MECANIQUE CLASSIQUE
ET
GEOMETRIE SYMPLECTIQUE

Jean-Marie Souriau+

Séminaire Sud-Rhodanien de Géométrie
(Avignon-Lyon-Marseille-Montpellier)

Journées internationales de la Société Mathématique de France:

"Géométrie symplectique et mécanique"

Balaruc-les-Bains, mai 1984

+ Université de Provence et Centre de Physique Théorique C.N.R.S.

Adresse postale:

C.P.T. - C.N.R.S.
Luminy - Case 907
13288 MARSEILLE CEDEX 9
France

Novembre 1984
CPT-84/PE.1695

Sommaire

Depuis quelques années, un terrain d'entente entre mathématiciens et physiciens est apparu: les vérifications expérimentales des théories de jauge ont montré que la géométrie différentielle était indispensable pour comprendre la physique des particules.

Or on peut se placer à un niveau beaucoup plus élémentaire, en apparence: celui de la mécanique classique. La géométrie différentielle permet de "revisiter" ce territoire - et d'y découvrir quelques paysages surprenants: le présent travail n'est qu'un guide de ces contrées encore peu fréquentées.

Tous ces aspects de la mécanique sont invisibles si on reste emprisonné dans la scolastique que les épigones de Lagrange appelaient "mécanique analytique": il faut d'abord renvoyer aux vieilles lunes l'espace de configuration, l'espace de phases et le formalisme hamiltonien: ces concepts résultent d'un découpage en tranches de la dynamique; découpage arbitraire qui casse la structure globale.

Sur cette table rase, on peut construire le "matérialisme symplectique", une conceptualisation du concret qui colle mieux avec les faits. Les notions mécaniques classiques ou plus récentes (force, impulsion, moment, énergie, masse, action et réaction, charge électrique, spin, moment magnétique, etc.) entrent alors en géométrie; elles donnent des exemples matériels de structures mathématiques diverses: variétés symplectiques et pré-symplectiques, cohomologie des groupes et des algèbres de Lie, homotopie, homologie, etc.

Pour le lecteur mathématicien, ces pages peuvent donc servir d'illustration à ces théories - et suggérer quelques problèmes nouveaux.

Le physicien y trouvera des modèles mieux structurés de ces objets familiers. L'organisation qui se révèle ainsi permet de répondre à des questions délicates, comme les problèmes d'interaction envisagés au paragraphe (2,8).

Nous indiquons enfin comment la géométrie établit un lien entre la mécanique classique et des descriptions plus précises de la matière: mécanique statistique, relativité restreinte. Mais la quantification géométrique n'est pas abordée ici.

1) Les espaces de la mécanique

(1,1) - Renoncer à l'espace de phases

On a souvent enseigné, en mécanique analytique, qu'un système dynamique matériel pouvait se décrire par:
- un "espace de configuration" Q, qui est une variété;
- un "espace de phases" Φ, qui est le fibré cotangent de Q, et à ce titre une variété symplectique;
- un "hamiltonien" H, fonction différentiable sur Φ.

Les équations du mouvement sont alors définies par le flot hamiltonien; avec des coordonnées canoniques p_j, q_j (par exemple celles qui ont été définies par Poisson) elles s'écrivent:

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j} \qquad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

la variable t désignant le temps; ce sont les "équations canoniques de Hamilton".

Le FORMALISME HAMILTONIEN ainsi construit est parfois dit "indépendant des coordonnées"; ce qui exprime son invariance vis à vis des difféomorphismes (locaux ou globaux) de l'espace de configuration Q; difféomorphismes que l'on sait relever à Φ.

En fait ce formalisme possède une invariance globale plus forte: par le groupe $\mathrm{Can}(\Phi)$ de toutes les TRANSFORMATIONS CANONIQUES de l'espace de phases Φ. Les transformations canoniques qui ne proviennent pas d'un difféomorphisme de Q défient l'interprétation, mais constituent un outil mathématique qui a été utilisé avec succès en mécanique céleste.

Le formalisme hamiltonien a donc la vertu "géométrique" de mettre en évidence un groupe de symétries qui échappe à l'intuition. Mais cette géométrisation n'est pas tout-à-fait suffisante, comme le montrent les difficultés suivantes:

Il y a des systèmes mécaniques qui ne peuvent pas se décrire par un hamiltonien: par exemple une particule chargée soumise à un champ magnétique.

Plus radicalement, il existe des systèmes dynamiques pour lesquels on peut encore définir un espace de phases symplectique Φ - mais pas d'espace de configuration associé. C'est ce qui arrive en particulier si la forme symplectique de Φ n'est pas exacte; or il existe de tels exemples qui n'ont rien d'artificiel [ci-dessous (2,8)].

- D'autre part il y a des cas tout à fait classiques où il manque quelque chose à l'espace de phases: ce sont les systèmes qui peuvent présenter des collisions (cas du billard, de la théorie cinétique des gaz, ou simplement du système à deux corps newtonien); à une date t où se produit une collision, le système "sort" de l'espace de phases: les propriétés GLOBALES du système nous échappent.

Enfin, même dans les cas les plus classiques, le formalisme hamiltonien ne permet pas d'interpréter les changements de repère DEPENDANT DU TEMPS. Passer d'un repère "fixe" à un repère "mobile" met en jeu un difféomorphisme de $Q \times \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ étant la droite temporelle); le groupe $\mathrm{Can}(\Phi)$ ne contient pas la réponse à ce problème. Même dans le cas le plus simple d'un mouvement de translation rectiligne uniforme, l'hamiltonien ne se conserve pas; et dans un référentiel accéléré, les équations du mouvement ne dérivent plus d'aucun hamiltonien.

La conceptualisation du mouvement par la promenade hamiltonienne d'un point dans un espace de phases intemporel est donc insuffisante.

(1,2) - Espace d'évolution et espace des mouvements

Commençons par considérer le cas élémentaire d'un point matériel de masse m , soumis à une force $\vec{F}$.

Désignons par t la date, $\vec{r}$ la position du point, par $\vec{v}$ sa vitesse. Les équations de Newton:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \\ m\,\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \end{cases}$$

constituent un système différentiel de type classique si la force $\vec{F}$ est donnée explicitement en fonction de:

$$y = (t, \vec{r}, \vec{v})$$

et s'il s'agit d'une fonction de classe C^∞.

Nous appellerons ESPACE D'EVOLUTION Y l'ensemble de définition de $\vec{F}$; nos hypothèses impliquent que Y est un ouvert de l'espace affine décrit par $(t, \vec{r}, \vec{v})$ - donc une VARIETE SEPAREE DE DIMENSION 7.

Deux exemples:

- la "force électro-magnétique":

$$\vec{F} = q[\ \vec{E}(t,r)\ -\vec{B}(t,r) \times \vec{v}\ ];$$

le coefficient q est la "charge électrique", les vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont respectivement le "champ électrique" et l'"induction magnétique"; le signe $\times$ représente le produit vectoriel de l'espace à 3 dimensions.

- la "force coulombienne":

$$\vec{F} = -k \frac{\vec{r}}{r^3} \qquad r = |\vec{r}|;$$

ici Y est l'ensemble $\left\{ (t,\vec{r},\vec{v}) \ / \ \vec{r} \neq 0 \right\}$.

L'interprétation géométrique des équations du mouvement (1,2) est claire: elles définissent en chaque point y de Y une DIRECTION TANGENTE; les LIGNES DE FORCE associées caractérisent les mouvements possibles du système.
En d'autre termes, les équations du mouvement constituent un FEUILLETAGE de dimension 1, et les mouvements sont les FEUILLES correspondantes (variétés intégrales connexes maximales).

L'ensemble X de ces mouvements est donc un QUOTIENT de l'espace d'évolution Y ; avec les hypothèses faites ici, la structure de variété C^∞ de Y descend sur X ; comment ? de façon que la projection $Y \to X$ soit une submersion.

L'espace des mouvements ainsi défini est une VARIETE DE DIMENSION 6 ; on peut montrer qu'elle est SEPAREE si les mouvements sont tous "éternels" - c'est-à-dire si la projection $y \mapsto t$ induit sur chaque feuille une bijection avec $\mathbb{R}$.

Par contre, dans le cas ci-dessus de la force coulombienne attractive ($k>0$), X N'EST PAS séparée; ceci parce que les mouvements rectilignes se terminent par des collisions.

(1,3) - Systèmes dynamiques

Considérons maintenant un cas un peu plus général, un "système dynamique" constitué de n points matériels; notons:

$$m_j \ , \ \vec{r}_j \ , \ \vec{v}_j \ , \ \vec{F}_j$$

la masse, la position, la vitesse du point N° j, et la force qui lui est appliquée; posons:

$$y = (t,\ \vec{r}_1,\ \ldots\ \vec{r}_n, \vec{v}_1,\ \ldots\ \vec{v}_n);$$

et supposons que chacune des forces soit fonction de y : cette hypothèse permet d'envisager le cas de points matériels en "interaction" (la force appliquée au point j peut dépendre des positions et des vitesses des autres points); un exemple typique est le problème des n corps newtonien.

L'ensemble Y où sont définies ces forces sera supposé ouvert et constituera donc une variété de dimension $6n+1$, l'espace d'évolution du système; chacune des forces sera différentiable.

Sous ces hypothèses, les équations du mouvement:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{r}_j}{dt} - \vec{v}_j = 0 \\ m_j \dfrac{d\vec{v}_j}{dt} - \vec{F}_j = 0 \end{cases}$$

pour $j = 1 \dots n$

définissent encore un feuilletage de dimension 1, et l'espace des mouvements, quotient de Y par ce feuilletage, est une variété X de dimension $6n$.

Un cas particulier intéressant, c'est celui où les particules N'INTERAGISSENT PAS, c'est-à-dire ou chaque force $\vec{F}_j$ ne dépend que de $\vec{r}_j$, $\vec{v}_j$ et t. On peut alors intégrer séparément chacune des équations du mouvement; ce qui permet d'identifier la variété X des mouvements du système avec le PRODUIT CARTESIEN des n variétés X_j qui décrivent les mouvements individuels de chaque particule.

On remarquera que l'espace d'évolution Y N'EST PAS le produit des espaces d'évolution individuels.

Nous pouvons aussi décrire une notion mécanique nouvelle: un système de n particules INDISCERNABLES sans interactions mutuelles.

Soit X l'espace des mouvements d'une seule particule; on définira l'espace X_n des mouvements de ce système comme l'ensemble des PARTIES de X dont le cardinal est égal à n.

Il est clair que l'application:

$$I_n : (x1, x2, \dots xn) \longmapsto \{x1, x2, \dots xn\}$$

du SYSTEME de n points de X sur l'ENSEMBLE de ces points est une surjection d'une partie X^{n*} de X^n sur X_n; ceci permet de donner une structure de variété à X_n : celle pour laquelle I_n est une submersion; X_n est toujours une variété de dimension $6n$.

Il est evident que X^{n*} (sous-variété ouverte de X^n) est un REVETEMENT de X_n ; revêtement associé à un groupe discret de difféomorphismes de X^{n*}, à savoir le GROUPE SYMETRIQUE Sn (groupe des permutations de x1 ... xn).

2) Mécanique symplectique

(2,1) - Principe des travaux virtuels

On appelle ainsi une autre écriture des équations du mouvement: on considère deux VARIATIONS δ et δ', selon la notation d'Euler et Lagrange; δy et $\delta' y$ désignent des vecteurs tangents à Y au point y ; si le vecteur δy est TANGENT AU MOUVEMENT, on aura:

$$\sum_j \left\langle m_j \, \delta \vec{v}_j - \vec{F}_j \, \delta t, \ \delta' \vec{r}_j - \vec{v}_j \, \delta' t \right\rangle = 0 \qquad \forall \, \delta' y;$$

les crochets $\langle \, , \, \rangle$ désignent le produit scalaire de l'espace euclidien.

Cette procédure a été introduite pour traiter le cas de systèmes soumis à des LIAISONS PARFAITES HOLONOMES, caractérisées par une "équation de liaison" du type:

$$F(t, \vec{r}_1, \ldots \vec{r}_n) = 0$$

F étant une fonction différentiable à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans une variété. Dans ce cas le vecteur $\delta' y$ doit être "compatible avec les liaisons", c'est-à-dire vérifier l'équation linéaire dérivée:

$$\delta' F = 0;$$

et les vitesses $\vec{v}_j$ doivent vérifier une équation affine qui exprime la permanence de la liaison $F = 0$. Le cas typique - héritier lointain des travaux d'Archimède sur l'équilibre des leviers - est celui de la mécanique du solide.

On remarquera que la forme originale du principe, selon d'Alembert, se limite au cas où $\delta' t = 0$ (ce qui oblige les traités classiques à parler de "déplacements virtuels compatibles avec les liaisons telles qu'elles existent à l'instant t ").

(2,2) - Forme de Lagrange

Pour simplifier, limitons nous au cas non lié. Nous allons "antisymétriser" le principe des travaux virtuels (2,1) - en définissant une 2-FORME σ sur Y par la formule:

$$\sigma(\delta y, \delta' y) = \sum_j \langle m_j \, \delta \vec{v}_j - \vec{F}_j \, \delta t, \; \delta' \vec{r}_j - \vec{v}_j \, \delta' t \rangle - \langle m_j \, \delta' \vec{v}_j - \vec{F}_j \, \delta' t, \; \delta \vec{r}_j - \vec{v}_j \, \delta t \rangle$$

Nous l'appellerons FORME DE LAGRANGE du système [pourquoi? voir le §(2,5)].

Il est clair que:

$$\delta y \text{ tangent au mouvement} \Rightarrow \sigma(\delta y, \delta' y) = 0 \qquad \forall\, \delta' y$$

ce que nous écrirons encore:
$$\delta y \in \ker(\sigma);$$

en fait, une vérification immédiate montre que cette condition est EQUIVALENTE, que les équations du mouvement sont caractérisées par le NOYAU de la forme de Lagrange (ceci en supposant les masses m_j non nulles). Autrement dit, le rang de σ, nécessairement pair pour des raisons algébriques, est égal à $6n$.

A vrai dire, l'expression ci-dessus de σ n'est pas la seule qui possède cette propriété; nous pouvons par exemple choisir arbitrairement des fonctions différentiables $\vec{B}_j(y)$ et poser:

$$\sigma(\delta y, \delta' y) = \sum_j \langle m_j \, \delta \vec{v}_j - \vec{F}_j \, \delta t, \; \delta' \vec{r}_j - \vec{v}_j \, \delta' t \rangle - \langle m_j \, \delta' \vec{v}_j - \vec{F}_j \, \delta' t, \; \delta \vec{r}_j - \vec{v}_j \, \delta t \rangle + \langle \vec{B}_j, \; [\delta \vec{r}_j - \vec{v}_j \, \delta t] \times [\delta' \vec{r}_j - \vec{v}_j \, \delta' t] \rangle$$

le signe $\times$ représentant comme en (1,2) le produit vectoriel de l'espace. Rien n'est changé au résultat précédent, les termes supplémentaires ne modifient pas $\ker(\sigma)$.

Comment choisir? la réponse est au paragraphe suivant.

- Il existe a priori une différence qualitative entre la forme de Lagrange que nous venons de définir et une 2-forme au sens des géomètres: si on veut utiliser l'une des formules ci-dessus pour calculer σ, le résultat dépendra des UNITES DE MESURE choisies pour le temps, les longueurs et masses. Pour définir une "vraie" 2-forme, Il faut encore donner une règle indiquant comment faire ce choix.

Il s'agit d'une question classique d'analyse dimensionnelle: l'"équation aux dimensions" de σ est:

$$A = ML^2T^{-1} ;$$

A , parce que c'est la même que pour l'ACTION HAMILTONIENNE.

Or la physique met obligeamment à notre disposition une constante universelle ayant précisément cette dimension: le "QUANTUM D'ACTION" ou "CONSTANTE DE PLANCK":

$$\hbar = 1.05459 \times 10^{-27} \text{ g cm}^2 \text{ sec}^{-1}$$

La règle cherchée consistera donc à choisir des unités telles que $\hbar = 1$ ("unités quantiques") ou, ce qui revient au même, à mettre le facteur $\frac{1}{\hbar}$ devant l'expression de σ .

(2,3) - Principe de Maxwell

Nous appellerons ainsi un nouveau principe de la mécanique:

La forme de Lagrange σ est FERMEE

(sa dérivée extérieure $d\sigma$ est nulle).

Si ce principe est vérifié, σ donne à la variété d'évolution Y une structure PRESYMPLECTIQUE (2-forme fermée de rang constant).

Un principe équivalent a été effectivement formulé par Maxwell dans le cas d'un système de points en interaction élastique ("loi de réciprocité"). Sous sa forme géométrique générale, l'expérience montre que ce principe est vérifié par une large classe de systèmes dynamiques réels (dits NON DISSIPATIFS); c'est le cas par exemple pour le système newtonien des n corps.

- Dans certains cas, le principe de Maxwell ne s'appliquera qu'en utilisant la forme de Lagrange COMPLETEE PAR DES TERMES EN $\vec{B}_j$ (2,2).
Du coup, l'apparition de ces termes perd son caractère arbitraire; en effet, il y a UN SEUL CHOIX des $\vec{B}_j$ qui vérifie le principe de Maxwell.

Exemples:

■ - Le principe de Maxwell est vérifié s'il existe un POTENTIEL pour les forces; c'est-à-dire une fonction:

$$v(t, \vec{r}_1, \ldots \vec{r}_n)$$

telle que

$$\vec{F}_j = - \frac{\partial v}{\partial \vec{r}_j}$$

(notation abusive qui identifie vecteurs et covecteurs grâce à la structure euclidienne de l'espace). On le vérifie en définissant sur Y la FONCTION HAMILTONIENNE:

$$H(y) = \frac{1}{2}\sum_j m_j \left|\vec{v}_j\right|^2 + V(t,\vec{r}_1,\ldots\vec{r}_n)$$

et la 1-FORME DE CARTAN ϖ :

$$\varpi(\delta y) = \sum_j \langle m_j\vec{v}_j , \delta\vec{r}_j\rangle - H\ \delta t;$$

Un calcul simple montre en effet que:

$$\sigma = d\varpi$$

et par conséquent que $d\sigma$ est bien nul. C'est dans ce cas que s'applique le formalisme hamiltonien envisagé en (1,1). ■

■ - Autre exemple: pour un point soumis au champ électromagnétique [ci-dessus (1,2)], le principe de Maxwell se formule par les conditions:

$$\mathrm{div}\ \vec{B} = 0\ ;\quad \mathrm{rot}\ \vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0\ .$$

Remarquable coïncidence: on reconnaît deux des "équations de Maxwell" qui expriment respectivement l'absence de charges magnétiques (expérience de l'aimant brisé) et la loi de l'induction de Faraday (grâce à laquelle les alternateurs produisent du courant). ■

(2,4) - Matérialisme symplectique

Il est facile de vérifier que la forme de Lagrange σ , définie sur l'espace d'évolution Y , caractérise complètement:

- les MASSES m_j de chacun des points matériels,
- les FORCES $\vec{F}_j$ auxquels ils sont soumis,
- et en plus d'ailleurs les vecteurs $\vec{B}_j$.

Ces grandeurs physiques acquièrent donc ici un statut géométrique: celui de <u>composantes de σ</u> .

Réciproquement, nous allons considérer la forme (pré)SYMPLECTIQUE σ (et pas seulement son noyau) comme l'une des caractéristiques objectives de la MATIERE.

Nous prenons donc parti dans la vieille querelle des forces: oui, les forces sont matérielles - au même titre que les masses par exemple.

(2,5) - Une variété symplectique au coeur de la matière

Le formalisme hamiltonien s'est donc évaporé: les équations du mouvement sont directement données par la forme présymplectique σ de Y.

Or un théorème dû à Elie Cartan nous apprend que σ est un "invariant intégral absolu des équations du mouvement", ce qui signifie qu'il existe une 2-forme de la variété X (nous la noterons encore σ, si besoin avec un indice) telle que

$$\sigma_Y = P^*(\sigma_X)$$

P étant la submersion canonique de Y sur son quotient X. σ_X est encore fermée, mais de plus elle est de rang maximal - donc SYMPLECTIQUE.

En fait, c'est cette forme qui a été originellement découverte par Lagrange (à l'occasion des problèmes de perturbation); il en a donné les composantes covariantes et contravariantes dans des coordonnées locales arbitraires de X : ce sont les "crochets" et "parenthèses" de Lagrange, dont le nom est pieusement invoqué dans bien des traités de Mécanique analytique.

Dans le cas d'un système de particules sans interactions, nous avons vu en (1,3) que la variété des mouvements X du système s'identifie au produit cartésien des variétés $X1, \ldots Xn$ des mouvements individuels. La structure symplectique de X, ELLE AUSSI, est une structure produit:

$$\sigma(\delta x, \delta' x) = \sum_j \sigma_j(\delta x_j, \delta' x_j)$$

La variété X_n des mouvements d'un système de n particules indiscernables [voir (1,3)] est elle aussi naturellement symplectique: on construit le produit cartésien de n exemplaires de la variété symplectique X des mouvements d'une particule - et on le munit de la structure symplectique produit; cette structure descend ensuite sur X_n via la submersion I_n.

(2,6) - Symétries et variance

Une deuxième conséquence essentielle du principe de Maxwell, c'est l'HOMOGENEITE de l'espace d'évolution. En effet, le théorème de Darboux, sous sa forme présymplectique, nous apprend qu'il existe au voisinage de tout point $y \in Y$, des coordonnées locales pour lesquelles les composantes de σ sont des constantes choisies une fois pour toutes. Par conséquent, pour tout couple de points y_1, y_2, il existe un difféomorphisme local de Y, appliquant y_1 sur y_2, et respectant la forme de Lagrange (il suffit de mettre en correspondance les points ayant les mêmes coordonnées dans deux cartes de Darboux).

Le problème GLOBAL se pose immédiatement: le groupe des automorphismes de σ agit-il transitivement sur Y ? Même question, bien entendu, pour l'espace symplectique des mouvements.

Nous reviendrons sur ce problème dans la troisième partie; examinons préalablement les problèmes de VARIANCE - et spécialement ceux auxquels l'espace de phases n'apporte pas de solution [Cf(1,1)].

Considérons le cas d'un point matériel unique soumis à une force.

Une analyse un peu plus fine de la situation géométrique conduit à distinguer plusieurs variétés:

- L'ESPACE-TEMPS E_4 , décrit par le couple

$$(t,\vec{r});$$

Le fibré Y_7 des directions tangentes à E_4 ; alors l'espace d'évolution Y, décrit par la variable $(t,\vec{r},\vec{v})$, peut s'identifier à un ouvert de Y_7 en remarquant que la vitesse $\vec{v}$ définit une direction tangente à l'espace-temps par la condition:

$$\delta\vec{r} = \vec{v}\,\delta t \,.$$

Au dessus de Y_7 on définit le fibré F_{28} des 2-formes de Y_7 ; on considère enfin l'ensemble S des sections locales présymplectiques de rang 6 de ce fibré: l'espace d'évolution et sa structure présymplectique, caractéristique nous l'avons vu de la force, constituent UN POINT s de S .

Considérons maintenant un difféomorphisme quelconque g de l'espace-temps E_4 .

Nous savons relever canoniquement g successivement à Y_7 , F_{28} et S ; l'image du système s est un point $g(s)$ de S ; la question se pose de savoir si $g(s)$ décrit encore un point soumis à une force.

La réponse sera affirmative si nous prenons g dans un certain sous-groupe de $\mathrm{Diff}(E_4)$; on le détermine en considérant l'espace-temps lui-même comme un fibré, ayant pour base le TEMPS, comme fibre-type l'ESPACE, espace et temps étant munis chacun d'une structure euclidienne orientée.

Nous appellerons GROUPE DE CORIOLIS le groupe des automorphismes de ce fibré E_4 ; un calcul simple montre qu'il est constitué des substitutions:

$$\left\{\begin{array}{l} t \to t + e \\ \vec{r} \to A(t)\,\vec{r} + \vec{b}(t) \end{array}\right.$$

e étant une constante, $\vec{b}$ et A des fonctions différentiables à valeurs respectivement dans l'espace et dans le groupe des rotations.

L'interprétation de ces difféomorphismes est immédiate: ils décrivent le passage à un référentiel euclidien accéléré par rapport au référentiel initial.

Effectivement, si g appartient à ce groupe, $g(s)$ décrit encore un point soumis à une force; c'est le résultat même de Coriolis, qui a montré que la nouvelle force était la somme de trois termes (termes d'entraînement, centrifuge et complémentaire). La masse du point, elle, n'est pas changée - ni bien entendu le principe de Maxwell $d\sigma = 0$.

Ces considérations s'étendent sans difficulté au cas d'un SYSTEME, grâce au fait que la valeur substituée du temps par un élément g du groupe de Coriolis ne fait pas intervenir la position $\vec{r}$; d'où l'action sur l'espace E_{3n+1} des

$$(t, \vec{r}_1, \ldots \vec{r}_n)$$

qui se relève au fibré Y_{6n+1} des directions tangentes (dont l'espace d'évolution est un ouvert); puis au fibré $F_{(3n+1)(6n+1)}$ des 2-formes et au nouvel espace S .

Une condition cependant: avoir pris pour la forme de Lagrange l'expression COMPLETE contenant les termes en $\vec{B}_j$ [ci-dessus (2,2)]; les transformations de Coriolis les font apparaître même s'ils étaient initialement nuls.

Par exemple, la MECANIQUE TERRESTRE implique obligatoirement le terme:

$$\vec{B} = 2m\,\vec{\Omega}$$

$\vec{\Omega}$ désignant la vitesse sidérale de rotation de la Terre; ce terme est responsable d'un certain nombre d'effets observables (déviation des projectiles, pendule de Foucault, etc.); c'est un exemple simple pour lequel le formalisme hamiltonien NE S'APPLIQUE PAS.

(2,7) - Relativité Galiléenne

On définit un SOUS-GROUPE G du groupe de Coriolis en choisissant la fonction A constante et la fonction $\vec{b}$ affine [notations (2,6)]; l'action de G sur l'espace-temps s'écrit donc:

$$\begin{cases} t \to t + e & [e \in \mathbb{R}] \\ \vec{r} \to A\vec{r} + \vec{b}\,t + \vec{c} & [A \in SO(3),\ \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3] \end{cases}$$

et se relève canoniquement au fibré des directions tangentes:

$$\vec{v} \to A\vec{v} + \vec{b}\ ;$$

G est un groupe de Lie connexe de dimension 10, qu'on appelle GROUPE DE GALILEE.

Une remarque préalable: le sous-groupe G N'EST PAS DISTINGUE dans le groupe de Coriolis; et plus précisément il est son propre normalisateur. Il en résulte que la définition du groupe de Galilée (comme groupe de difféomorphismes de l'espace-temps) par les formules ci-dessus implique le choix d'une classe de repères - ceux qu'on appelle REPERES D'INERTIE; classe qui se déduit de l'un de ces repères par l'action même de G.

Quand Galilée affirmait que la Terre tourne, le Saint-Office aurait dû simplement comprendre que les repères terrestres n'appartenaient pas à la classe d'inertie - ce qui aurait évité bien des malentendus.

Ceci étant, le "principe de relativité galiléenne", sous sa forme classique "faible", exprime que l'action de ce groupe G sur l'espace des mouvements Y d'un système isolé conserve les équations du mouvement - autrement dit le feuilletage $\ker(\sigma)$.

L'interprétation "matérielle" de la forme σ suggère une hypothèse plus forte: la FORME DE LAGRANGE ELLE-MEME doit être invariante par l'action de G . Avec les notations (2,6),

$$g(s) = s \qquad \forall g \in G$$

Existe-t-il réellement une partie de l'Univers que l'on puisse considérer comme isolée? nous ne nous soucierons pas ici de cette question; elle se pose de la même façon si on veut utiliser le principe de Galilée faible - et nous cherchons ce qui est spécifique du principe fort.

La situation géométrique est la suivante: une variété présymplectique séparée connexe (Y, σ) sur laquelle un groupe de Lie connexe G agit par automorphismes de σ .

Une telle "action symplectique" définit plusieurs objets géométriques importants que nous allons décrire.

Pour tout entier p , les p-formes ω définies sur le groupe G et invariantes (par les translations à gauche, considérés comme difféomorphismes de G) constituent un espace de dimension finie. D'autre part la dérivée extérieure $d\omega$ d'une forme invariante est une forme invariante. Ceci définit donc une cohomologie; les groupes de cohomologie H^p sont des espaces vectoriels de dimension finie; on peut les calculer à partir de la seule algèbre de Lie de G : par exemple la dimension de H^1 est égale à la codimension de l'algèbre dérivée.

Choisissons un point y de la variété (pré)symplectique Y ; il est clair que l'image réciproque de σ par l'application $G \to Y$

$$g \mapsto g(y)\,,$$

est une 2-forme σ_y de G , invariante et fermée; nous allons montrer que sa classe de cohomologie est indépendante du choix de y : elle constitue donc un élément de l'espace vectoriel H^2 (une "classe de cohomologie symplectique") qui est caractéristique de l'action de G sur Y .

Remarquons d'abord que toute 2-forme invariante sur G est caractérisée par sa valeur à l'élément neutre, donc par une 2-forme (algébrique) f de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$; elle sera fermée si f vérifie l'identité des 2-cocycles:

$$\text{(A)} \qquad f(Z,[Z',Z'']) + f(Z',[Z'',Z]) + f(Z'',[Z,Z']) = 0$$

pour tous Z , Z' , Z'' dans $\mathcal{G}$. Les formes exactes seront celles qui sont fonctions linéaires du crochet de Lie.

D'autre part, tout élément Z de $\mathcal{G}$ définit un champ de vecteurs sur Y - pour lequel la dérivée de Lie de σ est nulle; il résulte d'une formule classique de Cartan que la 1-forme contractée de σ et de ce vecteur est fermée. En considérant une base de $\mathcal{G}$, on en déduit l'existence locale d'une fonction différentiable ψ à valeurs dans le dual $\mathcal{G}^*$ de l'algèbre de Lie, telle que

$$\text{(B)} \qquad \sigma(\delta y,\ Zy) = \delta\,[\psi(y)\ Z] \qquad \forall \delta y, \forall Z$$

on l'appelle APPLICATION MOMENT; on peut évidemment lui ajouter une constante arbitraire.

Parce que σ est fermée, la distribution $\ker(\sigma)$ est intégrable (Cartan); si on choisit δy dans $\ker(\sigma)$, l'expression (B) est nulle - quel que soit Z ; par conséquent la fonction moment est localement constante sur les feuilles de $\ker(\sigma)$, globalement constante sur ces feuilles si le moment est défini globalement.

Ce résultat est une généralisation du THEOREME DE NOETHER (qui concerne la structure présymplectique des problèmes variationnels et les groupes de Lie de dimension 1).

Prenant ensuite la dérivée de Lie de l'identité (B) pour un second élément Z' de $\mathcal{G}$, on constate que l'expression

$$\sigma(Zy, Z'y) - \psi(y)\ [Z, Z']$$

est localement constante; ce que nous écrirons:

$$\text{(C)} \qquad \sigma(Zy, Z'y) = \psi(y)[Z, Z'] + f(Z, Z')$$

f étant nécessairement un 2-cocycle cohomologue à la 2-forme invariante σ_y; par conséquent la classe de cohomologie symplectique de σ_y est localement constante - donc constante, puisque Y est supposée connexe.

Nous pouvons enfin utiliser la constante additive qui figure dans chaque moment local pour choisir partout le même représentant f de la cohomologie dans la formule (C); Alors si ψ_1 et ψ_2 sont deux moments locaux, la 1-forme localement constante $\psi_1(y) - \psi_2(y)$ appartiendra à l'espace H^1 (parce que les 1-formes invariantes exactes sont nulles). La technique de la cohomologie de Cech permet alors de définir un morphisme de groupe:

$$\text{(D)} \qquad H_1(Y) \to H^1(G),$$

H_1 désignant le premier groupe de cohomologie de la variété Y ; morphisme qui constitue la seule obstruction à l'existence d'un moment global.

En particulier il existera un moment global si $H^1(G)$ est nul ou si $H_1(Y)$ est nul, et a fortiori si $\pi_1(Y)$ est nul, c'est-à-dire si Y est simplement connexe.

Considérons d'autre part un 2-cocycle de G, c'est-à-dire une 2-forme σ fermée invariante. Elle fait de G une variété présymplectique, sur laquelle G agit en laissant σ invariante: les résultats établis pour la variété Y s'appliquent donc aussi à G.

Il existe donc au voisinage de l'élément neutre e un moment Ψ ; sa définition (B) montre que la dérivée de Ψ au point G, a priori application linéaire de $\mathcal{G}$ dans son dual, est antisymétrique - parce qu'elle coïncide avec la valeur de σ en e.

D'autre part nous pouvons choisir la constante qui figure dans Ψ pour que que

$$\Psi(e) = 0;$$

alors la formule (C) montre que le cocycle f associé à ce choix de est lui aussi égal à cette valeur initiale de σ.

Enfin, comme dans le cas général, l'obstruction à l'existence globale de Ψ est un morphisme:

$$H_1(G) \to H^1(G);$$

puisque G est un groupe connexe, $H_1(G)$ est d'ailleurs égal au groupe d'homotopie $\pi_1(G)$.

Revenons à la variété Y, et choisissons sur Y deux moment locaux ψ_1, ψ_2, vérifiant tous les deux la condition (C) avec un même 2-cocycle f. Considérons d'autre part un moment local Ψ_3 sur G, associé lui aussi à f. Un calcul de dérivées montre que l'expression:

$$\text{(E)} \qquad [\psi_1(g(y)) - \Psi_3(g)]\mathrm{Ad}(g) - \psi_2(y)$$

où Ad désigne la REPRESENTATION ADJOINTE de G sur $\mathcal{G}$, est localement constante sur $G \times Y$.

En particulier, si Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 sont trois moments locaux <u>de G</u> associés au même 2-cocycle f, la fonction:

$$\text{(F)} \qquad [\Psi_1(g\,g') - \Psi_3(g)]\mathrm{Ad}(g) - \Psi_2(g')$$

est localement constante sur $G \times G$.

Nous allons appliquer maintenant ces résultats divers au cas du groupe de Galilée, dont nous noterons les éléments:

$$g = (A, \vec{b}, \vec{c}, e).$$

Les dimensions des espaces qui nous intéressent sont les suivants:

p:	0	1	2
formes	1	10	45
formes fermées	1	1	10
formes exactes	0	0	9

ce qui montre que les espaces H^1 et H^2 sont chacun de dimension 1.

L'élément de H^2 associé à une action symplectique quelconque du groupe appartient donc à un espace de dimension 1: c'est ce qu'on appelle une "grandeur mesurable". Pour la mesurer, il faut choisir une "unité", c'est-à-dire ici un 2-cocycle fermé non exact $f_\circ$; par exemple:

$$f_\circ(\delta g, \delta' g) = \langle \delta \vec{b}, \delta' \vec{c} \rangle - \langle \delta' \vec{b}, \delta \vec{c} \rangle.$$

nous savons qu'on peut choisir les moments locaux ψ de façon à réaliser la condition:

$$\text{(C')} \qquad \sigma(Zy, Z'y) = \psi(y)([Z,Z']) + m\, f_\circ(Z,Z'),$$

m étant le nombre qui mesure la cohomologie symplectique.

- Un élément du dual de l'algèbre de Lie pourra s'écrire:

$$\mu = \left\{ \vec{l}, \vec{g}, \vec{p}, E \right\}$$

$\vec{l}$, $\vec{g}$, $\vec{p}$ étant trois vecteurs et E un scalaire tels que:

$$\mu(\delta g) = -\frac{1}{2} \operatorname{Tr}\left[j(\vec{l})\, \delta A\right] - \langle \vec{g}, \delta \vec{b} \rangle + \langle \vec{p}, \delta \vec{c} \rangle - E\, \delta e$$

$j(\vec{l})$ désigne l'opérateur du produit vectoriel: $\vec{l} \times *$.

Il est clair que G est difféomorphe à $SO(3) X \mathbb{R}^7$, donc que son groupe d'homotopie est Z_2 . Le fait que tout morphisme $Z_2 \to \mathbb{R}$ soit nul montre qu'il existe sur G un moment GLOBAL associé à chaque 2-cocycle f ; dans le cas $f = f_\circ$, le calcul donne le moment associé:

$$\Psi_\circ(g) = \left\{ \vec{c} \times \vec{b},\ \vec{c} - \vec{b}\, e\ ,\ \vec{b},\ \frac{1}{2} \vec{b}^{\,2} \right\} ;$$

il vérifie nécessairement l'identité:

$$\text{(F')} \qquad \Psi_\circ(gg') = Ad^*(g)\left(\Psi_\circ(g')\right) + \Psi_\circ(g) .$$

En ce qui concerne les actions symplectiques de G sur une variété Y , la condition (C') permet de définir l'action du moment sur l'algèbre de Lie dérivée de $\mathcal{G}$, soit $\delta e = 0$; par conséquent on peut définir globalement les 9/10èmes des composantes, à savoir $\vec{l}$, $\vec{g}$, $\vec{p}$; seule E ne sera définie qu'à une constante additive près - et éventuellement multiforme.

Si ψ est un moment global, nous savons que la fonction:

(E')
$$\left[\,\psi(g(y)) - m\,\Psi_0(g)\,\right] Ad(g) - \psi(y)$$

est localement constante sur $G \times Y$, donc constante; il suffit de faire $g = e$ pour voir qu'elle est nulle. Ce qui nous donne la VARIANCE du moment $\mu = \psi(y)$ sous l'action d'un élément $g = (A, \vec{b}, \vec{c}, e)$ du groupe:

(E'')
$$\mu \mapsto$$
$$\left\{ A\vec{l} + \vec{c} \times A\vec{p} - \vec{b} \times A\vec{g},\quad A[\vec{g} - \vec{p}\,e],\quad A\vec{p},\quad E + \langle \vec{b}, A\vec{p} \rangle \right\}$$
$$+m \left\{ \vec{c} \times \vec{b},\quad \vec{c} - \vec{b}\,e,\quad \vec{b},\quad \frac{\vec{b}^2}{2} \right\}$$

Dans le cas où le nombre m n'est pas nul, on peut construire un nouvel objet, la fonction:

$$\vec{G}(t) = \frac{\vec{g} + \vec{p}\,t}{m},$$

dont la variance est:

$$\vec{G} \to A\vec{G} + \vec{b}\,t + \vec{c},$$

la même que celle d'une POSITION $\vec{r}$. $\vec{G}$ apparaît donc comme un POINT MOBILE dans l'espace, animé visiblement d'un mouvement de translation rectiligne uniforme; autrement dit, une droite d'espace-temps.

Toutes ces quantités ont été définies ainsi PAR LA SEULE THEORIE DES GROUPES; pour pouvoir en donner une interprétation "mécanique", nous allons les calculer dans un cas particulier: celui d'un système de points matériels en interaction. Le calcul est possible parce que nous connaissons d'une part la forme de Lagrange, d'autre part l'action du groupe de Galilée; il conduit aux résultats suivants:

$m = \sum_j m_j$
$\vec{l} = \sum m_j\, \vec{r}_j \times \vec{v}_j$
$\vec{g} = \sum m_j [\, \vec{r}_j - \vec{v}_j\, t\,]$
$\vec{p} = \sum m_j\, \vec{v}_j$

$$\boxed{E = \frac{1}{2} \sum m_j \vec{v}_j^{\,2} + v}$$

v étant un potentiel (local) des forces [voir (2,3)].

Ces objets sont effectivement connus et nommés: m est la MASSE; $\vec{l}$ est le MOMENT CINETIQUE; $\vec{p}$ l'IMPULSION; E l'ENERGIE. Le fait que toutes ces grandeurs soient des CONSTANTES DU MOUVEMENT apparaît ici comme une conséquence du principe fort de relativité galiléenne. On peut facilement vérifier sur ces expressions particulières la formule générale de variance (E'').

Seul fait exception l'objet $\vec{g}$; sa variance bizarre l'a protégé des éponymes. On a préféré nommer l'objet associé $\vec{G}$, qui vaut:

$$\vec{G} = \frac{\sum m_j \vec{r}_j}{m} ;$$

et qui est donc le BARYCENTRE (ou CENTRE DE MASSE). Le théorème associé, c'est le fait que le mouvement de $\vec{G}$ soit rectiligne et uniforme.

Le groupe de Galilée G peut se décomposer en produit semi-direct, grâce à l'existence d'un sous-groupe commutatif de dimension 6:

$$A = 1, \ e = 0$$

qui est le noyau d'un endomorphisme idempotent:

$$\vec{b} \to 0 , \ \vec{c} \to 0.$$

Si la masse totale d'un système n'est pas nulle, un théorème général implique alors une DECOMPOSITION du système ("décomposition barycentrique"); la variété symplectique X des mouvements est le produit cartésien d'une variété symplectique de dimension 6 (qu'on peut interpréter comme l'espace des mouvements du centre de masse) et d'une seconde variété symplectique qui décrit les "mouvements autour du centre de masse".

■ Exemple: le problème newtonien à deux corps (de masses $m1$ et $m2$) se ramène ainsi au cas d'un point matériel attiré par un point fixe (1,2). Les masses qui intervient dans les variétés symplectiques facteurs sont respectivement $m1+m2$ et $\frac{m1\ m2}{m1+m2}$. ■

Le groupe de Galilée agit séparément sur chacune de ces variétés; il en résulte l'existence d'un groupe de symétries plus grand que G : sa dimension est 14 et il est isomorphe au produit direct

$$G \times SO(3) \times \mathbb{R};$$

les constituants du moment sont la somme de DEUX CONSTANTES DU MOUVEMENT indépendantes (celles-qui sont liées au mouvement de $\vec{G}$ étant dites "orbitales" et les autres "propres"): $\vec{p}$ et $\vec{g}$ n'ont que des composantes orbitales, mais il existe un "moment cinétique propre" et une "énergie propre", associés à l'action de $SO(3)\times\mathbb{R}$. Les valeurs du "moment cinétique orbital" et de l'"énergie orbitale" sont respectivement

$$\frac{\vec{g} \times \vec{p}}{m} \qquad \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}$$

Il existe des systèmes dynamiques galiléens qui ne sont pas de simples assemblages de n points matériels; par exemple ceux qui contiennent des corps solides continus. Si on parvient à les décrire au moyen d'un espace d'évolution présymplectique et invariant par le groupe de Galilée, on pourra leur appliquer les résultats précédents. Masse, moment cinétique, impulsion, énergie, barycentre seront alors DEFINIS géométriquement par (B) et (C'), et vérifieront les théorèmes généraux.

Imaginons par exemple un monopole magnétique en présence du champ créé par une boucle de courant permanent. Nous sommes dans un cas, permis par le principe de Galilée fort, où l'énergie E est MULTIFORME.

Un tel système doit constituer une source inépuisable de profits: on en tire de l'énergie et il revient à son état initial...

Malheureusement ces objets merveilleux n'existent pas. Pourquoi? Nous trouverons une "explication" en (3,2).

Revenons au cas particulier d'un système de points en interaction. Le théorème de Noether nous a appris que $\vec{l}$, $\vec{g}$, $\vec{p}$ sont aussi des constantes du mouvement; il suffit de dériver pour en déduire deux conditions relatives aux forces $\vec{F}_j$:

$$\begin{cases} \sum_j \vec{F}_j = 0 \\ \sum_j \vec{r}_j \times \vec{F}_j = 0; \end{cases}$$

conditions que l'on peut traduire par l'existence d'une décomposition:

$$\vec{F}_j = \sum_k \vec{F}_{jk}$$

avec

$$\vec{F}_{jk} + \vec{F}_{kj} = 0, \qquad (\vec{r}_k - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{jk} = 0 \qquad \forall j,k;$$

Ce résultat exprime l'EGALITE DE L'ACTION ET DE LA REACTION - qui est donc une conséquence du principe fort de relativité galiléenne. En particulier, un point matériel isolé n'est soumis à aucune force, son mouvement est rectiligne uniforme (c'est ce qu'on appelle parfois le "principe de Galilée").

Chose remarquable, ce fait N'EST PAS UNE CONSEQUENCE DU PRINCIPE FAIBLE: considérons en effet un système de deux points qui sont soumis à la même force:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

(et non à deux forces opposées comme l'exigerait l'égalité de l'action et de la réaction). Il est immédiat que les équations du mouvement:

$$\delta y \in \ker(\sigma)$$

sont invariantes par le groupe de Galilée; mais le principe fort est violé - simplement parce que le système ne vérifie pas le principe de Maxwell $d\sigma = 0$; autrement dit la variété d'évolution Y n'est pas présymplectique.

C'est pourquoi, dans la mécanique traditionnelle, on est obligé de faire de l'égalité de l'action et de la réaction un PRINCIPE SUPPLEMENTAIRE - ce qui est inutile ici.

Enfin les "inductions" $\vec{B}_j$ sont toutes nulles. Ce dernier résultat est paradoxal: il existe des objets, les aimants, qui sont capables de créer une induction magnétique $\vec{B}$ dans un système auquel ils sont incorporés. La résolution de ce paradoxe va demander quelques efforts - mais sera instructive.

(2,8) - Géométrie des aimants

Ce que nous venons de constater, c'est que le principe fort de relativité galiléenne était incompatible avec la description d'un aimant par un système dynamique constitué de points matériels en interaction.

Il faut donc modifier quelque chose: ce sera la notion de "point matériel" elle-même.

Nous allons considérer des objets élémentaires nouveaux, les PARTICULES A SPIN. Cette dénomination est empruntée à la physique; et plus particulièrement, répète-t-on, à la physique quantique. Pourtant ces objets possèdent une description géométrique qui les inscrit directement dans la mécanique classique.

Une particule à spin ISOLEE possède un espace d'évolution Y de dimension 9 (au lieu de 7 pour un point matériel); Y est décrit, en plus des variables t, $\vec{r}$, $\vec{v}$ par un vecteur unitaire:

$$\vec{u},$$

la POLARISATION de la particule; la variété Y est donc difféomorphe à

$$\mathbb{R}^7 \times S^2 .$$

La structure présymplectique de Y s'obtient en ajoutant à l'expression (2,2) de la forme de Lagrange un terme supplémentaire:

$$\mathrm{vol}(s\vec{u}, \delta\vec{u}, \delta'\vec{u})$$

où vol désigne la 3-forme volume de l'espace euclidien orienté, et s un nombre caractéristique de la particule, qu'on appelle simplement le SPIN. Ce terme est fermé, puisqu'il décrit une 2-forme de la sphère S^2.

L'action du groupe de Galilée sur Y se complète par la règle:

$$\vec{u} \to A\vec{u}$$

Connaissant cette action et la forme σ, l'application de la théorie générale est une simple affaire de calcul; on constate ainsi que la particule possède un MOMENT CINETIQUE PROPRE [voir ci-dessus (2,7)], égal à $s\vec{u}$; ce qui donne une première interprétation du spin s .

On notera que les TOUPIES (solides libres dans l'espace) sont aussi des systèmes possédant un moment cinétique propre - et qu'on a souvent assimilé une particule à spin avec une sorte de toupie. Mais il n'existe aucun modèle de toupie dont l'espace d'évolution ait la dimension 9 (on trouve 11 pour une tige rectiligne, 13 pour un solide bi- ou tri-dimensionnel); et d'autre part la longueur du moment cinétique propre d'une toupie dépend de son mouvement - alors qu'ici elle est fixe.

Les équations du mouvement de la particule à spin sont données par le noyau de σ : un calcul simple montre que le mouvement est rectiligne uniforme et que le vecteur $\vec{u}$ garde une direction fixe.

- Du fait que la variété Y contient en facteur la sphère S^2, elle possède une 2-homologie non triviale: le groupe correspondant est $\mathbb{Z}$. Sur le cycle générateur, l'intégrale de σ vaut:

$$4\pi s$$

d'où une nouvelle caractérisation géométrique du spin s , qui va avoir l'intérêt de subsister même lorsque la particule est intégrée à un système.

Considérons maintenant un système dynamique isolé, composé de n particules à spin et de n' points matériels. Quand nous disons "composé", nous entendons ici que la géométrie de l'espace d'évolution Y est la même que dans le cas d'une simple coexistence pacifique des particules: la dimension de Y est 8n+6n'+1 ; un point est repéré par la date t , n+n' positions, n+n' vitesses et n polarisations. Mais la forme de Lagrange σ contient, ajoutés aux termes individuels évidents, des termes d'INTERACTION; termes qui s'obtiennent par un certain nombre de règles phénoménologiques (le savoir-faire du physicien); la géométrie les soumet à la seule règle de l'invariance galiléenne.

Un exemple: deux particules (1 et 2), la première douée de spin. La forme de Lagrange "nue":

$$\mathrm{vol}(\,s\vec{u}_1,\ \delta\vec{u}_1,\ \delta'\vec{u}_1)$$
$$+ \langle m_1\,\delta\vec{v}_1,\ \delta'\vec{r}_1 - \vec{v}_1\delta' t\rangle - \langle m_1\delta'\vec{v}_1,\ \delta\vec{r}_1 - \vec{v}_1\,\delta t\rangle$$
$$+ \langle m_2\,\delta\vec{v}_2,\ \delta'\vec{r}_2 - \vec{v}_2\delta' t\rangle - \langle m_2\delta'\vec{v}_2,\ \delta\vec{r}_2 - \vec{v}_2\,\delta t\rangle$$

est complétée par une 2-forme fermée - la DERIVEE EXTERIEURE $d\varphi$ de la 1-forme φ :

$$\varphi(\delta y) = \mathrm{vol}\left(\mu_1\ \vec{u}_1\ ,\ q_2\ \frac{\vec{r}_2-\vec{r}_1}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^3},\ \delta\vec{r}_2-\delta\vec{r}_1\right);$$

q_2 est la charge électrique de la particule N°2; μ_1 est une constante caractéristique de la particule N°1. Il est visible que φ est invariante par l'action du groupe de Galilée, donc aussi $d\varphi$.

Ces données définissent complètement les équations du mouvement; on constate que la particule chargée se déplace comme si elle était soumise à:

- une induction magnétique $\vec{B}$ qui est celle d'un DIPOLE MAGNETIQUE de centre $\vec{r}_1$, d'axe $\vec{u}_1$, et dont l'intensité est mesurée par μ_1 : μ_1 s'interprète donc comme MOMENT MAGNETIQUE de la particule N° 1;

- un champ électrique $\vec{E}$ grâce auquel les équations de Maxwell:

$$\mathrm{div}\ \vec{B} = 0;\quad \mathrm{rot}\ \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

sont vérifiées; champ qui est créé par le mouvement de la particule N°1.

Bien entendu les mêmes équations décrivent aussi les "réactions" de la particule aimantée en présence de la particule chargée; réactions qui permettent de caractériser le comportement d'une telle particule aimantée soumise à un champ électrique.

On est dans le cas d'une interaction QUI NE SE DECRIT PAS PAR UN HAMILTONIEN: une particule aimantée et une particule chargée peuvent se déplacer dans n'importe quelle position sans fournir de travail; d'ailleurs l'énergie du système précédent se calcule par les procédures symplectiques et se réduit au terme cinétique

$$\frac{1}{2}\left[\, m_1\vec{v}_1^{\,2} + m_2\vec{v}_2^{\,2}\,\right].$$

qui est une constante du mouvement, puisque la théorie générale des systèmes symplectiques galiléens s'applique.

Naturellement les 9 autres composantes du moment sont aussi des constantes du mouvement; le centre de masse a toujours un mouvement rectiligne uniforme; etc.

Mais la définition du moment fait intervenir des termes inhabituels. Ainsi il existe un MOMENT CINETIQUE D'INTERACTION, qui s'ajoute aux termes individuels pour fournir le moment total constant $\vec{l}$; il est égal à la projection sur le rayon vecteur $\vec{r}_2-\vec{r}_1$ du vecteur

$$\frac{\mu_1 q_2}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|}\vec{u}$$

Dans un système de ce genre, l'interprétation du spin des particules comme moment cinétique propre disparaît: le moment cinétique propre du système existe, mais c'est une quantité globale, dans laquelle interviennent en particulier les moments cinétiques d'interaction. Mais la seconde interprétation subsiste: le groupe de 2-homologie de l'espace d'évolution est égal à $\mathbb{Z}^n$, n étant le nombre de particules à spin; et les spins des diverses particules seront égaux au quotient par 4π de l'intégrale de σ sur chaque générateur de ce groupe. L'algorithme géométrique de PRE-QUANTIFICATION (que nous ne développons pas ici) n'est possible que si les spins ainsi définis sont tous des multiples entiers de $\hbar/2$.

Ces considérations a priori sont en accord avec l'expérience, qui montre que le ferro-magnétisme est bien un effet macroscopique du moment magnétique des électrons individuels qui constituent le matériau aimanté; électrons qui sont des particules de spin 1/2 [ou si on préfère $\hbar/2$; voir (2,2)]. En particulier, une expérience simple de magnétisme classique permet de mesurer directement le rapport $\frac{\text{moment magnétique}}{\text{spin}}$ des électrons individuels: un barreau aimanté suspendu dans un solénoïde se met à tourner si on renverse l'aimantation; c'est ce qu'on appelle l'EFFET GYROMAGNETIQUE.

3) QUELQUES OUVERTURES DE LA MECANIQUE SYMPLECTIQUE

(3,1) - Régularisation et diffusion

Dans certains cas, nous l'avons vu, la variété X des mouvements d'un système n'est pas séparée. C'est le cas du point soumis au champ coulombien attractif (1,2).

Considérons les intégrales premières GLOBALES du système; elles se définissent indifféremment comme les fonctions différentiables sur X, ou comme les fonctions différentiables sur l'espace d'évolution Y dont la dérivée est nulle dans la direction $\ker(\sigma)$.

La relation $\sim$ définie sur X par

$$x_1 \sim x_2$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$f(x_1) = f(x_2) \text{ pour toute intégrale première globale } f$$

est évidemment une équivalence; il existe donc un espace quotient $X_\circ$; mais rien n'indique a priori que $X_\circ$ soit une variété.

■ C'est pourtant ce qui se passe dans le cas particulier du champ coulombien: $X_\circ$ possède effectivement une structure de variété de dimension 6 , caractérisée par le fait que la surjection canonique

$$X \to X_\circ$$

soit une submersion. Nous appellerons REGULARISATION cette procédure; elle définit la "variété de Newton" $X_\circ$, support de toutes les intégrales premières globales.

Sachant cela, il est immédiat de montrer que la variété $X_\circ$ est SEPAREE. D'après le théorème de Whitney, elle possède donc un plongement propre dans un espace numérique de dimension au plus égale à 13. En fait la possibilité de régulariser peut se démontrer en construisant un tel plongement: c'est ce qui est effectué dans un travail de l'auteur (in "Modern developments in Analytical Mechanics", Acta Acad. Sc. Taurin., Turin, 1983). L'image est ici un ouvert d'une variété algébrique de $\mathbb{R}^{10}$.

La question se pose ensuite de savoir si la forme de Lagrange descend jusqu'à $X_\circ$; réponse affirmative (il suffit de faire le calcul); $X_\circ$ est ainsi une variété symplectique séparée.

Ce résultat global peut s'analyser plus finement, en cherchant à quelle condition deux mouvements distincts $x1$ et $x2$ auront même projection sur la variété de Newton. On constate qu'il s'agit de mouvements rectilignes, qui commencent (ou finissent) par une collision avec le centre attractif; que ces mouvements peuvent se prolonger immédiatement après (resp. avant) le choc, par un "rebondissement"; et que la relation cherchée est l'existence d'une succession finie de tels rebondissements faisant passer de $x1$ à $x2$.

On peut si l'on veut construire un ESPACE D'EVOLUTION REGULARISE: ce sera simplement le produit cartésien $Y_\circ = X_\circ \times \mathbb{R}$ décrit par la variable (x,t), pré-symplectique grâce à l'image réciproque de la forme σ de $X_\circ$; l'intégration des équations du mouvement définit une immersion symplectique de l'espace d'évolution Y sur un ouvert dense de $Y_\circ$. Sur $Y_\circ$, les collisions se passent sans douleur. ■

- Il existe d'autres systèmes soumis à des collisions, mais qui ne se décrivent pas par régularisation.

■ Prenons l'exemple du billard, schématisé par un point libre à l'intérieur d'un contour convexe plan. Les mouvements, au sens strict, s'arrêtent sur des collisions avec les bords; on convient de les prolonger, immédiatement après le choc, selon des lois de réflexion inspirées de la pratique du jeu. Ceci conduit à construire une variété quotient de l'espace des mouvements X, par une équivalence dont les classes sont DISCRETES; si le bord est C^∞, le quotient $X_\circ$ est une variété de même dimension que X. ■

Nous dirons que cette équivalence est "symplectique" si la forme de Lagrange descend sur $X_\circ$ - qui devient ainsi une variété symplectique de même dimension que X. Comme par hasard, les lois de réflexion classiques ont cette propriété.

■ On peut aussi traiter le billard rectangulaire, bien que son bord ne soit pas C^∞ et qu'on ne puisse appliquer la règle de réflexion lorsque le point mobile atteint l'un des angles. Si les mouvements s'arrêtent dans ce cas, la variété X n'est pas séparée; mais elle est régularisable - et les mouvements régularisés savent comment rebondir dans les coins. ■

La "diffusion symplectique" ainsi décrite (quotient par une équivalence symplectique dont les classes sont discrètes) peut aussi s'appliquer à des systèmes ne présentant pas de collisions; par exemple une particule susceptible d'interagir avec un "diffuseur", objet matériel dont on ne veut connaître que les perturbations qu'il inflige à la particule. On part d'une description de chaque mouvement par ses états "asymptotiques" initial et final (chacun un mouvement de la particule libre); on décrit le diffuseur par un symplectomorphisme (local) qui fait passer de l'état initial à l'état final; l'espace symplectique des mouvements diffusés se construit comme quotient de la somme de deux exemplaires de la variété des mouvements libres par une équivalence symplectique.

■ On construit facilement des modèles symplectiques galiléens pour les photons (particules de masse nulle, au sens cohomologique du mot masse). Les lois de l'optique géométrique permettent de construire des modèles symplectiques pour les mouvements des photons diffusés par un instrument d'optique: miroir, lentille ou prisme par exemple. ■

Nous venons de donner quelques exemples d'algorithmes qui modifient la définition a priori de l'espace d'évolution Y et de l'espace des mouvements X - de sorte que la variété X soit SEPAREE.

L'intérêt d'un tel résultat, c'est que la 2-forme symplectique σ_X est alors HOMOGENE, en ce sens que le groupe $G = \mathrm{Aut}(\sigma_X)$ des difféomorphismes de X qui préservent σ_X agit TRANSITIVEMENT sur X. En fait un résultat plus précis peut être obtenu - qui se formule dans le langage des "espaces différentiels" (voir le travail de l'auteur: Un algorithme générateur de structures quantiques, à paraître dans les C.R. du symposium "Elie Cartan et les mathématiques d'aujourd'hui", Lyon, 1984). L'idée, c'est de munir le groupe G d'une "difféologie" et d'une 2-forme invariante (nonobstant la dimension infinie de G), puis de définir la structure de variété de X et sa forme symplectique σ_X comme image des structures correspondantes de G par l'application:

$$g \mapsto g(x)$$

x étant un point de X.

Cette propriété d'homogénéité est très probablement nécessaire pour pouvoir formuler des principes cohérents pour la mécanique quantique.

(3,2) - Mécanique statistique

Cette technique de diffusion permet de traiter un système de particules enfermées dans une boîte et susceptibles d'interagir entre elles et avec les parois: dans les modèles à collisions "dures" se pose le problème de la régularisation des collisions multiples; dans les modèles "élastiques", le problème correspondant des interactions à plusieurs corps.

La THEORIE CINETIQUE DES GAZ peut se décrire en construisant d'abord un espace des mouvements séparé et symplectique X par cette méthode; ensuite en définissant simplement les ETATS STATISTIQUES comme les lois de probabilité sur X (sur l'espace de phases, on est obligé d'introduire un état évolutif solution de l'équation de Liouville).

Parmi ces états statistiques, les ETATS D'EQUILIBRE THERMODYNAMIQUE sont donnés par la règle phénoménologique de Gibbs; or cette règle possède une formulation géométrique qui dépasse largement le cadre de la théorie cinétique.

Sur toute variété symplectique connexe X , il existe une mesure λ invariante par les symplectomorphismes; cette propriété la définit à un facteur constant près: c'est la MESURE DE LIOUVILLE.

Soit G un groupe de Lie muni d'une action symplectique effective sur X , et possédant un moment ψ [voir (2,7)].

Si Z est un élément de l'algèbre de Lie, on appellera ETAT DE GIBBS la loi de probabilité λ_Z dont la densité par rapport à λ vaut

$$e^{\psi(x)Z}$$

à un facteur constant près, bien entendu. On met ce facteur sous forme exponentielle:

$$d\lambda_Z(x) = e^{\psi(x)Z - z}\, d\lambda(x) \;;$$

la masse de la probabilité devant être égale à 1 , on a

$$z = \mathrm{Log} \int_X e^{\psi(x)Z}\, d\lambda(x) \;;$$

le domaine de convergence de l'intégrale est une partie convexe de l'algèbre de Lie, et aussi une réunion d'orbites de la représentation adjointe; z est une fonction analytique convexe sur l'intérieur C de cet ensemble.

Nous prenons désormais Z dans C . La valeur moyenne du moment $\psi(x)$ dans l'état de Gibbs est égal à la dérivée

$$Q = z'(Z);$$

$Z \mapsto Q$ est un difféomorphisme analytique de C sur un ouvert convexe de $\mathcal{G}^*$; la transformée de Legendre s de z :

$$s(Q) = QZ - z$$

y est convexe et vérifie $Z = s'(Q)$; la dérivée seconde:

$$K = z''(Z)$$

est un tenseur positif, dont l'inverse est égal à $s''(Q)$.

K munit l'ensemble C d'une structure riemannienne invariante par l'action du groupe; pour cette structure, l'application linéaire $Ad(Z)$ est antihermitienne.

L'application f_Z, définie par:

$$f_Z(Z',Z'') = K([Z,Z'],Z'') \qquad \forall\, Z',Z'' \in \mathfrak{g}$$

est un cocycle symplectique, cohomologue à f [formule (2,7 C)]; son noyau est l'orthogonal de l'orbite adjointe de Z pour la structure riemannienne de C.

Les équilibres thermodynamiques réels sont ainsi associés à un SOUS-GROUPE G DU GROUPE DE GALILEE.

■ Dans le cas classique, on ne considère que le groupe de dimension 1 des translations temporelles (qui n'est défini qu'après avoir choisi un référentiel - par exemple celui de la boîte qui contient le gaz). Alors, avec des unités convenables, Z est l'inverse de la TEMPERATURE ABSOLUE; z est le POTENTIEL THERMODYNAMIQUE DE PLANCK; $-s$ est l'ENTROPIE; Q est l'ENERGIE INTERNE; K caractérise la CAPACITE CALORIFIQUE. ■

Mais un sous-groupe plus grand permet de décrire d'autres états réels, par exemple ceux qui s'observent - et s'utilisent - dans les centrifugeuses.

En particulier, on peut songer aux équilibres d'un système isolé, sur lequel le groupe de Galilée agit symplectiquement - par principe (2,7). Mais les résultats que nous venons d'indiquer montrent que de tels équilibres n'existent pas: les intégrales sont toujours divergentes. Cette difficulté est de type "cosmologique": dans un tel équilibre, la position du barycentre devrait être équipartie dans l'espace - ce qui est incompatible avec le volume infini de celui-ci.

C'est justement la "décomposition barycentrique" (2,7) qui nous permet d'éliminer cette difficulté: il suffira de décrire la statistique des mouvements autour du barycentre; mouvements qui constituent eux-même une variété symplectique. Comme nous le savons, l'action du groupe de Galilée se réduit alors à celle de $G = SO(3) \times \mathbb{R}$.

Les états de Gibbs sont donc indexés par un élément Z de l'algèbre de Lie de G; Z s'interprète par le champ de vecteurs qu'il définit sur l'espace-temps; champ dont la composante temporelle constante définit la TEMPERATURE ABSOLUE T et dont la direction définit un CHAMP DE VITESSES [Cf.(2,6)]; ce champ de vitesses est celui d'une ROTATION SOLIDE AUTOUR DU BARYCENTRE, et il est caractérisé par une vitesse angulaire constante $\vec{\Omega}$.

Le fait que l'ensemble C soit convexe et invariant par l'action du groupe montre qu'il peut exister une valeur maximum de $\vec{\Omega}$, qui est alors une fonction concave de la température absolue; ce qui entraîne l'existence d'une température critique T_c au dessus de laquelle il n'existe plus d'équilibre - même à rotation nulle.

Examinons les variables duales: Q , élément de $\mathcal{G}^*$, décrit simultanément l'énergie interne et le MOMENT CINETIQUE $\vec{l}$; celui-ci est nécessairement parallèle à $\vec{\Omega}$; de même K associe la capacité calorifique et le MOMENT D'INERTIE autour de l'axe polaire.

Toutes les relations thermodynamiques usuelles se généralisent à ces variables géométriques.

Cette description schématique issue de la seule théorie des groupes est indépendante de tout modèle particulier: seul intervient le fait que l'action du groupe de Galilée est symplectique. Elle a donc vocation à l'universalité.

Effectivement, on constate qu'elle décrit bien les corps célestes - dans la mesure où ceux-ci sont isolés (pas trop de marées ni de rayonnement) et en équilibre. Pour résumer, c'est à cause du groupe de Galilée que la Terre tourne...

(3,3) - La relativité d'Einstein

Quelques mots seulement de la géométrisation de ce qu'on appelle "mécanique relativiste" - c'est-à-dire d'une mécanique à la fois comparable à la mécanique classique, compatible avec le principe de relativité (restreinte) d'Einstein, et conforme à l'expérience.

Cette mécanique se construit AVEC LA MEME GEOMETRIE SYMPLECTIQUE - mais en remplaçant le groupe de Galilée par le GROUPE DE POINCARE, groupe connexe des isométries de l'"espace de Minkowski", c'est-à-dire de l'espace-temps E_4 muni de la métrique pseudo-riemannienne:

$$\delta s^2 = c^2 \delta t^2 - \langle \delta \vec{r}, \delta \vec{r} \rangle,$$

c désignant la vitesse de la lumière.

Ce groupe de Poincaré est un groupe de Lie de même dimension que le groupe de Galilée, soit 10 . Les différences de structure entre ces deux groupes vont induire des différences essentielles entre les deux mécaniques.

Nous avons vu le rôle joué en mécanique classique par la cohomologie symplectique et le moment galiléen. Dans le cas du groupe de Poincaré, le tableau des dimensions des espaces de p-formes invariantes est le suivant:

p:	0	1	2
formes	1	10	45
formes fermées	1	0	10
formes exactes	0	0	10

il montre que les espaces de cohomologie H^1 et H^2 sont tous les deux nuls [comparer avec le tableau (2,7)].

Par conséquent l'obstruction (2,7 D) est nulle; le moment de Poincaré peut toujours se définir GLOBALEMENT, et de façon UNIQUE, par la condition:

$$\sigma(Zy, Z'y) = \Psi(y)\,[Z, Z']$$

[voir la formule (C) de (2,7)].

Par ailleurs, du fait que la cohomologie symplectique est nulle, il n'y a plus de classe constante associée à un système (qui correspondrait à la masse classique), et plus de décomposition barycentrique.

L'interprétation de la nouvelle mécanique va être facilitée du fait que nous pourrons IDENTIFIER un moment de Poincaré avec un moment de Galilée - grâce à deux remarques:

- Lorsqu'on a choisi un référentiel d'inertie, nous avons affaire à deux groupes de difféomorphismes de l'espace-temps; leur intersection est un groupe de Lie de dimension 7 , le GROUPE D'ARISTOTE; on l'obtient en choisissant $\vec{b} = 0$ dans les formules (2,7) définissant l'action du groupe de Galilée. Ce groupe d'Aristote est constitué des automorphismes de E_4 considéré comme PRODUIT CARTESIEN de l'espace par le temps, chaque facteur étant euclidien orienté.

On va évidemment demander que les deux moments aient la même composante aristotélicienne - ce qui définit le MOMENT CINETIQUE, l'IMPULSION et l'ENERGIE relativistes.

L'énergie E , comme les autres composantes du moment relativiste, est ici définie globalement; elle ne contient plus de constante additive arbitraire, et elle ne peut pas être multiforme: ce fait n'est pas nécessaire en mécanique classique, mais il est formulable [par la nullité de l'obstruction (2,7 D)]; on peut donc le considérer comme un principe que la mécanique classique doit emprunter à la mécanique relativiste pour coller avec les faits.

- Pour achever la comparaison des deux moments, il manque encore le correspondant relativiste de la grandeur galiléenne $\vec{g}$ qui caractérise la droite décrite par le barycentre dans l'espace-temps.

Il se trouve que le moment de Poincaré définit lui aussi une droite d'espace-temps, l'"axe central", dont la vitesse est parallèle à l'impulsion et dont la variance aristotélicienne est la même que celle du barycentre galiléen. La prescription qui nous manquait peut donc s'obtenir en égalant les deux droites.

La vitesse du barycentre vaut $\vec{p}/m$ en mécanique classique (2,7); celle de l'axe central vaut $\vec{p}\,c^2/E$ en mécanique relativiste; d'où la relation d'Einstein

$$E = m\,c^2$$

qui relie l'énergie relativiste E avec la masse classique m . Cette égalité exprime une correspondance entre grandeurs qui appartiennent à deux théories contradictoires. Elle implique deux choix simultanés: celui d'un référentiel d'inertie d'une part; d'autre part celui d'un mouvement (puisque l'énergie relativiste dépend du mouvement, mais pas la masse galiléenne).

Le moment relativiste induit sur le sous-groupe des translations d'espace-temps un quadrivecteur P - l'"impulsion-énergie"; pour les systèmes concrets, P est toujours un vecteur de genre futur; ce qui implique d'une part que la vitesse du barycentre est plus petite que c , d'autre part que l'énergie E est positive. En mécanique classique, le fait que la masse soit positive était une constatation sans interprétation géométrique.

On a cherché expérimentalement des objets pour lesquels P serait du genre espace (les "tachyons"). Le fait qu'on n'en rencontre pas, ni d'objet à énergie négative, peut probablement se rattacher à des considérations thermodynamiques (c'est le quadrivecteur température qui permet de distinguer la flèche du temps).

Ceci étant, nous ne disposons que d'un point de départ pour la mécanique relativiste; il reste à donner une description relativiste effective des systèmes dynamiques concrets.

On trouve des modèles relativistes pour les particules isolées (points matériels, particules à spin, y compris les photons) parmi les espaces homogènes symplectiques X du groupe de Poincaré. Les propriétés du groupe que nous avons énumérées permettent de les classer; chaque "particule élémentaire" observée accepte d'entrer dans l'une des cases ainsi préparées.

Nous ne détaillerons pas davantage ici. Une seule remarque relative aux particules à spin: on ne peut plus parler ici de "moment cinétique propre", puisqu'il n'y a plus de décomposition barycentrique. Mais la valeur numérique du spin peut toujours se définir par voie homologique - comme le quotient par 4π de l'intégrale de σ sur le cycle fondamental de l'espace d'évolution - qui est encore difféomorphe à $\mathbb{R}^7 \times S^2$.

La relativité d'Einstein oblige à renoncer à la notion de simultanéité, parce que le groupe de Poincaré n'est pas un sous-groupe du groupe de Coriolis, donc qu'il casse la fibration de l'espace-temps sur le temps.

Ceci rend a priori plus difficile la construction de modèles relativistes pour les systèmes en interaction: le groupe de Poincaré n'agit pas sur un espace d'évolution du type que nous avons considéré en mécanique classique (une seule date pour plusieurs positions).

On pourrait penser que la solution est l'usage d'un espace d'évolution MULTI-TEMPOREL, sur lequel l'action du groupe est immédiate. Mais un simple calcul montre que cet espace TUE LES INTERACTIONS - aussi bien d'ailleurs en mécanique classique qu'en mécanique relativiste.

Il existe cependant une méthode permettant de construire un espace d'évolution relativiste analogue à l'espace classique (le rôle de la droite temporelle étant tenu par l'axe central du moment); il fait apparaître un potentiel d'interaction défini sur l'espace des mouvements libres - et plus précisément sur son quotient par l'action du groupe. La principale difficulté consiste à choisir ce potentiel - la comparaison avec la mécanique classique suggérant au mieux une approximation.

Une autre voie d'accès est fournie par la théorie symplectique de la diffusion [voir ci-dessus (3,1)]; un système de deux particules interagissantes pourra se décrire par un symplectomorphisme de diffusion commutant avec l'action du groupe de Poincaré sur l'espace des couples de deux mouvements libres. Bien entendu les théorèmes généraux s'appliquent toujours, la valeur initiale et la valeur finale du moment de Poincaré (qui se calculent pour les deux états libres asymptotiques) sont nécessairement égales: on obtient ainsi les lois de conservation relativistes qui sont à la base de la physique des particules.