UN ALGORITHME GENERATEUR de STRUCTURES QUANTIQUES

Jean-Marie Souriau*

Exposé au Symposium

Elie Cartan et les Mathématiques d'aujourd'hui

Lyon, 25 juin 1984

complété par quelques démonstrations

*Université de Provence (Aix-Marseille I)
et
Centre de Physique Théorique (Laboratoire propre du CNRS)

Adresse postale :
C.P.T. - C.N.R.S.
LUMINY - CASE 907
F 13288 MARSEILLE CEDEX 9

CPT-84/P.1722

Introduction

La géométrie différentielle classique est basée sur l'axiomatique des variétés. Or il est possible d'alléger cette axiomatique sans perdre grand chose d'essentiel.

Un **espace difféologique** X est caractérisé non par des cartes, mais par des "**plaques**", applications à valeurs dans X provenant des espaces numériques $\mathbb{R}^p$; les **axiomes** qui régissent ces plaques n'impliquent aucune dimension particulière.

La catégorie des espaces difféologiques, extension de celle des variétés, est stable pour les principales constructions ensemblistes: parties, quotients, sommes, produits, etc.; elle contient donc, à côté des variétés, des objets très divers qui sembleraient pathologiques dans la vision classique (par exemple le quotient d'une variété par un feuilletage quelconque). Elle possède aussi un certain type de "récursivité" : si X et Y sont des objets de cette catégorie, Hom(X,Y) est encore canoniquement un objet; autrement dit, les ensembles d'applications différentiables sont eux-mêmes des espaces difféologiques (par exemple les atlas d'une variété). A côté des objets "pathologiques", la difféologie est donc capable de traiter des objets "de dimension infinie".

Or, malgré cette extension (en fait à cause d'elle), quelques théories fondamentales: homotopie, fibrations, etc., convenablement reformulées, vont fonctionner sur les espaces difféologiques aussi bien que sur les variétés. Des notions telles que "composantes connexes", "groupe d'homotopie", "revêtement universel", "fibration", etc., se définissent directement à partir de la difféologie: il est donc inutile d'introduire une quelconque superstructure - par exemple une topologie ad hoc.

De même diverses constructions classiques sur les groupes de Lie s'étendent à la catégorie des **groupes difféologiques** (qui contient par exemple tous les groupes de difféomorphismes).

Le présent travail donne un exemple des résultats que l'on peut ainsi atteindre.

On sait que les variétés symplectiques jouent un rôle important dans la modélisation des systèmes physiques tels que les particules élémentaires, les atomes ou les molécules; et d'autre part que les orbites

co-adjointes d'un groupe de Lie G sont munies naturellement d'une telle structure symplectique.

Or la structure des orbites coadjointes s'étend tout aussi "naturellement" au cas des groupes difféologiques; l'intérêt d'une telle extension, c'est que toutes les variétés symplectiques qui interviennent en physique peuvent se construire par cet algorithme.

Dans la première partie, nous rappelons les structures difféologiques générales (les résultats qui ne sont pas démontrés ici peuvent se trouver dans [Souriau 80], [Souriau 84], [Donato 84], ou [Iglesias 85]).

Puis nous étudions les **formes différentielles** sur les espaces difféologiques. La définition en est évidente, à cause du caractère "final" d'une difféologie et du caractère "covariant" d'une forme; les constructions classiques: dérivation extérieure, image réciproque, etc., fonctionnent comme sur les variétés. Sur un espace difféologique général, on peut cependant distinguer une classe particulière: les p-formes **fonctionnelles** (elles sont engendrées globalement par une fonction antisymétrique à p+1 variables).

On peut évidemment associer à tout groupe difféologique G les espaces de ses p-**formes invariantes** (par translations à gauche); la dérivation extérieure définit une cohomologie sur leur somme directe (si G est un groupe de Lie, il s'agit évidemment de la cohomologie de son algèbre de Lie).

Aut(G), donc G , agit évidemment sur chaque p-forme invariante ω. L'orbite X est un espace difféologique; si ω est fonctionnelle (forme de Maurer-Cartan) et si $p=1$, $d\omega$ descend sur X en une 2-forme fermée σ ; ainsi se généralise la structure symplectique des orbites coadjointes.

Nous classons ensuite ces formes de Maurer-Cartan; celles qui ne sont pas "singulières" sont proportionnelles à une forme "entière". Parmi celles-ci les unes, "nilpotentes", descendent sur X et fournissent un "potentiel" de σ.

Nous nous intéressons particulièrement aux formes "**quantiques**": formes entières non nilpotentes pour lesquelles une certaine obstruction cohomologique est nulle. Elles possèdent des "quantifications" que l'on peut recenser; à chaque quantification est associé un **espace quantique** Ξ , fibré principal en cercles muni d'une 1-forme invariante par l'action du groupe structural et possédant un groupe d'automorphismes "assez grand". Il peut arriver que Ξ soit de dimension infinie; mais toute

préquantification Ξ d'une variété symplectique connexe X (au sens de Kostant-Souriau) peut se construire par cet algorithme. Or ce sont précisément ces variétés et ces préquantifications qui inteviennent dans la modélisation des systèmes matériels.

Ce travail s'inscrit donc dans le cadre de la "quantification géométrique": il s'agit d'éclaircir et de structurer l'ensemble de règles empiriques que l'on appelle "mécanique quantique".

Nous nous proposons de le poursuivre ultérieurement en utilisant une forme quantique sur un groupe difféologique G pour caractériser une classe particulière de représentations unitaires de G. Classe qui devrait, en principe, constituer un outil spécifique pour la description quantique de la matière.

Première partie :

Espaces et groupes difféologiques

Bourbachique des plaques

Définition:

(1,1)

Soit n un entier, **X** un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Nous appellerons p-**plaque** de **X** ($p \in \mathbb{N}$) toute application différentiable (: de classe C^∞) d'un ouvert de $\mathbb{R}^p$ dans **X**.

Les plaques ainsi définies vérifient les propriétés suivantes:

(1,2)

D_0) Toute p-plaque de **X** est une application d'un <u>ouvert</u> de $\mathbb{R}^p$ dans **X**;

D_1) toute application <u>constante</u> $\mathbb{R}^p \to$ **X** est une plaque de **X** ;

D_2) si P_j est une famille de p-plaques de **X** qui possèdent un prolongement commun, le <u>plus petit de ces prolongements</u> est une p-plaque de **X** ;

D_3) si **P** est une p-plaque de **X** , et **Q** une q-plaque de def(**P**), **P**$\circ$**Q** <u>est une q-plaque de</u> **X**.

(1,3)

Réciproquement, soit **X** un ensemble; pour chaque $p \in \mathbb{N}$, choisissons une classe de fonctions que nous appellerons <u>p-plaques</u> de **X** ; nous dirons que ces plaques constituent une **difféologie** de **X** si elles vérifient les <u>axiomes</u> (1,2).

En particulier donc les ouverts des espaces numériques $\mathbb{R}^n$ se trouvent munis d'une difféologie standard.

Catégorie des espaces difféologiques (ex "<u>espaces différentiels</u>")

(1,4)

Il s'agira de la catégorie dont les objets sont les **ensembles** munis d'une **difféologie**, et dont les flèches sont les applications **différentiables**, au sens suivant:

(1,5)

A , application de **X** dans **Y** , sera dite **différentiable** si, pour toute plaque **P** de **X** , **A**$\circ$**P** est une plaque de **Y** .

Nous noterons D(**X**,**Y**) l'ensemble de ces applications.

(1,6)

Les isomorphismes de cette catégorie seront appelés **difféomorphismes**.

Exemples:

- Toute application <u>constante</u> de **X** dans **Y** est différentiable;
- L'application identique de **X** dans **X**, 1_X , est différentiable et constitue la flèche neutre associée à l'objet **X** .

(1,7)

Cette catégorie est donc définie par les difféologies des espaces (ensembles de leurs plaques); réciproquement la catégorie **définit** ces difféologies: en effet, grâce à l'axiome D_3, les p-plaques de **X** sont les éléments des D(**U**,**X**), **U** ouvert de $\mathbb{R}^p$. "Difféologie" et "structure d'espace difféologique" sont donc des données équivalentes.

(1,8)

On peut associer à tout couple **X**, **Y** d'espaces difféologiques l'ensemble **DL(X,Y)** des applications **F** qui sont **localement différentiables** : ce sont celles qui appliquent une partie de **X** dans **Y** et qui vérifient:

$$P\text{: plaque de } X \Rightarrow F\circ P\text{: plaque de } Y$$

- la notion est stable par composition ;
- l'ensemble des p-plaques de **X** est égal à DL($\mathbb{R}^p$, **X**);
- tout espace difféologique **X** possède canoniquement une topologie ("D-**topologie**") dont les ouverts sont les parties dont l'injection canonique dans **X** est localement différentiable;
- les applications différentiables sont D-continues ;
- les applications localement différentiables sont définies sur un D - ouvert.

(1,9)

Les **difféomorphismes locaux** de **X** à **Y** seront les bijections d'une partie de **X** sur **Y** qui sont, avec leur inverse, localement différentiables.

On peut ainsi définir les **variétés** (de dimension n) comme les espaces difféologiques qui sont en tout point localement difféomorphes à $\mathbb{R}^n$.

La catégorie des variétés est donc une sous-catégorie de celle des espaces difféologiques; nous allons constater que cette dernière est beaucoup plus stable vis-à-vis des opérations ensemblistes.

Opérations sur les difféologies

(1,10)

Soient **X'** et **X"** deux espaces difféologiques ayant le même ensemble sous-jacent **X** ; nous dirons que la difféologie **X'** est **plus fine** que la

difféologie **X"** si la bijection canonique i de **X'** sur **X"** :

$$X' \xrightarrow{i} X''$$

est différentiable [par abus de langage, s'il y a "moins de plaques" dans la diffeologie **X'**].

(1,11)

La finesse est une relation d'ordre sur l'ensemble des difféologies de **X** ; relation pour laquelle toute partie possède une borne inférieure et une borne supérieure. La plus fine des difféologies de **X** existe: celle dont les plaques sont localement constantes; nous l'appellerons **difféologie discrète**.

(1,12)

Soient **X** et **Y** deux ensembles; **A** une application **X** → **Y** .

Si **X** est un espace difféologique, sa **difféologie image par A** peut se définir comme la plus fine difféologie de **Y** pour laquelle **A** soit différentiable ; elle existe .

(1,13)

Si **X** et **Y** sont tous les deux des espaces difféologiques, nous appellerons **subduction** de **X** sur **Y** toute surjection **A**: **X** → **Y** telle que la difféologie de **Y** coïncide avec l'image par **A** de celle de **X** .

Remarques:

- Les p-plaques de **Y** sont alors les applications "localement relevables":

$$P = \sup A\circ P_j,$$

P_j désignant une famille de p-plaques de **X** , et **sup** la borne supérieure pour la relation du prolongement ; bien entendu ceci implique que les $A\circ P_j$ soient compatibles;
- si **A** est une subduction de **X** sur **Y**, une application **B**: **Y** → **Z** est différentiable ssi **B∘A** est diférentiable; **B** est une subduction ssi **B∘A** est une subduction;
- on constitue avec les subductions une sous-catégorie de celle des espaces

difféologiques.

- dans le cas où **X** et **Y** sont des variétés, les <u>submersions surjectives</u> sont des subductions.

(1,14)

Tout **quotient d'un espace difféologique** est donc <u>canoniquement difféologique</u> ; la difféologie quotient (ou "réduite") étant caractérisée par le fait que la surjection canonique soit une subduction.

(1,15)

Soit $\mathbf{X}_j$ une famille quelconque d'espaces difféologiques; on définit sur $\mathbf{X} = \prod \mathbf{X}_j$ la **difféologie produit** : c'est <u>la plus fine qui rende différentiables les surjections canoniques</u> $\mathbf{X} \to \mathbf{X}_j$ (qui sont alors des subductions).

(1,16)

En construisant des énoncés duaux des précédents (1,12-13-14-15), on définit:

- l'**image réciproque d'une difféologie** de **Y** par une application $\mathbf{A} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ [<u>la moins fine qui rende **A** différentiable</u>];

- les **inductions** **A** de **X** dans **Y** : ce sont les <u>injections</u> telles que la difféologie de **X** soit l'image réciproque par **A** de celle de **Y**.

- Si **A** est une induction $\mathbf{X} \to \mathbf{Y}$, une application $\mathbf{B}: \mathbf{Z} \to \mathbf{X}$ est différentiable ssi $\mathbf{A} \circ \mathbf{B}$ l'est; **B** est une induction ssi $\mathbf{A} \circ \mathbf{B}$ est une induction;

- les inductions d'espaces difféologiques sont les flèches d'une <u>catégorie</u>;

- la **difféologie de partie** (ou "difféologie induite") , pour tout sous-ensemble **S** d'un espace difféologique **X** ; c'est celle pour laquelle l'injection canonique de **S** dans **X** est une <u>induction</u>; les plaques de **S** sont simplement les plaques de **X** <u>à valeurs dans **S**</u>;

- la **difféologie somme** de $\mathbf{X} = \sum \mathbf{X}_j$, les $\mathbf{X}_j$ étant difféologiques : <u>la moins fine</u> pour laquelle les injections canoniques $\mathbf{X}_j \to \mathbf{X}$ soit différentiables; ce sont alors des <u>inductions</u>.

(1,17)

Si un espace difféologique est muni d'une partition, on peut lui conférer une difféologie plus fine (la "**difféologie feuilletée**") en le considérant comme <u>somme de ces parties</u> (chacune étant justement munie de sa difféologie de partie); parmi les difféologies <u>plus fines</u> que la difféologie donnée, c'est <u>la moins fine</u> de celles qui rendent le quotient <u>discret</u>.

(1,18)

Soit **X** un espace difféologique; <u>la plus fine partition</u> pour laquelle la difféologie de **X** soit <u>feuilletée</u> existe; ses classes s'appelleront **composantes de X**; **X** sera dit **connexe** s'il possède <u>une seule composante</u> .

On le vérifie en caractérisant les classes au moyen de **la connexité par arc**: x et x' appartiennent à une même composante s'il existe $\mathbf{A} \in D(\mathbb{R},\mathbf{X})$ tel que $\mathbf{A}(0) = x$, $\mathbf{A}(1) = x'$.

Les composantes de **X** sont aussi ses composantes <u>pour la D-topologie</u>.

Décomposition canonique

(1,19)

Toute application différentiable $\mathbf{A} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ se décompose canoniquement en

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} \circ \mathbf{B} \circ \mathbf{S},$$

S : subduction de **X** sur un quotient, **B** : bijection différentiable de ce quotient avec une partie de **Y** , **I** : induction de cette partie dans **Y** .

Nous dirons que **A** est **stricte** si $\mathbf{B}^{-1}$ est différentiable - c'est-à-dire si **A** est une <u>subduction</u> de **X** sur un <u>sous-espace</u> de **Y** .

Exemples:

(1,20) Une <u>surjection stricte</u>, c'est une subduction; une <u>injection stricte</u>, c'est une induction; une <u>bijection stricte</u>, c'est un difféomorphisme.

(1,21) la fonction réelle $r \mapsto r^2$ **n'est pas stricte**; autrement dit la demi-droite fermée $\mathbb{R}^+ = [\,0\,, +\infty\,[$ possède, à côté de sa difféologie de partie de $\mathbb{R}$, la difféologie "carrée", image de celle de $\mathbb{R}$ par $r \mapsto r^2$, qui est <u>strictement plus fine</u>.

Démonstration: la fonction $(x,y) \mapsto x^2 + y^2$ est évidemment une 2-plaque de $\mathbb{R}^+_{\text{partie}}$; si elle était aussi une plaque de $\mathbb{R}^+_{\text{carrée}}$, elle serait de la forme $\sup_p f_p(x,y)^2$, f_p : 2-plaque de $\mathbb{R}$ [Cf. (1,13)]; il existerait donc une f_p qui vaudrait dans un voisinage de l'origine $\pm\sqrt{(x^2+y^2)}$ – ce qui est incompatible avec le fait qu'elle soit C^∞ **C.Q.F.D.**

Difféologie fonctionnelle

(1,22)

Soient $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ deux espaces difféologiques.

L'espace $\mathbf{F} = D(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ des applications différentiables de $\mathbf{X}$ dans $\mathbf{Y}$ devient lui-même un espace difféologique si on le munit de la **difféologie fonctionnelle**: la <u>moins fine</u> qui rende l'application <u>valuation</u>

$$(f,x) \mapsto f(x)$$

différentiable (de $\mathbf{F}\times\mathbf{X}$ dans $\mathbf{Y}$).

Groupes difféologiques (ex "<u>groupes différentiels</u>")

(1,23)

Nous appellerons **difféologie de groupe** toute difféologie définie sur un groupe $\mathbf{G}$, telle que l'application:

$$(g\,,g') \mapsto g^{-1}g'$$

soit <u>différentiable</u> [de $\mathbf{G}\times\mathbf{G}$ à $\mathbf{G}$; $\mathbf{G}\times\mathbf{G}$ est muni de la <u>difféologie produit</u> (1,20)].

Après avoir choisi une telle difféologie, nous dirons que $\mathbf{G}$ est un "**groupe difféologique**"; ces objets constituent une catégorie ("**catégorie des groupes difféologiques**") dont les flèches ("**D-morphismes**") sont les

morphismes de groupe qui sont différentiables.

Exemples:

(1,24) Tout **groupe de Lie** $\mathbf{G}$ est un groupe difféologique [$\mathbf{G}$ étant muni de sa difféologie de variété; voir (1,9)];

(1,25) Si $\mathbf{X}$ est un espace difféologique quelconque, le groupe $\mathrm{Diff}(\mathbf{X})$ de tous les **difféomorphismes** de $\mathbf{X}$ (1,6) sera muni de la difféologie **standard**, la <u>moins fine</u> des difféologies de groupe qui rendent différentiable l'application <u>valuation</u> :

$$(\mathbf{g}\,,\mathbf{x}) \mapsto \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

[application du produit difféologique $\mathrm{Diff}(\mathbf{X}) \times \mathbf{X}$ dans $\mathbf{X}$]; $\mathbf{P}$ est une <u>p-plaque standard</u> de $\mathrm{Diff}(\mathbf{X})$ ssi les deux applications:

$$(r,x) \mapsto \mathbf{P}(r)(x)$$
$$(r,x) \mapsto \mathbf{P}(r)^{-1}(x)$$

sont différentiables; dans le cas particulier où $\mathbf{X}$ est une variété, la deuxième vérification est inutile (grâce au théorème des fonctions implicites), la difféologie standard est induite de la difféologie fonctionnelle [voir (1,22)].

(1,26) Soit $\mathbf{G}$ un groupe difféologique, $\mathbf{H}$ un **sous-groupe** <u>quelconque</u>. $\mathbf{H}$, muni de sa difféologie de partie (1,16), est un **groupe difféologique**; l'espace difféologique quotient $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ (1,14) s'appellera **espace homogène** de $\mathbf{G}$; si $\mathbf{H}$ est distingué, le **groupe quotient** $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ devient un <u>groupe difféologique</u>.

(1,27) Tout "**groupe de difféomorphismes**" d'un espace $\mathbf{X}$ [: sous-groupe de $\mathrm{Diff}(\mathbf{X})$] possède donc une structure **standard** de groupe difféologique.

En particulier, si $\mathbf{G}$ est un groupe difféologique <u>quelconque</u>, le groupe $\mathrm{Aut}(\mathbf{G})$ de ses **D-automorphismes** (1,23) est un <u>groupe difféologique</u> – comme sous-groupe de $\mathrm{Diff}(\mathbf{G})$. On notera que les <u>automorphismes intérieurs</u> de $\mathbf{G}$ sont des D-automorphismes, et que:

$$g \mapsto [\,g' \mapsto gg'g^{-1}]$$

est un D-morphisme $\mathbf{G} \to \mathrm{Aut}(\mathbf{G})$.

Suites D-exactes

(1,28)

Nous appellerons suite **D-exacte** une <u>suite exacte</u> de morphismes de groupes:

$$\ldots \mathbf{G}_{j-1} \to \mathbf{G}_j \to \mathbf{G}_{j+1} \ldots$$

telle que:

les $\mathbf{G}_j$ portent une <u>difféologie de groupe</u>;

les flèches $\to$ sont des <u>D-morphismes stricts</u> [(1,23), (1,19)].

Une suite D-exacte:

$$0 \to \mathbf{K} \to \mathbf{K}' \to 0$$

signifie que $\mathbf{K}$ et $\mathbf{K}'$ sont D-isomorphes; si la suite:

$$0 \to \mathbf{K} \to \mathbf{K}' \to \mathbf{K}'' \to 0$$

est D-exacte, $\mathbf{K}$ est D-isomorphe à un sous-groupe distingué de $\mathbf{K}'$, et $\mathbf{K}''$ au quotient $\mathbf{K}'/\mathbf{K}$; nous dirons alors que $\mathbf{K}'$ est une **D-extension de K" par K**.

En particulier une D-extension par un groupe <u>discret</u> (1,11) s'appellera **revêtement de groupe**.

(1,29)

Une D-extension centrale

Soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{C}$ deux groupes difféologiques.

Le produit direct $\mathbf{A} \times \mathbf{C}$ permet évidemment de construire une suite D-exacte:

$$0 \to \mathbf{A} \to \mathbf{A} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C} \to 0\,;$$

ce qui pose le problème suivant: une D-extension $\mathbf{B}$ de $\mathbf{C}$ par $\mathbf{A}$:

$$0 \to \mathbf{A} \to \mathbf{B} \to \mathbf{C} \to 0$$

est-elle **triviale**, c'est-à-dire <u>isomorphe</u> à la précédente ?

Il s'agit de savoir s'il existe un isomorphisme $\Phi\colon \mathbf{A}\times\mathbf{C} \to \mathbf{B}$ produisant un diagramme commutatif de suites D-exactes:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathbf{A} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{A}\times\mathbf{C} \arrow[r] \arrow[d, shift left] & \mathbf{C} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbf{A} \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[d] & \mathbf{B} \arrow[r, "\gamma"'] \arrow[d] \arrow[u, shift left] & \mathbf{C} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

le problème se ramène à trouver un D-morphisme $\alpha'\colon \mathbf{B}\to\mathbf{A}$ qui soit <u>inverse-à-gauche</u> de α:

$$\alpha'\circ\alpha = 1_{\mathbf{A}}\,,$$

et à vérifier que le D-morphisme $F\colon \mathbf{B} \to \mathbf{A}\times\mathbf{C}$ défini par:

$$F(b) = (\,\alpha'(b), \gamma(b)\,)$$

est <u>strict</u> (il est nécessairement bijectif); on prend alors $\Phi = F^{-1}$.

Nous allons étudier ce problème dans le cas particulier suivant:

$\mathbf{A}$ est <u>commutatif</u>;

$\mathbf{C}$ est <u>discret</u>.

On définit une cohomologie de $\mathbf{C}$ à valeurs dans $\mathbf{A}$ en définissant les p-cochaînes comme les applications de $\mathbf{C}^p$ dans $\mathbf{A}$ (elles sont toutes différentiables parce que $\mathbf{C}$ est discret), et en définissant le cobord δ d'une p-cochaîne t par les formules:

$$\delta t(c,c') = t(cc')\, t(c')^{-1} t(c)^{-1} \quad \text{si } p=1;$$

$$\delta t(c,c',c'') = t(c,c'c'')\, t(c',c'')\, t(cc',c'')^{-1}\, t(c,c')^{-1} \quad \text{si } p=2.$$

Nous allons déterminer <u>deux obstructions algébriques</u> consécutives pour que l'extension $\mathbf{B}$ soit triviale, et recenser l'ensemble de ses trivialisations.

Pour que $\mathbf{B}$ soit triviale, il est d'abord nécessaire que l'extension soit **centrale**, c'est-à-dire que $\alpha(\mathbf{A})$ soit contenu dans le centre de $\mathbf{B}$. On se place désormais dans cette hypothèse.

Soit α' un <u>morphisme de groupe</u> inverse-à-gauche de α; il est immédiat que $[\alpha\circ\alpha'](b^{-1})\,b$ ne dépend de b que par l'intermédiaire de $\gamma(b)$; parce que l'extension est centrale, l'application γ' ainsi définie:

$$\gamma'(\gamma(b)) = [\alpha\circ\alpha'](b^{-1})\,b$$

est un morphisme de groupe $\mathbf{C} \to \mathbf{B}$, donc un D-morphisme puisque $\mathbf{C}$ est discret; il est de plus

<u>inverse-à-droite</u> de γ :

$$\gamma \circ \gamma' = 1_{\mathbf{C}}$$

et il caractérise α' par la relation:

$$\$ \qquad \alpha'(b) = \alpha^{-1}([\gamma' \circ \gamma](b^{-1})\, b)$$

puisque α est une induction, α' est donc automatiquement différentiable. De plus l'application Φ :

$$\Phi(a,c) = \alpha(a)\, \gamma'(c)$$

est différentiable et inverse de F – si bien que F est un difféomorphisme; puisque la première composante de $F(b)$ est $\alpha'(b)$, on voit que **tout morphisme de groupe α' inverse-à-gauche de α est une subduction de $\mathbf{B}$ sur $\mathbf{A}$ et engendre une D-trivialisation.**

La relation entre α' et γ' est <u>bijective</u>: plus précisément, si γ' est un morphisme inverse-à-droite de γ, la relation $\$$ définit effectivement une application α', qui est un D-morphisme inverse-à-gauche de α, associé donc à une trivialisation.

Le problème d'<u>existence</u> d'une trivialisation se ramène donc à l'existence d'un D-morphisme γ' inverse-à-droite de γ, et le problème de <u>recensement</u> des trivialisations au recensement de tels γ'.

Grâce à l'axiome du choix, on peut toujours trouver une <u>application</u> k de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{B}$ qui soit inverse-à-droite de γ :

$$\gamma(k(c)) = c \quad \forall c \in \mathbf{C}\,;$$

les autres sont toutes obtenues par la formule:

$$\square \qquad \gamma'(c) = k(c)\ \alpha(\tau(c)),$$

τ étant une application arbitraire de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{A}$ – donc une 1-cochaîne.

Nous voulons choisir τ pour que γ' soit un morphisme de groupe; en remarquant que

$$k(cc')\, k(c')^{-1} k(c)^{-1}$$

appartient à $\ker(\gamma) = \mathrm{im}(\alpha)$, on peut définir une 2-cochaîne θ par:

$$\theta(c,c') = \alpha^{-1}(k(cc')\, k(c')^{-1} k(c)^{-1})$$

en utilisant le fait que $\psi = \alpha \circ \theta$ prend ses valeurs dans le centre de $\mathbf{B}$, on vérifie que θ est un 2-cocycle; que la classe de cohomologie de θ ne dépend que de l'extension $\mathbf{B}$ – pas du choix de k; et enfin que la trivialité de l'extension $\mathbf{B}$ est équivalente à la nullité de cette classe de cohomologie – ce qui fournit **la deuxième obstruction**.

On passe enfin d'une trivialisation aux autres (d'un morphisme γ' aux autres) par la formule $\square$ où la 1-cochaîne τ parcourt l'ensemble des 1-cocycles – c'est-à-dire des morphismes de groupe

$\mathbf{C} \to \mathbf{A}$. En ce qui concerne α', la substitution correspondante est

$$\alpha'(b) \to \alpha'(b)\,[\tau \circ \gamma](b)$$

(1,30)

On sait qu'un diagramme commutatif de cinq suites exactes $\to$ (horizontales et verticales):

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & G \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "x"] & G' \arrow[r, "\gamma'"] \arrow[d, "x'"] & G'' \arrow[r] \arrow[d, "x''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & H \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "y"] & H' \arrow[r, "\eta'"] \arrow[d, "y'"] & H'' \arrow[r] \arrow[d, "y''"] & 0 \\
0 \arrow[r, dotted] & K \arrow[r, dotted, "\kappa"] \arrow[d] & K' \arrow[r, dotted, "\kappa'"] \arrow[d] & K'' \arrow[r, dotted] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

possède un seul complété commutatif

$$\dashrightarrow \quad \dashrightarrow \quad \dashrightarrow \quad \dashrightarrow$$

et qu'il s'agit d'une suite exacte. Ce résultat se complète "difféologiquement" par le

théorème:

<u>Si les cinq suites $\to$ sont D-exactes, la sixième ($\dashrightarrow$) l'est aussi.</u>

Démonstration :

Par hypothèse [voir (1,20)], γ, η, κ, x, x', x'' sont des inductions; γ', η', κ', y, y', y'' sont des subductions; il faut montrer que κ (qui est injective) est une induction et κ' (qui est surjective) une subduction.

a) Soit k une plaque de K; puisque y est une subduction, il existe des plaques h_p de H telles que $k = \sup\ y \circ h_p$ (1,13); d'où $\kappa \circ k = \sup\ \kappa \circ y \circ h_p = \sup\ y' \circ \eta \circ h_p$ = plaque de K' [axiome D_2 des difféologies]; κ est <u>différentiable</u> .

b) Soit k' une plaque de $\mathrm{im}(\kappa)$, c'est-à-dire une plaque de K' à valeurs dans $\mathrm{im}(\kappa) = \ker(\kappa')$; puisque y' est une subduction, il existe des plaques h'_p de H' telles que $k' = \sup\ y' \circ h'_p$; $\forall r \in \mathrm{def}(h'_p)$, on a $0 = [\kappa' \circ y'](h'_p(r)) = [y'' \circ \eta'](h'_p(r))$, si bien que $\eta' \circ h'_p$ est à valeurs dans $\ker(y'') = \mathrm{im}(x'')$; puisque x'' est une induction, $g''_p = x''^{-1} \circ \eta' \circ h'_p$ est une plaque de G'', telle que $\eta' \circ h'_p = x'' \circ g''_p$; puisque γ' est une subduction, il existe des plaques g'_{pq} de G' telles que $g''_p = \sup \gamma' \circ g'_{pq}$; d'où $\eta' \circ h'_p = \sup x'' \circ \gamma' \circ g'_{pq} = \sup \eta' \circ x' \circ g'_{pq}$. $\forall r \in \mathrm{def}(g'_{pq})$, on a donc $\eta'(h'_p(r)) = \eta'(x'(g'_{pq}(r)))$, d'où $x'(g'_{pq}(r))^{-1} h'_p(r) \in \ker(\eta') = \mathrm{im}(\eta)$; d'après l'axiome (1,22) des groupes difféologiques, la fonction h'_{pq}: $r \mapsto [x' \circ g'_{pq}](r)^{-1} h'_p(r)$ est une plaque de H', plaque dont les valeurs sont prises dans $\mathrm{val}(\eta)$; η étant une induction, $h_{pq} = \eta^{-1} \circ h'_{pq}$ est une plaque de H telle que $h'_{pq} = \eta \circ h_{pq}$; d'où, $\forall r \in \mathrm{def}(h_{pq})$, $k \circ y(h_{pq}(r)) = y' \circ \eta(h_{pq}(r)) = y'(h'_{pq}(r)) = y' \circ x'(g'_{pq}(r))^{-1} y'(h'_p(r)) = y'(h'_p(r)) = k'(r)$; d'où $k' = \sup \kappa \circ y \circ h_{pq}$; κ étant injectif, les $y \circ h_{pq}$ sont compatibles, leur borne supérieure k est une plaque de K, et elle est égale à $\kappa^{-1} \circ k'$; κ est donc une <u>induction</u>.

c) puisque $\kappa' \circ y' = y'' \circ \eta'$, les résultats élémentaires (1,13) montrent successivement que $\kappa' \circ y'$ est une subduction, puis que κ' est une <u>subduction</u>.

C.Q.F.D.

Homotopie des groupes difféologiques

(1,31)

Soit **G** un groupe difféologique.

Les composantes de **G** (1,18) sont les classes selon un sous-groupe **G°**; **G°** est le plus grand sous-groupe connexe; c'est aussi le plus petit des sous-groupes **K** tels que **G/K** soit discret (1,11).

G° est <u>invariant par tous les D-automorphismes de **G**</u>, et par conséquent distingué (1,27); **G/G°**, groupe discret, s'appellera **groupe des composantes** de **G**.

Si **G** est lui-même sous-groupe distingué d'un groupe **H**, **G°** est distingué <u>dans **H**</u>, puisque les automorphismes intérieurs de **H** induisent des D-automorphismes de **G**.

(1,32)

Il existe une catégorie dont les objets sont les groupes difféologiques <u>connexes</u>, et les flèches les D-morphismes <u>subductifs à noyau discret</u>; s'il existe dans cette catégorie une flèche

$$\mathbf{G'} \to \mathbf{G},$$

G' est un <u>revêtement connexe</u> de **G** [Cf.(1,28)].

Tout groupe connexe **G** possède un revêtement connexe **G`** qui est **universel** au sens de cette catégorie: **G`** est <u>revêtement de tout revêtement connexe de **G**</u>.

Le noyau de la flèche **G`** → **G** est un sous-groupe <u>discret</u> et <u>distingué</u> de **G`**; il appartient au <u>centre</u> de **G`** et il est donc <u>commutatif</u>; sa structure de groupe ne dépend <u>que de la difféologie de **G**</u>; on l'appelle **groupe d'homotopie** de **G**.

Les objets <u>initiaux</u> de cette catégorie sont dits **simplement connexes**; un groupe simplement connexe, c'est donc un groupe <u>isomorphe à tous ses revêtements connexes</u>.

Il est clair qu'un groupe est <u>simplement connexe</u> ssi <u>son groupe d'homotopie est nul</u>; qu'un revêtement est <u>universel</u> si et seulement si il est <u>simplement connexe</u>.

(1,33)

Pour tout D-morphisme **A** d'un groupe <u>simplement connexe</u> **S** dans un groupe **G**, et pour tout revêtement **R** de **G**, **A** possède dans la catégorie des groupes difféologiques un <u>relèvement unique</u> **A***: **S** → **R** :

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{R} \arrow[d] \\ \mathbf{S} \arrow[ur, "\mathbf{A^*}"] \arrow[r, "\mathbf{A}"'] & \mathbf{G} \end{tikzcd}$$

(1,34)

Le quotient d'un groupe <u>simplement connexe</u> par un sous-groupe (distingué)

<u>connexe</u> est <u>simplement connexe</u>.

Construction du revêtement universel d'un groupe

(1,35)

Soit **G** un groupe difféologique.

L'ensemble des applications différentiables de $\mathbb{R}$ dans **G** devient un <u>groupe</u> si on pose:

$$[a\,b](t) = a(t)\ b(t) \qquad \forall\, a, b \in D(\mathbb{R},G),\ \forall t \in \mathbb{R}$$

et un groupe <u>difféologique</u> si on le munit de la difféologie <u>fonctionnelle</u> [Cf.(1,22)].

On appellera "**arc**" de **G** toute application différentiable a de $\mathbb{R}$ dans **G** vérifiant

$$a(0) = e \qquad [\text{: élément neutre de } G\ ];$$

l'ensemble de ces arcs est un **sous-groupe** de $D(\mathbb{R},G)$, et à ce titre, un groupe difféologique; nous le **noterons** "**Arc(G)**". On peut **montrer** que Arc(G) est **simplement connexe**.

Il est clair que l'application "**bout**" : Arc(**G**) → **G** définie par bout(a) = a(1) est un morphisme de groupe; on peut vérifier que bout est un **D-morphisme strict,** et que son image est la **composante neutre** G° de **G**.

Son noyau est constitué des arcs vérifiant a(1) = e [= a(0)], qu'on appellera **lacets** du groupe.

La composante neutre du sous-groupe distingué Lacet(**G**) est un sous-groupe distingué de Arc(**G**) [Cf.(1,33)] ; comme quotient d'un groupe simplement connexe par un groupe connexe, le groupe :

$$G^* = \mathrm{Arc}(G)/\mathrm{Lacet}(G)^\circ$$

est <u>simplement connexe</u> (1,32); le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Lacet}(G)^\circ \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Lacet}(G)^\circ \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Lacet}(G) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Arc}(G) \arrow[r, "\text{bout}"] \arrow[d] & G^\circ \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r, dotted] & H \arrow[r, dotted] \arrow[d] & G^* \arrow[r, dotted] \arrow[d] & G^\circ \arrow[r, dotted] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

montre que **G*** est une D-extension de **G°** par le groupe discret **H** , donc un revêtement de **G°**; puisque **G*** est simplement connexe, il constitue un **revêtement universel de G°**.

Le groupe d'homotopie de **G°** est donc égal au <u>groupe des composantes</u> de Lacet(**G**); en particulier **G°** est <u>simplement connexe</u> ssi Lacet (**G**) <u>est connexe</u>.

Actions

(1,36)

Soit **G** un groupe difféologique, et A une **action** de **G** sur un ensemble **X** [c'est-à-dire un morphisme du groupe **G** dans le groupe **X**! des permutations de **X**].

a) Nous dirons que **A** est une **D-action** (ou une "**action différentiable**") si :

X est un espace difféologique;

A est un <u>D-morphisme</u> de **G** dans Diff(**X**)

[voir (1,23),(1,27). C'est une généralisation de l'<u>action différentiable</u> d'un groupe de Lie sur une variété] ;

b) Nous pouvons toujours munir l'ensemble **X** de <u>la plus fine</u> difféologie telle que **A** soit une D-action: **X** est alors la <u>somme</u> [au sens (1,16)] des orbites de **G**, chacune étant difféomorphe à un espace homogène de **G** [au sens (1,26)]. Nous dirons dans ce cas que **X** est un **espace de Klein** et **G** un **groupe générateur** de **X**. En particulier, les espaces difféomorphes à un espace homogène sont des espaces de Klein, qu'on appelle encore "**espaces homogènes**" par extension.

Si **G** est un groupe générateur de **X**, tous les "zwischengruppen" **G'** :

$$A(G) \subset G' \subset \mathrm{Diff}(X),$$

munis de leur action naturelle sur **X**, sont aussi générateurs; en particulier Diff(**X**), qui est ainsi un groupe générateur canonique.

Exemple: toute **variété séparée** est un espace de Klein; c'est un espace homogène ssi ses composantes sont deux à deux difféomorphes – en particulier donc si la variété est connexe.

(1,37)

Définition:

Le couple d'un groupe difféologique **G** et d'un espace difféologique **X** constituera un **espace fibré principal** s'il existe une action:

$$g \mapsto g_X$$

de **G** sur **X**, telle que l'application:

$$(g, x) \to (g_X(x), x)$$

soit une induction [de **G**×**X** dans **X**×**X**].
On dira alors que **X** est **l'espace**, **G** le **groupe structural**; les **fibres** seront les orbites de **G**; la **base** sera l'espace difféologique quotient de **X** par l'action de **G**.

Dans ces conditions, $g \to g_X$ est une D-action libre; pour chaque x, l'application:

$$g \to g_X(x)$$

est un difféomorphisme de **G** avec la fibre contenant x (munie de sa difféologie de partie).

(1,38) **Exemples:**

- Les espaces fibrés principaux **au sens classique** sont inclus dans cette définition: il s'agit du cas où **X** est une variété séparée et **G** un groupe de Lie; la condition de trivialité locale est **automatiquement vérifiée** {voir [Iglesias 85]}.

- Soit **G** un groupe difféologique; **T** et **S** deux sous-groupes emboîtés:

$$T \subset S \subset G$$

tels que **T** soit distingué dans **S**.
Considérons les espaces homogènes:

$$Y = G / S$$

$$X = G / T$$

et le groupe quotient

$$H = S / T,$$

groupe difféologique comme quotient d'un sous-groupe de **G**.
Il est immédiat que, $\forall g \in G$, $\forall s \in S$, la classe

$$gs^{-1}T$$

ne dépend de g et s que par l'intermédiaire de gT et sT ; on peut donc poser:

$$A(sT)(gT) = gs^{-1}T ;$$

quelques vérifications montrent que A est un action de **H** sur **X**, et que cette action fait de **X** un **espace fibré principal**, de groupe structural **H** ; la base s'identifie à **Y**, grâce à la subduction:

$$gT \to gS.$$

Dans le cas particulier où **T et S** sont distingués dans **G**, **X** et **Y** sont des groupes; le diagramme:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathbf{T} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{T} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbf{S} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{G} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{Y} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r, dashed] & \mathbf{H} \arrow[r, dashed] \arrow[d] & \mathbf{X} \arrow[r, dashed] \arrow[d] & \mathbf{Y} \arrow[r, dashed] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

montre que **X** est une D–extension de **Y** par **H**, ce qui peut aussi s'écrire:

$$\mathbf{G/S} \sim \mathbf{G/T} \,/\, \mathbf{S/T},$$

le signe $\sim$ désignant l'isomorphisme des groupes difféologiques.

Homotopie des espaces homogènes

(1,39) Restons dans la construction précédente, et considérons le cas où **H** est discret; on sait alors que **X** est un revêtement du groupe **Y** [Cf.(1,32)]; puisque **X** est aussi un fibré principal de base **Y** et de groupe structural **H** , ceci suggère la définition suivante:

> Soit **Y** un espace difféologique.
> Tout espace fibré principal **X** dont la base est difféomorphe à **Y** et dont le groupe structural est discret s'appellera **revêtement** de **X** .

Nous ne considérons donc ici que les revêtements "principaux" ou "galoisiens"; pour les revêtements "associés", voir [Iglesias 85].

La théorie des revêtements des groupes connexes se généralise à **tout espace difféologique connexe X** : **X** sera dit **simplement connexe** s'il est isomorphe à tous ses revêtements connexes ; tout espace connexe possède un **revêtement simplement connexe** qui, de ce fait, est **universel**, c'est-à-dire revêtement de tout revêtement connexe; son groupe structural, discret, est le (premier) **groupe d'homotopie** de **X** ;

sa structure de groupe ne dépend que de la difféologie de **X** (dans ce cas général, il n'est pas nécessairement commutatif) .

(1,40)

Ces objets peuvent se construire explicitement dans le cas d'un espace connexe **homogène** [au sens (1,36)].

Par hypothèse, **X** est difféomorphe au quotient **G/S** d'un groupe difféologique **G** par un sous-groupe **S**.

Soit **S°** la composante neutre de **S** , **H** = **S/S°** le groupe des composantes de **S** , qui est discret [Cf.(1,30)] ; il résulte de la construction (1,38) que $\mathbf{X}_0$ = **G/S°** est un revêtement de **X** , dont le groupe structural est **H** . Supposons maintenant **X** connexe; on peut alors faire quelques hypothèses supplémentaires. En effet, la composante neutre d'un groupe générateur de **X** est encore générateur, si bien qu'on peut supposer **G** connexe; alors $\mathbf{X}_0$ est un revêtement connexe de **X**.

Le revêtement universel d'un groupe générateur connexe est générateur: on peut donc choisir le groupe **G** simplement connexe; dans ce cas on peut montrer que $\mathbf{X}_0$, comme quotient du groupe simplement connexe **G** par le sous-groupe connexe **S°** , est simplement connexe: il constitue donc le **revêtement universel** de **X**; dans ce cas le **groupe d'homotopie** de **X** est égal à **H** , groupe des composantes de **S** .

Ces définitions coïncident avec les définitions classiques dans le cas où **X** est une variété.

Deuxième partie :

p–formes sur les espaces difféologiques

p-formes classiques

(2,1)

Une p–forme ω sur un ouvert **X** d'un espace numérique $\mathbb{R}^n$ se définit élémentairement: ω est un tenseur antisymétrique de degré p sur $\mathbb{R}^n$, caractérisé par ses composantes $\omega_{jk..m}$, fonctions différentiables sur $\mathbf{X}$.

L'image réciproque de ω par une plaque Q de $\mathbf{X}$ (1,2) est la p-forme ω' de $\mathbf{Y}$ = def(Q) dont les composantes au point y sont données par:

(a) $$\omega'_{j'k'...m'} = \omega_{jk...m} \; D^j{}_{j'} \; D^k{}_{k'} \ldots \; D^m{}_{m'}$$

les $\omega_{jk...m}$ sont prises au point $x = Q(y)$; $\mathbf{D}$ est la matrice jacobienne Q'(y); l'image réciproque ω' sera notée:

$$Q^*(\omega)$$

Exemple: si $\mathbf{Y}$ est un ouvert de $\mathbf{X}$, l'induction canonique $\iota_{\mathbf{Y}}$ de $\mathbf{Y}$ dans $\mathbf{X}$ vérifie:

(b) $$\iota_{\mathbf{Y}}{}^*(\omega) = \omega|_{\mathbf{Y}}$$

[: restriction du champ de tenseurs ω à la partie $\mathbf{Y}$ de son ensemble de définition].

Grâce à la composition des matrices jacobiennes, on constate que:

Si R est une plaque de def(Q), on a:

(c) $$[Q \circ R]^* \; (\omega) = [R^* \circ Q^*] \, (\omega)$$

Une façon d'énoncer cette règle, c'est de dire qu'il existe des fonctionnelles Ω qui associent à toute plaque Q de $\mathbf{X}$ une p-forme de def(Q), en vérifiant l'identité:

(d) $$\Omega(Q \circ R) = R^*(\Omega(Q))$$

pour toute plaque Q de $\mathbf{X}$, toute plaque R de def(Q), et que ces fonctionnelles sont en bijection avec les p-formes ω par les formules:

(e) $$\Omega(Q) = Q^*(\omega) \quad , \quad \omega = \Omega(1_{\mathbf{X}}).$$

[$1_{\mathbf{X}}$ désigne l'application identique de $\mathbf{X}$ dans $\mathbf{X}$, c'est-à-dire la flèche neutre de $\mathbf{X}$ dans la catégorie des espaces difféologiques].

Si on transfère ainsi à Ω la définition de l'image réciproque, elle se traduit par:

(f) $$Q^*(\Omega)(R) = \Omega(Q \circ R)$$

p-formes difféologiques

L'intérêt de ces manipulations formelles (d,e,f), c'est qu'elles vont permettre de définir les p-formes sur un espace difféologique quelconque $\mathbf{X}$.

(2,2)

Une p-**forme** ω de $\mathbf{X}$, ce sera une fonctionnelle sur les plaques (1,3); pour toute plaque P de $\mathbf{X}$, $\omega(P)$ sera une p-forme de def(P) [au sens classique (2,1)]; ω sera astreinte à l'**axiome de compatibilité**:

(a) $$\omega(P \circ Q) = Q^*(\omega(P))$$

pour toute plaque P de $\mathbf{X}$, toute plaque Q de def(P)

Si A est une application différentiable de $\mathbf{Y}$ dans $\mathbf{X}$ (1,5), et ω une p-forme de $\mathbf{X}$, nous définirons l'**image réciproque** de ω **par** A, $A^*(\omega)$, par la formule:

(b) $A^*(\omega)(P) = \omega(A \circ P)$ pour toute plaque P de $\mathbf{Y}$;

[Cf.(2,1 f)]; on vérifie élémentairement que:

(c) $A^*(\omega)$ est une p-forme de $\mathbf{Y}$;

(d) $$1_{\mathbf{X}}{}^*(\omega) = \omega$$

– si B est une application différentiable de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Y}$, on a:

(e) $$[A \circ B]^* \, (\omega) = [B^* \circ A^*] \, (\omega)$$

On peut si on veut remplacer la notation fonctionnelle $\omega(P)$ par la notation synonyme:

(f) $$P^*(\omega);$$

l'axiome de compatibilité (a) devient alors un simple cas particulier de (e).

Cas des 0-formes

(2,3)

La définition des p-formes classiques fonctionne encore pour $p = 0$, avec des conventions bien connues: une 0-forme, c'est simplement une fonction différentiable.

La même chose vaut pour les 0-formes ω d'un espace difféologique $\mathbf{X}$:

elles sont en bijection avec les fonctions α différentiables sur $\mathbf{X}$ [$\alpha \in D(X,\mathbb{R})$] par la formule:

$$\square \qquad P^*(\omega) = \alpha \circ P \quad \text{pour toute plaque P de } \mathbf{X}$$

Démonstration: on peut définir α en choisissant un entier n (par exemple $n = 0$), en associant à chaque point $x \in \mathbf{X}$ la plaque constante $\mathbb{R}^n \to \mathbf{X}$:

$$C_x : r \mapsto x$$

[axiome D_1 des difféologies], et en posant:

$$\alpha(x) = C_x^*(\omega)(0);$$

pour toute plaque P, pour tout $r \in \mathrm{def}(P)$, on a $C_{P(r)} = P \circ C_r$, d'où $\alpha(P(r)) = C_{P(r)}^*(\omega)(0) = C_r^*(P^*(\omega))(0) = P^*(\omega)(C_r(0)) = P^*(\omega)(r)$, soit $\square$. Cette formule $\square$ elle-même montre ensuite que α est différentiable.

Réciproquement, pour tout $\alpha \in D(X,\mathbb{R})$, il est immédiat que la fonctionnelle ω définie par la formule $\square$ est bien une 0-forme, au sens (2,2)

C.Q.F.D.

Valeur en un point

(2,4)

Soient ω_1 et ω_2 deux p-formes de $\mathbf{X}$; x un point de $\mathbf{X}$.

Nous dirons que ω_1 et ω_2 ont **même valeur en** x si, pour toute plaque P de $\mathbf{X}$ telle que

$$P(0) = x$$

on a

$$\omega_1(P)(0) = \omega_2(P)(0)$$

Il est immédiat que:

- cette relation est une équivalence;
- si ω_1 et ω_2 ont même valeur en $A(y)$, $A^*(\omega_1)$ et $A^*(\omega_2)$ ont même valeur en y ;
- deux formes ω_1 et ω_2 ayant même valeur en x vérifient:

$$\omega_1(P)(r) = \omega_2(P)(r)$$

pour toute plaque P telle que $P(r) = x$;

- deux formes ayant même valeur en tout point de $\mathbf{X}$ sont égales.

Invariants intégraux

(2,5)

Soient $\mathbf{X}$ et $\mathbf{X}'$ <u>deux espaces difféologiques</u>; Φ une <u>subduction</u> de $\mathbf{X}$ sur $\mathbf{X}'$ (1,13); ω une <u>p-forme</u> de $\mathbf{X}$.

Nous dirons que ω est un **invariant intégral** de Φ s'il existe une p-forme ω' de $\mathbf{X}'$ telle que

(a) $$\omega = \Phi^*(\omega');$$

alors

(b) ω' est caractérisée par (a) .

Pour que ω soit un invariant intégral, la condition suivante est nécessaire et suffisante:

(c) pour tout couple de plaques P_1, P_2 de $\mathbf{X}$

$$\Phi \circ P_1 = \Phi \circ P_2 \quad \Rightarrow \quad P_1^*(\omega) = P_2^*(\omega)$$

Démonstration: Commençons par montrer l'injectivité de Φ^* si Φ est une subduction; soit, en utilisant pour simplifier la linéarité (Cf. (2,6)) , que $\Phi^*(\omega')=0 \Rightarrow \omega'=0$. Cette condition signifie que $P'^*(\omega')$ est nulle pour toute plaque P' de $\mathbf{X}'$; du fait que Φ est une subduction, il existe des plaques P_j de $\mathbf{X}$ telles que $P' = \sup \Phi \circ P_j$; ce qui signifie que les $U_j = \mathrm{def}(P_j)$ constituent un recouvrement ouvert de $\mathrm{def}(P)$ et que l'induction canonique ι_{U_j} de U_j dans $\mathrm{def}(P)$ vérifie:

$$P' \circ \iota_{U_j} = \Phi \circ P_j ;$$

grâce à (2,1 b), la restriction à l'ouvert U_j du champ de tenseurs $P'^*(\omega')$ est égale à $\iota_{U_j}^*(P'^*(\omega')) = [P' \circ \iota_{U_j}]^*(\omega') = [\Phi \circ P_j]^*(\omega') = P_j^*(\Phi^*(\omega')) = P_j^*(0) = 0$; donc $P'^*(\omega')$ est bien nulle.

Si $\omega = \Phi^*(\omega')$, (c) est immédiat. Réciproquement, supposons que ω vérifie (c):

$$\Phi\circ P_1 = \Phi\circ P_2 \quad \Rightarrow \quad P_1{}^*(\omega) = P_2{}^*(\omega);$$

montrons que:

$\Phi\circ P_1$ et $\Phi\circ P_2$ compatibles $\Rightarrow$ $P_1{}^*(\omega)$ et $P_2{}^*(\omega)$ compatibles.

En effet, soit U l'ouvert $\mathrm{def}(P_1) \cap \mathrm{def}(P_2)$; la compatibilité s'exprime par $\Phi\circ[P_1|_U] = \Phi\circ[P_2|_U]$; on a donc $[P_1|_U]^*(\omega) = [P_2|_U]^*(\omega)$; d'où, grâce à (2,1b): $P_1{}^*(\omega)|_U = P_2{}^*(\omega)|_U$: $P_1{}^*(\omega)$ et $P_2{}^*(\omega)$ coïncident sur l'intersection de leurs ensembles de définition.

Il en résulte que, pour toute plaque P' de $\mathbf{X}'$, si on désigne par $E_{P'}$ l'ensemble des plaques P de $\mathbf{X}$ vérifiant:

$ $\qquad$ P' prolonge $\Phi\circ P$

les éléments P de $E_{P'}$ ont des transformés par ω compatibles – ce qui permet de poser:

$$\omega'(P') = \sup_{P\in E_{P'}} \omega(P);$$

on a défini ainsi une fonctionnelle qui associe à chaque plaque P' de X' une p–forme de $\mathrm{def}(P')$, visiblement différentiable. Pour montrer que ω' est une p–forme, il reste à vérifier l'axiome de compatibilité (2,2 b):

$$\omega'(P'\circ Q') = Q'^*(\omega'(P'))$$

pour toute plaque Q' de $\mathrm{def}(P')$.

Nous allons, comme specimen, donner une démonstration un peu détaillée. Il est clair que les deux membres sont des p–formes définies sur le même ensemble $U' = \mathrm{def}(Q')$. Soit donc q' un point de U'; soit $p' = Q'(q')$. Puisque Φ est une subduction, il existe une p–plaque P de $\mathbf{X}$ telle que $p' \in \mathrm{def}(P)$ et $\Phi\circ P$ soit une restriction de P' ; ce que nous écrirons :

$$\Phi\circ P = P'\circ\iota_V ,$$

en désignant par i_V l'induction canonique de l'ouvert $V = \mathrm{def}(P)$ dans $V' = \mathrm{def}(P')$; i_V est une plaque de V'. p' , considéré comme élément de V , sera aussi noté p .

L'image réciproque de V par Q' est un ouvert U de $U' = \mathrm{def}(Q')$; l'induction ι_U de U dans U' est une plaque de U' ; $Q'\circ\iota_U$ est donc une plaque de V' à valeurs dans $V = \mathrm{im}(\mathrm{i}_V)$; puisque ι_V est une induction,

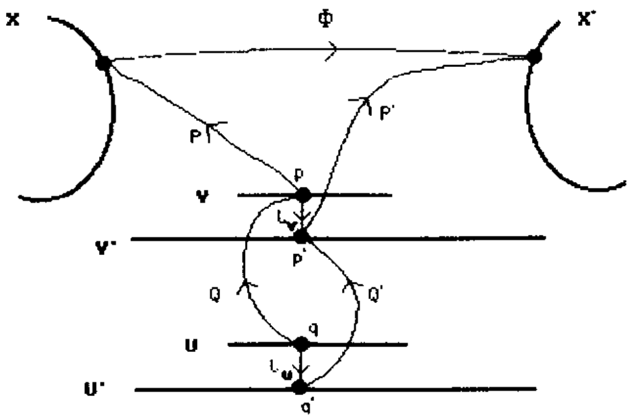
$$Q = \iota_V{}^{-1}\circ[Q'\circ\iota_U]$$

est une plaque de U, telle que:

$$\iota_V\circ Q = Q'\circ\iota_U .$$

Par définition de ω', $P^*(\omega')$ est la restriction à V de $\omega'(P')$; ce qui s'écrit grâce à (2,1b):

$$P^*(\omega') = \iota_V{}^*(\omega'(P'))$$



D'autre part on a:

$$P'\circ Q'\circ\iota_U = P'\circ\iota_V\circ Q = \Phi\circ P\circ Q$$

ce qui montre que $\Phi\circ[P\circ Q]$ est une restriction de $P'\circ Q'$; en utilisant à nouveau la définition de ω', on a donc

$$\omega'(P'\circ Q')|_U = [P\circ Q]^*(\omega)$$

et puisque $q = q'$ est dans U ,

$$\omega'(P'\circ Q')(q') = [P\circ Q]^*(\omega)(q)$$

D'autre part

$$[P\circ Q]^*(\omega) = Q^*(P^*(\omega)) = Q^*(\iota_V{}^*(\omega'(P'))) = [\iota_V\circ Q]^*(\omega'(P')) = [Q'\circ\iota_U]^*(\omega'(P'))$$
$$= \iota_U{}^*(Q'^*(\omega'(P'))) = Q'^*(\omega'(P'))|_U$$

et par conséquent

$\omega'(P'\circ Q')(q') = [P\circ Q]^*(\omega)(q) = Q'^*(\omega'(P'))|_U(q) = Q'^*(\omega'(P'))(q')$; puisque q' est arbitraire dans $\mathrm{def}(Q')$, on obtient bien l'axiome de compatibilité:

$$\omega'(P'\circ Q') = Q'^*(\omega'(P'))$$

Il reste à vérifier que la forme ω' a bien ω comme image réciproque par Φ; par définition de Φ^*, pour toute plaque P de $\mathbf{X}$, on a:

$$\Phi^*(\omega')(P) = \omega'(\Phi\circ P) ;$$

comme $P' = \Phi\circ P$ vérifie la condition $, la définition de ω' montre que $\omega'(\Phi\circ P)$ est un prolongement de $\omega(P)$; prolongement défini sur le même ensemble $\mathrm{def}(P)$, qui lui est donc égal.

C.Q.F.D.

Algèbre et dérivation extérieures

(2,6)

Il est possible d'étendre canoniquement aux "formes difféologiques" diverses opérations élémentaires. Parce que l'image réciproque classique (2,1 a) est linéaire, il existe sur l'ensemble des p-formes d'un espace difféologique $\mathbf{X}$ une structure d'**espace vectoriel réel**, caractérisée par le fait que l'image réciproque par une application différentiable (en particulier par une plaque) est toujours une opération **linéaire**; cette structure vectorielle descend sur l'espace des valeurs en un point.

(2,7)

De même la **multiplication extérieure** des formes donne à la somme directe des formes de degré 0,1,2... une structure d'**algèbre associative**, caractérisée par le fait que l'image réciproque par une application différentiable (ou une plaque) est un **morphisme d'algèbre**.

(2,8)

De même enfin, la dérivée extérieure $d\omega$ d'une p-forme classique ω est une [p+1]-forme donnée par :

$$[d\omega]_{rjk...m} = \partial_r \omega_{jk...m} - \partial_j \omega_{rk...m} - \partial_k \omega_{jr...m} \cdots - \partial_m \omega_{jk...r} \quad ;$$

d est une opération linéaire et nilpotente:

$$d\, d\, \omega = 0 \; ;$$

elle commute avec l'image réciproque par une plaque Q:

$$d\, Q^*(\omega) = Q^*(d\omega)\,.$$

On en déduit élémentairement l'énoncé suivant:

(2,9)

Soit $\mathbf{X}$ un espace difféologique.

Si ω est une p-forme de $\mathbf{X}$, il existe une [p+1]-forme de $\mathbf{X}$, que nous noterons $d\omega$, qui est définie par:

(a) $\quad [d\omega](P) = d[\,\omega(P)\,]$ pour toute plaque P de $\mathbf{X}$;

$d\omega$ sera la **dérivée extérieure** de ω.

d est une application **linéaire nilpotente**:

(b) $$d\, d\omega = 0;$$

pour toute application différentiable A de $\mathbf{Y}$ dans $\mathbf{X}$, on a:

(c) $$A^*(d\omega) = d\, A^*(\omega)$$

(2,10) **Théorème:**

Soit $\mathbf{X}$ un espace difféologique **simplement connexe;**

si ω est 1-forme **fermée** sur $\mathbf{X}$, elle est **exacte** :

$d\omega = 0 \;\Rightarrow\;$ il existe une 0-forme α telle que $\omega = d\alpha$

Démonstration: nous ne traitons ici que le cas qui sera utile plus loin, celui où $\mathbf{X}$ est un groupe difféologique; mais la démonstration s'étend facilement au cas général (voir [Iglesias 85]).

Appelons **courbe** de $\mathbf{X}$ toute application différentiable γ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbf{X}$:

$$\gamma \in D(\mathbb{R},\mathbf{X});$$

on peut **intégrer** ω sur les courbes en remarquant que l'image réciproque $\gamma^*(\omega)$ est une 1-forme de $\mathbb{R}$, et peut donc se noter $f(t)\,dt$; on peut poser:

$$\mathrm{Int}(\gamma,a,b) = \int_a^b f(t)\,dt\;;$$

on a évidemment:

$$\mathrm{Int}(\gamma,a,b) = \mathrm{Int}(\gamma,a,c) - \mathrm{Int}(\gamma,b,c) \qquad \forall\, a,b,c \in \mathbb{R};$$

la formule de changement de variable dans les intégrales combinée avec l'axiome de compatibilité (2,2a) donne:

$$\mathrm{Int}(\gamma\circ\varphi, a,b) = \mathrm{Int}(\gamma, \varphi(a), \varphi(b)) \qquad \forall\, \varphi \in D(\mathbb{R},\mathbb{R})\,.$$

Si deux courbes γ et γ' coïncident sur l'intervalle $[a,b]$, on a:

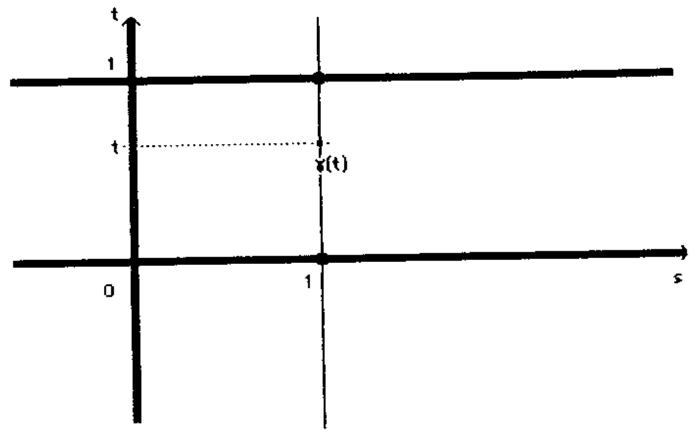
$$\mathrm{Int}(\gamma,a,b) = \mathrm{Int}(\gamma',a,b):$$

en effet, on choisit une fonction différentiable φ qui conserve a et b et qui soit constante dans les deux composantes du complémentaire de $[a,b]$; on a $\gamma\circ\varphi = \gamma'\circ\varphi$; il suffit d'appliquer la formule de changement de variable.

– Considérons le cas où γ est un lacet (1,34)

$$\gamma(0) = \gamma(1) = e \text{ [: élément neutre de } \mathbf{X} \text{];}$$

puisque $\mathbf{X}$ est simplement connexe, l'espace des lacets est connexe, il existe une application $K \in D(\mathbb{R}, \mathrm{Lacet}(\mathbf{X}))$ telle que $K(0) =$ arc neutre, $K(1) = \gamma$; nous pouvons lui associer l'application $\pi : (s,t) \mapsto K(s)(t)$ du plan $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbf{X}$; elle prend évidemment la valeur e sur les droites dessinées en gras:



Par définition de la difféologie induite de $\mathrm{Lacet}(\mathbf{X})$, $\kappa \in D(\mathbb{R}, \mathrm{Arc}(\mathbf{X}))$, ce qui signifie que π est une <u>2–plaque de $\mathbf{X}$</u> [Cf. (1,34)]. Nous pouvons donc prendre l'image réciproque de ω par π ; c'est une 1–forme du plan qui est fermée (2,4 c), donc exacte grâce au "théorème de Poincaré"; c'est donc la dérivée extérieure $d\mathbf{u}$ d'une 0–forme (fonction) $\mathbf{u}$.

Toute courbe Γ du plan induit une courbe $\pi\circ\Gamma$ de $\mathbf{X}$, et la formule (2,2 d)

$$[\pi\circ\Gamma]^*(\omega) = \Gamma^*(\pi^*(\omega))$$

montre que

$$\mathrm{Int}(\pi\circ\Gamma, a, b) = \mathbf{u}(\Gamma(b)) - \mathbf{u}(\Gamma(a));$$

cette formule montre d'une part que:

$$\mathrm{Int}(\gamma, 0, 1) = \mathbf{u}(1,1) - \mathbf{u}(1,0)$$

et d'autre part que $\mathbf{u}$ est constante sur chacun des trois côtés du circuit marqué en gras; par conséquent:

$$\mathrm{Int}(\gamma,0,1) = 0 \text{ pour tout lacet } \gamma.$$

– Considérons ensuite deux **arcs** γ_1 et γ_2 ayant le même **bout**:

$$\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = e\ ,$$
$$\gamma_1(1) = \gamma_2(1)\ .$$

Choisissons deux fonctions différentiables φ_1 et φ_2 vérifiant:

$$\varphi_1(0)=0 \qquad \varphi_1(1/2) = 1$$
$$\varphi_2(1/2)=1 \qquad \varphi_2(1) = 0$$

et qui soient toutes deux constantes dans un voisinage de $1/2$. La courbe "juxtaposée" γ': $\gamma'(t) = \gamma_1(\varphi_1(t))$ si $t \leqslant 1/2$, $\gamma'(t) = \gamma_2(\varphi_2(t))$ si $t \geqslant 1/2$ est <u>différentiable</u> [comme borne supérieure de trois 1–plaques compatibles de $\mathbf{X}$]; puisque $\gamma'(0)=\gamma'(1)=e$, γ' est un lacet; on a donc $0 = \mathrm{Int}(\gamma',0,1) = \mathrm{Int}(\gamma',0,1/2) - \mathrm{Int}(\gamma',1,1/2)$; d'où $\mathrm{Int}(\gamma_1,0,1) =$

$\mathrm{Int}(\gamma_1\circ\varphi_1,0,1/2) = \mathrm{Int}(\gamma',0,1/2) = \mathrm{Int}(\gamma',1,1/2) = \mathrm{Int}(\gamma_2\circ\varphi_2,1,1/2) = \mathrm{Int}(\gamma_2,0,1)$; par conséquent l'intégrale $\mathrm{Int}(\gamma,0,1)$, prise sur un <u>arc</u> quelconque γ, ne dépend que du bout de γ, par une fonction que nous noterons α . α est défini sur $\mathbf{X}$ tout entier, puisque $\mathbf{X}$ est connexe (1,34).

Une juxtaposition analogue montre ensuite que

$$\mathrm{Int}(\gamma,a,b) = \alpha(\gamma(b)) - \alpha(\gamma(a))$$

quelle que soit la <u>courbe</u> γ , les réels a et b.

– Il en résulte enfin que dans l'ensemble de définition d'une plaque quelconque P , l'image réciproque $P^*(\omega)$ est la dérivée de $\alpha\circ P$; ce qui montre que $\alpha \in D(\mathbf{X},\mathbb{R})$ et que $\omega = d\alpha$

C.Q.F.D.

Le cas du tore irrationnel

(2,11) Soit α un nombre irrationnel.

Nous appellerons **tore irrationnel** le groupe difféologique:

$$\mathbb{T}_\alpha = \mathbb{R} / (\mathbb{Z}+\alpha\mathbb{Z})$$

quotient donc du groupe de Lie $(\mathbb{R},+)$ par le sous-groupe $\mathbb{Z}+\alpha\mathbb{Z}$, dense puisque α est irrationnel.

(On peut aussi définir $\mathbb{T}_\alpha$ comme le quotient du tore ordinaire $\mathbb{T}^2$ par un enroulement géodésique de pente α).

Cet objet – qui apparait comme "pathologique" en géométrie différentielle classique – permet d'illustrer le fonctionnement de quelques notions difféologiques.

– $\mathbb{T}_\alpha$ admet $\mathbb{R}$ comme revêtement universel, et son groupe d'homotopie est isomorphe à $\mathbb{Z}^2$;

– La 1-forme invariante de $\mathbb{R}$, "dt", est <u>invariant intégral</u> de la subduction $\mathbb{R} \to \mathbb{T}_\alpha$; il existe donc sur $\mathbb{T}_\alpha$ une 1-forme ω non nulle, invariante par les translations.

Cette forme fermée, est-elle exacte ? le théorème (2,10) ne s'applique pas – puisque $\mathbb{T}_\alpha$ n'est pas simplement connexe. En fait, elle <u>n'est pas</u> exacte, parce que les seules fonctions différentiables sur $\mathbb{T}_\alpha$ (0-formes) sont les constantes.

On trouvera dans [Donato-Iglesias 84] et [Iglesias 85 A] quelques résultats plus fins :

- $\mathbb{T}_\alpha$ est difféomorphe à $\mathbb{T}_\beta$ si et seulement si α et β sont équivalents dans le groupe unimodulaire;
- le groupe $\mathrm{Diff}(\mathbb{T}_\alpha)$ possède deux structures différentes, selon que α est irrationnel quadratique ou non;
- la classification des fibrés principaux de groupe structural $\mathbb{R}$ et de base $\mathbb{T}_\alpha$ dépend aussi des propriétés arithmétiques de α (selon que α est diophantien ou non).

Une cohomologie triviale

(2,12)

Soient $\mathbf{X}$ un espace difféologique non vide, q un entier. Désignons par:

$$\mathrm{Alt}_q(\mathbf{X})$$

l'espace vectoriel des **fonctions réelles** f , **différentiables sur le produit direct** $\mathbf{X}^q$, et **alternées** (antisymétriques); on prendra $\mathrm{Alt}_1(\mathbf{X}) = D(X,\mathbb{R})$, $\mathrm{Alt}_0(\mathbf{X}) = \mathbb{R}$.

Associons à tout point $x \in \mathbf{X}$ l'application linéaire:

$$i(x)$$

de $\mathrm{Alt}_q(\mathbf{X})$ dans $\mathrm{Alt}_{q-1}(\mathbf{X})$, définie par:

(2,13)
$$i(x)(f)(x_2 \ldots x_q) = f(x, x_2 \ldots x_q) \qquad [q > 0]$$
$$i(x)(r) = 0 \qquad [q = 0]$$

[on travaille proprement en utilisant la somme directe des $\mathrm{Alt}_q(\mathbf{X})$; c'est là qu'il faut prendre le zéro figurant dans cette dernière formule];

on définit ensuite une application linéaire:

$$\Delta$$

de $\mathrm{Alt}_q(\mathbf{X})$ dans $\mathrm{Alt}_{q+1}(\mathbf{X})$, par:

(2,14)
$$i(x)\circ\Delta + \Delta\circ i(x) = \text{identité} \qquad \forall x \in \mathbf{X} ;$$

ce qui donne par exemple pour $q = 0, 1, 2, 3$:

(2,15)
$$\Delta r(x) = r;$$
$$\Delta f(x,y) = f(y) - f(x);$$
$$\Delta f(x,y,z) = f(y,z) - f(x,z) - f(y,x);$$
$$\Delta f(x,y,z,t) = f(y,z,t) - f(x,z,t) - f(y,x,t) - f(y,z,x);$$

grâce à (2,14) , on voit que $\Delta\circ\Delta$ commute avec $i(x)$; puis, par récurrence sur q , que:

$$\Delta\circ\Delta = 0$$

et plus précisément que:

(2,16)
$$\Delta f = 0 \iff \exists g ,\ f = \Delta g;$$

[il suffit de choisir x et de prendre $g = i(x)(f)$] ; par conséquent le cobord Δ définit une cohomologie triviale.

(2,17)

Si $A \in D(\mathbf{Y},\mathbf{X})$, nous définirons l'**image réciproque**

$$A^*(f)$$

de f par A par la formule:

$$A^*(f)(y_1, \ldots y_q) = f(A(y_1), \ldots A(y_q));$$

$A^*(f)$ applique $\mathrm{Alt}_q(\mathbf{X})$ dans $\mathrm{Alt}_q(\mathbf{Y})$, vérifie:

$$[A \circ B]^*(f) = B^*(A^*(f))$$

et commute avec le cobord:

$$\Delta(A^*(f)) = A^*(\Delta(f)).$$

(2,18) **Lemme:**

Considérons une variable

$$v = (v_0 \dots v_p) \in [\mathbb{R}^n]^{p+1} ;$$

soit P un <u>polynôme</u> en v, de <u>degré maximum p</u>, <u>antisymétrique</u> par rapport aux $p+1$ variables $v_0, \dots v_p$; alors:

– P est <u>homogène de degré p</u>;

– on a:

$$\Delta P = 0 \qquad \text{[notation (2,15)]};$$

– la fonction Ω:

$$\Omega(v_1 \dots v_p) := P(0, v_1 \dots v_p)$$

est <u>p fois linéaire</u> (et constitue donc un <u>tenseur antisymétrique</u> de degré p sur l'espace $\mathbb{R}^n$);

On a:

$$P = \Delta\Omega,$$

ce qui s'écrit aussi:

$$P(v_0 \dots v_p) = \Omega(v_1 - v_0, \dots v_p - v_0)$$

Démonstration:

Le fait que P soit homogène de degré p – ou qu'un polynôme antisymétrique de $p+1$ variables et de degré $\leq p-1$ soit nul – se montre facilement par récurrence sur p.

Soit donc P un polynôme antisymétrique en $(v_0 \dots v_p)$, et de degré p.

La substitution $v_0 \to \lambda v_0$ permet d'ordonner P suivant v_0 :

$$P(v_0, v_1 \dots v_p) =$$

$$P_0(v_1 \dots v_p) + P_1(v_0)(v_1 \dots v_p) + P_2(v_0)(v_1 \dots v_p) + \dots,$$

$P_j(v_0)$ étant un polynôme antisymétrique des p variables $v_1 \dots v_p$, de degré maximum $p-j$, donc nul si $j \geq 2$. Ceci montre que P est <u>affine</u> en v_0, et évidemment aussi par rapport aux autres variables.

Il est immédiat que ΔP est aussi un polynôme de degré p, antisymétrique en $p+2$ variables, donc nul; il en résulte que

$$P = \Delta\Omega,$$

avec $\Omega = i(0)(P)$ [Cf. (2,17)], c'est-à-dire:

$$\Omega(v_1 \dots v_p) = P(0, v_1 \dots v_p);$$

l'antisymétrie de P montre que $\Omega(v_1 \dots v_p)$ s'annule avec chacune des variables $v_1 \dots v_p$; cette fonction p-affine est donc p-linéaire; Ω est bien un tenseur antisymétrique.

C.Q.F.D.

Formes fonctionnelles

(2,19)

Soient $\mathbf{X}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$; f une fonction prise dans $\mathrm{Alt}_{p+1}(\mathbf{X})$ $[\,p \geq 0\,]$.

En tout point $x \in \mathbf{X}$, nous pouvons faire le développement de MacLaurin:

$$f(x+v_0, x+v_1, \dots x+v_p) = P_x(v_0 \dots v_p) + \mathbf{O}(|v|^{p+1}),$$

$|v|$ désignant une norme de $v = (v_0 \dots v_{p+1})$ et P_x un polynôme de degré maximum p, caractérisé par cette formule; l'antisymétrie de f entraîne celle de P_x ; le lemme (2,18) nous montre l'existence sur $\mathbf{X}$ d'un champ de tenseurs antisymétriques $x \mapsto \boldsymbol{\omega}_x$ caractérisé par :

$$\square \quad \boxed{\begin{gathered} f(x+v_0, x+v_1, \dots, x+v_p) = \\ \frac{1}{p!}\,\boldsymbol{\omega}_x(v_1 - v_0, \dots v_p - v_0) + \mathbf{O}(|v|^{p+1}) \end{gathered}}$$

le coefficient $1/(p!)$, ici arbitraire, jouera son rôle plus loin (2,22).

Il est facile de calculer à partir de cette formule les composantes du tenseur ω_x :

□□ $$\omega_{j\,..\,m} = p!\ \partial_{j,1} \cdots \partial_{m,p} f(x_0, x_1, \ldots, x_p),$$

le second membre étant pris pour $x_0 = x_1 = \ldots = x_p = x$.

Ces composantes de ω_x sont des fonctions différentiables de x , et par conséquent elles définissent une **p-forme** ω de $\mathbf{X}$; p-forme que nous appellerons **jet** de f – parce qu'elle définit le premier jet non nécessairement nul de la fonction f en un point quelconque de la diagonale de $\mathbf{X}^{p+1}$. La formule □ ou □□ se notera donc:

$$\omega = \mathrm{jet}(f);$$

cette application jet est évidemment **linéaire**.

Un changement de variable élémentaire montre que:

(2,20) $$\mathrm{jet}(\,Q^*(f)\,) = Q^*(\,\mathrm{jet}(f)\,);$$

Q désigne une plaque quelconque de X (1,1); $Q^*(f)$ est l'image réciproque de la fonction f définie en (2,18); $Q^*(\,\mathrm{jet}(f)\,)$ est l'image réciproque par Q de la forme $\mathrm{jet}(f)$, définie en (2,1 a). Il en résulte facilement la proposition:

(2,21)

Soit $\mathbf{X}$ un espace difféologique;
à toute fonction $f \in \mathrm{Alt}_{p+1}(\mathbf{X})$ [$p \geqslant 0$] , on peut faire correspondre une p-forme de $\mathbf{X}$, notée **jet**(f), caractérisée par la formule:

$$\mathbf{jet}(f)\,(P) = \mathrm{jet}(\,P^*(f)\,) \quad \text{pour toute plaque } P \text{ de } \mathbf{X};$$

nous dirons que la fonction f est **génératrice** de la forme ω = **jet**(f); une forme ω qui possède une fonction génératrice sera dite **fonctionnelle**.

La fonction **jet** est linéaire.

Si $A \in D(\mathbf{Y},\mathbf{X})$, on a :

$$A^*(\,\mathbf{jet}(f)\,) = \mathbf{jet}(\,A^*(f)\,)$$

Il résulte évidemment de cette dernière formule que toute image réciproque d'une forme fonctionnelle est fonctionnelle.

Revenons au cas où $\mathbf{X}$ est un ouvert de l'espace numérique $\mathbb{R}^n$. La formule (2,19 □□) qui fournit les composantes de ω au moyen des dérivées partielles de f:

$$\omega_{j\,..\,m} = p!\ \partial_{j,1} \cdots \partial_{m,p} f(x_0, x_1, \ldots, x_p)$$

donne aussi les composantes de la $(p+1)$–forme $\alpha = \mathrm{jet}(\Delta f)$. Comme:

$$[\Delta f]\,(x, x_0, x_1, \ldots, x_p) =$$
$$f(\,x_0, x_1, \ldots, x_p\,) - f(x, x_1, \ldots, x_p) - \ldots - f(\,x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}, x\,)$$

on constate que:

\$ $$\alpha_{rj\,..\,m} = (p+1)!\ \partial_{r,0}\,\partial_{j,1} \cdots \partial_{m,p} f(x_0, x_1, \ldots, x_p).$$

Calculons d'autre part les dérivées partielles par rapport à X des composantes de ω :

$$\partial_r\,\omega_{j\,..\,m} = p!\,[\,\partial_{r,0} + \partial_{r,1} + \ldots\ \partial_{r,p}]\,\partial_{j,1} \cdots \partial_{m,p} f(x_0, x_1, \ldots, x_p);$$

la formule de définition de la dérivée extérieure (2,8) peut s'interpréter comme une antisymétrisation de cette expression (par rapport aux permutations des indices $r, j, \ldots m$), suivie d'une multiplication par $p+1$.

Dans l'antisymétrisation, les termes issus de la somme:

$$\partial_{r,0} + \partial_{r,1} + \ldots\ \partial_{r,p}$$

sont tous nuls à partir du second – par suite de la commutativité des dérivées partielles; il suffit donc d'antisymétriser en $r, j, \ldots m$ le terme:

$$p!\ \partial_{r,0}\,\partial_{j,1} \cdots \partial_{m,p} f(x_0, x_1, \ldots, x_p)\ ;$$

or la formule \$ montre que cette expression est déjà antisymétrique; il ne reste plus qu'à multiplier par $p+1$, ce qui donne:

$$[d\omega]_{rj\,..\,m} = \alpha_{rj\,..\,m}\ ,$$

c'est-à-dire:

(2,22)

$$d \ \mathrm{jet}(f) = \mathrm{jet} \ \Delta f \ ;$$

cette formule, établie ici dans le cas d'un espace numérique, s'étend à tout espace difféologique par une méthode standard [calculer l'image réciproque des deux membres de (2,22) par une plaque arbitraire, en utilisant (2,21), (2,17), (2,9)].

Il en résulte évidemment que la dérivée d'une forme fonctionnelle est fonctionnelle.

L'identification d'une 0-forme φ avec une fonction (2,3), donc aussi avec un élément de $\mathrm{Alt}_1(\mathbf{X})$ (2,12), permet de construire la 1-forme $\mathrm{jet}(\Delta\varphi)$; l'expression (2,15) de "Δ" et (2,19 □□) de "jet" montrent que:

$$\mathrm{jet}(\Delta\varphi) = d\varphi \ ;$$

formellement, on peut donc désigner par :

$$\mathrm{jet}(\varphi)$$

la 0-forme associée à la fonction φ et prolonger la formule ci-dessus:

$$\mathrm{jet}(\Delta\varphi) = d \ \mathrm{jet}(\varphi)$$

au cas $p = 0$; alors **toutes les 0-formes sont fonctionnelles**.

(2,23)

Exemples:

a) Toute p-forme ω de $\mathbb{R}^n$ possède la fonction génératrice f, antisymétrisée de :

$$(x_0, \ldots x_p) \mapsto \omega_{x_0}(x_1 - x_0, \ldots x_p - x_0) / p! \ ;$$

toute autre fonction antisymétrique qui coïncide avec f dans un voisinage de la diagonale est aussi génératrice; si le support de ω est compact, on peut donc choisir f avec un support compact.

La technique des partitions de l'unité permet donc de construire une fonction génératrice pour toutes les formes d'une variété paracompacte.

b) Considérons l'espace Φ des fonctions différentiables sur $\mathbb{R}^n$: $\Phi = D(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, muni de la difféologie fonctionnelle (1,22).

La relation $\sim$:

$$\varphi_1 \sim \varphi_2 \iff \varphi_1 \text{ et } \varphi_2 \text{ coïncident sur le complémentaire d'un compact}$$

est une équivalence.

Supposons donné un **lagrangien** différentiable L d'ordre quelconque; définissons l'**action** $\mathbf{A}$ comme fonction de deux variables par la formule:

$$\mathbf{A}(\varphi_1, \varphi_2) =$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left[L(r, \varphi_1, \frac{\partial \varphi_1}{\partial r}, \ldots) - L(r, \varphi_2, \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}, \ldots) \right] dr$$

si $\varphi_1 \sim \varphi_2$, $\mathbf{A}$ nulle ailleurs.

$\mathbf{A}$ est différentiable sur Φ^2 pour la difféologie feuilletée associée à $\sim$ [voir (1,17)], et appartient ainsi à $\mathbf{Alt}_2(\Phi)$. Ceci permet de définir la **dérivée variationnelle** comme **1-forme fonctionnelle** – à savoir $\mathrm{jet}(\mathbf{A})$. Elle est fermée, bien que $\Delta\mathbf{A}$ ne soit pas nulle.

c) La 1-forme que nous avons définie en (2,11) sur le tore irrationnel $\mathbb{T}_\alpha$ **n'est pas fonctionnelle**; en effet $\mathbf{Alt}_2(\mathbb{T}_\alpha)$ est **nul**.

troisième partie:

formes invariantes

(3,1) **Notations**

Soit $\mathbf{G}$ un groupe difféologique. Nous noterons L_g, R_g les translations à gauche et à droite sur $\mathbf{G}$:

$$L_g : \quad g' \mapsto g\,g'$$

$$R_g : \quad g' \mapsto g'\,g^{-1}$$

$g \mapsto L_g$ et $g \mapsto R_g$ sont des D-actions de $\mathbf{G}$ sur l'espace $\mathbf{G}$ (1,28); L_g et R_g commutent; leur composé est l'automorphisme intérieur associé à g :

$$g \mapsto L_g \circ R_g \,,$$

donc un D-morphisme $\mathbf{G} \to \mathrm{Aut}(\mathbf{G})$.

(3,2)

Nous appellerons **forme invariante** (à gauche) sur G toute p-forme ω de l'espace difféologique G vérifiant:

$$L_g^*(\omega) = \omega \qquad \forall g \in G \; ;$$

il est clair que les p-formes invariantes forment un espace vectoriel Ω_p; que la dérivée d'une p-forme invariante est une (p+1)-forme invariante; donc que la dérivation d est un cobord de la somme directe Ω des Ω_p - et définit une cohomologie; que tout D-morphisme (1,23)

$$A : G \to G'$$

induit, par image réciproque, une application linéaire graduée de Ω' dans Ω; application qui commute avec la dérivation extérieure d .

(3,3)

En particulier, l'application **"int"**:

$$\mathrm{int}(g)(g') = g\, g'\, g^{-1}$$

qui s'écrit encore:

$$\mathrm{int}(g) = L_g \circ R_g = R_g \circ L_g$$

est un D-morphisme $G \to \mathrm{Aut}(G)$, et produit une représentation linéaire $\rho = \rho_0 \oplus \rho_1 \oplus \rho_2 \oplus \ldots$ de G sur Ω:

$$\rho_p(g)(\omega) = \mathrm{int}(g^{-1})^*(\omega) \qquad \forall\, \omega \in \Omega_p \; ;$$

on a aussi:

$$\rho_p(g)(\omega) = R_g^*(\omega);$$

la dérivation d entrelace ρ_p avec ρ_{p+1}:

$$d \circ \rho_p(g) = \rho_{p+1}(g) \circ d$$

Exemples de formes invariantes:

(3,4) Si G est un groupe de Lie , toute p-forme invariante est ainsi identifiable à un tenseur antisymétrique sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$; le cobord d devient une opération algébrique et produit, par définition, la cohomologie de l'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$.

Cette cohomologie survit donc dans le cas d'un groupe difféologique quelconque — alors que la relation habituelle entre groupe et algèbre de Lie s'évanouit.

(3,5)

Soit ω une p-forme d'un espace difféologique X .

Nous appellerons **automorphismes** de ω les difféomorphismes g de X qui vérifient:

$$g^*(\omega) = \omega \; ;$$

Nous dirons que la forme ω est **homogène** si X est un espace homogène de groupe générateur $\mathrm{Aut}(\omega)$ [Cf. (1,28)]; alors, pour tout $x \in X$, l'image réciproque ω_x de ω par la subduction:

$$\Phi_x : \qquad g \mapsto g(x)$$

est une **p-forme invariante sur** G .

En effet on a $\forall\, g, g' \in G$:

$[\Phi_x \circ L_g](g') = \Phi_x(g \circ g') = [g \circ g'](x) = g(g'(x)) = g(\Phi_x(g')) = [g \circ \Phi_x](g')$, d'où $\Phi_x \circ L_g = g \circ \Phi_x$, et par conséquent :

$L_g^*(\omega_x) = [L_g^* \circ \Phi_x^*](\omega) = [\Phi_x \circ L_g]^*(\omega) = [g \circ \Phi_x]^*(\omega) = \Phi_x^*(g^*(\omega)) = \Phi_x^*(\omega) = \omega_x$.

C'est ce qui se produit en particulier si X est une **variété séparée connexe** et ω une forme **symplectique** ; G est alors le groupe **Sympl(X)** des **"symplectomorphismes"** de X. Le sous-groupe de G engendré par les exponentielles des champs de vecteurs hamiltoniens à support compact est d'ailleurs lui-même générateur de X (voir [Donato 84]).

(3,6)

Les formes invariantes sont définies par leur valeur à l'origine; plus précisément:

Soit ω une p-forme sur un groupe difféologique G ;
il existe alors une p-forme ω_L ,unique, qui est **invariante à gauche** et qui a **la même valeur que ω au point** e (élément neutre).

Démonstration:

On pose, pour toute plaque P de G et tout $r \in \mathrm{def}(P)$:

$$\square \qquad \omega_L(P)(r) = \omega(\ t \mapsto P(r)^{-1}P(r+t)\ )(0)\ ;$$

un certain nombre de vérifications élémentaires montre que:

– $\omega_L(P)(r)$ est un tenseur antisymétrique dont les composantes sont fonctions différentiables de r sur l'ensemble $\mathrm{def}(P)$ [utiliser le fait que $(t\ ,\ r) \mapsto P(r)^{-1}P(r+t)$ est une plaque de G];

– ω_L vérifie l'axiome de compatibilité (2,2 a), et constitue donc une p–forme de G [utiliser le fait que la matrice jacobienne d'une translation de $\mathbb{R}^n$ est la matrice unité];

– ω_L est invariante à gauche;

– ω_L a même valeur que ω au point e ;

– des formes invariantes à gauche qui ont même valeur en e sont égales [utiliser (2,4)].

C.Q.F.D.

(3,7) **Proposition:**

Soit G un groupe difféologique; G° sa composante neutre; I l'induction de G° dans G.

Alors la relation:

$$\omega_0 = I^*(\omega)$$

est une **bijection** entre les p–formes invariantes de G et celles de G°.

Démonstration: la relation $\omega_0 = I^*(\omega)$ peut s'écrire simplement:

$$\omega_0(P) = \omega(P) \text{ pour toute plaque } P \text{ de } G \text{ prenant ses valeurs dans } G^{\circ};$$

or pour toute plaque P de G et toute composante U de $\mathrm{def}(P)$, $P|_U$ prend ses valeurs dans une seule composante de G, et peut donc s'écrire $L_{g_U} \circ P_U$, P_U étant une plaque à valeurs dans G°; d'où résulte:

$$\square \qquad \omega(P) = \sup_U\ \omega_0(P_U)$$

ce qui montre **l'injectivité** de $\omega \mapsto \omega_0$; la bijectivité s'établit en vérifiant que la formule $\square$ détermine effectivement, pour chaque p–forme invariante ω_0 de G°, une p–forme invariante ω de G.

C.Q.F.D.

(3,8) **Théorème:**

Soit ω une p–forme <u>fonctionnelle</u> sur un groupe difféologique G ; f

une fonction génératrice de ω. Alors:

a) L'image réciproque de ω par l'inversion:

$$\mathrm{inv} :\ g \mapsto g^{-1}$$

coïncide avec $(-1)^p\, \omega$ au point e ;

b) La forme invariante (à gauche) qui coïncide avec ω en e est <u>fonctionnelle</u>; elle possède une <u>fonction génératrice invariante</u>, à savoir l'antisymétrisée de:

$$(g_0, \ldots g_p) \mapsto f(e, g_0^{-1}g_1, \ldots g_0^{-1}g_p);$$

c) Si ω est invariante bilatère (à droite et à gauche), ω est fermée:

$$d\omega = 0$$

et vérifie

$$(-1)^p\, \mathrm{inv}^*(\omega) = \omega$$

Démonstration:

Soit P une n–plaque de G telle que $P(0) = e$.

L'axiome (1,23) des groupes difféologiques montre que Q: $(r,s) \mapsto P(r)^{-1}P(s)$ est une 2n–plaque; puisque $\omega = \mathrm{jet}(f)$, on a donc: $\omega(Q) = Q^*(\omega) = \mathrm{jet}(Q^*(f))$ [cf. (2,20)]; d'où, grâce à (2,19 $\square$):

$$p!\ f(e, Q(w_1), \ldots Q(w_p)) = \omega(Q)(0)(w_1, \ldots w_p) + O(|w|^{p+1})$$

avec

$$w_j = (u_j, v_j) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Si $u_1 = v_1$, $Q(w_1) = P(u_1)^{-1}P(v_1) = e = Q(0)$, et on a donc

$$p!\ f(e, Q(w_1), \ldots Q(w_p)) = O(|w|^{p+1})$$

ce qui montre que le tenseur $\omega(Q)(0)(w_1, \ldots w_p)$ s'annule si $u_1 = v_1$; en le développant sous la forme:

$$\alpha(v_1, w_2, \ldots w_p) + \beta(u_1, w_2, \ldots w_p)$$

on a donc $\beta = -\alpha$, ce qui le réduit à :

$$\alpha(v_1 - u_1, w_2, \ldots w_p)$$

en traitant les autres variables, on se ramène successivement à

$$\gamma(v_1-u_1, v_2-u_2, \dots w_p)$$

et finalement à

$$\lambda(v_1-u_1, v_2-u_2, \dots v_p-u_p) ;$$

la valeur de λ s'obtient en choisissant nuls tous les u_j – ce qui implique $Q(w_j) = P(v_j)$; d'où la formule :

$$\square \quad \left| \begin{array}{l} p!\ f(e, P(u_1)^{-1}P(v_1), \dots P(u_p)^{-1}P(v_p)) = \\ \\ \omega(P)(0)(v_1-u_1, v_2-u_2, \dots v_p-u_p) + O(|w|^{p+1}) \end{array} \right.$$

si nous choisissons dans $\square$ les v_j nuls, on trouve

$$p!\ f(e, P(u_1)^{-1}, \dots P(u_p)^{-1}) = (-1)^p\ \omega(P)(0)(u_1, u_2, \dots u_p) + O(|w|^{p+1})$$

or le premier membre vaut

$$p!\ [\mathrm{inv}\circ P]^*(f)(0)(u_1, u_2, \dots u_p)$$

qui se développe aussi, grâce à (2,19 $\square$), en

$$\mathrm{jet}([\mathrm{inv}\circ P]^*(f))(0)(u_1, u_2, \dots u_p) + O(|w|^{p+1})$$

On a donc

$$(-1)^p\ \omega(P)(0) = \mathrm{jet}([\mathrm{inv}\circ P]^*(f))(0)$$

$$= [\mathrm{inv}\circ P]^*(\mathrm{jet}(f))(0) = [\mathrm{inv}^*(\omega)](P)(0) ;$$

puisque P est soumis à la seule condition $P(0) = e$, ceci montre que $(-1)^p\ \omega$ et $\mathrm{inv}^*(\omega)$ ont même valeur en e (2,4), soit a)).

Considérons la fonction θ :

$$\theta(g_0, g_1, \dots g_p) = f(e, g_0^{-1}g_1, \dots g_0^{-1}g_p)$$

en choisissant dans $\square$ tous les u_j égaux à une même valeur v_0, on trouve

$$\theta(P(v_0), P(v_1), \dots P(v_p)) = \omega(P)(0)(v_1-v_0, \dots v_p-v_0) + O(|w|^{p+1})$$

[notation (2,19)] ; comme nous l'avons vu en (2,18), le polynôme du second membre peut aussi s'écrire

$$\Delta[\ \omega(P)(0)\ ](v_0, v_1, \dots v_p)$$

et il est donc *antisymétrique* par rapport à *l'ensemble* des variables $v_0, v_1, \dots v_p$.

Soit ψ la fonction *antisymétrisée* de θ :

$$\psi(g_0, g_1, \dots g_p) = \sum_S \theta(g_{S(0)}, \dots g_{S(p)})\ \chi(s)\ /(p+1)!$$

où S parcourt le groupe symétrique de $[0, \dots p]$ et χ désigne le caractère de parité.

Il est clair que $\psi \in \mathrm{Alt}_{p+1}(G)$ et que

$$p!\ \psi(P(v_0), P(v_1), \dots, P(v_p)) = \omega(P)(0)(v_1-v_0, \dots v_p-v_0) + O(|v|^{p+1}),$$

ce qui s'écrit d'après (2,19 $\square$) :

$\omega(P)(0) = \mathrm{jet}(P^*(\psi))(0) = \mathrm{jet}(\psi)(P)(0)$; il en résulte que $\mathrm{jet}(\psi)$ coïncide avec ω au point e.

Par ailleurs la définition de θ montre que

$$\theta(L_g(g_0), \dots L_g(g_p)) = \theta(g_0, \dots g_p) \qquad \forall\, g ;$$

cette identité traverse impunément l'antisymétrisation, si bien que

$$L_g^*(\psi) = \psi$$

– ce que nous exprimons par le fait que ψ est *invariante à gauche*; il en résulte que

$$L_g^*(\mathrm{jet}(\psi)) = \mathrm{jet}(\psi),$$

c'est-à-dire que $\mathrm{jet}(\psi)$ est une p-forme *invariante*; c'est donc *la* p-forme invariante qui coïncide avec ω en e [Cf.,6)] ; b) est établie.

Supposons maintenant ω *invariante à droite*.

L'identité évidente:

$$\mathrm{inv}\circ L_g = R_g\circ \mathrm{inv}$$

montre que $\mathrm{inv}^*(\omega)$ est invariante à gauche; donc aussi $(-1)^p\ \mathrm{inv}^*(\omega)$, forme qui a même valeur que ω au point e. Si ω est simultanément invariante à gauche, $(-1)^p\ \mathrm{inv}^*(\omega)$ et ω sont donc égales (3,6); d'où la seconde formule c).

Considérons alors la (p+1)-forme $d\omega$; elle est fonctionnelle (2,22); la commutativité de l'image réciproque et de la dérivée (2,9 c) montre qu'elle est aussi bilatère; on a donc:

$$(-1)^{p+1}\ \mathrm{inv}^*(d\omega) = d\omega;$$

or la dérivation de $(-1)^p\ \mathrm{inv}^*(\omega) = \omega$ donne $(-1)^p\ \mathrm{inv}^*(d\omega) = d\omega$, d'où par addition

$$d\omega = 0$$

C.Q.F.D.

Formes de Maurer-Cartan

(3,9)

Soit **G** un groupe difféologique.
Nous appellerons **forme de Maurer-Cartan** de degré p toute p-forme de **G** , <u>invariante</u> (à gauche) et <u>fonctionnelle</u> .

(3,10)

Les propriétés (3,3) de l'espace $\Omega = \Omega_1 \oplus \Omega \oplus \ldots$ des formes invariantes restent vraies si on se restreint aux formes de Maurer-Cartan; en particulier celles-ci définissent une cohomologie.

Réduction des formes

(3,11)

Soit **G** un groupe difféologique, **K** un sous-groupe de **G**, ω une forme de Maurer-Cartan de degré p . Nous dirons que **K** **réduit** ω si ω est <u>invariant</u> <u>intégral</u> de la subduction

$$G \to G/K$$

Dans ce cas ω "descend" sur l'espace homogène $X = G/K$, et produit une p-forme ω_X ; ω_X est invariante par l'action canonique A de **G** sur **X** :

$$A(g)(g'K) = gg'K$$

Démonstration: Désignons par Φ la subduction $G \to G / K$:

$$\Phi(g) = gK$$

la définition de ω_X s'écrit :

$$\Phi^*(\omega_X) = \omega$$

et celle de A:

$$A(g) \circ \Phi = \Phi \circ L_g$$

si bien que

$$\Phi^*(A(g)^*(\omega_X)) = L_g^*(\Phi^*(\omega_X)) = L_g^*(\omega) = \omega = \Phi^*(\omega_X);$$

Φ étant une subduction, ceci entraîne $A(g)^*(\omega_X) = \omega_X$

C.Q.F.D.

(3,12) **Lemme:**

Soit **G** un groupe difféologique ; ω une p-forme de Maurer-Cartan.
Désignons par **S** le **stabilisateur** de ω dans la représentation ρ_p :

$$g \in S \iff \rho_p(g)(\omega) = \omega \iff R_g^*(\omega) = \omega$$

Tout sous-groupe **K** qui réduit ω est contenu dans **S**

Démonstration: Utilisons le critère (2,5) des invariants intégraux : pour que **K** réduise ω , il faut (et il suffit) que tout couple de plaques P_1 et P_2 de **G** qui vérifient:

$$P_1(r)K = P_2(r)K \quad \forall r$$

vérifient aussi:

$$P_1^*(\omega) = P_2^*(\omega) ;$$

si **K** réduit ω, et si on choisit $k \in K$, les couples

$$P_1 \text{ arbitraire} \; ; \; P_2 = R_k \circ P_1$$

satisfont la première condition, si bien que :

$$P_1^*(\omega) = P_1^*(R_k^*(\omega))$$

ce qui s'écrit:

$$\omega(P_1) = R_k^*(\omega)(P_1) \quad \forall P_1$$

ou encore

$$\omega = R_k^*(\omega) ;$$

donc $k \in S$

C.Q.F.D.

Formes de Maurer-Cartan de degré 1

(3,13) **Proposition :**

Soit ω une 1-forme invariante sur un groupe difféologique **G** .
Pour que ω soit une forme de Maurer-Cartan, il faut et il suffit qu'il existe une fonction réelle φ , différentiable sur **G** , telle que ω et $d\varphi$

prennent la même valeur en e ; φ détermine ω, qui possède la fonction génératrice:

$$(g_0, g_1) \mapsto 1/2\,[\,\varphi(g_0^{-1}g_1) - \varphi(g_1^{-1}g_0)\,];$$

φ sera donc appelée une fonction déterminante de ω.

Démonstration: a) Soit $\varphi \in D(G,\mathbb{R})$; on a, par (2,15),

$$\Delta\varphi(g_0, g_1) = \varphi(g_1) - \varphi(g_0);$$

nous savons par (3,8) que la forme invariante qui coïncide avec $jet(\Delta\varphi)$ en l'élément neutre a pour fonction génératrice l'antisymétrisée de

$$(g_0, g_1) \mapsto \Delta\varphi(e, g_0^{-1}g_1) = \varphi(g_0^{-1}g_1) - \varphi(e),$$

c'est-à-dire

$$(g_0, g_1) \mapsto 1/2\,[\,\varphi(g_0^{-1}g_1) - \varphi(g_1^{-1}g_0)\,]$$

or nous savons que $jet(\Delta\varphi) = d\varphi$ [cf. (2,22)].

b) réciproquement, soit ω une 1-forme de Maurer-Cartan, f une fonction génératrice; posons :

$$\varphi(g) = f(e, g);$$

l'utilisation de la formule (3,8 b) montre que ω a aussi pour fonction génératrice

$$(g_0, g_1) \mapsto 1/2\,[\,\varphi(g_0^{-1}g_1) - \varphi(g_1^{-1}g_0)\,];$$

le résultat a) montre donc que ω est la forme invariante qui coïncide avec $d\varphi$ en e.

C.Q.F.D.

(3,14) **Théorème**:

Soit G un groupe difféologique; ω une 1-forme de Maurer-Cartan; S le stabilisateur de ω dans la représentation ρ_1; X l'espace quotient G/S, qui s'identifie à l'**orbite** de ω, munie de la difféologie de Klein attachée à ρ_1. Alors:

a) La forme ω_S induite par ω sur S est **invariante bilatère** et **fermée**;

b) **S réduit** la dérivée $d\omega$: $d\omega$ descend sur X et définit une **2-forme fermée** σ_X.

Démonstration: Désignons par I l'induction de S dans G; la forme induite par ω sur S, c'est par définition :

$$\omega_S = I^*(\omega)$$

donc une forme de Maurer-Cartan de S.

Soit $s \in S$; désignons par $R_{s,S}$ la translation à droite de S associée, par $R_{s,G}$ la translation à droite de G. Il est clair que

$$R_{s,G} \circ I = I \circ R_{s,S}$$

et par conséquent que $R_{s,S}{}^*(\omega_S) = [I \circ R_{s,S}]^*(\omega) = [R_{s,G} \circ I]^*(\omega) = I^*(R_{s,G}{}^*(\omega))$;

comme $R_{s,G}{}^*(\omega) = \omega \quad \forall\, s \in S$ [voir la définition (3,12) de S], on a $R_{s,S}{}^*(\omega_S) = I^*(\omega) = \omega_S$; ω_S est bien invariante bilatère. Le théorème (3,7 c) nous apprend que $d\omega_S = 0$, soit a). Cette égalité $d\omega_S = 0$ signifie que $I^*(d\omega) = 0$, c'est-à-dire que $Q^*(d\omega) = 0$ pour toute plaque Q de G prenant ses valeurs dans S.

Soient P_1 et P_2 deux plaques de G ayant même composée avec la subduction $G \to G/S$, c'est-à-dire telles que

$$P_1(r)S = P_2(r)S \qquad \forall\, r$$

Alors $Q : r \mapsto P_1(r)^{-1}P_2(r)$, qui est une plaque de G grâce à l'axiome (1,23) des difféologies de groupe, prend ses valeurs dans S, et constitue donc une plaque de S.

Posons

$$T(r,s) = P_1(r)\, Q(s)$$

T est encore une plaque de G, définie sur $U \times U$ [$U = def(P_1) = def(P_2)$]; $\alpha = T^*(\omega)$ est une 1-forme de $U \times U$.

Un déplacement diagonal peut se décomposer horizontalement et verticalement: c'est selon cette idée que l'on posera

$$(r,s) = horizontal_s(r) = vertical_r(s)$$

$$(r,r) = diagonal(r);$$

un calcul simple montre que

$$\text{diagonal}^*(\alpha)(r) = \text{horizontal}_r{}^*(\alpha)(r) + \text{vertical}_r{}^*(\alpha)(r) \qquad \forall r \in \mathbf{U};$$

par conséquent

$$[T\circ\text{diagonal}]^*(\omega)(r) = [T\circ \text{horizontal}_r]^*(\omega)(r) + [T\circ \text{vertical}_r]^*(\omega)(r);$$

or $T\circ\text{diagonal} = P_2$, $T\circ \text{horizontal}_r = R_{Q(r)^{-1}}\circ P_1$, $T\circ \text{vertical}_r = L_{P_1(r)}\circ Q$,

si bien que $P_2{}^*(\omega)(r) = P_1{}^*(R_{Q(r)^{-1}}{}^*(\omega))(r) + Q^*(L_{P_1(r)}{}^*(\omega))(r)$; d'autre part :

$L_{P_1(r)}{}^*(\omega) = \omega$ parce que ω est invariante;

$R_{Q(r)^{-1}}{}^*(\omega) = \omega$ parce que $Q(r)^{-1} \in \mathbf{S}$;

donc

□ $$P_2{}^*(\omega) = P_1{}^*(\omega) + Q^*(\omega)$$

d'où par dérivation $P_2{}^*(d\omega) = P_1{}^*(d\omega) + Q^*(d\omega)$;

nous avons vu que $Q^*(d\omega) = 0$; le critère (2,5 c) montre donc que $\mathbf{S}$ **réduit** $d\omega$, c'est-à-dire qu'il existe une unique 2-forme $\sigma_{\mathbf{X}}$ de $\mathbf{X}$ telle que

$$\Phi^*(\sigma_{\mathbf{X}}) = d\omega$$

Φ désignant la subduction de $\mathbf{G}$ sur $\mathbf{X}$:

$$\Phi(g) = g\mathbf{S};$$

d'où

$$\Phi^*(d\sigma_{\mathbf{X}}) = d[\Phi^*(\sigma_{\mathbf{X}})] = dd\omega = 0$$

ce qui entraîne $d\sigma_{\mathbf{X}} = 0$ parce que Φ est une subduction; d'où b).

C.Q.F.D.

Exemples:

(3,15)

Si $\mathbf{G}$ est un groupe de Lie, Ω_1 est le dual de l'algèbre de Lie, ρ_1 la **représentation co-adjointe**; $\sigma_{\mathbf{X}}$ est la forme symplectique à la Kirillov de l'orbite co-adjointe.

(3,16)

Soit $\mathbf{G} = \mathrm{Diff}(\mathbf{M})$, $\mathbf{M}$ étant une variété séparée connexe.

On définit une fonction différentiable sur $\mathbf{G}$ en choisissant:

- une fonction réelle α, différentiable sur $\mathbf{M}$, non constante;
- un point m où la valeur de $d\alpha$ n'est pas nulle;

et en posant:

$$\varphi(g) = \alpha(g(m)).$$

φ <u>détermine</u> une forme de Maurer-Cartan ω de $\mathrm{Diff}(\mathbf{M})$ [Cf. (3,13)]; l'orbite $\mathbf{X}$ a une difféologie de variété, et s'identifie au **fibré cotangent** de $\mathbf{M}$ privé de la section nulle; $\sigma_{\mathbf{X}}$ est la forme symplectique standard du cotangent.

(3,17) **Proposition**:

Nous dirons que ω est **nilpotente** si ω <u>est réduite par son stabilisateur</u> $\mathbf{S}$.

Alors ω descend sur $\mathbf{X}$ et définit une 1-forme $\omega_{\mathbf{X}}$ telle que :

$$\sigma_{\mathbf{X}} = d\,\omega_{\mathbf{X}}$$

Pour que ω soit nilpotente, il faut et il suffit que $\omega_{\mathbf{S}}$ soit nulle.

Démonstration: reprenons les notations de la démonstration de (3,14). Si $\omega_{\mathbf{S}} = 0$, $Q^*(\omega)$ est nul, et □ montre que $\mathbf{S}$ réduit ω.

La réciproque s'obtient en considérant une plaque quelconque Q de $\mathbf{S}$ et en choisissant :

P_1 = application constante de $\mathrm{def}(Q)$ sur e ;

$P_2 = Q$

il est clair que $P_1(r)\mathbf{S} = P_2(r)\mathbf{S} \quad \forall r$; si $\mathbf{S}$ réduit ω, le critère (2,5) indique donc que $P_1{}^*(\omega) = P_2{}^*(\omega)$; or $P_1{}^*(\omega) = 0$; donc $Q^*(\omega) = 0 \quad \forall Q$, $\omega_{\mathbf{S}} = 0$.

Dans ce cas, on a $\Phi^*(\sigma_{\mathbf{X}}) = d\omega = d\Phi^*(\omega_{\mathbf{X}}) = \Phi^*(d\omega_{\mathbf{X}})$; Φ étant une subduction, ceci entraîne $\sigma_{\mathbf{X}} = d\omega_{\mathbf{X}}$.

C.Q.F.D.

Remarque: si ω est nilpotente, $\mathbf{S}$ est <u>le plus grand sous-groupe qui réduit</u> ω [Cf. (3,12)].

Exemples:

(3,18)

Dans le cas d'un groupe de matrices, toute forme de Maurer-Cartan ω possède une fonction déterminante linéaire:

$$\varphi(g) = \mathrm{Tr}(\Omega g).$$

Si $G = GL(\mathbb{R},n)$, ω est <u>nilpotente</u> [au sens (3,17)] si et seulement si la **matrice** Ω est **nilpotente** — au sens $\Omega^n = 0$.

Si G est un groupe orthogonal, on peut déterminer Ω en la prenant dans l'algèbre de Lie; même règle alors pour déterminer le cas nilpotent.

Dans le cas $G = O(4,2)°$, on peut choisir Ω non nulle et telle que $\Omega^2 = 0$; alors X s'identifie à la **variété de Kepler**, espace régularisé des mouvements elliptiques d'un point matériel dans un champ de forces coulombien; les composantes de la forme σ_X sont les **crochets de Lagrange**; ω_X coïncide avec le "potentiel" que l'on déduit de l'existence du "**groupe viriel**" de similitudes symplectiques :

$$t \mapsto \lambda^3 t\,,\ \mathbf{r} \mapsto \lambda^2 \mathbf{r}$$

dont l'existence transparait dans la troisième loi de Kepler (voir [Souriau 83]).

(3,19)

La forme ω construite dans l'exemple (3,16) sur le groupe $\mathrm{Diff}(M)$ est <u>nilpotente</u>; la 1–forme ω_X est la **forme de Liouville**.

Dans le cas $M = S^3$, on obtient encore la variété de Kepler avec son potentiel viriel.

(3,20) **Proposition** [notations (3,14)]:

Soit $S°$ la composante neutre du groupe difféologique S; ω_0 la forme induite par ω sur $S°$; $S^\sim$ le revêtement universel de $S°$; $\omega^\sim$ l'image réciproque de ω_0 par la subduction $S^\sim \to S°$. Alors:

a) Il existe **un D–morphisme** :

$$\mathcal{A} : S^\sim \to \mathbb{R}$$

tel que

$$\omega^\sim = d\mathcal{A}.$$

b) $\mathcal{A}$ est <u>déterminé par cette propriété</u>;

c) $\mathcal{A}$ est <u>strict</u>, et plus précisément:

si ω est nilpotente , $\mathcal{A} = 0$;

sinon, $\mathcal{A}$ est une **subduction**.

Commençons par établir

(3,21) **lemme**:

Soit G un groupe difféologique <u>connexe</u>; $\mathcal{A}$ un D–morphisme de G dans $\mathbb{R}$.

Si $\mathcal{A}$ n'est pas nul, $\mathcal{A}$ est une **subduction** $G \to \mathbb{R}$.

Démonstration: supposons $\mathcal{A}$ non nul; soit g_1 tel que $\mathcal{A}(g_1) \neq 0$; A un arc de bout g_1 [Cf.(1,35)]; la fonction $\Psi = \mathcal{A} \circ A$ vérifie $\Psi(0) \neq \Psi(1)$, donc $\Psi'(c) \neq 0$; il existe un intervalle ouvert U contenant c tel que $\Psi|_U$ soit un difféomorphisme $U \to V$, V intervalle ouvert non vide. Puisque V est contenu dans le sous-groupe $\mathrm{im}(\mathcal{A})$, $\mathrm{im}(\mathcal{A}) = \mathbb{R}$, $\mathcal{A}$ est surjectif.

Si on pose

$$\varphi = A \circ [\Psi|_U]^{-1}$$

et, $\forall\, g \in G$,

$$\varphi_g(t) = g\, \varphi(t - \mathcal{A}(g)),$$

il est immédiat que φ_g est une 1–plaque de G, et que:

$$1_{\mathbb{R}} = \sup_g \mathcal{A} \circ \varphi_g$$

donc que pour toute p–plaque P de $\mathbb{R}$, les p–plaques de G: $P_g = \varphi_g \circ P$ vérifient $P = \sup_g \mathcal{A} \circ P_g$: $\mathcal{A}$ est une subduction [Cf.(1,13)].

C.Q.F.D.

Démonstration de (3,20): $\omega^\sim$, comme ω_0, est une forme de Maurer–Cartan bilatère, donc fermée; puisque $S^\sim$ est <u>simplement connexe</u> (1,33), $\omega^\sim$ est **exacte** (2,10), il existe une fonction $\mathcal{A}$ différentiable sur $S^\sim$ telle que

$$\omega^\sim = d\mathcal{A}\ ;$$

parce que $S^\sim$ est connexe, les solutions $\mathcal{A}$ de cette équation ne diffèrent que d'une constante; on peut donc déterminer $\mathcal{A}$ en imposant la condition:

$$\mathcal{A}(e) = 0;$$

pour tout $s \in S^\sim$, on a :

$$d[L_s^*(\mathcal{A})] = L_s^*(d\mathcal{A}) = L_s^*(\omega^\sim) = \omega^\sim = d\mathcal{A}\,;$$

par conséquent la fonction $L_S{}^*(\mathcal{A}) - \mathcal{A}$ est une constante dont la valeur se calcule au point e : elle vaut $\mathcal{A}(s)$; ce qui donne:

$$\mathcal{A}(s\,s') = \mathcal{A}(s) + \mathcal{A}(s') \qquad \forall\, s,\, s' \in S^{`}\ ;$$

par conséquent $\mathcal{A}$ est un **D–morphisme** $S^{`} \to \mathbb{R}$. L'unicité de $\mathcal{A}$ est évidente.

Enfin, grâce au lemme précédent, on voit que $\mathcal{A}$ est une subduction – à la seule exception du cas $\mathcal{A}=0$, qui équivaut à $d\mathcal{A}=0$, donc à $\omega^{`}=0$, ou encore à $\omega_0=0$, puisque $\omega^{`}$ est l'image réciproque de ω_0 par une subduction [Cf. (2,5)]. Or nous savons que $\omega_0=0 \iff \omega_S=0$ [Cf. (3,7)]; donc $\mathcal{A}=0 \iff \omega_S=0 \iff \omega$ nilpotente.

C.Q.F.D.

(3,22) **Exemple:**

Soit $G = GL(\mathbb{R},n)$; la fonction **trace** détermine une 1–forme de Maurer–Cartan ω qui est <u>bilatère</u>; par conséquent $S = G$. Dans ce cas $\mathcal{A}$ descend de $S^{`}$ sur S° selon :

$$\log \circ \det$$

(S° est constituée des matrices à déterminant positif).

Formes singulières

(3,23)

Soit H le noyau de la subduction $S^{`} \to S^{\circ}$; c'est un groupe abélien discret, modèle du groupe d'homotopie de S° [Cf.(1,32)]; $\mathcal{A}(H)$ est un <u>sous–groupe de $\mathbb{R}$</u>; nous dirons que ω est **singulière** si $\mathcal{A}(H)$ est <u>dense dans $\mathbb{R}$</u>.

Exemple:

(3,24)

G est le tore ordinaire $\mathbb{T}^2$; G étant commutatif, les formes invariantes sont bilatères; donc $S = S^{\circ} = G$.

Un revêtement universel est le groupe additif $\mathbb{R}^2$, avec la subduction $S^{`} \to S^{\circ}$:

$$(x,y) \mapsto (e^{ix}, e^{iy});$$

à chaque forme de Maurer–Cartan ω est associé un D–morphisme $S^{`} \to \mathbb{R}$, qui est nécessairement une forme linéaire:

$$\mathcal{A}(x,y) = ax + by$$

et qui caractérise ω ; on a évidemment:

$$\mathcal{A}(H) = 2\pi\,[\,a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}\,]$$

ω est donc **singulière** ssi a/b est **irrationnel**.

Formes entières

(3,25) [notations (3,20)] :

Nous dirons que ω est **entière** si

$$\mathcal{A}(H) \subset 2\pi\,\mathbb{Z}$$

Il est clair que:

$$\omega \text{ entière},\ n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad n\omega \text{ entière};$$

et que:

ω non singulière $\Rightarrow$ ω proportionnelle à une forme entière.

(3,26) **Proposition** :

On désigne par $\omega_{\mathbb{T}}$ la 1–forme invariante standard du tore $\mathbb{T}$:

$$\omega_{\mathbb{T}} = dz / iz\ ;$$

Les propositions suivantes sont équivalentes:

a) la forme de Maurer–Cartan ω est **entière**;

b) il existe un **caractère différentiable** χ_0 de S° tel que:

□ $\qquad \omega_0 = \chi_0{}^*(\omega_{\mathbb{T}})$.

Dans ce cas:

χ_0 est déterminée par la relation □;

χ_0 vérifie l'identité:

\$ $\qquad \chi_0(s\,s_0\,s^{-1}) = \chi_0(s_0) \qquad \forall s \in S,\ \ \forall s_0 \in S^{\circ}.$

Démonstration: – Supposons ω entière; désignons par Φ la subduction de $S^{`}$ sur $S^{\circ}$ ; le groupe d'homotopie de $S^{\circ}$ est $H = \ker(\Phi)$. Si $s, s' \in S^{`}$, alors:

$$\Phi(s)=\Phi(s') \Rightarrow s^{-1}s'\in H \Rightarrow \mathcal{A}(s^{-1}s')\in 2\pi\mathbb{Z} \Rightarrow e^{i\mathcal{A}(s)}=e^{i\mathcal{A}(s')}$$

Par conséquent $e^{i\mathcal{A}(s)}$ ne dépend de S que par $\Phi(s)$; l'application

$$\chi_0 : \Phi(s)\mapsto e^{i\mathcal{A}(s)}$$

est évidemment un <u>caractère</u> de S°, tel que:

$$\exp i\circ\mathcal{A} = \chi_0\circ\Phi$$

Utilisons (3,20): χ_0 est "nul" si $\mathcal{A}$ est nul, c'est-à-dire si ω est nilpotente; sinon $\exp i\circ\mathcal{A}$, composé de subductions, est une subduction; comme Φ aussi est une subduction, (1,13) montre que χ_0 est encore une subduction. Dans tous les cas χ_0 est strict; on peut donc tracer le diagramme commutatif D-exact:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H \arrow[r] \arrow[d] & \tilde{S} \arrow[r, "\Phi"'] \arrow[d, "\mathcal{A}"] & S^\circ \arrow[r] \arrow[d, "\chi_0"] & 0 \\
0 \arrow[r] & 2\pi\mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{R} \arrow[r, "\exp i"'] & \mathbb{T} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

qui définit χ_0.

En traduisant la relation $\tilde{\omega} = d\mathcal{A}$ (3,20), on obtient facilement:

$$\omega_0 = \chi_0^*(\omega_{\mathbb{T}})$$

— Réciproquement, soit ψ_0 un caractère différentiable de S°; posons:

$$\omega_0 = \psi_0^*(\omega_{\mathbb{T}});$$

il est immédiat que ω_0 est invariante bilatère; elle est fonctionnelle comme image réciproque d'une 1-forme fonctionnelle de $\mathbb{T}$ [une fonction déterminante de $\omega_{\mathbb{T}}$ est la "partie imaginaire"]; le D-morphisme $\psi_0\circ\Phi$: $\tilde{S}\to\mathbb{T}$ vérifie:

$$[\psi_0\circ\Phi]^*(\omega_{\mathbb{T}}) = \tilde{\omega};$$

il se relève au revêtement universel $\mathbb{R}$ de $\mathbb{T}$, parce que $\tilde{S}$ est <u>simplement connexe</u> (1,33); ce qui s'écrit:

$$\psi_0\circ\Phi = \exp i\circ\alpha,$$

α étant un D-morphisme $\tilde{S}\to\mathbb{R}$; en remplaçant dans la formule précédente, il vient:

$$\tilde{\omega} = [\exp i\circ\alpha]^*(\omega_{\mathbb{T}}) = \alpha^*(\exp i^*(\omega_{\mathbb{T}}));$$

or $\exp i^*(\omega_{\mathbb{T}})$ est la forme standard de $\mathbb{R}$, et son image réciproque par α n'est autre que $d\alpha$; donc $d\alpha$ coïncide avec $d\mathcal{A}$; comme $\alpha(e)=0$, nous savons que $\alpha=\mathcal{A}$, donc que $\psi_0\circ\Phi =$

$\exp i\circ\mathcal{A} = \chi_0\circ\Phi$; d'où $\chi_0=\psi_0$: χ_0 est bien déterminé par $\square$.

Nous savons que la forme ω_S est invariante bilatère (3,14 a), donc que

$$\mathrm{int}(s)^*(\omega_S) = \omega_S,$$

en posant:

$$\mathrm{int}(s)(s') = s\,s'\,s^{-1} \qquad \forall s,s'\in S;$$

$\mathrm{int}(s)$ est un D-morphisme $S\to S$.

Puisque S° est distingué dans S (1,31), $\mathrm{int}(s)$ induit sur S° un morphisme de groupe, que nous noterons $\mathrm{ext}(s)$; en notant I l'induction de S° dans S, on a:

$$I\circ\mathrm{ext}(s) = \mathrm{int}(s)\circ I;$$

cette formule montre que $\mathrm{ext}(s)$ est différentiable, du fait que I est une induction [Cf.(1,16)], et que:

$$\mathrm{ext}(s)^*(I^*(\omega_S)) = I^*(\mathrm{int}(s)^*(\omega_S));$$

or $I^*(\omega_S)=\omega_0$ et $\mathrm{int}(s)^*(\omega_S)=\omega_S$, si bien que:

$$\mathrm{ext}(s)^*(\omega_0)=\omega_0;$$

par conséquent le D-morphisme

$$\psi_0 = \chi_0\circ\mathrm{ext}(s)$$

vérifie $\psi_0^*(\omega_{\mathbb{T}}) = \mathrm{ext}(s)^*(\chi_0^*(\omega_{\mathbb{T}})) = \mathrm{ext}(s)^*(\omega_0) = \omega_0 = \chi_0^*(\omega_{\mathbb{T}})$: la caractérisation de χ_0 par la relation $\square$ montre que $\psi_0=\chi_0$, soit \$.

C.Q.F.D

Nous avons déjà déterminé les groupes qui réduisent ω dans le cas nilpotent [Cf.(3,17)]; voici maintenant le cas entier:

(3,27) **Théorème:**

On suppose ω <u>entière et non nilpotente</u>; on désigne par Σ_0 le noyau du caractère χ_0 (3,26):

$$0 \to \Sigma_0 \to S^\circ \xrightarrow[\chi_0]{} \mathbb{T} \to 0$$

Pour qu'un sous-groupe K réduise ω, il faut et il suffit que:

$$K\subset S \quad\text{et}\quad K^\circ\subset\Sigma_0$$

[K°: composante neutre de K].

Démonstration: nous savons déjà que la première condition est nécessaire (3,12); supposons donc $K \subset S$.

Comme en (3,17), en utilisant le critère (2,5c) des invariants intégraux et la formule □ de la démonstration de (3,14), on constate que:

$$K \text{ réduit } \omega \quad \Longleftrightarrow \quad \omega_K = 0\,,$$

ω_K étant la forme induite par ω sur le sous-groupe K (: l'image réciproque de ω par l'induction de K dans $\mathfrak{G}$). Nous savons d'autre part [Cf. (3,7)] que $\omega_K = 0$ est équivalent à

$$\omega_{K^\circ} = 0.$$

D'autre part S° est le plus grand sous-groupe connexe de S (1,31) et contient donc K°; l'induction $K^\circ \to S$ se factorise via S°:

$$K^\circ \to S^\circ \to S$$

et par conséquent $\omega_{K^\circ} = [\omega_0]_{K^\circ}$, si bien que le critère de réduction peut encore s'écrire:

$$[\,\chi_0{}^*(\omega_{\mathbb{T}})\,]_{K^\circ} = 0$$

en utilisant le résultat précédent (3,26).

a) Supposons cette condition réalisée; soit $k \in K^\circ$. Puisque K° est connexe, il existe un <u>arc</u> A de K° dont le <u>bout</u> est égal à k ; A est une 1-plaque de K° et vérifie donc:

$$[\,\chi_0{}^*(\omega_{\mathbb{T}})\,](A) = 0$$

ce qui s'écrit aussi

$$[\,\chi_0 \circ A\,]^*(\omega_{\mathbb{T}}) = 0$$

$\chi_0 \circ A$ est une fonction différentiable $\mathbb{R} \to \mathbb{T}$ pour laquelle dz/iz est nul – donc une constante; par suite $\chi_0(k) = [\chi_0 \circ A](1) = [\chi_0 \circ A](0) = \chi_0(e)$: par conséquent $k \in \ker(\chi_0)\ [= \Sigma_0]$, et donc

$$K^\circ \subset \Sigma_0$$

b) Réciproquement, supposons $K^\circ \subset \Sigma_0$.

Notons I l'induction de Σ_0 dans S°; par définition,

$$[\chi_0{}^*(\omega_{\mathbb{T}})]_{\Sigma^\circ} = I^*(\chi_0{}^*(\omega_{\mathbb{T}}))$$

ce qui vaut $[\chi_0 \circ I]^*(\omega_{\mathbb{T}})$, donc 0, puisque $\chi_0 \circ I$ a la valeur constante 1. $\chi_0{}^*(\omega_{\mathbb{T}})$ induit donc 0 sur Σ_0 et, a fortiori, sur K° ; K réduit donc ω.

C.Q.F.D.

Formes quantiques

(3,28) **Théorème**:

Soit ω une 1-forme de Maurer-Cartan, <u>entière et non nilpotente</u>.

a) le noyau Σ_0 du caractère χ_0 [Cf.(3,25)] est un <u>sous-groupe distingué</u> de S.

b) Le diagramme commutatif D-exact:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \Sigma_0 \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & S^\circ \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\chi_0"'] & S \arrow[r] \arrow[d, "p"] & S/S^\circ \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r, dashed] & \mathbb{T} \arrow[r, dashed, "\alpha"'] \arrow[d] & S/\Sigma_0 \arrow[r, dashed] \arrow[d] & S/S^\circ \arrow[r, dashed] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

fait du groupe quotient

$$S/\Sigma_0$$

une **D-extension centrale** de S/S° (le <u>groupe des composantes</u> de S) par le **tore** $\mathbb{T}$.

c) Nous dirons que ω est une **forme quantique** si cette extension est **triviale**; pour cela il faut et il suffit qu'il existe un **caractère** χ de S qui **prolonge** χ_0. Alors:

χ est une **subduction** de S sur $\mathbb{T}$;

$\omega_S = \chi^*(\omega_{\mathbb{T}})$ [notation (3,25)].

Nous dirons que χ est une **quantification** de ω.

d) Si ω est quantique, on passe de l'une de ses quantifications χ à toutes les autres par la substitution:

$$\chi \to \chi' \;, \qquad \chi'(s) = \chi(s)\,\kappa(sS^\circ)$$

κ étant un caractère arbitraire du groupe des composantes S/S°.

e) Soit $H = S/S^\circ$. On choisit dans chaque composante h de S un représentant $\tau(h)$:

$$h = \tau(h)\,S^\circ;$$

il existe alors une application

$$\theta : H \times H \to \mathbb{T}$$

définie par:

$$\theta(sS^\circ, s'S^\circ) = \chi_0\left(\tau(ss'S^\circ)\,\tau(s'^{-1}S^\circ)\,\tau(s^{-1}S^\circ)\right) \quad \forall\, s, s' \in S\,;$$

θ vérifie l'identité des <u>2-cocycles</u>:

$$\theta(h, h'h'')\;\theta(h', h'') = \theta(h, h')\;\theta(hh', h'') \qquad \forall\, h, h', h'' \in H\,;$$

le <u>cobord</u> δt de toute application $t : H \to \mathbb{T}$:

$$\delta t(h, h') = \frac{t(hh')}{t(h)\;t(h')}$$

est aussi un 2-cocycle; la classe de cohomologie de θ ne dépend que de ω (et pas du choix de τ); pour que ω soit **quantique**, il faut et il suffit que cette classe soit **nulle**.

Démonstration : la formule

$$\$ \qquad \chi_0(s\, s_0\, s^{-1}) = \chi_0(s_0) \qquad \forall s \in S\,,\; s_0 \in S^\circ$$

(3,26) montre que $\Sigma_0 = \ker(\chi_0)$ est distingué dans S; ce qui permet de construire le diagramme (b) en appliquant le théorème (1,30) : S/Σ_0 est une D-extension de S/S° par le tore $\mathbb{T}$; la formule $ exprime alors exactement que cette extension est centrale; d'où a) et b).

Nous sommes dans les conditions de (1,29) : une D-extension centrale d'un groupe discret par un groupe commutatif. On sait alors qu'une trivialisation peut se caractériser par un morphisme α', inverse-à-gauche de l'induction α (voir diagramme), et que α' est automatiquement une subduction de S/Σ_0 sur $\mathbb{T}$.

Si on pose $\chi = \alpha'\circ p$, χ est une subduction de S sur $\mathbb{T}$ (Cf. (1,13)), et la relation $\alpha'\circ\alpha = 1_{\mathbb{T}}$ donne $\chi\circ i = \chi_0$ (parce que $p\circ i = \alpha\circ\chi_0$) : χ est un caractère qui prolonge χ_0.

Réciproquement, si $\chi\circ i = \chi_0$, $p(s) = p(s') \Rightarrow s^{-1}s' \in \Sigma_0 \Rightarrow \chi_0(s^{-1}s') = 1 \Rightarrow \chi(s^{-1}s') = 1 \Rightarrow \chi(s) = \chi(s')$; il existe donc un "multiplicateur de Lagrange" α', morphisme de groupe $S/\Sigma_0 \to \mathbb{T}$, tel que $\chi = \alpha'\circ p$; on a $\chi_0 = \chi\circ i = \alpha'\circ p\circ i = \alpha'\circ\alpha\circ\chi_0$; puisque χ_0 est surjectif, $\alpha'\circ\alpha = 1_{\mathbb{T}}$; α' est inverse-à-gauche de α, donc une subduction; donc aussi $\chi = \alpha'\circ p$.

La 1-forme de S: $\chi^*(\omega_{\mathbb{T}})$ est visiblement invariante; sur S° elle induit $i^*(\chi^*(\omega_{\mathbb{T}})) = \chi_0^*(\omega_{\mathbb{T}}) = \omega_0$; ω_S a les mêmes propriétés; il résulte de (3,7) que $\chi^*(\omega_{\mathbb{T}}) = \omega_S$; d'où c).

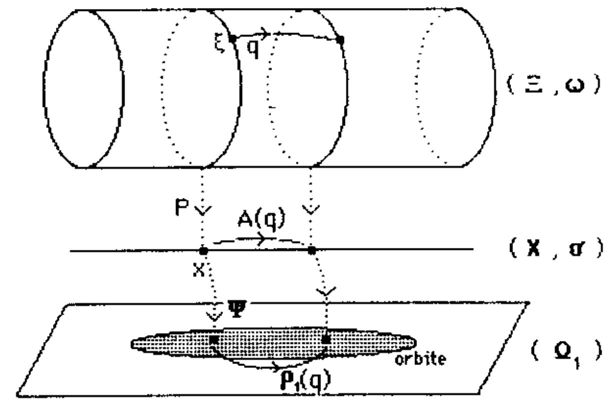
Enfin e), puis d), ne sont que spécifications des résultats (1,29).

C.Q.F.D.

quatrième partie:

espaces quantiques

Nous allons définir un espace préquantique (resp. quantique) Ξ au moyen d'un certain nombre d'axiomes Q_1 à Q_4 (resp. Q_1 à Q_5), que nous accompagnerons de quelques commentaires.



(4,1) **Cas préquantique**

Q_1 | Ξ est un espace fibré principal, de groupe structural $\mathbb{T}$

Notons $z(\xi)$ l'action de $z \in \mathbb{T}$ sur un point $\xi \in \Xi$; par hypothèse [Cf.(1,37)]:

$$(z,\xi) \mapsto (z(\xi), \xi)$$

est une induction de $\mathbb{T} \times \Xi$ dans $\Xi \times \Xi$; les orbites de $\mathbb{T}$ sont des "cercles", c'est-à-dire difféomorphes à $\mathbb{T}$; nous noterons $\mathbf{X}$ la base du fibré et P la subduction de Ξ sur $\mathbf{X}$.

Q_2 | Ξ est muni d'une 1-forme ω invariante par l'action de $\mathbb{T}$.

Cette invariance s'exprime par la formule:

$$z^*(\omega) = \omega \qquad \text{pour tout } z \in \mathbb{T}$$

La "structure préquantique" de Ξ sera définie par la forme ω et par la fibration, qui seront astreints aux axiomes Q_3–Q_4 suivants:

Q_3 | Soit $\mathbf{Q}$ l'ensemble des <u>automorphismes de la structure préquantique</u>, c'est-à-dire des difféomorphismes q qui vérifient:

$$q^*(\omega) = \omega$$

$$q \circ z = z \circ q \qquad \text{pour tout } z \in \mathbb{T}$$

On supposera que $\mathbf{Q}$ est <u>groupe générateur</u> de Ξ, qui est donc un <u>espace homogène</u>.

Il est clair que $\mathbf{Q}$ est bien un groupe de difféomorphismes, donc un groupe difféologique; l'hypothèse Q_3 revient donc à supposer que, pour un $\xi \in \Xi$ (resp. pour tout $\xi \in \Xi$), l'application:

$$q \mapsto q(\xi)$$

est une subduction de $\mathbf{Q}$ sur Ξ [Cf.(1,36), (1,26), (1,14)].

Si les axiomes Q_1–Q_4 sont vérifiés, nous dirons que $\mathbf{Q}$ est le groupe des **quantomorphismes** de Ξ, et nous le noterons:

$$\mathbf{Quant}(\Xi).$$

Il résulte de Q_3 que la 1-forme de $\mathbb{T}$:

$$[z \mapsto z(\xi)]^*(\omega)$$

est <u>indépendante</u> de ξ; de Q_2 qu'elle est invariante sur le groupe de Lie $\mathbb{T}$, donc proportionnelle à la forme standard

$$\omega_{\mathbb{T}} = dz/iz;$$

nous la supposerons <u>non nulle</u> et nous la normaliserons en prenant le coefficient de proportionnalité égal à 1:

Q_4 | $$[z \mapsto z(\xi)]^*(\omega) = \omega_{\mathbb{T}} \qquad \text{pour tout } \xi \in \Xi$$

(4,2) **Cas quantique**

Soit Ξ un espace préquantique. Du fait que les éléments du groupe difféologique $\mathbf{Q}$ préservent la forme ω, il résulte que pour tout ξ, la 1-forme définie sur $\mathbf{Q}$ par:

$$[q \mapsto q(\xi)]^*(\omega)$$

est **invariante** [Cf. (3,5)]; un calcul simple montre qu'elle ne dépend de ξ que par sa projection:

$$x = P(\xi)$$

sur la base; il existe donc une application Ψ définie par:

$$\Psi(x) = [q \mapsto q(\xi)]^*(\omega),$$

qui s'appellera **application moment**, et qui envoie l'espace difféologique $\mathbf{X}$ dans l'espace vectoriel Ω_1 des 1-formes invariantes de $\mathbf{Q}$. Nous dirons que Ξ est **quantique** si:

Q_5 | L'application Ψ est injective.

(4,3) **Théorème**:

Soit Ξ un espace préquantique [notations (4,1)].

1) Il existe sur la base $\mathbf{X}$ une 2-forme σ, caractérisée par la formule:

$$P^*(\sigma) = d\omega,$$

et qui est fermée:

$$d\sigma = 0.$$

2) Il existe une D-action A de $\mathrm{Quant}(\Xi)$ sur $\mathbf{X}$, caractérisée par la relation d'équivariance:

$$A(q)\circ P = P\circ q \qquad \forall q \in \mathrm{Quant}(\Xi),$$

qui envoie Quant(Ξ) dans le groupe Sympl($\mathbf{X}$) des automorphismes de σ.

3) L'application moment Ψ et l'action A sont reliées par les relations:

$$\Psi(\,A(q)(x)\,) \;=\; \rho_1(q)\,(\,\Psi(x)\,) \qquad \forall\, q \in \mathrm{Qant}(\Xi),\ \forall x \in \mathbf{X}$$

[ρ_1: représentation linéaire définie en (3,3)] ;

Ψ applique $\mathbf{X}$ sur une orbite de la représentation ρ_1;

$$d\,[\Psi(x)] = [q \mapsto A(q)(x)]^*(\sigma) \qquad \forall x \in \mathbf{X}\ ;\quad q \in \mathrm{Qant}(\Xi)$$

Démonstration: Soient Φ_1 et Φ_2 deux p-plaques de Ξ qui vérifient:

$$P\circ\Phi_1 = P\circ\Phi_2$$

et sont donc définies sur un même ouvert $\mathbf{U}$ de $\mathbb{R}^p$.

L'application définie sur $\mathbf{U}$ par

$$r \mapsto (\Phi_1(r),\ \Phi_2(r))$$

est différentiable et prend ses valeurs dans l'image de l'induction

$$(z,\xi) \mapsto (z(\xi),\xi)$$

[Cf. (4,1), $\mathbf{Q_1}$]; il résulte de (1,16) qu'il existe

$$\theta \in D(\mathbf{U},\mathbb{T})$$

tel que :

$$\Phi_2(r) = \theta(r)(\Phi_1(r)) \qquad \forall r \in \mathbf{U}\,.$$

Soit alors T la 2p-plaque de $\mathbf{U}\times\mathbf{U}$ définie par:

$$T(r,s) = \theta(r)(\Phi_1(s))\,.$$

En posant, comme dans la démonstration de (3,14):

$$(r,s) = \mathrm{horizontal}_s(r) = \mathrm{vertical}_r(s)$$

$$(r,r) = \mathrm{diagonal}(r)$$

un calcul simple montre qu'on a:

$$\mathrm{diagonal}^*(\alpha)(r) \;=\; \mathrm{horizontal}_r{}^*(\alpha)(r) + \mathrm{vertical}_r{}^*(\alpha)(r) \qquad \forall\, r \in \mathbf{U}$$

pour toute 1-forme α de $\mathbf{U}\times\mathbf{U}$ – en particulier donc pour $\alpha = T^*(\omega)$; par conséquent :

$$[T\circ\mathrm{diagonal}]^*(\omega)(r) \;=\; [T\circ\mathrm{horizontal}_r]^*(\omega)(r) + [T\circ\mathrm{vertical}_r]^*(\omega)(r);$$

or

$$T\circ\mathrm{diagonal} = \Phi_2\ ;$$

$$T\circ\mathrm{horizontal}_r = [z \mapsto z(\Phi_1(r))]\circ\theta,$$

d'où grâce à $\mathbf{Q_4}$:

$$[T\circ\mathrm{horizontal}_r\,]^*(\omega) = \theta^*(\omega_{\mathbb{T}});$$

$$T\circ\mathrm{vertical}_r = \theta(r)\circ\Phi_1,$$

d'où grâce à $\mathbf{Q_2}$:

$$[T\circ\mathrm{vertical}_r]^*(\omega) = \Phi_1{}^*(\omega);$$

et par conséquent:

$$\Phi_2{}^*(\omega) = \theta^*(\omega_{\mathbb{T}}) + \Phi_1{}^*(\omega)$$

d'où par dérivation:

$$\Phi_2{}^*(d\omega) - \Phi_1{}^*(d\omega) \;=\; \theta^*(d\omega_{\mathbb{T}}) = 0;$$

il suffit alors d'appliquer le critère (2,5) des invariants intégraux pour montrer l'existence, sur l'image $\mathbf{X}$ de la subduction P, d'une unique 2-forme σ telle que:

$$P^*(\sigma) = d\omega;$$

par dérivation on a $P^*(d\sigma) = dd\omega = 0$, d'où

$$d\sigma = 0$$

grâce à l'injectivité de P^* (2,5); d'où 1).

– Les parties 2) et 3) se vérifient immédiatement **C.Q.F.D.**

Exemples d'espaces quantiques

(4,4)

Soient: $\mathbf{G}$ un groupe difféologique;

ω une forme quantique de $\mathbf{G}$;

χ une quantification de ω [notations (3,28)].

1) Le groupe

$$\Sigma = \ker(\chi)$$

réduit ω, qui descend sur une forme ω_Ξ de l'espace difféologique Ξ:

$$\Xi = \mathbf{G}/\Sigma$$

2) Il existe une action de $\mathbb{T}$ sur Ξ, définie par

$$\chi(s)(g\Sigma) = gs\Sigma \qquad \forall s \in \mathbf{S}\ ,\ \forall g \in \mathbf{G}$$

qui fait de Ξ un espace fibré principal;

3) cette action et la forme ω_Ξ font de Ξ un **espace quantique**, dont la base s'identifie à l'orbite de ω:

$$X = G/S$$

par la subduction:

$$P : \quad g\Sigma \mapsto gS$$

Démonstration : La composante neutre Σ° de Σ est un sous-groupe connexe de S, donc contenu dans la composante neutre S° ; puisque χ est un prolongement de χ_0 à S, on a donc pour tout $\sigma \in \Sigma^\circ$: $\chi_0(\sigma) = \chi(\sigma) = 1$; donc $\Sigma^\circ \subset \ker(\chi_0) = \Sigma_0$; Σ vérifie les conditions du théorème (3,27) et réduit donc ω ; d'où 1).

Σ est distingué dans S, et S/Σ est D-isomorphe à $\mathbb{T}$; ceci de deux façons, puisque $\mathbb{T}$ est commutatif et qu'on peut composer avec le D-automorphisme de $\mathbb{T}$:

$$z \mapsto z^{-1};$$

le résultat (1,38) peut donc se transcrire en 2), et montre aussi que la base X du fibré Ξ s'identifie à G/S (c'est-à-dire à l'orbite de ω dans la représentation ρ_1) par la subduction:

$$P: \quad g\Sigma \mapsto gS$$

La définition de ω_Ξ s'écrit:

$$[g \mapsto g\Sigma]^*(\omega_\Xi) = \omega \; ;$$

pour tout $z \in \mathbb{T}$, choisissons $s \in S$ tel que $\chi(s) = z$; on a :

$$[g \mapsto g\Sigma]^*(z^*(\omega_\Xi)) = [g \mapsto gs\Sigma]^*(\omega_\Xi) = \{[g \mapsto g\Sigma] \circ R_{s^{-1}}\}^*(\omega_\Xi) = R_{s^{-1}}{}^*(\omega) = \omega$$

(cette dernière égalité par définition du groupe S) ; les formes $z^*(\omega_\Xi)$ et ω_Ξ ont même image réciproque par la subduction $g \mapsto g\Sigma$, et sont donc égales ; l'axiome Q_2 des espaces (pré)quantiques est vérifié.

L'action standard α de G sur l'espace homogène $\Xi = G/\Sigma$:

$$\alpha(g)(g'\Sigma) = gg'\Sigma$$

préserve ω [Cf. (3,11)] ; puisque :

$[\alpha(g) \circ \chi(s)](g'\Sigma) = gg's\Sigma = [\chi(s) \circ \alpha(g)](g'\Sigma)$, $\alpha(g)$ appartient au groupe Q (notations Q_3):

$$\alpha(G) \subset Q \subset \mathrm{Diff}(\Xi);$$

par construction, $\alpha(G)$ est générateur de l'espace homogène Ξ ; donc aussi le groupe intermédiaire Q [Cf. (1,36)] ; l'axiome Q_3 est vérifié.

Comme conséquence de Q_3, nous avons vu en (4,1) que l'image réciproque:

$$[z \mapsto z(\xi)]^*(\omega_\Xi)$$

est une 1-forme du tore $\mathbb{T}$ qui est indépendante du choix de $\xi \in G/\Sigma$; pour établir l'axiome Q_4, il suffit donc de montrer qu'elle est égale à $\omega_{\mathbb{T}}$ pour $\xi = \Sigma$.

Désignons par I l'induction de S dans G ; il est immédiat que:

$$[g \mapsto g\Sigma] \circ I = [z \mapsto z(\Sigma)] \circ \chi$$

donc que

$$\{[g \mapsto g\Sigma] \circ I\}^*(\omega_\Xi) = \{[z \mapsto z(\Sigma)] \circ \chi\}(\omega_\Xi);$$

le premier membre de cette égalité vaut $I^*(\omega) = \omega_S$ [notation (3,14)], soit encore $\chi^*(\omega_{\mathbb{T}})$ d'après (3,28) ; puisque le second membre est égal à $\chi^*([z \mapsto z(\Sigma)]^*(\omega_\Xi))$ et que χ est une subduction (3,28), le théorème (2,5) fournit l'égalité cherchée :

$$\omega_{\mathbb{T}} = [z \mapsto z(\Sigma)]^*(\omega_\Xi)$$

Pour tout $\gamma \in G$, on vérifie que:

$$[g \mapsto g\Sigma] \circ R_{\gamma^{-1}} = [q \mapsto q(\gamma^{-1}\Sigma)] \circ \alpha \; ,$$

α désignant l'action de G sur Ξ à valeurs dans Q ; en prenant l'image réciproque de ω_Ξ par les deux membres et en utilisant la définition du moment Ψ :

$$[q \mapsto q(\gamma\Sigma)]^*(\omega_\Xi) = \Psi(P(\gamma\Sigma)) = \Psi(\gamma S)$$

on trouve la formule :

$$R_{\gamma^{-1}}{}^*(\omega) = \alpha^*(\Psi(\gamma S))$$

d'où dérive:

$$\Psi(\gamma' S) = \Psi(\gamma S) \Rightarrow R_{\gamma'^{-1}}{}^*(\omega) = R_{\gamma^{-1}}{}^*(\omega) \Rightarrow R_{\gamma'^{-1}\gamma}{}^*(\omega) = \omega \iff \gamma'^{-1}\gamma \in S$$

$\Rightarrow \gamma S = \gamma' S$; Ψ est injectif, l'axiome Q_5 est vérifié.

C.Q.F.D.

(4,5)

Soit X une variété séparée connexe, munie d'une 2-forme symplectique σ.

Soit $2n$ la dimension de X (nécessairement paire).

Si la classe de cohomologie entière de σ est nulle, la variété X est dite "quantifiable", et on peut construire une variété Ξ, de dimension $2n+1$, <u>fibrée principale en cercles</u> au dessus de X ; Ξ est munie d'une <u>connexion</u> caractérisée par une 1-forme ω ; ω est une <u>forme de contact</u> ; la fibration et la forme ω vérifient les axiomes Q_1, Q_2, Q_4

ci-dessus; l'image réciproque de σ par la projection P coïncide avec $d\omega$.

En fait, les axiomes Q_3 et Q_5 sont eux aussi vérifiés, Ξ est un **espace quantique** au sens ci-dessus;

de plus Ξ peut se construire **par l'algorithme précédent** (4,4), à partir du groupe:

$$G = \mathrm{Quant}(\Xi),$$

de la forme de Maurer-Cartan:

$$\omega_0 = \Psi(x_0) \quad [x_0 = P(\xi_0) \text{ arbitraire dans } \Xi],$$

et de la quantification χ de ω_0 définie par:

$$\chi(s)(\xi_0) = s(\xi_0) \qquad \forall s \in S \qquad (S : \text{stabilisateur de } \omega_0).$$

– La vérification de ces résultats utilise des techniques étrangères au présent travail; nous ne donnerons ici que des indications.

Soit F un "sous-groupe à un paramètre" de G – c'est-à-dire un D-morphisme $\mathbb{R} \to G$; $F^*(\Psi(x))$ est une 1-forme invariante de $\mathbb{R}$, que l'on peut écrire:

$$h(x)\ \omega_{\mathbb{R}}$$

$\omega_{\mathbb{R}}$ étant la 1-forme standard "dt" de la droite; la fonction h est différentiable sur X ; c'est l'**hamiltonien** associé à F.

Dans l'autre sens, il suffit que h soit une fonction différentiable à support compact sur X pour que h soit un hamiltonien; on le montre en utilisant le théorème d'existence, d'unicité et de différentiabilité des solutions des équations différentielles sur une variété séparée – ainsi que les formules de Cartan relatives aux invariants intégraux.

Le fibré Ξ est nécessairement localement trivial; autour de tout point ξ; le théorème de Darboux permet de construire un système de $2n+1$ hamiltoniens vérifiant localement les relations de commutation canoniques – qui donnent par intégration une partie de G agissant transitivement sur un voisinage de ξ; du fait que Ξ est connexe, l'action de G est donc transitive. On montre que G est générateur par une adaptation simple du résultat de Donato rappelé plus haut (3,5); soit Q_3.

Soient x_0 et x_1 deux points de X différents. Il existe un hamiltonien h, à support compact, qui sépare ces deux points; le morphisme F associé vérifie alors:

$$\Psi(x_0)(F) \neq \Psi(x_1)(F),$$

ce qui montre l'injectivité de Ψ, c'est-à-dire l'axiome Q_5: Ξ est quantique.

Choisissons ensuite une fonction α différentiable sur Ξ, telle que $d\alpha$ coïncide avec ω en un point ξ_0 au dessus de x_0, et posons:

$$\varphi(g) = \alpha(g(\xi_0));$$

on constate que ω_0 coïncide avec $d\varphi$ à l'origine, donc que ω_0 est une forme de Maurer-Cartan [Cf. (3,13)]; grâce à Q_6, le stabilisateur S de ω_0 dans la représentation ρ_1 est égal au stabilisateur de x_0 dans l'action de G sur X; il en résulte l'existence d'un caractère χ de S caractérisé par:

$$\chi(s)(\xi_0) = s(\xi_0) \qquad \forall s \in S$$

qui constitue une quantification de ω_0, au sens (3,28); G, ω_0, χ engendrent l'espace quantique Ξ par l'algorithme précédent (4,4).

(4,6)

Une variante consiste à remplacer, pour cet usage, le groupe G par le revêtement universel $G^\sim$ de sa composante neutre – dont l'action canonique sur Ξ est encore génératrice parce que Ξ est connexe [Cf. (1,40)]; nous savons que les diverses quantifications de la forme ω_0 sont associées aux divers caractères du groupe S/S_0 des composantes de S (3,28) ; donc, grâce à (1,40), au groupe d'homotopie de la variété symplectique X ; un résultat connu montre alors que les diverses quantifications **de la variété X** (au sens de la quantification géométrique) sont obtenues par ces diverses quantifications **de la forme** ω_0 [au sens (3,28)] – ceci en partant d'un groupe générateur unique $G^\sim$.

(4,7)

Soit Ξ un espace préquantique dont la difféologie est celle d'une variété séparée.

X, quotient de Ξ par un feuilletages à fibres compactes, est aussi une variété. La 2-forme σ n'est pas nécessairement symplectique, mais, à cause de l'homogénéité, son noyau $\ker(\sigma)$ a une dimension constante; puisque $d\sigma=0$, $\ker(\sigma)$ est une distribution intégrable, on dit que σ est <u>présymplectique</u>.

Un calcul assez élémentaire montre que le **moment** $\Psi(x)$ est **constant sur les feuilles** de $\ker(\sigma)$; et plus précisément que les **composantes** des sous- espaces

$$\Psi(x) = \mathrm{Cte}$$

sont les **feuilles** de $\ker(\sigma)$.

Donnons deux cas particuliers de ce résultat:

- Si Ξ est non seulement préquantique, mais **quantique** (axiome $\mathbf{Q_5}$), **X** est non seulement présymplectique, mais **symplectique**.
- Il se trouve que certains **systèmes dynamiques** fondamentaux peuvent se modéliser par une variété préquantique Ξ, dont la base **X** est l' "espace d'évolution" (voir **Souriau 1969**); le feuilletage $\ker(\sigma)$ définit les **équations d'évolution**; le moment $\Psi(x)$ est donc une **constante du mouvement**. Il s'agit donc de l'un des aspects du **théorème de Noether** – qui est ici complété par une réciproque.

Références du texte

Donato (Paul): Revêtements et groupe fondamental des espaces difféologiques homogènes (thèse de Doctorat), Preprint CPT, Marseille (1984)

Donato (Paul): Revêtements des quantomorphismes de l'oscillateur harmonique; Journal of Geometry and Physics, 1985

Donato (Paul), Iglesias (Patrick): Exemples de groupes différentiels: flots irrationnels sur le tore, Preprint CPT-83 P.1524, Marseille (1983); CRAS t.301, série I, n°4 (1985)

Iglesias (Patrick): Difféologie d'espace singulier et petits diviseurs. Preprint CPT-85/P1803 (1985)

Iglesias (Patrick): Fibrations difféologiques et homotopie (thèse de Doctorat) Preprint CPT, Marseille (1985)

Souriau (Jean-Marie): Structure des systèmes dynamiques, Dunod, Paris (1969)

Souriau (Jean-Marie): Groupes différentiels, Springer Lecture Notes in Mathematics 836, pp.91-128 (1980)

Souriau (Jean-Marie): Groupes différentiels et physique mathématique, in "Feuilletages et quantification géométrique", pp.73-119., Coll. Travaux en cours, Ed. Hermann, Paris (1984)