigma_2;$$

De même, les formules

$$(7-19) \quad \omega(\delta_1 y) = 0, \quad \sigma(\delta_1 y) = 0$$

où δ_1 est le générateur (5-21) de l'action λ (5-6), sont évidentes sur (7-1) et (7-13), et se prolongent sur Z. Il en résulte que ω_2 et σ_2 sont REDUCTIBLES A LA VARIÉTÉ DE NEWTON N :

$$(7-20) \quad \boxed{\omega_2(\delta z) = \omega_N(\delta n), \quad \sigma_2(\delta z)(\delta' z) = \sigma_N(\delta n)(\delta' n)}$$

où $z \mapsto n$ est la projection (5-14) de Z sur la sous-variété N, et où ω_N et σ_N sont les formes induites sur N par ω_2 et σ_2 .

En remarquant que tout point de N est la projection d'un point du complémentaire de C, donc de l'espace d'évolution, et que la forme σ de cet espace d'évolution induit une structure symplectique sur l'espace des mouvements, on constate donc que:

$$(7-21) \quad \left[\begin{array}{l} \text{La forme } \sigma_N \text{ induite de } \sigma_2 \text{ sur la variété de Newton } N, \text{ lui donne une} \\ \text{structure symplectique, qui admet le potentiel } \omega_N; \text{ la forme symplectique} \\ \text{de l'espace des mouvements (7-5) est l'image réciproque de } \sigma_N \text{ par la} \\ \text{régularisation } K: x \mapsto n \text{ (Fig. 1 et 2).} \end{array} \right.$$

§8: FLOT HAMILTONIEN.

Le flot hamiltonien peut se définir comme l'action des translations temporelles sur les mouvements. Nous construisons la VARIÉTÉ DE BOUR B, quotient de la variété de Newton par ce flot hamiltonien; B est une variété de dimension 5 qui se laisse plonger dans $\mathbb{R}^7$. B possède naturellement une structure cosymplectique (ou structure de Foisson), caractérisée par un feuilletage symplectique de dimension 4.

Soit $y = (t, R, V)$ une condition initiale; v un intervalle de temps arbitraire. Alors

(8-1)

$$\eta(v)(t, R, V) = (t+v, R, V)$$

est encore une condition initiale, retardée de la précédente; on a ainsi défini une action η du groupe $\mathbb{R}$ sur l'espace d'évolution Y . Il est clair que cette action passe à l'espace des mouvements X ; la formule (7-8) montre que les difféomorphismes $\eta(v)$ conservent la 2-forme présymplectique σ , et sont donc des symplectomorphismes de X comme de Y .

Le générateur infinitésimal de cette action est le vecteur δ_3 :

(8-2)

$$\delta_3(t, R, V) = (1, 0, 0);$$

la définition (7-8) de σ donne aussi:

(8-3)

$$\sigma(\delta_3, \gamma)(\delta' \gamma) = \frac{1}{2} \delta' f \quad \forall \delta'$$

d'où

(8-4)

$$\delta_3 x = \sigma_X^{-1}(\nabla f/2)$$

$f/2$ est l'énergie, fonction "hamiltonienne" sur l'espace des mouvements; à cause de cette formule, l'action η s'appelle "flot hamiltonien".

En utilisant l'identification de Y avec un ouvert de la variété Z (§5), on constate que le flot hamiltonien fini ou infinitésimal se prolonge d'une seule façon à Z :

(8-5)

$$\eta(v) \begin{pmatrix} t & t' & t'' & t''' \\ R & R' & R'' & R''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+v & t' & t'' & t''' \\ R & R' & R'' & R''' \end{pmatrix}$$

(8-6)

$$\delta_3 \begin{pmatrix} t & t' & t'' & t''' \\ R & R' & R'' & R''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

grâce aux formules (1-9, 12), cette formule peut se "linéariser" sous la forme:

(8-7)

$$\delta_3 f = 0, \quad \delta_3 M = M B$$

en posant

(8-8)

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui permet d'écrire linéairement le flot fini:

(8-9)

$$\eta(v)(f, M) = (f, M \exp(Bv));$$

on remarque que

(8-10)

$$B = A^3 - Af$$

A désignant la matrice (1-14), solution de $A^4 - fA^2 = 0$ (1-21); d'où:

(8-11)

$$B^2 = 0, \quad B A = A B = 0;$$

plus précisément, les Bv sont les éléments nilpotents de l'algèbre engendrée par A ; algèbre évidemment commutative. On définit donc une action du groupe commutatif $\mathbb{R}^2$ sur Z par

(8-12)

$$(u, v) \mapsto [(f, M) \mapsto (f, M \exp(Au + Bv))]$$

On peut aussi choisir comme base de cette action le couple (A, A^3) (voir (8-10)); sur la variété de Newton, identifiée à une section $s = \text{Cte}$ de Z , le flot hamiltonien s'écrit:

(8-13)

$$\eta(v)(f, M) = (f, M \exp(A^3 v))$$

(ceci parce que ces transformations conservent la variable s); explicitement, on a

(8-14)

$$\exp(A^3 v) = [1 + Bv] \exp(Afv),$$

$\exp(Afv)$ étant connue par les formules (1-22, 26).

Théorème:

On se place dans le cas attractif.

Le quotient B de la variété de Newton par le flot hamiltonien est une variété de dimension 5 que nous appellerons VARIÉTÉ DE BOHR; elle possède un plongement propre dans R^7 défini par l'application

$$(8-15) \quad n \mapsto b := (f, E, L)$$

E étant le vecteur de Lenz (1-28), L le moment angulaire (2-5).

L'image est la sous-variété de R^7 définie par les équations

$\langle E, L \rangle = 0$	$E^2 = 1 + f L^2$
----------------------------	-------------------

Démonstration:

Posons

$$(a) \quad b := (f, E, L) \in R^7$$

et

$$(b) \quad F(b) := \langle L, E \rangle, E^2 - f L^2$$

Le calcul du rang la dérivée $D(F)(b)$ montre que l'ensemble $B = \{b; F(b) = 0\}$ est une sous-variété de dimension 5.

Soit $n = (f, t, t', R', R'')$ un point de N (notation (5-42)), donc solution des équations (5-41):

$$(b) \quad R'^2 = t'(2 + ft'); \quad \langle R', R'' \rangle = ft'(1 + ft'); \quad R''^2 = 1 + f^3 t^2.$$

Nous savons que l'application P définie sur N par:

$$(c) \quad P(n) := (f, R''(1 + ft') - R'f^2 t, R' \times R'')$$

envoie chaque orbite du flot hamiltonien sur un seul point de B (voir 1-28, 2-5, 5-18).

En utilisant les formules (8-13,14), et en traitant successivement les cas $f > 0$, $f = 0$, $f < 0$, on vérifie qu'il existe sur l'orbite de tout mouvement régularisé n un point n^* vérifiant les conditions suivantes:

$$(d) \quad t^* = 0, 1 + ft^* \geq 0$$

(elles signifient que n^* présente un PERIHELIE à la date 0); en calculant $b = P(n^*)$ par la formule (c), et en supposant $E \neq 0$, on constate que:

$$(e) \quad t^* = \frac{RL^2}{1 + fEL}; \quad R'^* = \frac{EL}{fEL}; \quad R''^* = \frac{E}{fEL},$$

ce qui montre que l'orbite de tout mouvement non circulaire n est caractérisée par sa projection $P(n)$; un calcul direct établit le même résultat si $E = 0$: donc $(N, P, P(N))$ définit le quotient de N par le flot hamiltonien.

Soit $b \in B$; si $E \neq 0$, si on définit t^*, R'^*, R''^* par (e), on constate que le point

$$(f) \quad n^* = (f, 0, t^*, R'^*, R''^*)$$

appartient à N , et que $P(n^*) = b$; dans le cas $E = 0$, on obtient n^* vérifiant les mêmes conditions en choisissant U unitaire perpendiculaire à L et en prenant

$$(g) \quad n^* = (f, 0, RL^2, U \times L, U);$$

par conséquent P est surjective.

Il reste à montrer que l'application différentiable P est une submersion; c'est-à-dire que la dimension du noyau de $D(P)(n)$ est égale à 1 pour tout n . En remarquant que $\eta(v)$ est un difféomorphisme de N et que $P \circ \eta(v) = P$, on voit qu'il suffit de le vérifier en un point de chaque orbite; on peut donc supposer (d); la vérification est simple (en traitant séparément le cas circulaire).

C.F.I.

Commentaires:

(8-16) B est aussi le quotient de la variété Z par le groupe de dimension 2 défini en (8-12); on peut intervertir l'ordre des quotients - ce qui conduit à interpréter B comme ensemble des trajectoires dans l'espace des phases.

La définition (8-15) ci dessus (ensemble des mouvements NON DATÉS) se rapproche davantage de la notion d'état stationnaire que Bohr a proposée en 1913.

(8-17) Ce théorème (8-15) indique qu'il s'agit d'un système dynamique exceptionnel; on rencontre généralement la situation suivante: le quotient B de l'espace des mouvements X d'un système dynamique par le flot hamiltonien N'EST PAS UNE VARIÉTÉ (voir la définition (3-2)); les quotients de B qui sont des variétés (en tant que quotients de X) sont eux-mêmes subordonnés à la fonction hamiltonienne: on dit que le système est ERGODIQUE.

Dans un cas ergodique, les seules intégrales premières invariantes par le flot sont

les fonctions de l'hamiltonien; ici ce sont toutes les fonctions différentiables de (f, E, L) .

(8-18) Nous avons constaté que la variété de Newton, privée de l'ensemble des mouvements circulaires, possédait une section au dessus de B (formule 8-15f); nous verrons au §9 qu'elle ne possède pas de section continue globale.

STRUCTURE COSYMPLECTIQUE DE LA VARIÉTÉ DE BOHR.

(8-19) B , variété quotient de la variété symplectique N par un groupe de symplectomorphismes, possède une STRUCTURE DE POISSON (dite aussi "cosymplectique"; voir Weinstein 1982). Cette structure est définie par un 2-tenseur antisymétrique contravariant, image de σ_X^{-1} par la projection P .

On peut aussi caractériser cette structure par un FEUILLETAGE SYMPLECTIQUE: les feuilles (de dimension 4) sont les sous-variétés de B définies par les équations

$$f = \text{Cte},$$

que nous noterons B_f ; leur structure symplectique est définie par la 2-forme σ_f :

$$(8-20) \quad \sigma_f(\delta b)(\delta' b) = \sigma_N(\delta n)(\delta' n) \quad \text{si} \quad \delta f = \delta' f = 0.$$

(8-21) Dans le cas $f \geq 0$, B_f est symplectomorphe au cotangent d'une sphère S^2 ; sphère parcourue par $R''^{\frac{1}{2}}$, le (co)vecteur tangent associé étant $R'^{\frac{1}{2}}$ (8-15e); la section nulle de ce cotangent correspond aux mouvements avec collisions. Le cas $f < 0$ sera traité au §9.

§9: VARIÉTÉ DE KEPLER

(9-1) Plaçons-nous dans le cas attractif, et considérons, dans la variété de Newton N , l'ouvert K défini par $f < 0$.

K est l'ensemble des mouvements régularisés à énergie négative; ces mouvements sont caractérisés par le fait d'être bornés dans l'espace (il résulte de (1-2) que $r \leq -2/f$); ce sont les mouvements elliptiques (solutions des trois lois de Kepler) ou rectilignes bornés; ce sont aussi les mouvements périodiques, leur période étant égale à

$$2\pi(-f)^{-3/2},$$

K est une variété de dimension 6 (cf. (3-3)), munie d'une forme symplectique σ et d'un potentiel $\mathcal{W}$ induits de ceux de N ; nous allons rappeler quelques propriétés de cette "VARIÉTÉ DE KEPLER".

Structure fibrée.

Considérons un mouvement régularisé

$$(9-2) \quad n = \begin{pmatrix} t & t' & t'' & t''' \\ f & R & R' & R'' \end{pmatrix}$$

avec $s := t'' - ft = 0$ (cf. (5-46) et (5-40)), appartenant à K .

Puisque f est négatif, on peut associer à n les variables:

$$(9-3) \quad \alpha = \sqrt{-f}$$

$$(9-4) \quad Q = \begin{pmatrix} R'' \\ t'' \alpha \end{pmatrix}$$

$$(9-5) \quad P = \begin{pmatrix} R''' / \alpha \\ t''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R' \alpha \\ t''' \end{pmatrix}$$

il résulte des identités (2-4) que

$$(9-6) \quad \begin{matrix} \bar{P}P = \bar{Q}Q = 1 & \bar{P}Q = 0 \end{matrix}$$

en désignant par $\bar{P}$ et $\bar{Q}$ les lignes transposées des colonnes P et Q ; (9-6) signifie que P et Q constituent une base orthonormée d'un sous-espace de dimension 2 dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^4$.

Une simple vérification montre que

$$(9-7) \quad \mathcal{W}_K(\delta z) = \pi \delta Q$$

avec

$$(9-8) \quad \pi = \bar{P}/\alpha$$

et que l'application

$$(9-9) \quad z \mapsto (\pi, Q)$$

est un plongement de K dans $\mathbb{R}^{4*} \times \mathbb{R}^4$; l'image est la variété définie par les équations

$$(9-10) \quad \bar{Q}Q = 1; \quad \pi Q = 0; \quad \pi \neq 0;$$

variété qui peut être considérée comme le fibré cotangent à la sphère S^3 - privé de sa section nulle; à ce titre elle possède une structure symplectique canonique, définie précisément par le potentiel (9-7); ce fibré est donc SYMPLECTOMORPHE A LA VARIÉTÉ DE KEPLER.

(9-11) S^3 étant une variété de groupe, ce fibré est trivial; par conséquent la variété de Kepler est difféomorphe à:

$$S^3 \times \mathbb{R}^{3*}$$

ou encore à:

$$S^3 \times S^2 \times \mathbb{R},$$

donc simplement connexe.

(9-12) Tout groupe de difféomorphismes d'une variété se relève canoniquement par un groupe de symplectomorphismes de son cotangent; par conséquent le groupe $SO(4)$ des isométries de S^3 , qui prolonge le groupe $SO(3)$ des rotations autour du centre attractif O , agit par symplectomorphismes sur K ; de même le groupe $O(4,1)$ des transformations anallagmatiques de S^3 .

Structure d'orbite coadjointe.

Les égalités (9-6) montrent que la matrice 6×6 :

$$(9-13) \quad \zeta = \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} \bar{Q}\bar{P}-\bar{P}\bar{Q} & P & Q \\ \bar{P} & 0 & 1 \\ \bar{Q} & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

vérifie

$$(9-14) \quad \zeta^2 = 0;$$

plus précisément, on peut établir le résultat suivant:

Considérons un espace euclidien hyperbolique E de signature $(+ + + - -)$.

a) Le groupe de Lie $O(E) = O(4,2)$ possède une orbite adjointe Ω constituée des $Z \in L(E)$ qui sont antisymétriques pour la structure euclidienne de E et qui vérifient

$$Z^2 = 0, Z \neq 0;$$

cette orbite est un cône:

$$(Z \in \Omega, a \in \mathbb{R}^*) \mapsto (aZ \in \Omega);$$

et possède deux composantes connexes opposées.

(9-15) b) Choisissons une base orthonormale de E ; la matrice ζ (9-13) représente dans cette base un élément Z de Ω ; plus précisément l'application linéaire

$$\zeta \mapsto Z$$

ainsi définie est un difféomorphisme de la variété de Kepler sur l'une des deux composantes de Ω .

c) L'algèbre de Lie de $O(4,2)$ s'identifie canoniquement à son espace dual par le tenseur g :

$$g(Z, Z') = -\frac{1}{2} \text{Tr}(ZZ')$$

proportionnel au tenseur de Killing; la structure symplectique de la variété de Kepler s'identifie alors à la structure symplectique canonique définie sur toute orbite coadjointe (orbites de Kirillov et al.).

Ainsi la composante connexe de $O(4,2)$, que l'on appelle parfois "groupe conforme", agit par symplectomorphismes sur la variété de Kepler; cette action s'obtient explicitement par la formule

$$(9-16) \quad \rho(g)(\zeta) = g \zeta g^{-1}$$

où ζ désigne la matrice (9-13, 19) et où g est la matrice représentative dans la base orthonormale d'un élément du groupe conforme.

(9-17) Les actions de $O(4,1)$, de $SO(4)$ et de $SO(3)$ indiquées plus haut s'obtiennent en prenant g dans des sous-groupes évidents. En particulier les g qui conservent l'énergie constituent un sous-groupe $SO(4) \times SO(2)$, compact maximal dans le groupe conforme.

(9-18) Si on choisit un nombre $a > 0$, l'action (6-2) du groupe viriel conserve K et coïncide avec l'action (9-15, a) qui caractérise la structure conique de Ω .

En remplaçant les variables P et Q par leurs définitions (9-4,5), l'expression (9-13) de la matrice $\hat{Z}$ se développe en

$$(9-19) \quad \hat{Z} = \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} -\alpha_j(L) & E & -R'\alpha & R'' \\ -\bar{E} & 0 & t'' & t''\alpha \\ -R'\alpha & t'' & 0 & 1 \\ R'' & t''\alpha & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

où la notation $j(L)$ désigne la matrice 3×3 du produit vectoriel par le moment angulaire L :

$$(9-20) \quad j(L)(q) = L \times q \quad \forall q \in \mathbb{R}^3$$

le lecteur pourra constater que le développement de l'équation (9-14): $\hat{Z}^2 = 0$ contient un certain nombre d'identités remarquables.

Projection sur la variété de Bohr.

Avec les variables utilisées ici, on obtient le générateur infinitésimal du flot hamiltonien par

$$(9-21) \quad \delta_3(f, M) = (0, M\alpha^3)$$

(voir (8-13)); d'où:

$$(9-22) \quad \delta_3(\alpha, P, Q) = (0, Q\alpha^3, -P\alpha^3)$$

qui montre que le repère orthonormal (P, Q) tourne dans son plan avec la vitesse angulaire constante α^3 ; on retrouve ainsi la période keplerienne $2\pi/\alpha^3$.

(9-23) Ceci montre que la variété de Kepler K est un fibré en cercles au dessus de l'ouvert $f < 0$ de la variété de Bohr B ; puisque K est simplement connexe, il n'existe pas de section de ce fibré; donc a fortiori pas de section de N au dessus de B (voir 8-18).

Cherchons maintenant la structure symplectique des variétés B_f à énergie négative. $f = -\alpha^2$ étant choisi, chaque point de B_f peut évidemment se repérer par la matrice 4×4 :

$$(9-24) \quad \beta = Q\bar{P} - P\bar{Q}$$

qui s'écrit aussi:

$$(9-25) \quad \beta = \begin{pmatrix} -\alpha_j(L) & E \\ -\bar{E} & 0 \end{pmatrix}$$

Compte tenu des relations d'orthonormalité (9-6), on constate sur (9-24) que

$$\text{Tr}(\delta\beta \beta \delta'\beta) = \delta\bar{P} \delta'Q - \delta\bar{Q} \delta'P$$

d'où, par comparaison avec (9-7,8), la structure symplectique de B_f :

$$(9-26) \quad \sigma(\delta b, \delta' b) = \frac{1}{\alpha} \text{Tr}(\delta\beta \beta \delta'\beta).$$

La matrice β appartient à l'algèbre de Lie du groupe $SO(4)$; or celle-ci se décompose canoniquement en somme directe ("quaternions gauches" + "quaternions droits"); la décomposition de β peut s'écrire:

$$(9-27) \quad \beta = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} j(I) & I \\ -\bar{I} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -j(J) & J \\ -\bar{J} & 0 \end{pmatrix} \right]$$

avec

$$(9-28) \quad I := E - \alpha L \quad J := E + \alpha L$$

Les équations (8-15) de B se transforment en

$$(9-29) \quad \|I\| = \|J\| = 1$$

ce qui montre que B_f est difféomorphe au produit cartésien $S^2 \times S^2$; grâce à la décomposition (9-27) la structure symplectique (9-26) vient:

$$(9-30) \quad \sigma(\delta b, \delta' b) = \frac{1}{2\alpha} \left[\sigma_*(\delta I, \delta' I) + \sigma_*(\delta J, \delta' J) \right]$$

σ_* désignant la structure symplectique canonique de S^2 :

$$(9-31) \quad \sigma_*(\delta I, \delta' I) := \langle I, \delta I \times \delta' I \rangle$$

c'est-à-dire l'élément d'aire après orientation.

Ainsi, au facteur près $1/(2\alpha)$, B est SYMPLECTOMORPHE au produit cartésien de deux sphères S^2 (Souriau 1969).

Polarisation.

(9-32) Il est clair que les équations

$$Q = \text{Cte}$$

définissent un feuilletage de dimension 3 de la variété de Kepler, sur les feuilles duquel la forme symplectique s'annule (Parce que ω s'y annule; voir (9-7)); c'est ce qu'on appelle une POLARISATION.

Il est facile de calculer sur la variété de Newton toute entière le prolongement analytique réel de cette polarisation: il est défini par l'équation

$$(9-32) \quad R'' = \text{Cte}$$

et on constate qu'il constitue encore une polarisation - à condition de priver N des points tels que

$$(9-33) \quad t=0 \text{ et } f=0$$

c'est-à-dire des mouvements paraboliques passant au périhélie à la date 0 - et des mouvements régularisés rectilignes contigus. Ces mouvements constituent une sous-variété symplectique de N , de dimension 4, symplectomorphe au cotangent de la sphère S^2 (parcourue par la variable R''). Nous ignorons si N possède une polarisation globale (réelle ou complexe).

Le fonds du puits.

(9-33) La variété de Kepler possède un prolongement symplectique évident, à savoir le cotangent complet de la sphère S^3 ; sa structure de variété symplectique est définie par les équations (9-7,10) dans lesquelles on supprime la condition $\pi \neq 0$.

On raccorde ainsi K avec une variété difféomorphe à S^3 , dont les éléments sont des "limites de mouvements", que l'on peut s'amuser à décrire en tant que tels: le mobile est tombé sur le centre attractif; son énergie vaut $-\infty$; il décrit un mouvement képlerien sur une ellipse ponctuelle, avec une fréquence infinie; le moment angulaire L est nul, le vecteur de Lenz E indéterminé; etc.

Bien entendu ce prolongement s'applique aussi bien à la variété de Newton N ; la variété S^3 raccordée à N admettant K comme voisinage.

§10: PREQUANTIFICATION

La quantification géométrique d'un système dynamique repose sur la notion de VARIÉTÉ QUANTIQUE - une variété Σ munie d'une 1-forme ω . Certains axiomes sont postulés, en vertu desquels Σ est un fibré en cercles au dessus d'une variété symplectique - variété qui doit s'identifier à l'espace des mouvements du système.

Cet espace des mouvements doit nécessairement être séparé; on choisit donc ici la variété N des mouvements RÉGULARISÉS. Le problème de la préquantification a ici une solution essentiellement unique; nous construisons Σ et montrons que la variété Z de §5 constitue son revêtement universel.

Unicité.

(10-1) Dans cette construction appelée "préquantification", on suppose les unités choisies de sorte que la constante de Planck réduite $\hbar$ soit égale à 1; ceci peut s'obtenir en choisissant l'unité de masse - les unités de longueur et de temps ayant déjà été supposées adaptées (1-1).

Il n'est pas nécessaire de développer ici les axiomes de la théorie; d'après des théorèmes généraux, on sait en effet que:

$$(10-2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{le problème a une solution dès qu'il existe un potentiel } \omega \text{ de la forme} \\ \text{symplectique; dans cette solution la variété quantique est le produit direct:} \\ \Sigma = N \times U(1) \\ \text{muni de la 1-forme } \omega : \\ \omega(\delta \xi) := \omega(\delta n) + \frac{\delta \zeta}{i \zeta}; \quad \xi := (n, \zeta), n \in N, \zeta \in U(1) \end{array} \right.$$

et que:

$$(10-3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Cette solution est unique (à un isomorphisme de structure près) si } N \text{ est} \\ \text{simplement connexe.} \end{array} \right.$$

C'est le cas ici, aussi bien dans le cas répulsif que dans le cas attractif, par suite de la proposition suivante:

$$(10-4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Les deux composantes } Z^+ \text{ et } Z^- \text{ de la variété } Z \text{ (définies en 5-16) sont} \\ \text{simplement connexes.} \end{array} \right.$$

Démonstration:

Nous savons que Z^- est difféomorphe à l'espace d'évolution Y (5-18), donc à $\mathbb{R}^5 \times S^2$ qui est simplement connexe. Dans le cas de Z^+ , on peut utiliser le théorème suivant: le groupe d'homotopie d'une variété connexe de dimension d ne change pas si on la prive d'une sous-variété de dimension $\leq d-3$. Or la dimension de Z^+ est 7, et si on la prive de la sous-variété des collisions C , dont la dimension est 4 (5-26), il reste un espace difféomorphe à Y (5-23).

(C.Q.F.D.)

Or nous savons que la variété de Newton du système, N^+ (resp. N^-) dans le cas attractif (resp. répulsif) a un produit cartésien par $\mathbb{R}$ difféomorphe à Z^+ (resp. Z^-) (voir 5-17); la variété de Newton est donc simplement connexe, et le résultat (10-3) s'applique.

Revêtement

Du coup nous connaissons le revêtement universel de la variété $\Sigma = N \times U(1)$: c'est $N \times \mathbb{R}$, difféomorphe donc à Z^+ (resp. Z^-). L'identification s'obtient en posant

$$(10-5) \quad \zeta = \exp(is),$$

et la 1-forme ω_z relevée à Z s'obtient par (10-2) et (7-16,20):

$$(10-6) \quad \omega_z(\delta z) = \frac{1}{2}(t+t''') \delta f + t''' \delta t'' - \langle R', \delta R'' \rangle$$

Spectre

Proposition:

(10-7) Une variété symplectique B_f (définition 8-20) est quantifiable si et seulement si:

$$f = -1/n^2 \quad (n \text{ entier}) \quad \text{ou} \quad f \geq 0;$$

La préquantification s'obtient alors par réduction de la forme ω_f , induite de ω sur la sous-variété $\Sigma_f, [f = \text{Cte}]$ de Σ .

Contentons nous de quelques indications:

Pour $f > 0$, nous savons que la variété B_f est symplectomorphe à un cotangent (8-21), donc préquantifiable (10-2). Dans le cas $f < 0$, on sait que B_f est le produit symplectique de deux sphères S^2 ; on utilise les résultats suivants:

a) Un produit symplectique est préquantifiable si et seulement si les deux facteurs le sont;

b) la sphère S^2 , munie de la forme symplectique $s \sigma$ (9-31) est préquantifiable si et seulement si $s \in \mathbb{Z}/2$.

La réduction de la 1-forme ω_f consiste à construire le quotient de Σ_f par le feuilletage caractéristique:

$$\xi \mapsto \ker(\omega_f) \cap \ker(\nabla \omega_f);$$

si ce quotient est une variété, la forme ω_f passe sur elle et peut en faire une variété quantique. Le problème peut se résoudre ici en utilisant le revêtement Z (10-5,6), avec le résultat suivant:

- Si $f \geq 0$, le quotient existe et constitue une variété quantique;
- Si $f < 0$, le quotient n'existe que si $y = 1/\sqrt{-f}$ est rationnel; il ne constitue une variété quantique que si y est entier.

Dans les deux cas, la variété obtenue quantifie effectivement la variété B_f .

L'ensemble de valeurs ainsi déterminé pour l'énergie $f/2$ coïncide donc avec le spectre quantique (compte tenu des unités choisies; voir 10-1); il caractérise en particulier les orbites de Bohr.

§11: VARIÉTÉ DE NEWTON ÉTENDUE

Il existe une variété symplectique $\mathcal{N}$, de dimension 6, simplement connexe, qui contient les variétés de Newton N^+ et N^- (associées respectivement aux cas attractif et répulsif); la frontière commune des ouverts N^+ et N^- est une variété de dimension 5.

Nous construisons la préquantification de $\mathcal{N}$, un plongement dans $\mathbb{R}^{10}$, et un prolongement ANALYTIQUE COMPLEXE qui est encore une variété symplectique.

Il est facile d'étendre les présents résultats au cas d'une dimension quelconque.

Considérons une variable

(11-1)

$$\zeta = (f, \tau, x, y, A, B)$$

$$f, \tau, x, y \in \mathbb{R}; \quad A, B \in \mathbb{R}^3$$

parcourant $\mathbb{R}^{10}$, et satisfaisant le système d'équations:

(11-2)

$$\begin{aligned} A^2 - fx^2 &= 1 \\ \langle A, B \rangle - xy &= 0 \\ y^2 - fB^2 &= 1 \end{aligned}$$

On vérifie facilement que cet ensemble $\mathcal{Z}$ est une sous-variété de dimension 7.

(11-3) On définit sur $\mathcal{Z}$ la 1-forme ω :

$$\omega(\delta\zeta) = \frac{1}{2} \tau \delta f + y \delta x - \langle B, \delta A \rangle$$

nous appellerons AUTOMORPHISMES de $\mathcal{Z}$ les difféomorphismes qui conservent ω .

Exemple: la substitution:

$$(11-4) \quad (f, \tau, x, y, A, B) \mapsto (f, \tau, -x, -y, A, B)$$

est évidemment un automorphisme.

De simples vérifications montrent les résultats suivants:

(11-5) La 2-forme $\sigma = \nabla \omega$ est de rang 6, et donne à $\mathcal{Z}$ une structure présymplectique.

(11-6) Il existe un champ de vecteurs $\zeta \mapsto \delta_1 \zeta$, défini sur $\mathcal{Z}$ par les conditions

$$\delta_1 \zeta \in \ker(\sigma), \quad \omega(\delta_1 \zeta) = 1;$$

il est donné par:

$$\delta_1(f, \tau, x, y, A, B) = (0, x^2 + B^2, y, xf, Bf, A)$$

Par conséquent, ω définit sur $\mathcal{Z}$ une STRUCTURE DE CONTACT, et ce sont les automorphismes de cette structure que nous considérons.

(11-7) La fonction s :

$$s(\zeta) = xy - f\tau$$

vérifie $\delta_1[s(\zeta)] = 1$

(11-8) Le champ de vecteurs δ_1 est complet, et engendre une action λ du groupe $\mathbb{R}$ sur $\mathcal{Z}$; $\lambda(u)$ est donné par:

$$\begin{pmatrix} f \\ \tau \\ x \\ y \\ A \\ B \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f \\ \tau + \frac{x^2 + B^2}{2} \gamma''(2u) + xy \gamma''(2u) + \frac{1}{2} \gamma(2u) \\ x \gamma'''(u) + y \gamma''(u) \\ y \gamma'''(u) + xf \gamma''(u) \\ A \gamma'''(u) + Bf \gamma''(u) \\ B \gamma'''(u) + A \gamma''(u) \end{pmatrix}$$

γ désignant la fonction définie, pour chaque valeur de f , par (1-25).

(11-9) L'action λ est LIBRE (il suffit de considérer la variable s), et chaque $\lambda(u)$ appartient au CENTRE du groupe des automorphismes de $\mathcal{Z}$.

L'image de $\mathcal{Z}$ par

$$\zeta \mapsto (y, f)$$

est l'ensemble représenté sur la figure 3. Ceci partage $\mathcal{Z}$ en 5 parties:

$$\begin{aligned} H^- &: f > 0 \text{ et } y \leq -1; \\ H^+ &: f > 0 \text{ et } y \geq 1; \\ P^- &: f = 0 \text{ et } y = -1; \\ P^+ &: f = 0 \text{ et } y = +1; \\ E &: f < 0 \text{ et } -1 \leq y \leq 1; \end{aligned}$$

(11-10) chacune d'elles est conservée par l'action du groupe (11-8); H^+ , H^- et E sont des ouverts; P^+ et P^- des sous-variétés de dimension 6.

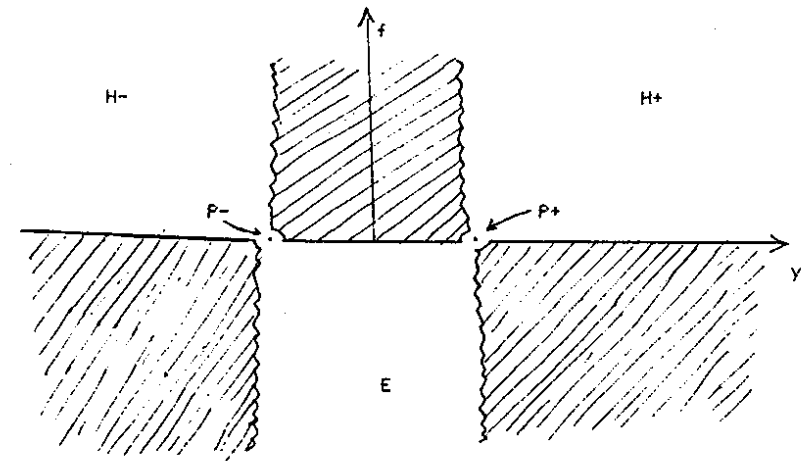


Fig.3

Seul un effet de perspective donne à P^- et à P^+ l'apparence de singularités de $\mathcal{Z}$.

(11-11) Sur le complémentaire de P^- , on définit une fonction différentiable t' de $\mathcal{Z}$ par

$$\begin{cases} (y+1)t' = B^2 \\ ft' = y-1 \end{cases}$$

(11-12) Si on pose:

$$\begin{cases} f &:= f \\ t &:= \tau - xt' \\ R &:= Bx - At' \\ t' &:= t' \\ R' &:= B \\ t'' &:= x \\ R'' &:= A \\ t''' &:= y \\ R''' &:= Bf \end{cases}$$

on définit un difféomorphisme du complémentaire de P^- sur la variété $\mathcal{Z}$ (5-5); le difféomorphisme réciproque est donné par:

$$\begin{cases} f &:= f \\ \tau &:= t + t' t'' \\ x &:= t'' \\ y &:= t''' \\ A &:= R'' \\ B &:= R' \end{cases}$$

L'image de la 1-forme ω définie en (11-3) par ce difféomorphisme est la forme calculée en (10-6); les actions λ définies en (5-6) et (11-8) sont équivariantes; les fonctions s définies en (5-10) et (11-7) sont égales.

(11-13) Nous pouvons donc IDENTIFIER la variété $\mathcal{Z}$ du §5 avec le complémentaire de P^- dans $\mathcal{Z}$; la composante connexe $\mathcal{Z}^-$ (cas répulsif) coïncide avec H^- (fig.3); la composante connexe $\mathcal{Z}^+$ (cas attractif) avec $E \cup P^+ \cup H^+$.

(11-14) Nous savons que $\mathcal{Z}^+$ est un ouvert simplement connexe (10-4); de même son image dans $\mathcal{Z}$ par l'automorphisme (11-4), image égale à $E \cup P^+ \cup H^+$; l'intersection de ces deux ouverts est E , difféomorphe à la partie $f < 0$ de $\mathcal{Z}^+$, donc au produit par B de la variété de Kepler K , donc connexe. Ainsi $\mathcal{Z}$ possède un recouvrement par deux ouverts simplement connexes dont l'intersection est connexe, et par conséquent est elle-même SIMPLEMENT CONNEXE.

L'application différentiable idempotente:

(11-15) $\zeta \mapsto \lambda(-s(\zeta))(\zeta)$

est une submersion de $\mathcal{Z}$ sur la sous-variété

(11-16) $\mathcal{N} := \{ \zeta \in \mathcal{Z} / xy - f\tau = 0 \}$

qui permet d'identifier $\mathcal{N}$ avec le quotient de $\mathcal{Z}$ par le groupe $\lambda(\mathbb{R})$; $\mathcal{Z}$ est donc un fibré en droites trivial sur $\mathcal{N}$; $\mathcal{N}$ est simplement connexe.

(11-17) Les formes induites de σ et ω sur $\mathcal{N}$ en font une variété SYMPLECTIQUE potentielle; tout automorphisme de $\mathcal{Z}$ se projette sur un symplectomorphisme de $\mathcal{N}$; le morphisme ainsi défini de $\text{Aut}(\mathcal{Z})$ dans $\text{Symp}(\mathcal{N})$ est surjectif; son noyau est $\lambda(\mathbb{R})$.

(11-18) Le quotient de $\mathcal{Z}$ par le groupe discret $\lambda(2\pi\mathbb{Z})$, muni de la forme image de ω , et de la projection sur $\mathcal{N}$ induite de (11-15), constitue la gréquantification unique de $\mathcal{N}$.

Flot hamiltonien

(11-19) Le flot hamiltonien (voir le §8) se prolonge à $\mathcal{N}$; le quotient de $\mathcal{N}$ est encore une variété $\mathcal{B}$, de dimension 3, munie d'une structure cosymplectique. $\mathcal{B}$ contient la variété de Bohr B comme partie ouverte - ainsi qu'une partie décrivant les états stationnaires dans le cas répulsif; l'application dans $\mathbb{R}^7$ définie par (8-15) - avec

(11-20) $L := B \times A, E := Ay - Bfx$

est encore une immersion, mais elle n'est plus injective.

PROLONGEMENT ANALYTIQUE COMPLEXE.

(11-21) On peut complexifier la variable ζ (11-1), ainsi donc que les variables f, τ, x, y, A, B qui la composent.

Un calcul de rang montre que les équations (11-2), conservées formellement, déterminent une sous-variété analytique complexe $\mathcal{Z}_{\mathbb{C}}$ de $\mathbb{C}^{10}$, prolongement analytique de $\mathcal{Z}$.

En conservant la formule (11-3), on définit une 1-forme ω de $\mathcal{Z}_{\mathbb{C}}$; les résultats et formules (11-6,7) restent vraies; du fait que δ est une fonction entière, λ s'étend par une action libre du groupe additif $\mathbb{C}$, donnée par les formules (11-8); et la variété quotient $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}$ peut encore s'identifier à la sous-variété

$$xy = f\tau;$$

$\mathcal{N}_{\mathbb{C}}$ constitue donc un prolongement analytique complexe commun des variétés de Newton correspondant aux deux cas attractif et répulsif.

- Le flot hamiltonien se prolonge aussi par une action sur $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}$ du groupe $\mathbb{C}$.

On remarque enfin que la variété quantique elle aussi possède un prolongement analytique complexe - à savoir $\mathcal{Z}_{\mathbb{C}} / \lambda(2\pi\mathbb{Z})$.

Références

- | | |
|----------------------------------|---|
| Bacry M. | Nuovo Cimento 41, p.222, 1966 |
| Bacry M., Ruegg H., Souriau J.M. | Comm. Math. Phys. 3, p.323, 1966 |
| Barut A.O., Kleinert H. | Phys. Rev. 156, p.1541, 1967 |
| Barut A.O., Kleinert H. | Phys. Rev. 157, p.1180, 1967 |
| Fock D. | Z. für Physik 98, p.145, 1935 |
| Györfyi G. | Nuovo Cimento 53, p.717, 1966 |
| Kusser H. | Comm. Math. Phys. 61, p.133, 1982 |
| Kustaanheimo P., Stiefel E. | J. Reine Ang. Math. 210, p.204, 1965 |
| Levi-Civita T. | Oper. Matem. Vol.2, Bologna 1956 |
| Moser J. | Comm. P. Appl. Math. 23, p.609, 1970 |
| Onofri E., Pauri M. | Preprint, Un. Parma, 1971 |
| Pauli M. | Z. für Physik 34, p.336, 1926 |
| Souriau J.M. | "Structure des systèmes dynamiques"; Dunod, Paris, 1969 |
| Souriau J.M. | Sympos. Mathematica 14, p.343, 1974 |
| Weinstein A. | "The local Structure of Poisson Manifolds". PAM 97 preprint, U.California, Berkeley, 1982 |