GROUPES DIFFERENTIELS ET PHYSIQUE MATHEMATIQUE

Jean-Marie Souriau

Beaucoup de théories physiques font jouer un rôle essentiel à un certain groupe (le "groupe des symétries" de la théorie).

Très souvent, il s'agit d'un groupe de Lie; mais il y a d'autres exemples importants où interviennent des groupes de dimension infinie:

- les principes de la mécanique classique - et ceux de la mécanique quantique dans la formulation de Dirac - utilisnt la symétrie par le groupe des "transformations canoniques" (difféomorphismes symplectiques);
- la théorie des particules élémentaires est aujourd'hui fondée sur les "groupes de jauge" ou "groupes de courants" (ensembles des applications différentiables d'une variété dans un groupe de Lie);
- la théorie de la gravitation (relativité générale) est une "théorie de jauge" d'un type particulier, construite sur le groupe des difféomorphismes de la variété espace-temps;
- on rencontre aussi des associations (produits semi-directs) de groupes de jauge et de groupes de difféomorphismes: dans l'électrodynamique relativiste, dans les théories de type Kaluza-Klein;
- la physique des solides (dans le cas des structures incommensurables) fait intervenir d'autres groupes qui ne sont plus de dimension infinie, mais qu'on considère généralement comme pathologiques (des quotients d'un groupe de Lie par un sous-groupe non fermé).

Rappelons d'autre part, pour mémoire, les principales structures mathématiques associées aux groupes de Lie qui interviennent en physique:

- les espaces vectoriels tangent et cotangent - munis des représentations adjointe et coadjointe;
- la 3-forme de structure, qui confère à l'espace tangent sa structure d'algèbre de Lie et à l'espace cotangent sa structure de Poisson;
- l'application exponentielle;
- les structures homologiques, topologiques et homotopiques; en particulier l'existence (pour tout groupe de Lie connexe) d'un revêtement simplement connexe, possédant des propriétés universelles, joue un rôle fondamental dans plusieurs branches de la physique mathématique;
- enfin l'étude des représentations unitaires des groupes de Lie (analyse harmonique non commutative) constitue un chapitre essentiel des mathématiques comme de la physique théorique.

Ce double inventaire suggère la question suivante: est-il possible d'étendre les propriétés mathématiques "utiles" des groupes de Lie à une catégorie plus vaste - catégorie qui engloberait les divers groupes que rencontre le physicien?

Ce projet peut se réaliser simplement: il suffit de "faire sauter un axiome". Voici comment:

On sait que la définition des groupes de Lie fait intervenir la stucture de groupe, la structure de variété, et un axiome de compatibilité.

Ici, c'est la structure de variété (ou "difféologie") que nous allons élargir, par une axiomatique où ne figure pas l'existence de cartes. Les objets munis d'une telle structure - ou "espaces différentiels" - constituent une catégorie particulièrement stable par rapport aux constructions ensemblistes (sommes, produits, quotients, etc.).

On obtient donc les "groupes différentiels" en remplaçant dans la définition des groupes de Lie la structure de variété par celle d'espace différentiel.

Or cette catégorie beaucoup plus large conserve la plupart des propriétés élémentaires des groupes de Lie.

Pour établir ces résultats, plusieurs changements de point de vue sont nécessaires: par exemple la théorie de l'homotopie se développe sans faire intervenir de topologie; la topologie canonique d'un groupe différentiel G et son espace tangent $\mathfrak{g}$ s'obtiennent à partir de l'analyse harmonique; $\mathfrak{g}$ est un espace vectoriel topologique localement convexe - mais il n'est pas nécessairement un modèle local de G , parce que l'application exponentielle n'est généralement définie que sur une partie étoilée de $\mathfrak{g}$; etc.

Ceci explique pourquoi les groupes différentiels ne peuvent pas s'atteindre en choisissant un espace-type pour les modeler; au contraire, ce sont les groupes différentiels eux-mêmes qui permettent de définir globalement les espaces utiles.

Faute de place, nous ne pouvons pas donner ici un exposé détaillé. On le trouvera dans la référence suivante:

Colloque "Géométrie Symplectique et de Contact, Feuilletages et Quantification Géométrique", Lyon. P. Dazord et N. Desolneux-Moulis éditeurs (1984)

avec le sommaire suivant:

symplectique des orbites coadjointes.

- Spectre associé à un état et un rayon. Relations d'incertitude.
- Groupe "statistique" d'une variété X ; observables; interprétation des lois de probabilités sur X .

II - <u>Quantification géométrique</u>.

- Structure des systèmes dynamiques classiques: espace d'évolution, espace des mouvements.
- Mécanique statistique classique, formulation par le groupe statistique de l'espace des mouvements.
- Structure symplectique et de contact des systèmes dynamiques: 2-forme de Lagrange; difféologie hamiltonienne. 1-forme préquantique. Groupes des symplectomorphismes et des quantomorphismes; groupes dynamiques et quantodynamiques. Groupe quantique.
- Groupes infinitésimalement proches; cas du groupe statistique et du groupe quantique.
- Axiomatique des états quantiques; spectres; formulation hilbertienne; quantification géométrique d'un observable classique par un self-adjoint. Axiome harmonique; états mélangés. Axiome de fonctionnalité. Exemples.