GROUPES DIFFERENTIELS ET PHYSIQUE MATHEMATIQUE *

Jean-Marie SOURIAU **

Centre de Physique Théorique
CNRS - Luminy - Case 907
F-13288 MARSEILLE CEDEX 9 (France)

OCTOBRE 1983

CPT-83/P.1547

*Colloque de la Société Mathématique de France "Géométrie Symplectique...", Lyon, Juin 1983.

**Centre de Physique Théorique, CNRS, Luminy et Université de Provence

GROUPES DIFFERENTIELS ET PHYSIQUE MATHEMATIQUE

Jean-Marie Souriau

INTRODUCTION

Beaucoup de théories physiques font jouer un rôle essentiel à un certain groupe (le "groupe des symétries" de la théorie).

Très souvent, il s'agit d'un groupe de Lie; mais il y a d'autres exemples importants où interviennent des groupes de dimension infinie:

- les principes de la mécanique classique - et ceux de la mécanique quantique dans la formulation de Dirac - utilisnt la symétrie par le groupe des "transformations canoniques" (difféomorphismes symplectiques);
- la théorie des particules élémentaires est aujourd'hui fondée sur les "groupes de jauge" ou "groupes de courants" (ensembles des applications différentiables d'une variété dans un groupe de Lie);
- la théorie de la gravitation (relativité générale) est une "théorie de jauge" d'un type particulier, construite sur le groupe des difféomorphismes de la variété espace-temps;
- on rencontre aussi des associations (produits semi-directs) de groupes de jauge et de groupes de difféomorphismes: dans l'électrodynamique relativiste, dans les théories de type Kaluza-Klein;
- la physique des solides (dans le cas des structures incommensurables) fait intervenir d'autres groupes qui ne sont plus de dimension infinie, mais qu'on considère généralement comme pathologiques (des quotients d'un groupe de Lie par un sous-groupe non fermé).

Rappelons d'autre part, pour mémoire, les principales structures mathématiques associées aux groupes de Lie qui interviennent en physique:

- les espaces vectoriels tangent et cotangent - munis des représentations adjointe et coadjointe;
- la 3-forme de structure, qui confère à l'espace tangent sa structure d'algèbre de Lie et à l'espace cotangent sa structure de Poisson;
- l'application exponentielle;
- les structures homologiques, topologiques et homotopiques; en particulier l'existence (pour tout groupe de Lie connexe) d'un revêtement simplement connexe, possédant des propriétés universelles, joue un rôle fondamental dans plusieurs branches de la physique mathématique;
- enfin l'étude des représentations unitaires des groupes de Lie (analyse harmonique non commutative) constitue un chapitre essentiel des mathématiques comme de la physique théorique.

Ce double inventaire suggère la question suivante: est-il possible d'étendre les propriétés mathématiques "utiles" des groupes de Lie à une catégorie plus vaste -

catégorie qui engloberait les divers groupes que rencontre le physicien?

Ce projet peut se réaliser simplement: il suffit de "faire sauter un axiome". Voici comment:

On sait que la définition des groupes de Lie fait intervenir la stucture de groupe, la structure de variété, et un axiome de compatibilité.

Ici, c'est la structure de variété (ou "difféologie") que nous allons élargir, par une axiomatique où ne figure pas l'existence de cartes. Les objets munis d'une telle structure - ou "espaces différentiels" - constituent une catégorie particulièrement stable par rapport aux constructions ensemblistes (sommes, produits, quotients, etc.).

On obtient donc les "groupes différentiels" en remplaçant dans la définition des groupes de Lie la structure de variété par celle d'espace différentiel.

Or cette catégorie beaucoup plus large conserve la plupart des propriétés élémentaires des groupes de Lie.

Pour établir ces résultats, plusieurs changements de point de vue sont nécessaires: par exemple la théorie de l'homotopie se développe sans faire intervenir de topologie; la topologie canonique d'un groupe différentiel G et son espace tangent $\mathfrak{g}$ s'obtiennent à partir de l'analyse harmonique; $\mathfrak{g}$ est un espace vectoriel topologique localement convexe - mais il n'est pas nécessairement un modèle local de G, parce que l'application exponentielle n'est généralement définie que sur une partie étoilée de $\mathfrak{g}$; etc.

Ceci explique pourquoi les groupes différentiels ne peuvent pas s'atteindre en choisissant un espace-type pour les modeler; au contraire, ce sont les groupes différentiels eux-mêmes qui permettent de définir globalement les espaces utiles.

La première partie de l'exposé comporte la définition axiomatique des espaces et des groupes différentiels, et un catalogue de résultats valables dans cette théorie.

Le lecteur pourra constater que l'axiome des cartes est inutile dans de nombreux chapitres de la géométrie différentielle - qui acquièrent ainsi une nouvelle extension.

En deuxième partie, nous cherchons comment ces résultats permettent d'interpréter la mécanique classique et pourraient apporter une solution au problème de la quantification géométrique. Nous n'abordons pas d'autres applications.

I: GROUPES DIFFERENTIELS

Espaces différentiels

Considérons une variété X de dimension finie quelconque d .

La "structure de variété" de X se définit usuellement par un atlas, et plus précisément par l'atlas de toutes les cartes locales de X . Mais on peut la caractériser aussi par l'ensemble de toutes les applications différentiables d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dans X (pour n=1,2,3...); puisque ce sont des applications vers X , il s'agit d'une caractérisation FINALE, au sens de Bourbaki.

Notons donc

$$D(\mathbb{R}^n, X)$$

l'ensemble des applications différentiables (C^∞) d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dans la variété X ; cet ensemble possède les propriétés suivantes:

D_0: $F \in D(\mathbb{R}^n,X)$ => F est une application dans X d'un OUVERT de $\mathbb{R}^n$.

D_1: Toute application CONSTANTE de $\mathbb{R}^n$ dans X appartient à $D(\mathbb{R}^n,X)$.

D_2: Si $F \in D(\mathbb{R}^n,X)$ et si $G \in D(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$, alors $F \circ G \in D(\mathbb{R}^m,X)$ (note 1).

D_3: Soit F une application d'une partie de $\mathbb{R}^n$ dans X. Si, F est localement différentiable, elle est différentiable; explicitement:

Si pour tout $r \in \mathrm{def}(F)$ il existe ϕ tel que:

$\phi \in D(\mathbb{R}^n,X)$;
$r \in \mathrm{def}(\phi)$;
F est un prolongement de ϕ ;

alors $F \in D(\mathbb{R}^n,X)$.

Ce sont ces propriétés des variétés que nous allons conserver:

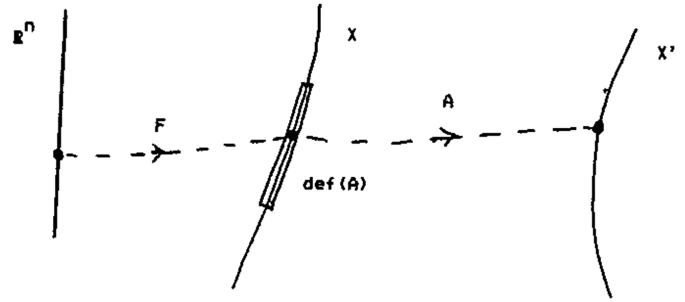
On appellera DIFFEOLOGIE d'un ensemble X la donnée, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'un ensemble $D(\mathbb{R}^n,X)$ - si les axiomes D_0, D_1, D_2, D_3 sont vérifiés;

Un ensemble muni d'une difféologie s'appellera ESPACE DIFFERENTIEL (note 2).

Parmi les espaces différentiels figurent donc les variétés - mais nous allons en rencontrer beaucoup d'autres.

Applications différentiables

Soient X et X' deux espaces différentiels, A une application d'une partie de X dans X' :



Nous dirons que A est DIFFERENTIABLE si, $\forall n$,

$$F \in D(\mathbb{R}^n,X) \Rightarrow A \circ F \in D(\mathbb{R}^n,X')$$

(notes 3,4);

l'ensemble de ces applications sera noté

$$D(X,X')$$

(note 5).

Ce sont ces applications qui vont jouer le rôle de MORPHISMES de la structure; on établit immédiatement la proposition:

$$A \in D(X,X') \text{ et } B \in D(X',X'') \Rightarrow B \circ A \in D(X,X'')$$

(note 3).

Difféomorphismes

Soient X et X' des espaces différentiels; A une application d'une partie de X dans X'.
Nous dirons que A est un DIFFEOMORPHISME (local) de X à X' si:

A est différentiable;
A est injectif;
A^{-1} est différentiable

(note 6).

Exemple:

Un espace différentiel X est une VARIETE DE DIMENSION d ssi tout point de X appartient à l'ensemble de définition d'un difféomorphisme local de X à $\mathbb{R}^d$ (ou "carte locale"); c'est précisément cet axiome qui sera facultatif dans la suite.

- Si un difféomorphisme A est une bijection de X sur X', il sera dit GLOBAL; dans ce cas les espaces X et X' seront dits DIFFEOMORPHES.

- Il est clair que les difféomorphismes locaux (resp. globaux) se composent en difféomorphismes locaux (resp. globaux); que les difféomorphismes globaux d'un espace différentiel X avec lui-même, munis de la composition $\circ$, constituent un groupe qu'on notera diff(X) .

Finesse des difféologies

Soit X un ensemble; notons 1_X l'application identique de X sur X .

D' et D'' étant deux difféologies de X , notons X' et X'' les espaces différentiels associés; 1_X peut être considéré comme une application de X' sur X'' :

$$X' \xrightarrow{1_X} X''$$

Si 1_X est différentiable, nous dirons que la difféologie D' est PLUS FINE que la difféologie D'' (note 7).

La FINESSE ainsi définie est une RELATION D'ORDRE entre difféologies d'un même ensemble;

la difféologie LA PLUS FINE de X existe toujours: c'est la difféologie DISCRETE, caractérisée par:

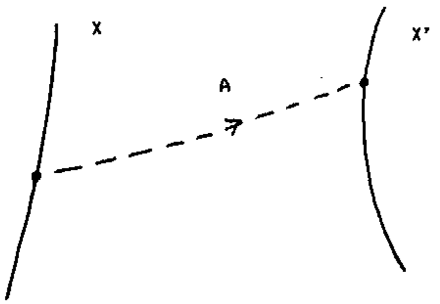
$$\left\{ \begin{array}{l} F \in D(\mathbb{R}^n, X) \\ \qquad\qquad\qquad \Leftrightarrow \\ F \text{ est une application LOCALEMENT CONSTANTE d'une partie de } \mathbb{R}^n \text{ dans } X . \end{array} \right.$$

- Il existe aussi une difféologie moins fine que les autres (pouvez-vous la trouver?).

- Tout ensemble de difféologies de X possède, en ce qui concerne la finesse, une BORNE INFERIEURE et une BORNE SUPERIEURE.

Images d'une difféologie

Soit A une application:



d'un ESPACE DIFFERENTIEL X dans un ENSEMBLE X'.

Parmi les difféologies de X' pour lesquelles A est DIFFERENTIABLE, il en existe une qui est LA PLUS FINE: on l'appellera IMAGE par A de la difféologie de X (note 8).

Exemple 1:

Soient X et X' deux variétés; soit A une application de X sur X' . Alors:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{la difféologie de } X' \text{ est l'image par } A \text{ de celle de } X \\ \qquad\qquad \Leftrightarrow \\ \qquad A \text{ est une SUBMERSION de } X \text{ sur } X' . \end{array} \right.$$

- On a ainsi une caractérisation des submersions qui ne met pas en jeu les espaces vectoriels tangents, et qui s'étend aux espaces différentiels généraux.

Exemple 2:

Si X est un espace différentiel, et si $\sim$ est une relation d'équivalence quelconque sur l'ensemble X , l'application canonique de X sur l'ensemble quotient lui donne une difféologie: la DIFFEOLOGIE QUOTIENT.

Cas particulier:

Sur la variété T^2 (le tore à 2 dimensions), les géodésiques de pente donnée α sont les classes d'une équivalence. Si α est rationnel, le quotient T^2/α est une variété (difféomorphe au tore T^1); si α est irrationnel, T^2/α n'est plus une variété - mais toujours un espace différentiel; T^2/α et T^2/β sont difféomorphes entre eux si et seulement si il existe

$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in GL(2,\mathbb{Z})$$

tel que

$$\beta = \frac{p\alpha + q}{r\alpha + s}$$

(note 9).

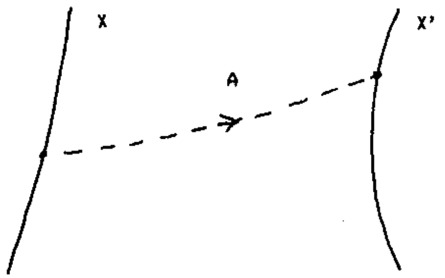
Sommes d'espaces différentiels

La notion de difféologie image peut se généraliser de la façon suivante: soit X' un ensemble; (X_j, A_j) une famille d'espaces différentiels X_j et d'applications $A_j : X_j \longrightarrow X$. CECI DEFINIT UNE DIFFEOLOGIE DE X : la plus fine pour laquelle les A_j soient différentiables (note 10).

En particulier, si X_j désigne une famille quelconque d'espaces différentiels, et si X est l'ensemble somme des X_j, il suffit de choisir pour A_j l'injection canonique de X_j dans X pour définir la DIFFEOLOGIE SOMME.

Image réciproque d'une difféologie

Soit A une application



d'un ENSEMBLE X dans un ESPACE DIFFERENTIEL X' ; nous appellerons IMAGE RECIPROQUE par A de la difféologie de X' la MOINS FINE des difféologies de X telles que A soit différentiable (note 11).

En particulier, si X est une partie de l'espace différentiel X' et A l'injection canonique $X \longrightarrow X'$, la difféologie de X sera dite INDUITE par celle de X' (note 12); cette difféologie induite fera de X un SOUS-ESPACE DIFFERENTIEL.

Exemple:

La demi-droite fermée ($r \geqslant 0$) est un sous-espace différentiel de $\mathbb{R}$. Pouvez-vous trouver le groupe de ses difféomorphismes globaux? Même question pour la demi-droite ouverte ($r > 0$).

Produits d'espaces différentiels

Soit X un ensemble, (X_j, A_j) une famille d'espaces différentiels X_j et d'applications $A_j : X_j \longrightarrow X$. Parmi les difféologies de X telles que les A_j soient différentiables, il en existe une qui est la moins fine. En particulier, si X_j est une famille quelconque d'espaces différentiels, on appellera DIFFEOLOGIE PRODUIT la moins fine des difféologies du produit cartésien:

$$X = \prod_j (X_j)$$

pour laquelle les projections canoniques

$$X \longrightarrow X_j$$

soient différentiables.

Exemple:

La difféologie produit de n exemplaires de $\mathbb{R}$ coïncide avec la difféologie standard de $\mathbb{R}^n$; pour tout ensemble E , $\mathbb{R}^E$ est encore un espace différentiel.

Groupes différentiels

Nous appellerons DIFFEOLOGIE DE GROUPE toute difféologie définie sur un groupe G , telle que l'application:

$$(g,g') \mapsto g^{-1} g'$$

soit différentiable (de $G \times G$ dans G).

Un groupe muni d'une telle difféologie s'appellera GROUPE DIFFERENTIEL (note 13).

Exemples de groupes différentiels:

- tout GROUPE DE LIE muni de sa difféologie de variété;
- tout groupe muni de la difféologie discrète;
- les sous-groupes et groupes quotients:

Soit G un groupe différentiel, H un sous-groupe QUELCONQUE de G ; alors H est un groupe différentiel (pour sa difféologie de partie de G).

- Si de plus le sous-groupe H est distingué, le GROUPE QUOTIENT G/H est un groupe différentiel (pour sa difféologie de quotient de G).

- Ainsi l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels est un sous-groupe du groupe additif $\mathbb{R}$; par conséquent le groupe quotient:

$$\mathbb{R}/\mathbb{Q}$$

est un groupe différentiel (note 14).

- groupes de difféomorphismes:

Soit X un espace différentiel quelconque; nous munirons le groupe $G = \mathrm{diff}(X)$ de la plus fine difféologie de groupe pour laquelle

$$(g,x) \longmapsto g(x)$$

soit différentiable (de $G \times X$ dans X) (note 13).

- Tout groupe de difféomorphismes de X (:= sous-groupe de diff(X)) est donc aussi canoniquement un groupe différentiel. - On connait donc, comme groupes différentiels, tous les groupes de difféomorphismes d'une variété X ; mais aussi de plus gros objets tels que diff(diff(X)) .

- groupes de jauge (ou de courants):

Soit X un espace différentiel, H un groupe différentiel; notons

$$H^X$$

l'ensemble des applications DIFFERENTIABLES de X dans H .

$G = H^X$ est un groupe pour la loi de composition:

$$[g\ g'](x) := [g(x)]\ [g'(x)];$$

il devient un groupe différentiel en posant:

$$\left\{ \begin{array}{l} F \in D(\mathbb{R}^n, H^X) \\ \Longleftrightarrow \\ (r,x) \longmapsto F(r)(x) \text{ est différentiable (de } \mathbb{R}^n \times X \text{ dans } H). \end{array} \right.$$

Ainsi le groupe additif $\mathbb{R}^X$ des fonctions réelles différentiables sur une variété X est canoniquement un groupe différentiel.

D-morphismes de groupes

Soient G et G' deux groupes différentiels; on appellera D-MORPHISME tout morphisme de groupe $A:\ G \to G'$:

$$A(g_1\ g_2) = A(g_1)\ A(g_2) \qquad g_1, g_2 \in G$$

qui soit différentiable:

$$A \in D(G,G')$$

Il est clair que le composé de deux D-morphismes est encore un D-morphisme; plus précisément, qu'il existe une CATEGORIE dont les objets sont les GROUPES DIFFERENTIELS et les flèches les D-MORPHISMES; ceci permet de définir les D-isomorphismes, les D-automorphismes.

Exemples de D-morphismes:

- Les automorphismes intérieurs d'un groupe différentiel G sont des

D-automorphismes.

- l'injection canonique d'un sous-groupe dans un groupe différentiel, la surjection canonique d'un groupe différentiel sur un groupe quotient sont des D-morphismes.

- On notera que les D-automorphismes d'un groupe différentiel G constituent eux-mêmes un groupe différentiel (comme sous-groupe de diff(G)).

Actions

Soient G un groupe, X un ensemble.
On appelle ACTION de G sur X tout morphisme de groupe:

$$A:\ G \to X!$$

$X!$ désignant le groupe des permutations de X.

Si x_* désigne un point de X , on appelle ORBITE de x_* l'ensemble:

$$\{A(g)(x_*)\ /\ g \in G\}$$

et STABILISATEUR de x_* le sous-groupe de G :

$$\{g \in G\ /\ A(g)(x_*) = x_*\}\ ;$$

les orbites des différents points forment une PARTITION de X .

Si G est un groupe différentiel, et X un espace différentiel, nous appellerons D-ACTION tout D -morphisme

$$G \to \text{diff}(X);$$

- pour qu'une action A de G sur X soit une D-action, il faut et il suffit que

$$(g,x) \longmapsto A(g)(x)$$

soit différentiable (de $G \times X$ dans X).

Exemples de D-actions:

- Ce qu'on appelle ACTION DIFFERENTIABLE d'un groupe de Lie G sur une variété X , c'est une D-action de G sur X .

- Si H est un sous-groupe QUELCONQUE d'un groupe différentiel G , il existe une D-action A de G sur l'ESPACE QUOTIENT G/H , définie canoniquement par:

$$A(g)(g'H) = gg'H \qquad \forall g,g' \in G$$

- On appellera REALISATION de G sur X tout D-isomorphisme de G avec un groupe de difféomorphismes de X ; c'est une D-action sur X .
Ainsi tout groupe différentiel G se réalise sur l'espace G par A:

$$A(g)(g') = gg'.$$

Espaces de Klein et espaces homogènes

Soit G un groupe différentiel, A une action de G sur un ENSEMBLE X.

Nous appellerons DIFFEOLOGIE DE KLEIN (associée à l'action A) la plus fine des difféologies de X pour lesquelles A soit une D-action; G sera dit GENERATEUR de cette difféologie.

- Cette difféologie est la somme des difféologies des orbites; l'orbite de tout point x_* de X est difféomorphe à l'espace quotient G/G_* (G_* := stabilisateur de x_*) par le difféomorphisme global:

$$gG_* \mapsto A(g)(x_*)$$

- Nous appellerons ESPACE DE KLEIN tout espace différentiel X dont la difféologie est ainsi construite à partir d'une action de groupe; parmi les groupes différentiels générateurs de la difféologie, il existe un choix canonique: à savoir diff(X).

-Exemple: toute variété séparée est un espace de Klein.

On peut donner trois définitions équivalentes d'un ESPACE (différentiel) HOMOGENE X :
- X est difféomorphe au quotient d'un groupe différentiel G par un sous-groupe;
- X est une espace de Klein de G - associé à une action transitive;
- X est un espace de Klein sur lequel diff(X) agit transitivement.

-Exemple: Une variété séparée est homogène ssi ses composantes connexes sont difféomorphes entre elles.

Homologie des groupes différentiels

Soit $M : G \to G'$ un morphisme de groupe différentiel (D-morphisme).

Effectuons la décomposition canonique $A \circ B \circ C$ de M :

$$G \xrightarrow{C} G/\ker(M) \xrightarrow{B} \mathrm{val}(M) \xrightarrow{A} G';$$

on peut munir $G/\ker(M)$ et $\mathrm{val}(M)$ de leurs difféologies respectives de quotient et de partie; alors A,B,C sont des D-morphismes.

Nous savons que B est bijectif; il suffit donc que B^{-1} soit différentiable pour que B soit un D-isomorphisme; nous dirons dans ce cas que M est STRICT.

Considérons maintenant une SUITE EXACTE de morphismes de groupe:

$$\dots G_j \xrightarrow{M_j} G_{j+1} \xrightarrow{M_{j+1}} G_{j+2} \dots$$

$(\ker(M_{j+1}) = \mathrm{val}(M_j))$;

nous dirons que la suite est D-EXACTE si les G_j sont des groupes différentiels et les M_j des D-MORPHISMES STRICTS.

Cette définition permet d'étendre difféologiquement des résultats algébriques d'homologie; ainsi, considérons le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & H \arrow[r] \arrow[d] & H' \arrow[r] \arrow[d] & H'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & G \arrow[r] \arrow[d] & G' \arrow[r] \arrow[d] & G'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r, dashed] & K \arrow[r, dashed] \arrow[d] & K' \arrow[r, dashed] \arrow[d] & K'' \arrow[r, dashed] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

où les suites horizontales et verticales $\longrightarrow$ sont exactes. On sait qu'il existe une seule suite ...> qui complète le diagramme commutativement, et qu'elle est exacte.

Or ce résultat algébrique se complète par un résultat "différentiel": si les suites horizontales et verticales $\longrightarrow$ sont D-exactes, alors la suite ...> est aussi D-exacte.

Un cas particulier fournit le résultat suivant:

Soit G un groupe différentiel, H et K des sous-groupes invariants emboîtés:

$$K \subset H \subset G$$

alors:

$$G/H \sim [G/K] / [H/K] ,$$

la relation $\sim$ étant l'isomorphisme des groupes différentiels.

Ce résultat possède quelques généralisations aux cas où les sous-groupes ne sont plus invariants - résultats qui se formulent en définissant les FIBRATIONS des espaces différentiels homogènes.

Homotopie des groupes différentiels

Soient G et G' deux groupes différentiels. Nous dirons que G' est un REVETEMENT de G si G est D-isomorphe au quotient de G' par un sous-groupe DISCRET (:= dont la difféologie de sous-espace est discrète); cette relation est transitive.

Pour tout groupe différentiel G , nous appellerons COMPOSANTE NEUTRE de G le plus petit des sous-groupes G' tels que G/G' soit discret; cette composante neutre G* est un sous-groupe distingué de G , et par conséquent le quotient G/ G* est un groupe (le GROUPE DES COMPOSANTES de G), discret par construction.

Nous dirons que G est CONNEXE s'il est égal à sa composante neutre; la composante neutre est le plus grand sous-groupe connexe; l'image d'un groupe connexe par un D-morphisme est connexe.

Ceci permet de construire une catégorie, dont les objets sont les groupes différentiels connexes et le flèches les D-morphismes

$$G' \longrightarrow G$$

surjectifs, stricts, à noyau discret (tels donc que G' soit un revêtement de G).

On dit que G est SIMPLEMENT CONNEXE si tous ses revêtements connexes lui sont D-isomorphes.

Si G est simplement connexe, si M1 est un D-morphisme G -> G1 , et si (G2, π) est un revêtement de G1 , M1 possède une seule factorisation πoM2 , M2 étant un D-morphisme sur G2 :

$$\begin{tikzcd} & G2 \arrow[d, "\pi"] \\ G \arrow[ur, "M2"] \arrow[r, "M1"'] & G1 \end{tikzcd}$$

Tout groupe différentiel connexe G possède un REVETEMENT SIMPLEMENT CONNEXE $\tilde{G}$ (note 13); le résultat précédent montre que $\tilde{G}$ est un REVETEMENT CONNEXE UNIVERSEL - en ce sens qu'il est lui-même revêtement de tout revêtement connexe de G .

Le noyau (discret) du morphisme

$$\tilde{G} \longrightarrow G$$

appartient au CENTRE de G ; c'est donc un groupe abélien. Il est défini à un isomorphisme près par G ; on l'appellera GROUPE D'HOMOTOPIE de G ; il est réduit à l'élément neutre si et seulement si G est simplement connexe.

Ces notions peuvent s'étendre au cas d'un espace homogène X qui est difféomorphe à un quotient d'un groupe connexe (nous dirons que X est connexe). Les résultats principaux (note 16) sont les suivants:

- Tout espace homogène connexe est difféomorphe à un quotient G/G' , G étant

SIMPLEMENT CONNEXE;

- dans une telle réalisation, le groupe des composantes de G' ne dépend que de la difféologie de X : on l'appellera GROUPE D'HOMOTOPIE de X ;

- de même l'espace $\tilde{X}$, quotient de G par la composante neutre de G' est un espace simplement connexe (:= connexe à homotopie nulle) qui constitue - avec un sens que l'on peut préciser - le <u>revêtement universel</u> de X .

Ces constructions recoupent des résultats connus dans deux cas:

-celui où X est un groupe différentiel - que nous venons d'examiner;

-celui où X est une VARIETE SEPAREE, CONNEXE au sens usuel: groupe d'homotopie et revêtement universel ainsi construits coincident avec les objets classiques;

donc a fortiori dans l'intersection de ces deux cas (groupes de Lie connexes).

Exemple: le quotient oblique du tore, T^2/α (α irrationnel), n'est pas une variété; mais c'est un espace différentiel homogène connexe, dont le revêtement universel est la droite, et dont le groupe d'homotopie est $\mathbb{Z}^2$ (note 9).

Ces théorèmes d'existence peuvent s'établir par voie constructive: si G est un groupe différentiel, nous appellerons ARC de G toute application f de $\mathbb{R}$ dans G qui est différentiable et qui vérifie:

$$f(0) = e \text{ (:= élément neutre de } G \text{);}$$

l'ensemble des arcs est un sous-groupe du groupe de courants $G^{\mathbb{R}}$, et par conséquent un groupe différentiel que nous noterons arc(G) ; il est connexe.

L'application bout définie par:

$$\text{bout}(f) = f(1) \text{ pour tout arc } f$$

est un D-morphisme strict arc(G) -> G ; son image est la COMPOSANTE NEUTRE de G ; notons lacet(G) son noyau, et lasso(G) la composante neutre de lacet(G).

Alors arc(G)/lasso(G) est simplement connexe, et constitue un revêtement universel de val(bout) - donc de G si G est connexe; le groupe d'homotopie de G est alors égal à lacet(G)/lasso(G) , donc au groupe des composantes de lacet(G).

Rayons, étoiles et difféologie forte

Soit G un groupe différentiel. Nous appellerons RAYON de G tout D-morphisme F: $\mathbb{R} \longrightarrow$ G.

- Les rayons sont donc les arcs de G qui vérifient:

$$F(t+t') = F(t)\,F(t') \quad \forall t,t' \in \mathbb{R} \;;$$

nous appellerons ETOILE de G l'ensemble de ses rayons; c'est un sous-groupe de arc(G) si G est commutatif.

Si F est un rayon, et a un réel, il est clair que

$$t \mapsto F(at)$$

est un rayon; si P est un D-morphisme $G \longrightarrow G'$, $P \circ F$ est un rayon de G'; en particulier

$$t \mapsto g \times F(t) \times g^{-1}$$

est un rayon $\forall g \in G$.

Si

$$G' \xrightarrow{P} G$$

est un revêtement de G, la composition

$$F' \mapsto P \circ F'$$

applique étoile(G') dans étoile(G); puisque $\mathbb{R}$ est simplement connexe, on voit que cette application est bijective.

Exemple de rayons:

Si X est une variété séparée, les rayons F du groupe différentiel diff(X) sont en bijection avec les CHAMPS DE VECTEURS DIFFERENTIABLES ET COMPLETS f sur X, par la formule

$$F(t) = \exp(tf);$$

le champ de vecteurs associé à $g \circ F(t) \circ g^{-1}$ est l'image par le difféomorphisme g du champ de vecteurs f.

Difféologie forte:

Soit G un groupe différentiel, D sa difféologie.
Nous appellerons DIFFEOLOGIE FORTE de G la plus fine difféologie de groupe pour laquelle les D-rayons sont différentiables; cette difféologie D' est donc plus fine que D. Parce que les D-rayons sont encore des D'-rayons, la difféologie forte associée à D' coïncide avec D'.

Si $g \in G$, si $F_1, \ldots F_p$ sont des rayons de G, et si

$$\left[r \longmapsto (u_1 \ u_2 \ldots u_p)\right] \in D(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$$

il est clair que

$$r \mapsto g \ F_1(u_1) \ F_2(u_2) \ldots \ F_p(u_p)$$

appartient à $D'(\mathbb{R}^n, G)$; en fait $D'(\mathbb{R}^n, G)$ est constitué des applications qui sont localement de ce type.

Il en résulte que les PRODUITS FINIS DE BOUTS DE RAYONS constituent la COMPOSANTE NEUTRE FORTE de G, donc un sous-groupe distingué, invariant par tout D-automorphisme (qui est aussi un D'-automorphisme).

Si A est un D-morphisme $G \to H$, A reste un D-morphisme quand on munit G et H de leurs difféologies fortes.

Exemples:

- La difféologie d'un GROUPE DE LIE est forte.
- Si G est un groupe différentiel fort et connexe, tout revêtement connexe de G, en particulier son revêtement universel, est fort.

Etats d'un groupe différentiel

Etats et harmonies

Rappelons la définition de la convolution $*$ des fonctions complexes sur un groupe G:

$$\left[A*B\right](g) := \sum_{g'g''=g} A(g')\ B(g'')$$

ce qui implique que A ou B est nul sur le complémentaire d'une partie finie; l'adjoint B^* de B étant défini par

$$B^*(g) = \overline{B(g^{-1})},$$

on dira que A' est SUBORDONNEE à A s'il existe B tel que

$$A' = B^* * A * B;$$

la subordination est transitive.

Soient g_1 et $g_2 \in G$. Pour toute fonction A, il existe A_0, A_1, A_2, SUBORDONNEES à A, telles que

$$A(g_1 g\, g_2) = \left[A_0 + j\, A_1 + j^2\, A_2\right](g) \qquad \forall g \in G$$

j étant la racine cubique de l'unité $\exp(2i\pi/3)$.

On dit que M est DE TYPE POSITIF ($M \gg 0$) ssi:

$$N \text{ subordonnée à } M \Rightarrow N(e) \geq 0;$$

par conséquent:

$$M \gg 0 \text{ et } N \text{ subordonnée à } M \Rightarrow N \gg 0.$$

Nous appellerons ETAT de G toute fonction M telle que

$$M \gg 0 \text{ et } M(e)=1;$$

les états forment un convexe qui engendre le cône des fonctions de type positif:

$$N \gg 0 \Leftrightarrow N = r\,M, \ r \geq 0, \ M: \text{état}.$$

Tout état M vérifie les identités:

$$M(g^{-1}) = \overline{M(g)};$$

$$|M(g)| \leq 1;$$

$$|M(g)-M(g')| \leq \sqrt{2\left(1-\mathrm{Re}\left(M(g^{-1}g')\right)\right)} \ ;$$

$$|M(gg')-M(g)\,M(g')| \leq \sqrt{1-|M(g)|^2}\ \sqrt{1-|M(g')|^2} .$$

Le conjugué d'un état, le produit de deux états sont des états.

Exemples d'états:

- La fonction caractéristique d'une partie K de G est un état ssi K est un sous-groupe.

- Tout caractère de G est un état.

- Si ρ est une représentation unitaire de G sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, et ψ un vecteur unitaire de $\mathcal{H}$, la fonction M :

$$M(g) = \langle \psi , \rho(g)\psi \rangle$$

est un état.

Réciproquement (note 17), tout état M peut se mettre sous cette forme, même en supposant ψ CYCLIQUE pour ρ , ce qui signifie que:

$$\left\{ \text{L'espace vectoriel engendré par les } \rho(g)\psi \ , \ g \in G, \text{ est dense dans } \mathcal{H} \right\}$$

Avec cette condition, la représentation ρ est définie par M à UNE EQUIVALENCE

UNITAIRE PRES; ρ est irréductible ssi M est un point extrêmal du convexe des états.

Nous appellerons HARMONIE d'un groupe G tout ensemble H d'états de G qui est convexe et clos pour la subordination:

$$\begin{array}{rcl} M \in H & \Rightarrow & M \gg 0 \text{ et } M(e)=1; \\ M \text{ et } N \in H, \ r \in [0,1] & \Rightarrow & rM+(1-r)N \in H; \\ M \in H, \ N \text{ subordonné à } M, \ n(e)=1 & \Rightarrow & N \in H. \end{array}$$

exemple: l'ensemble $S(G)$ des états de G est une harmonie.

- La fermeture uniforme d'une harmonie est une harmonie.

- Toute intersection d'harmonies est une harmonie.

Réduction d'une harmonie:

Si H est un harmonie de G , nous appellerons NOYAU de H l'ensemble

$$\ker(H) := \left\{ g \in G \ / \ M(g)=1 \quad \forall M \in H \right\}$$

$\ker(H)$ est un sous-groupe distingué; tout $M \in H$ passe sur le groupe quotient $G' := G/\ker(H)$:

$$\begin{tikzcd} & G' \arrow[dr, dashed, "M'"] & \\ G \arrow[ur] \arrow[rr, dashed, "M"'] & & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

l'ensemble des M' ainsi associés aux M est une harmonie H' de G' , que nous appellerons REDUITE de H . H sera dite IRREDUCTIBLE si $\ker(H) = \{e\}$; toute harmonie réduite est irréductible.

Topologies harmoniques

Supposons que G soit un GROUPE TOPOLOGIQUE. Alors:

- Pour qu'un état soit continu, il suffit que sa partie réelle soit continue au point e ; il est alors uniformément continu.

- Les états continus constituent une harmonie $CS(G)$; $CS(G)$ est une face du convexe $S(G)$.

- Un état M est continu si et seulement si la représentation associée ρ est continue (pour la topologie faible-forte du groupe unitaire).

- Dans le cas du groupe $\mathbb{R}$, les ETATS CONTINUS N sont en bijection avec les LOIS DE PROBABILITE ν par la transformation de FOURIER-BOCHNER:

$$N(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t} d\gamma(\omega) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Réciproquement, si H est une harmonie d'un groupe G, la topologie T la moins fine pour laquelle les éléments de H sont continus est une TOPOLOGIE DE GROUPE:

$$(g,g') \longmapsto g^{-1}g' \quad \text{est continue;}$$

pour que T soit SEPAREE, il faut et il suffit que H soit IRREDUCTIBLE.

Les topologies de groupe ainsi engendrées par une harmonie s'appelleront TOPOLOGIES HARMONIQUES; une topologie est harmonique ssi elle est engendrée par $CS(G)$.

Exemples: les topologies des groupes localement compacts sont harmoniques; celles des espaces de Hilbert aussi.

Topologie harmonique d'un groupe différentiel

Nous munirons tout groupe différentiel G de sa "topologie harmonique", celle qui est engendrée par l'harmonie $DS(G)$ des ETATS DIFFERENTIABLES.

Cette topologie rend continus les éléments de $DS(G)$; et aussi leurs limites uniformes, qui constituent une harmonie $\overline{DS}(G)$; on a donc

$$DS(G) \subset \overline{DS}(G) \subset CS(G),$$

et ces trois harmonies engendrent la même topologie.

- Les états appartenant à $\overline{DS}(G)$ seront dits SUPERCONTINUS.

L'utilisation systématique de cette topologie conduit aux résultats suivants:

- $F \in D(\mathbb{R}^n, G) \Rightarrow F$ est continue;
- tout D-morphisme de groupe est continu;
- La composante neutre de G est le plus petit sous-groupe ouvert;
- Si G est séparé, tout sous-groupe de G est séparé;
- Soit K un sous-groupe distingué de G; pour que G/K soit séparé, il est nécessaire que K soit fermé; la condition suivante est nécessaire et suffisante:

$$\left\{ \begin{array}{l} g \in G - K \\ \Rightarrow \\ \text{il existe } M \in DS(G) \text{ tel que } M(g) \neq 1 \text{ et } M(K) = \{1\} \end{array} \right.$$

Exemples:

- La topologie harmonique d'un groupe de Lie coïncide avec sa topologie de

variété;

- si X est une variété séparée, tout groupe de difféomorphismes de X est séparé (note 18).

Réduction d'un groupe différentiel

Soit G un groupe différentiel non séparé; nous appellerons GROUPE REDUIT le quotient G' de G par le noyau de l'harmonie $DS(G)$; on constate que $DS(G')$ est l'harmonie réduite de $DS(G)$; par conséquent le groupe réduit G' est SEPARE.

Soit d'autre part A un D-morphisme $G \rightarrow K$, K séparé. Alors A se factorise d'une seule façon en $A' \circ R$, R étant la réduction $G \rightarrow G'$:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "A"] \arrow[d, "R"'] & K \\ G' \arrow[ur, "A'"'] & \end{tikzcd}$$

et A' est un D-morphisme $G' \rightarrow K$.

Soit G un groupe différentiel connexe et séparé; $(\widetilde{G}, \pi)$ son revêtement universel.

$$\begin{tikzcd} \widetilde{G} \arrow[dd, "\pi"'] \arrow[dr, "R"] \arrow[drr] & & \\ & \widetilde{G}' \arrow[r] \arrow[dl, "\pi'"] & K \arrow[dll] \\ G & & \end{tikzcd}$$

Le groupe réduit $\widetilde{G}'$ de $\widetilde{G}$ est un REVETEMENT CONNEXE SEPARE UNIVERSEL de G : le morphisme π' de $\widetilde{G}'$ sur G défini par la factorisation de π se factorise lui-même sur tout revêtement connexe séparé K de G. Le noyau H' de π' (GROUPE D'HOMOTOPIE SEPARE) est un quotient de H ; il est central dans $\widetilde{G}'$.

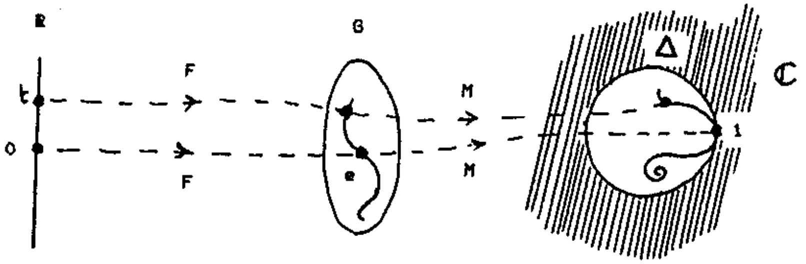
Tangent et cotangent d'un groupe différentiel

Définitions:

Soit G un groupe différentiel. Si M est un état différentiable et F un arc de G, il est clair que:

$$M \circ F \in D(\mathbb{R}, \Delta)$$

Δ désignant le disque unité fermé du plan complexe:



il en résulte que le nombre

$$\rho = \frac{1}{i}\ \frac{d}{dt}\Big[\,MoF(t)\,\Big]_{t=0}$$

est réel; nous poserons:

$$jet(F) := M \longmapsto \rho$$

et

$$jet(M) := F \longmapsto \rho\ .$$

Les jets des arcs sont des fonctions réelles sur l'ensemble DS(G); ils constituent un ESPACE VECTORIEL $\mathcal{G}$, que nous dirons TANGENT à G ; on peut montrer (note 13) que:

$$jet(F_1\ F_2) = jet(F_1) + jet(F_2).$$

Les jets des états différentiables sont des fonctions réelles (sur arc(G)); ils constituent un ESPACE VECTORIEL $\widehat{\mathcal{G}}$, que nous appellerons COTANGENT à G ; ρ ne dépend de M et F que par l'intermédiaire de leur jets respectifs m et f ; nous poserons

$$\rho = \{m, f\}\ ,$$

définissant ainsi une forme bilinéaire $\{.,.\}$; elle met $\widehat{\mathcal{G}}$ et $\mathcal{G}$ en dualité - chacun s'identifiant à une partie séparante du dual de l'autre.

Topologie de l'espace tangent:

Considérons le jet d'ordre 2 de la fonction MoF à l'origine: toujours en utilisant le fait qu'elle prend ses valeurs dans le disque Δ , on trouve un développement:

$$MoF(t) = 1 + i\rho t - \Big[\rho^2 + \sigma^2 + i\tau\Big]\ \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

où σ et τ sont réels comme ρ, et $\sigma \geqslant 0$.

Si f est un vecteur tangent, nous poserons:

$$\|f\|_M := \inf_{jet(F)=f} \sigma\ ;$$

$\|.\|_M$ est une SEMI-NORME sur $\mathcal{G}$. Lorsque M parcourt l'ensemble des états différentiables, les semi-normes associées forment un système complet, faisant de $\mathcal{G}$ un ESPACE VECTORIEL TOPOLOGIQUE LOCALEMENT CONVEXE.

- Le morphisme "jet": $arc(G) \longrightarrow \mathcal{G}$ est CONTINU - pour cette topologie de $\mathcal{G}$ et pour la topologie harmonique de arc(G).

- La forme bilinéaire $\{.,.\}$ plonge le cotangent $\widehat{\mathcal{G}}$ dans le dual TOPOLOGIQUE $\mathcal{G}'$ de $\mathcal{G}$.

Exemple:

Si G est un groupe de Lie, $\mathcal{G}$ est son algèbre de Lie (muni de la topologie usuelle), et $\widehat{\mathcal{G}}$ est le dual de $\mathcal{G}$.

Représentations adjointe et coadjointe:

Soit Φ : $G_1 \longrightarrow G_2$ un D-morphisme de groupe.

Il existe une application linéaire

$$T\Phi :\ \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2\ ,$$

dite "TANGENTE à Φ ", définie par:

$$T\Phi(jet(F)) = jet(\Phi oF) \qquad \forall F \in arc(G_1);$$

elle est continue pour la topologie de $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$ que nous venons de définir.

L'application linéaire COTANGENTE:

$$T^*\Phi : \hat{\mathcal{G}}_2 \to \hat{\mathcal{G}}_1$$

se définit par:

$$T^*\Phi(\mathrm{jet}(M)) = \mathrm{jet}(M\circ\Phi) \qquad \forall M \in DS(G_2);$$

elle est transposée de la précédente:

$$\left\{T^*\Phi(m), f\right\} = \left\{m, T\Phi(f)\right\} \qquad (\forall m \in \hat{\mathcal{G}}_2, \forall f \in \mathcal{G}_1).$$

La composition de deux D-morphismes Φ et Ψ conduit à:

$$T\left[\Phi \circ \Psi\right] = T\Phi \circ T\Psi$$

$$T^*\left[\Phi \circ \Psi\right] = T^*\Psi \circ T^*\Phi$$

En choisissant le cas d'un automorphisme intérieur:

$$\tau(g) = \quad g' \mapsto gg'g^{-1}$$

on définit la REPRESENTATION ADJOINTE $Ad : \quad G \to L(\mathcal{G})$:

$$Ad(g) = T\left[\tau(g)\right],$$

et la REPRESENTATION CO-ADJOINTE $Ad^* : \quad G \to L(\hat{\mathcal{G}})$:

$$Ad^*(g) = T^*\left[\tau(g^{-1})\right];$$

elles sont liées par la relation d'équivariance:

$$\left\{Ad^*(g)(m), Ad(g)(f)\right\} = \left\{m, f\right\}$$

qui permet de prolonger $Ad^*(g)$ sur le dual topologique $\mathcal{G}'$ et sur le dual algébrique $\mathcal{G}^*$.

3-forme de structure:

Soit G un groupe différentiel, M un état différentiable, F_1 et F_2 deux arcs.

- Le nombre:

$$\frac{1}{i}\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial u} M\left(F_1(t)\,F_2(u)\,F_1(t)^{-1}\,F_2(u)^{-1}\right)_{(t,u)=0}$$

est réel et ne dépend que des JETS m, f_1, f_2 de M, F_1, F_2; nous le noterons:

$$\left\{m, f_1, f_2\right\};$$

on peut aussi le calculer par:

$$\left\{m, f_1, f_2\right\} = \frac{d}{dt}\left\{m, Ad(F_1(t))(f_2)\right\}_{t=0}.$$

$\{.,.,.\}$ est une forme trilinéaire sur $\hat{\mathcal{G}} \times \mathcal{G} \times \mathcal{G}$, que nous appellerons FORME DE STRUCTURE de G.

Par rapport à ses arguments 2 et 3, elle est ANTISYMETRIQUE et CONTINUE; plus précisément (note 13):

$$\left|\left\{m, f_1, f_2\right\}\right| \leq 2\,\|f_1\|_M\,\|f_2\|_M,$$

M désignant tout état différentiable ayant m pour jet.

Exemple: si G est un groupe de Lie, les composantes de cette forme dans une base de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ sont les COEFFICIENTS DE STRUCTURE c^j_{kl} du groupe.

Algèbre de Lie:

La forme de structure permet de définir le CROCHET DE LIE $\left[f_1, f_2\right]$ de deux vecteurs tangents f_1, f_2, comme l'application

$$m \mapsto \left\{m, f_1, f_2\right\}$$

ce crochet appartient au dual du cotangent - et peut appartenir au tangent (qui s'identifie à une partie de ce dual); c'est le cas en particulier s'il est nul.

L'ensemble $\mathcal{G}_\bullet$ des vecteurs tangents $f_\bullet$ tels que:

$$\forall f \in \mathcal{G},\ \left[m \longmapsto \{m, f, , f\}\right] \in \mathcal{G}$$

et

$$\forall m \in \widehat{\mathcal{G}},\ \left[f \longmapsto \{m, f, , f\}\right] \in \widehat{\mathcal{G}};$$

est une ALGEBRE DE LIE pour ce crochet (note 13).

Deux exemples triviaux ou $\mathcal{G}_\cdot = \mathcal{G}$:

- G est un groupe de Lie;
- G est commutatif.

Exponentielle:

Soit G un groupe différentiel SEPARE. Un vecteur tangent à G sera dit COMPLET s'il est le jet d'un rayon. Il existe alors une application "exp" de l'ensemble des vecteurs complets dans G, caractérisée par

$$F(t) = \exp\left(t\ \mathrm{jet}(F)\right)$$

pour tout rayon F et tout réel t.

- Si f est complet, $\mathrm{Ad}(g)(f)$ est complet ($\forall g \in G$) et

$$\exp\left(t\ \mathrm{Ad}(g)(f)\right) = g \exp(tf)\ g^{-1} \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

- Plus généralement, si Φ est un D-morphisme $G \to H$, G et H étant séparés, et si f est un vecteur complet de G, $T\Phi(f)$ est un vecteur complet de H, et

$$\exp\left(t\ T\Phi(f)\right) = \Phi\left(\exp(tf)\right) \quad \forall t.$$

- Si f_1 et f_2 sont des vecteurs complets d'un groupe différentiel séparé G, et si

$$\left[f_1, f_2\right] = 0,$$

alors $f_1 + f_2$ est complet, et

$$\exp(f_1 + f_2) = \exp(f_1)\ \exp(f_2) = \exp(f_2)\ \exp(f_1)$$

- Mais la somme de deux vecteurs complets n'est pas toujours un vecteur complet: l'ensemble jet(étoile(G)) des vecteurs complets est une partie de $\mathcal{G}$ invariante par homothétie, par la la représentation adjointe; pas toujours un espace vectoriel.

- Si la difféologie de G est forte, tout vecteur tangent est une somme de vecteurs complets.

Difféologie coadjointe

Soit G un groupe différentiel, $\mathcal{G}$ et $\widehat{\mathcal{G}}$ ses espaces tangent et cotangent.

Munissons $\widehat{\mathcal{G}}$ de la DIFFEOLOGIE COADJOINTE, c'est-à-dire de la difféologie de Klein associée à l'action coadjointe de G sur $\widehat{\mathcal{G}}$, et considérons une fonction différentiable

$$\Phi : \mathbb{R} \to \widehat{\mathcal{G}}.$$

La "courbe" $\mathrm{val}(\Phi)$ est contenue dans une orbite coadjointe (parce qu'une difféologie de Klein est une difféologie somme); si f est un vecteur tangent à G, la fonction

$$t \longmapsto \left\{\Phi(t), f\right\}$$

est différentiable (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$); nous pouvons poser

$$\Phi'(t)(f) = \frac{d}{dt}\left\{\Phi(t), f\right\}$$

définissant ainsi une forme linéaire $\Phi'(t)$ sur $\mathcal{G}$; on l'appellera "vecteur tangent" à l'orbite au point $\Phi(t)$.

L'ensemble de ces vecteurs tangents en un point m est l'image de $\mathcal{G}$ par l'application

$$f \longmapsto x_f = \left[f' \longmapsto \left\{m, f', f\right\}\right],$$

et par conséquent constitue un espace vectoriel T (que nous dirons "tangent à l'orbite en m"); T est un sous-espace vectoriel, non seulement du dual algébrique $\mathcal{G}^*$, mais aussi du dual topologique $\mathcal{G}'$.

Considérons d'autre part, pour tout $f \in \mathcal{G}$, l'application linéaire c_f:

$$c_f(x) = x(f) \qquad \forall x \in T$$

L'ensemble

$$C = \left\{c_f \ /\ f \in \mathcal{G}\right\}$$

est un sous-espace vectoriel séparant du dual de T - nous l'appellerons espace COTANGENT à l'orbite en m.

Il se trouve que les deux applications linéaires

$$f \longmapsto x_f \ ,\ f \longmapsto c_f$$

ont même noyau: c'est l'ensemble des f tels que

$$\{m,f,f'\} = 0 \qquad \forall f' \in \mathcal{G} ;$$

par conséquent il existe une BIJECTION LINEAIRE σ de T sur C définie par

$$\sigma(x_f) = c_f \qquad \forall f ;$$

on constate que

$$\sigma(x_f)(x_{f'}) = \{m,f,f'\} \qquad \forall f, f' \in \mathcal{G}$$

et par conséquent que σ est une 2-forme antisymétrique sur T : on généralise ainsi la structure SYMPLECTIQUE des orbites coadjointes d'un groupe de Lie.

Spectres

Soit G un groupe différentiel, M un état continu, F un rayon.

MoF est un état continu de $\mathbb{R}$; d'après le théorème de Bochner, il existe une loi de probabilité ν sur $\mathbb{R}$ caractérisée par

$$MoF(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t}\, d\nu(\omega) \qquad \forall t \in \mathbb{R};$$

nous la noterons

spectre(M,F).

Si M est différentiable, MoF l'est aussi (quel que soit le rayon F), et par conséquent spectre(M,F) a des moments de tous ordres. En particulier la VALEUR MOYENNE est:

$$\overline{\text{spectre}(M,F)} = \{m,f\}$$

m et f désignant les jets de M et F ;

et l'ECART STANDARD σ vérifie:

$$\sigma(\text{spectre}(M,F)) \geqslant \|f\|_M;$$

d'où la RELATION D'INCERTITUDE:

$$\sigma\big(\text{spectre}(M,F_1)\big)\ \sigma\big(\text{spectre}(M,F_2)\big) \geqslant \frac{1}{2}\left|\{m,f_1,f_2\}\right|$$

Groupe statistique d'une variété

Soit X une variété séparée.

Nous appellerons OBSERVABLES de X les fonctions différentiables φ : $X \to \mathbb{R}$.

φ étant un observable, t un réel, x un point de X, posons:

$$E(\varphi)(t)(x) := e^{it\,\varphi(x)} \quad ;$$

$E(\varphi)$ est un RAYON du groupe de courants Γ^X; plus précisément, E est une bijection de $\mathbb{R}^X$ sur l'étoile de $\mathcal{T}^X$ ($\mathcal{T}$ désigne toujours le tore $U(1)$).

Munissons $\mathcal{T}^X$ de sa difféologie forte et désignons par

stat(X)

sa composante neutre.

G = stat(X) est un groupe différentiel fort et connexe, commutatif, que nous appellerons GROUPE STATISTIQUE de X ; lorsque φ parcourt l'ensemble des observables de X , $E(\varphi)$ parcourt l'ensemble des rayons de G et $E(\varphi)(1)$ parcourt G .

Désignons maintenant par

prob(X)

l'ensemble des LOIS DE PROBABILITE sur X , c'est-à-dire des mesures positives de masse 1.

Si $\mu \in$ prob(X), nous pouvons lui associer la fonction M :

$$M(g) = \int_X g(x)\, d\mu(x) \qquad \forall g \in \text{stat}(X) ,$$

que nous appellerons ETAT STATISTIQUE associé à μ ; M est effectivement un ETAT du groupe statistique; il est SUPERCONTINU, donc CONTINU;

- l'ensemble des états statistiques est une HARMONIE;

- si φ est un observable de X ,

$$\text{spectre}\big(M,E(\varphi)\big) = \varphi(\mu) \quad ,$$

$\varphi(\mu)$ désignant l'IMAGE par φ de la loi de probabilité μ (note 19); il en résulte que l'application $\mu \mapsto M$ est INJECTIVE.

- Si M est un état statistique, φ un observable, et α une fonction différentiable $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a:

$$\mathrm{spectre}\Big(M,E(\alpha \circ \varphi)\Big) = \kappa\Big(\mathrm{spectre}(M,E(\varphi))\Big) .$$

II: QUANTIFICATION GEOMETRIQUE

Structure des systèmes dynamiques classiques

Considérons un système dynamique classique (note 20); supposons que l'ensemble Y des "conditions initiales" du système (date comprise) possède une structure "naturelle" de variété séparée connexe; on l'appellera ESPACE D'EVOLUTION du système (note 21).

La DYNAMIQUE du système est caractérisée par une équivalence sur Y ; les classes s'appelleront MOUVEMENTS du système (note 22).

L'ensemble X des mouvements est un espace différentiel - comme quotient de Y ; nous l'appellerons ESPACE DES MOUVEMENTS.

Introduisons un axiome de la mécanique: l'espace des mouvements est une VARIETE SEPAREE (note 23).

Comme nous le savons, la difféologie de X est définie par le fait que la projection canonique Π de Y sur X est une submersion.

Mécanique statistique classique

Les procédures de cette théorie peuvent se décrire au moyen du GROUPE STATISTIQUE DE L'ESPACE X DES MOUVEMENTS.

-Un OBSERVABLE du système, ce sera par définition un observable de la variété X - c'est-à-dire une fonction différentiable : $X \to \mathbb{R}$:

$$Y \longrightarrow X \longrightarrow \mathbb{R};$$

les observables φ sont en bijection par $\varphi \mapsto \varphi \circ \Pi$ avec les fonctions qui sont DIFFERENTIABLES SUR Y et CONSTANTES SUR CHAQUE MOUVEMENT: ce qu'on appelle les "constantes du mouvement".

La mécanique statistique est probabiliste: l'"état physique" du système est décrit par une loi de probabilité μ sur X ; le résultat de la mesure d'un observable dans cet état est encore une loi de probabilité, à savoir l'image $\varphi(\mu)$.

Nous pouvons donc transcrire cette axiomatique en utilisant des résultats ci-dessus:

- l'état physique du système se caractérise par un ETAT STATISTIQUE M associé au groupe stat(X);
- la mesure d'un observable φ dans l'état M donne pour résultat

$$\mathrm{spectre}\big(M,E(\varphi)\big) .$$

Parmi ces états statistiques figurent les "états classiques": ce sont les points extrêmaux du convexe des états statistiques; ils sont en bijection avec les MOUVEMENTS x par:

$$M(g) = g(x) \qquad \forall g \in \mathrm{stat}(X);$$

dans un tel état M , chaque observable φ a le spectre "ponctuel" $\delta(\varphi(x))$, δ désignant la mesure de Dirac.

Structure symplectique et préquantique

Dans le cas des systèmes non dissipatifs, l'expérience permet de dégager d'autres principes de la mécanique:

Forme de Lagrange:

La variété X des mouvements est munie d'une structure symplectique grâce à une 2-forme σ : la "forme de Lagrange", dont l'équation aux dimensions est celle d'une action hamiltonienne:

$$ML^2T^{-1}$$

(note 24).

Les difféomorphismes de X respectant σ s'appellent SYMPLECTOMORPHISMES; ils constituent un groupe sympl(X); comme sous-groupe de diff(X), sympl(X) est un groupe différentiel séparé.
(note 25).

Difféologie hamiltonienne

Nous savons que tout rayon F de diff(X) est associé à un champ de vecteurs f sur X par:

$$F(t) = \exp(tf) \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Par contraction avec la forme symplectique σ , on en déduit une 1-forme σf.

F est un rayon de sympl(X) ssi σf est fermée; on dira que F est HAMILTONIEN ssi σf est exacte.

Considérons le GROUPE sympl(X); nous l'avons déjà muni d'une difféologie de groupe D , la difféologie standard des sous-groupes de diff(X).

Mais le même groupe sympl(X) possède une autre difféologie de groupe D' , caractérisée par les deux propriétés suivantes:

$$\begin{cases} D' \text{ est forte;} \\ \text{les } D'\text{-rayons sont les } D\text{-rayons hamiltoniens.} \end{cases}$$

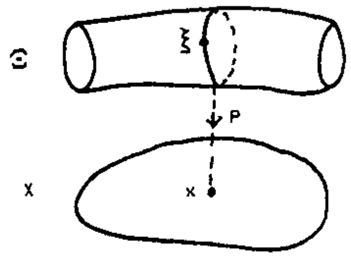
nous l'appellerons DIFFEOLOGIE HAMILTONIENNE; elle est plus fine que D , et aussi que la difféologie forte associée à D .

Variété quantique:

Introduisons maintenant la constante de Planck réduite:

$$\hbar = 1{,}05459E\text{-}31 \text{ g } m^2 s^{-1};$$

qui nous permet de formuler la condition de PREQUANTIFICATION:



Il existe une variété séparée Ξ , fibrée en cercles au dessus de X par une submersion P , et munie d'une 1-forme ω , telle que:

- ω est irréductible (note 26);
- la dérivée extérieure de ω est l'image réciproque par P de $\frac{\sigma}{\hbar}$;
- La circulation de ω sur chaque fibre est égale à 2π.

Il existe un critère de la possibilité de cette construction (il fait intervenir la cohomologie de la forme $\sigma/\hbar$); l'expérience montre que cette condition est TOUJOURS VERIFIEE dans les systèmes réels.

On définit simplement l'EQUIVALENCE de deux préquantifications de X , et on montre que les classes d'équivalence sont en bijection avec les caractères du groupe d'homotopie de X (supposée connexe).

Ce caractère sera considéré comme l'une des "propriétés physiques" du système; la variété Ξ, ainsi déterminée à une équivalence près, s'appellera VARIETE QUANTIQUE du système.

Quantomorphismes:

- Les difféomorphismes de Ξ qui préservent ω , ou QUANTOMORPHISMES, forment un

groupe différentiel quant(Ξ) ; il existe un D-MORPHISME STRICT P^* de quant(Ξ) dans Sympl(X), qui est défini par:

$$P^*(g)(P(\xi)) = P(g(\xi)) \qquad \forall g \in \text{quant}(\Xi), \qquad \forall \xi \in \Xi \; ;$$

le noyau de P^* est D-isomorphe au tore $\mathcal{T}$ et constitue le centre de quant(Ξ).

- Ξ et X sont respectivement des ESPACES DIFFERENTIELS HOMOGENES des groupes quant(Ξ) et sympl(X) .

Rayons de quant(Ξ)

On peut associer à chaque RAYON F du groupe quant(Ξ) un OBSERVABLE φ de la variété X par la formule:

$$\varphi(x) = \omega\left(\left[\frac{d}{dt} F(t)(\xi)\right]_{t=0}\right)$$

cette correspondance est une injection de l'étoile de quant(Ξ) dans l'ensemble des observables de X ; si φ est associée à un rayon F , nous dirons que φ est COMPLETE (note 27) et nous noterons

$$F = E(\varphi) \quad .$$

Exemple: l'observable $\mathbb{1}$:

$$\mathbb{1}(x) = 1 \qquad \forall x \in X$$

est complète; le rayon associé $E(\mathbb{1})$ a pour noyau $2\pi\mathbb{Z}$; il permet de définir une D-action libre du tore sur Ξ , A, par:

$$A(e^{ir})(\xi) = E(\mathbb{1})(r)(\xi) \qquad \forall r \in \mathbb{R}, \qquad \forall \xi \in \Xi \; ;$$

c'est cette action qui donne à Ξ sa structure d'espace fibré principal sur $\mathcal{T}$.

Groupes dynamiques

On appellera ACTION HAMILTONIENNE d'un groupe différentiel G tout D'-morphisme

$$G \rightarrow \text{sympl}(X),$$

D' désignant la difféologie hamiltonienne de sympl(X);

- on appellera GROUPE DYNAMIQUE (resp. QUANTODYNAMIQUE) un groupe de Lie connexe muni d'une action hamiltonienne A dans sympl(X) (resp. d'une D-action dans quant(Ξ)).

- Si (H,B) est un groupe quantodynamique, $(H,P^\sharp \circ B)$ est groupe dynamique;
- réciproquement, soit (G,A) est un groupe dynamique.

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "B"] \arrow[d] & \mathrm{quant}(\Xi) \arrow[d, "P^\sharp"] \\ G \arrow[r, "A"'] & \mathrm{sympl}(X) \end{tikzcd}$$

alors $\mathrm{val}(A) \subset \mathrm{val}(P^\sharp)$; le produit fibré:

$$H = \left\{(g,\gamma) \in G \times \mathrm{quant}(\Xi) \;/\; A(g) = P^\sharp(\gamma)\right\}$$

est un groupe de Lie, D-extension centrale stricte de G par le tore. Le D-morphisme

$$B: (g,\gamma) \mapsto \gamma$$

en fait un groupe quantodynamique.

Exemples:

- Si X est un espace vectoriel symplectique, l'extension quantodynamique du groupe de ses translations est le groupe de HEISENBERG-WEYL.

- Si le groupe de Galilée G est dynamique, son extension quantodynamique H (le GROUPE DE BARGMAN) n'est pas la même pour tous les systèmes; elle en dépend par l'intermédiaire d'un scalaire m.
- m s'interprète géométriquement comme une CLASSE DE COHOMOLOGIE associée à l'action hamiltonienne de G.

Soit (H,B) un groupe quantodynamique.

$$\mathbb{R} \xrightarrow{Z} H \xrightarrow{B} \mathrm{quant}(\Xi) \xrightarrow{P^\sharp} \mathrm{sympl}(X).$$

Si z appartient à l'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ de H,

$$Z : t \mapsto \exp(tz)$$

est un rayon de H ; $B \circ Z$ est un rayon de $\mathrm{quant}(\Xi)$, donc associé à un observable φ de X :

$$B \circ Z = E(\varphi);$$

l'application L :

$$z \mapsto \varphi$$

est linéaire (note 28) et vérifie:

$$L\left(\left[z,z'\right]_{Lie}\right) = M \left[L(z),L(z')\right]_{Poisson}$$

(note 29).

L'ensemble de valeurs de L est donc une algèbre de Lie (pour le crochet de Poisson), constituée d'observables complètes.

L'ensemble des observables, muni du crochet de Poisson, est une algèbre de Lie; mais celles qui sont complètes ne constituent pas toujours une sous-algèbre de Lie, ni même un espace vectoriel: ainsi, dans le cas où X est le plan muni des coordonnées canoniques p et q, les deux observables

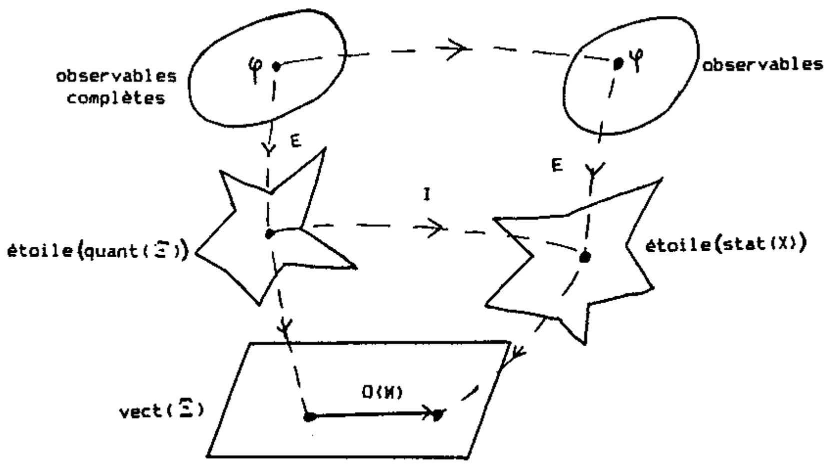
$$p^2,\ q^3$$

sont complètes, mais pas leur somme ni leur crochet de Poisson.

Deux groupes "infinitésimalement proches"

Nous venons d'étudier deux groupes différentiels, $\mathrm{stat}(X)$ et $\mathrm{quant}(\Xi)$; les rayons de chacun d'eux ont été associés à des variables dynamiques par une correspondance - notée E dans les deux cas.

Ceci définit entre les étoiles de ces groupes une injection I :



$\mathrm{quant}(\Xi)$ est un groupe de difféomorphismes de Ξ ; il se trouve qu'il existe aussi une réalisation B de $\mathrm{stat}(X)$ sur Ξ : il suffit de faire subir à chaque fibre $P^{-1}(x)$ le déphasage $g(x)$; ce qui s'écrit:

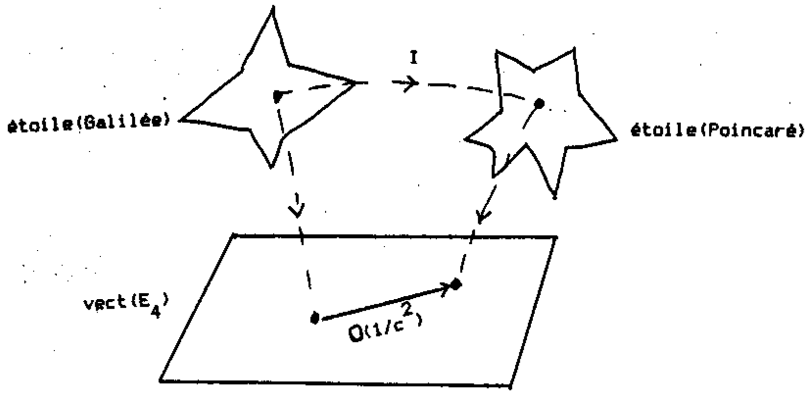
$$B(g)(\xi) = A(g(P(\xi)))(\xi) \qquad \forall g \in \mathrm{stat}(X), \quad \forall \xi \in \Xi \;;$$

A désigne l'action libre du tore sur Ξ.

Grâce à ces réalisations, les deux étoiles s'injectent dans l'espace vectoriel vect(Ξ) des champs de vecteurs différentiables sur Ξ.

Le calcul montre que des rayons associés par I se projettent sur des vecteurs "proches", en ce sens que leur différence s'exprime par une formule contenant la "petite constante" $\hbar$ en facteur (note 30).

De façon analogue, les groupes de Galilée et de Poincaré se réalisent tous les deux sur l'espace-temps E_4, et il existe une injection I entre les étoiles des deux groupes:



conduisant à des vecteurs dont la différence contient en facteur une autre petite constante:

$$1/c^2 = 1.11265E\text{-}17 \; m^{-2} s^{2} \;.$$

(note 31).

Tentative d'axiomatisation de la Mécanique Quantique

L'art de changer de groupe

La mécanique newtonienne se complète par le principe suivant:

> Si un système dynamique est isolé, il existe une action hamiltonienne
>
> $$G \longrightarrow \mathrm{sympl}(X)$$
>
> du groupe de Galilée G sur l'espace X des mouvements;

partant de ce principe, on peut déduire: la définition de la masse du système (c'est le nombre m associé à l'action de G ; voir plus haut); l'égalité de l'action et de la réaction; les théorèmes généraux de la dynamique; la décomposition barycentrique qui fait de X un produit cartésien symplectique; etc.

La relativité restreinte est construite sur l'hypothèse que ce principe de la mécanique est inexact - le groupe de Galilée n'y intervenant que parce qu'il est une APPROXIMATION du groupe de Poincaré (approximation valable dans des conditions expérimentales où on peut négliger la constante $1/c^2$); et que le seul principe conforme à la réalité se formule en remplaçant G par ce groupe de Poincaré (ou, plus précisément, par sa composante neutre).

De fait, ce nouveau principe conduit à des résultats vérifiables - comme l'équivalence de l'énergie avec la masse, au taux $1/c^2$.

Ainsi qu'on l'espérait, la différence entre les prédictions des deux mécaniques reste négligeable dans un grand nombre de cas - bien que les raisons n'en soient pas toujours claires.

De même:

- nous avons formulé les principes de la mécanique statistique à l'aide du groupe stat(X) de l'espace des mouvements;
- nous avons constaté que ce groupe peut être considéré comme une approximation du groupe quant(Ξ) qui intervient en mécanique classique au niveau de la préquantification - dans des conditions où la constante $\hbar$ apparaît comme négligeable;
- nous allons essayer de remplacer stat(X) par quant(Ξ) dans ces principes - donc de définir les "états quantiques" comme des états continus du groupe quant(Ξ).

Groupe quantique

A ce stade, il est prudent de commencer par essayer un principe plus faible.

Si N est un état de quant(Ξ), et si G est un groupe différentiel muni d'un D-morphisme dans quant(Ξ), on obtient par composition un état $M : \; G \longrightarrow \mathbb{C}$:

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{quant}(\Xi) \arrow[dr, "N"] & \\ G \arrow[ur] \arrow[rr, "M"'] & & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

mais l'existence de M n'entraîne évidemment pas celle de N .

Nous pouvons obtenir un tel groupe G par des constructions géométriques successives:

- La difféologie choisie pour stat(X) est forte; nous pouvons aussi munir quant(Ξ) de sa difféologie forte - grâce au D-morphisme identique:

$$\text{quant}(\Xi)_{\text{fort}} \longrightarrow \text{quant}(\Xi)_{\text{standard}}$$

- stat(X) est un groupe connexe; nous pouvons restreindre le groupe précédent à sa composante neutre:

$$\text{quant}(\Xi)_{\text{fort et connexe}} \longrightarrow \text{quant}(\Xi)_{\text{fort}}.$$

- Enfin nous pouvons remplacer ce dernier groupe par son REVETEMENT UNIVERSEL G , qui est encore un groupe fort et connexe; nous l'appelerons GROUPE QUANTIQUE. On établit facilement un diagramme commutatif de D-morphismes:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[d] & & \mathbb{R} \arrow[ll, "E(\varphi)"'] \arrow[d, "E(\varphi)"] \\
\text{quant}(\Xi)^{\circ}_{\text{fort}} \arrow[r] \arrow[d] & \text{quant}(\Xi)_{\text{fort}} \arrow[r] \arrow[d] & \text{quant}(\Xi)_{\text{standard}} \arrow[d] \\
\text{sympl}(X)^{\circ}_{\text{hamiltonien}} \arrow[r] & \text{sympl}(X)_{\text{hamiltonien}} \arrow[r] & \text{sympl}(X)_{\text{standard}}
\end{tikzcd}$$

où l'indice ° indique la composante neutre.

- Les opérations que nous venons d'effectuer (passage à la difféologie forte, restriction à la composante neutre, revêtement) ont la propriété de ne pas changer la structure de l'ETOILE d'un groupe. Par conséquent l'étoile de G sera canoniquement isomorphe à celle de quant(Ξ)$_{\text{standard}}$ - et nous ferons l'identification:

$$\left[\begin{array}{l} F \in \text{étoile}(G) \\ \iff \\ F = E(\varphi), \quad \varphi\text{: observable complète classique } X \to \mathbb{R}. \end{array}\right.$$

- Si $g \in G$, et si φ est un observable complet, on a:

$$E\left(\varphi \circ \Pi(g^{-1})\right)(t) = g\ E(\varphi)(t)\ g^{-1} \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Π étant le D-morphisme $G \to \text{sympl}(X)$.

Etats quantiques

Par analogie avec le cas des états statistiques, nous allons essayer le principe suivant:

(QS1)
L'état physique d'un système est caractérisé par un ETAT CONTINU du GROUPE QUANTIQUE G ;

- Dans un tel état M , le résultat de la mesure d'un observable complet φ est

$$\text{spectre}(M, E(\varphi)).$$

Mais tous les états continus de G ne pourront pas correspondre à des états physiques; nous allons essayer de choisir des axiomes déterminant mathématiquement la classe des "ETATS QUANTIQUES".

La première condition que nous allons proposer, c'est que le spectre de l'observable $\mathbb{1}$ - qui ne prend que la valeur 1 , soit concentré au point 1:

QS$\mathbb{1}$

$$\text{spectre}(M, E(\mathbb{1})) = \delta(1);$$

cette condition peut aussi s'écrire:

$$M\left(E(\mathbb{1})(t)\right) = e^{it} \qquad \forall t \in \mathbb{R};$$

on notera que les états qui satisfont cette condition constituent une HARMONIE, fermée pour la convergence uniforme (Cf. ci-dessous QS2).

La non-commutativité du groupe G va avoir des conséquences sur la "largeur" des spectres: ainsi, dans le cas où X est le plan muni des coordonnées canoniques p,q, une inégalité indiquée plus haut donne:

$$\sigma\left(\text{spectre}(M, E(p))\right)\ \sigma\left(\text{spectre}(M, E(q))\right) \geq \hbar/2$$

pour tout état différentiable M vérifiant QS$\mathbb{1}$; on reconnait la RELATION D'INCERTITUDE DE HEISENBERG, sous sa forme la plus stricte (on ne peut pas augmenter le deuxième membre).

Exemple:

Considérons un oscillateur harmonique à une dimension. L'observable "énergie":

$$H = \frac{p^2}{2m} + m\,\omega^2 \frac{q^2}{2}$$

est complète; le calcul montre que

$$E(H)\left(\frac{2\pi}{\omega\hbar}\right)$$

se projette sur l'élément neutre de quant(Ξ). Ceci montre la nécessité d'utiliser un revêtement comme groupe quantique; sinon, le spectre de l'énergie devrait être contenu dans

$$\hbar\omega\mathbb{Z};$$

alors que le spectre observé est contenu dans

$$\hbar\omega\left[\mathbb{Z}+\frac{1}{2}\right];$$

pour tous les états quantiques.

Formulation hilbertienne

Si M est un état continu de G, nous savons qu'il existe:

- un espace de Hilbert $\mathcal{H}$;
- une représentation continue ρ de G dans le groupe unitaire $U(\mathcal{H})$;
- un vecteur unitaire Ψ , cyclique, tel que:

$$M(g) = \langle \Psi,\ \rho(g)\,\Psi \rangle \qquad \forall g \in G;$$

le tout défini par M à une équivalence unitaire près.

Si φ est un observable complet, la fonction:

$$t \mapsto \rho(E(\varphi)(t))$$

est une représentation unitaire continue de $\mathbb{R}$ sur $\mathcal{H}$; le théorème de Stone nous indique qu'il existe un unique opérateur self-adjoint de $\mathcal{H}$, que nous noterons

$$\hat{\varphi}\ ,$$

tel que:

$$\rho(E(\varphi)(t)) = e^{it\hat{\varphi}} \qquad \forall t;$$

par conséquent on a:

$$M(E(\varphi)(t)) = \langle \Psi,\ e^{it\hat{\varphi}}\ \Psi \rangle \qquad \forall t \in \mathbb{R};$$

il en résulte que le spectre ν de l'observable φ dans l'état M est défini par:

$$d\nu(\omega) = d\,\langle \Psi,\ P(\omega)\,\Psi \rangle$$

P étant la FONCTION SPECTRALE (à valeur projecteur) du self-adjoint $\hat{\varphi}$; que la VALEUR MOYENNE de φ dans l'état M - si elle converge - vaut

$$\langle \Psi,\ \hat{\varphi}\ \Psi \rangle \ ;$$

etc.

En particulier, $\mathbb{1}$ est l'opérateur identique sur $\mathcal{H}$ - comme conséquence de l'axiome QS$\mathbb{1}$.

On se retrouve donc en terrain familier: les observables COMPLETS se "quantifient" par des opérateurs self-adjoints selon la règle

$$\varphi \mapsto \hat{\varphi}$$

et l'usage spectral de ces opérateurs est conforme aux règles de la mécanique quantique.

Une remarque: tout ce que nous venons d'écrire reste valable dans le cas de la mécanique statistique classique - bien que ce ne soit pas l'usage de la traiter en langage hilbertien.

Groupes quantodynamiques

Il est clair que les règles de Dirac ne sont cependant pas toutes valables dans le présent contexte; en particulier la quantification

$$\varphi \mapsto \hat{\varphi}$$

N'EST PAS UNE OPERATION LINEAIRE - et d'ailleurs ne peut pas l'être, puisque les observables complets ne constituent pas un espace vectoriel - pas plus d'ailleurs que les opérateurs self-adjoints.

Cependant la linéarité apparait si on se restreint aux observables associés à un GROUPE QUANTODYNAMIQUE H (ce sont donc les MOMENTS du groupe dynamique associé). Or les exemples classiques sont effectivement choisis dans ce cas-là.

Soit donc (H,B) un groupe quantodynamique:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H} & \xrightarrow{\tilde{B}} & G \\ \downarrow & & \downarrow \\ H & \xrightarrow[B]{} & \text{quant}(\Xi) \end{array}$$

Il est immédiat que B se relève, de façon unique, par un D-morphisme $\tilde{B}$: $\tilde{H} \to G$, $\tilde{H}$ étant le revêtement universel de H . Par conséquent, $\rho \circ \tilde{B}$ est une représentation unitaire continue du groupe de Lie H .

- Exemples: dans le cas où X est un espace vectoriel symplectique, et H le groupe de Heisenberg (voir plus haut), on constate que les opérateurs:

$$\hat{p}_j \; , \; \hat{q}_j$$

engendrent un espace vectoriel de self-adjoints, et vérifient les RELATIONS CANONIQUES DE COMMUTATION - écrites à la Weyl.

Axiome harmonique

Un des principes formulés par Dirac pour la mécanique quantique, c'est que TOUS LES VECTEURS UNITAIRES DE $\mathcal{H}$ décrivent des états quantiques: on les désigne d'ailleurs sous le nom de "vecteurs d'état".

Or si ψ' est un vecteur unitaire quelconque de $\mathcal{H}$, l'état M' qui lui est associé:

$$M'(g) = \langle \psi', \rho(g)\; \psi' \rangle$$

est une limite uniforme d'états subordonnés à M (c'est une conséquence du fait que ψ soit cyclique).

Mais la mécanique quantique usuelle introduit encore d'autres états - dits "mélangés"; ils sont définis par un "opérateur densité" Δ, positif et de trace 1 (c'est donc un opérateur-à-trace); le spectre ν de φ dans cet état étant donné par:

$$d\nu(\omega) = d\, \mathrm{Tr}\big(\Delta\, P(\omega)\big).$$

Or tous ces objets feront partie des états quantiques si nous adoptons l'axiome suivant:

QS2

L'ensemble des états quantiques est une HARMONIE, fermée pour la convergence uniforme sur G.

Remarque: cet axiome est aussi vérifié par l'ensemble des états statistiques classiques sur stat(X).

Fonctionnalité

Soit φ un observable complet; soit ν la loi de probabilité, résultat de la mesure de φ dans un état M :

$$\varphi \xrightarrow{M} \nu$$

Si α est une fonction différentiable $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on peut démontrer que l'observable $\alpha \circ \varphi$ est encore complet; les notions probabilistes usuelles resteront applicables si le résultat de la mesure de $\alpha \circ \varphi$ dans le même état est $\alpha(\nu)$:

$$\alpha \circ \varphi \xrightarrow{M} \alpha(\nu)$$

comme dans le cas des états statistiques.

Ceci conduit donc à proposer pour les états quantiques M l'AXIOME DE FONCTIONNALITE:

QS3

Pour tout observable complet φ et toute fonction différentiable α : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a:

$$\mathrm{spectre}\big(M, E(\alpha \circ \varphi)\big) = \alpha\Big(\mathrm{spectre}\big(M, E(\varphi)\big)\Big)$$

d'où on tire immédiatement:

Si un observable complet φ prend ses valeurs dans une partie I de $\mathbb{R}$ fermée et convexe (demi-droite ou intervalle), son spectre dans tout état quantique est contenu dans I ,

et, comme cas particulier, l'axiome QS1 proposé plus haut.

Fonctionnalité hilbertienne

- Compte tenu de QS2, l'axiome QS3 de fonctionnalité a une transcription hilbertienne simple:

$$\widehat{\alpha \circ \varphi} = \alpha(\hat{\varphi})$$

pour tous les α et φ vérifiant les conditions de QS3 ; $\alpha(\hat{\varphi})$ désigne l'image par α du self-adjoint $\hat{\varphi}$; elle est définie par les règles du "calcul fonctionnel", qui s'appliquent même dans le cas d'une fonction α non bornée.

Ces axiomes font-il partie de la pratique quantique? On les utilise effectivement dans certains cas classiques, par exemple lorsqu'on fait la substitution:

$$\widehat{p^2} \to \hat{p}^{\,2}$$

ou

$$\widehat{V(q)} \to V(\hat{q})$$

mais cet usage est souvent clandestin - grâce à l'ambiguité des notations: on écrit hypocritement p^2 ou $V(q)$....

Autre exemple: il existe un modèle symplectique classique de particule à spin; il est préquantifiable ssi la longueur $\|\vec{s}\|$ de ce spin est multiple de $\hbar/2$.

Plaçons nous dans le cas $\hbar/2$; considérons les trois composantes du vecteur unitaire:

$$\vec{\sigma} = 2\,\vec{s}/\hbar.$$

En utilisant d'une part le fait que ce sont des moments associés au groupe quantodynamique SU(2) , d'autre part l'axiome QS3 , on rend rigoureux le raisonnement de Dirac qui conduit aux relations:

$$\hat{\sigma}_x^{\,2} = 1; \qquad \hat{\sigma}_y\,\hat{\sigma}_z = -\,\hat{\sigma}_z\,\hat{\sigma}_y = i\,\hat{\sigma}_x, \quad .....$$

qui traduisent l'effet Stern-Gerlach.

Mais cet axiome de fonctionnalité se heurte à une difficulté majeure: nous ne savons pas s'il existe effectivement des états qui le vérifient.

A fortiori, la compatibilité de QS3 avec avec QS1 et QS2 n'est pas assurée: nous pouvons définir les états quantiques comme les états continus de G dont les subordonnés sont fonctionnels; les axiomes QS1,2,3 seront vérifiés par cet ensemble, mais nous ne savons pas si cet ensemble n'est pas vide.

Il faut donc considérer cette axiomatique comme provisoire - et examiner ses conséquences - ce que nous ne ferons pas ici. S'il apparaissait une contradiction, la question se poserait d'une modification de QS3 qui rétablisse la compatibilité logique sans faire disparaître la conformité de la théorie avec la physique quantique.

NOTES

1: L'ensemble $D(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$ des applications de classe C^∞ d'un ouvert de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ est défini une fois pour toute en analyse réelle.

2: On peut modifier cette axiomatique en remplaçant, dans l'axiome D_2, l'ensemble $D(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$ par l'ensemble des applications d'un ouvert de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ qui sont analytiques réelles; on définira ainsi les ESPACES DIFFERENTIELS ANALYTIQUES - généralisation des variétés analytiques. De même les espaces différentiels ANALYTIQUES COMPLEXES se définissent de façon évidente.

3: Le signe $\circ$ désigne la composition des applications - qui reste associative malgré la variabilité des ensembles de définition.

4: Dans le cas où X et X' sont chacune une variété, on peut effectivement caractériser ainsi les applications différentiables au sens usuel.

5: L'usage de cette notation est permis parce qu'elle est cohérente avec les notations $D(\mathbb{R}^n,X)$ et $D(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$ utilisées dans les axiomes; ce résultat reste vrai dans le cas des espaces analytiques (note 2).

6: A^{-1} est défini en considérant A comme une bijection de son ensemble de définition $\mathrm{def}(A)$ sur son ensemble de valeurs $\mathrm{val}(A)$.

7: Autre définition: $\forall n,\ D'(\mathbb{R}^n,X) \subset D''(\mathbb{R}^n,X)$

8: Dans le cas où A est surjective, cette difféologie D' se caractérise par la condition de RELEVEMENT LOCAL:

$$F' \in D'(\mathbb{R}^n,X')$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\forall r \in \mathrm{def}(F'),\ \text{il existe } F \in D(\mathbb{R}^n,X) \text{ tel que:}$$

$$\begin{cases} r \in \mathrm{def}(F); \\ F' \text{ est un prolongement de } A \circ F. \end{cases}$$

9: Voir P.Donato, P.Iglesias, preprint C.P.T.83 p.1524 (1983).

10: C'est la BORNE INFERIEURE des difféologies images des X_j par les A_j .

11: Une application F d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dans X appartient à $D(\mathbb{R}^n,X)$ ssi

$$A \circ F \in D(\mathbb{R}^n,X)$$

12: Les éléments de $D(\mathbb{R}^n,X)$ sont simplement ceux de $D(\mathbb{R}^n,X')$ dont l'ensemble de valeurs est contenu dans X .

13: Voir J.M.Souriau, Springer Lecture Notes in Mathematics 836, pp.91-128 (1980).

14: Le quotient de $\mathbb{R}$ par un sous-groupe à deux générateurs est difféomorphe à un quotient irrationnel du tore à 2 dimensions (noté plus haut T^2/α).

15: Explicitement, $F \in D(\mathbb{R}^n, \mathrm{diff}(X))$ si et seulement si:

$$\left[(r,x) \longmapsto F(r)(x)\right] \in D(\mathbb{R}^n \times X\ ,\ X)$$

et

$$\left[(r,x) \longmapsto F(r)^{-1}(x)\right] \in D(\mathbb{R}^n \times X\ ,\ X);$$

dans les cas où X est une variété, cette dernière condition est impliquée par la précédente.

16: P. Donato, thèse (en préparation).

17: Construction de Gelfand-Naimark-Segal.

18: On utilise l'"espace de Hilbert $\mathcal{H}$ de X", engendré par les demi-densités de X complexes, de classe C^∞, à support compact; $\mathcal{H}$ est un espace de représentation unitaire continue de diff(X).

19: Cette image est définie explicitement par

$$\int \beta(t)\ d\left[\varphi(\mu)(t)\right] = \int \beta(\varphi(x))\ d\mu(x)$$

β désignant une fonction d'essai arbitraire.

20: Cas standard: un système de n points de masses m_j, de positions $\vec{r}_j$, de vitesses $\vec{v}_j$, soumis à des forces $\vec{F}_j$.

21: Dans l'exemple choisi, Y est l'ensemble des

$$y = (t, \vec{r}_1, \ldots \vec{r}_n, \vec{v}_1, \ldots \vec{v}_n),$$

t désignant une date; Y est une variété comme partie ouverte de $\mathbb{R}^{1+6n}$.

22: Les mouvements classiques sont des courbes tracées sur Y, solution des

équations de Newton

$$\frac{d\vec{r}_j}{dt} = \vec{v}_j \quad ; \quad m_j \frac{d\vec{v}_j}{dt} = \vec{F}_j(y)$$

23: On obtient en général ce résultat en supposant que les forces $\vec{F}_j$ sont des fonctions différentiables de y, et en choisissant comme mouvements les solutions connexes maximales des équations de Newton. Mais dans certains cas il faut définir la dynamique par une équivalence moins fine (procédure de REGULARISATION des systèmes avec collisions).

24: σ est caractérisée par son image réciproque sur l'espace d'évolution Y:

$$\sigma(\delta y, \delta' y) =$$

$$\sum_j \langle \delta\vec{v}_j - \vec{F}_j\,\delta t,\ m_j\,\delta'\vec{r}_j - \vec{v}_j\,\delta' t\rangle - \langle \delta'\vec{v}_j - \vec{F}_j\,\delta' t,\ m_j\,\delta\vec{r}_j - \vec{v}_j\,\delta t\rangle$$

δ et δ' désignant deux variations, $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire de l'espace euclidien; σ caractérise donc en particulier les forces.

Pour que X soit symplectique, il faut que cette forme soit fermée, ce qui impose des conditions aux forces ("conditions de Maxwell"); elles sont vérifiées en particulier s'il existe un potentiel.

25: Il existe sur l'espace des mouvements X une mesure positive λ, invariante par sympl(X): la MESURE DE LIOUVILLE.

Les états statistiques considérés classiquement sont définis par une loi de probabilité

$$\mu = \rho\lambda\ ,$$

ρ étant la FONCTION DE DISTRIBUTION; relevée sur l'espace d'évolution Y, ρ est solution de l'EQUATION DE LIOUVILLE (comme toute constante du mouvement).

26: Le feuilletage caractéristique de ω au sens de Cartan, $\ker(\omega) \cap \ker(d\omega)$, est réduit à zéro.

27: φ est complète ssi son gradient symplectique est complet sur X.

28: On peut caractériser L par l'application Ψ:

$$\Psi(x)(z) := L(z)(x)$$

qui est différentiable de X dans le dual $\mathcal{G}^*$ de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$; Ψ est un MOMENT du groupe dynamique $(H, P^* \circ R)$.

29: Le crochet de Poisson de deux observables se définit canoniquement à partir de la structure symplectique de X .

30: le vecteur différence $\delta\xi$ est défini par:

$$\omega(\delta\xi) = 0$$

$$\sigma(\delta' x)(\delta x) = \varkappa\, \delta'\varphi \qquad \forall \delta'.$$

31: Il existe un choix de I pour lequel le vecteur différence $\delta(\vec{r}, t)$ est donné par:

$$\delta \vec{r} = 0$$

$$\delta t = -\frac{1}{c^2} \langle \vec{v}, \vec{r} \rangle$$

$\vec{v}$ étant la vitesse infinitésimale d'entraînement.
